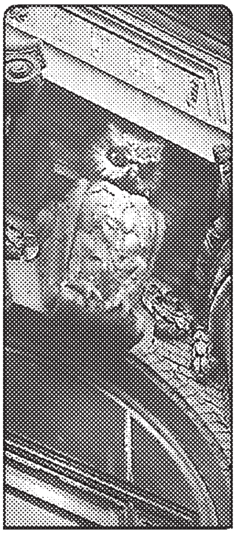

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МАТЕМАТИКА

УДК 512

К ТЕОРЕМЕ ЧЕНГА. III

С. Ю. Антонов, А. В. Антонова

Антонов Степан Юрьевич, старший преподаватель кафедры высшей математики, Казанский государственный энергетический университет, Россия, 420066, Казань, Красносельская, 51, antonovst-vm@rambler.ru

Антонова Алина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Казанский государственный энергетический университет, Россия, 420066, Казань, Красносельская, 51, antonovakazan@rambler.ru

В данной статье рассмотрены различные полилинейные многочлены типа Капелли, принадлежащие свободной ассоциативной алгебре $F\{X \cup Y\}$ над произвольным полем F, порожденной счетным множеством $X \cup Y$. Найдены формулы, выражающие коэффициенты многочлена Ченга $\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$. Доказано, что если характеристика поля F не равна двум, то многочлен $\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ может быть различными способами представлен в виде суммы двух следствий стандартного многочлена $S^-(\bar{x})$. В статье приведено разложение многочлена Ченга $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$, отличное от уже известного. Кроме того, найдена связь между многочленами $\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ и $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$. В работе получены некоторые следствия стандартного многочлена, представляющие интерес для алгебр с полиномиальными тождествами. В частности, приведено новое тождество минимальной степени для нечетной компоненты Z_2-градуированной матричной алгебры $M^{(m,m)}(F)$.

Ключевые слова: T-идеал, стандартный многочлен, многочлен Капелли.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-128-143

Окончание (2015. Т. 15, вып. 3. С. 247–251; 2017. Т. 17, вып. 2. С. 127–137).

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является продолжением работы [1]. В ней мы находим явный вид многочлена

$$\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \mathscr{R}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_t|w_1, \ldots, w_u) =$$
$$= \sum_{\bar{a}\in B_0} \sum_{\pi\in S_m} \sum_{\tau\in S_u} \operatorname{sgn}\mu\, x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(a_1)} w_{\tau(1)} \times$$
$$\times x_{\pi(a_1+1)} \cdots x_{\pi(a_1+a_2)} w_{\tau(2)} x_{\pi(a_1+a_2+1)} \cdots x_{\pi(a_1+\ldots+a_u)} w_{\tau(u)},$$

устанавливаем связь между $\mathscr{R}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ и

$$\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{n}\in B_1}\sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in S_u} \operatorname{sgn}\mu\, x_{\pi(1)}\cdots x_{\pi(n_1)}w_{\tau(1)}x_{\pi(n_1+1)}\cdots x_{\pi(n_1+n_2)}w_{\tau(2)}\times$$
$$\times x_{\pi(n_1+n_2+1)}\cdots x_{\pi(n_1+\ldots+n_u)}w_{\tau(u)}x_{\pi(n_1+\ldots+n_u+1)}\cdots x_{\pi(n_1+\ldots+n_{u+1})},$$

приводим некоторые следствия стандартного многочлена $S_m^-(x_1,\ldots,x_m)$ и даем некоторые приложения к PI-алгебрам. Все обозначения, введенные в работе [1], сохраняют свой смысл и в части III.

1. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОГОЧЛЕНА $\mathscr{R}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$

Пусть $v = z_{i_{\pi(1)}}\cdots z_{i_{\pi(r)}}$, где $i_1 < \ldots < i_r$, $\pi\in S_r$, — произвольный моном алгебры $F\{Z\}$, $|v|$ — длина монома v, $\operatorname{sgn} v = \operatorname{sgn}\pi$. Представим каким-либо образом слово v в виде произведения его непустых подслов $v_1\cdots v_n$ $(n\leqslant r)$ и по определению положим $\bar{v} = (v_1\ldots v_n)$, $\bar{v}' = (|v_1|\ldots|v_n|)$, $\sigma v = v_{\sigma(1)}\cdots v_{\sigma(n)}$, $\sigma\bar{v} = (v_{\sigma(1)}\ldots v_{\sigma(n)})$, $\sigma\bar{v}' = (|v_{\sigma(1)}|\ldots|v_{\sigma(n)}|)$, $\sigma\in S_n$. Учитывая введенные обозначения, всякий моном $x_{\pi(1)}\cdots x_{\pi(a_1)}w_{\tau(1)}x_{\pi(a_1+1)}\cdots x_{\pi(a_1+a_2)}w_{\tau(2)}x_{\pi(a_1+a_2+1)}\cdots x_{\pi(a_1+\ldots+a_u)}w_{\tau(u)}$, содержащийся в записи многочлена $\mathscr{R}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$, будем обозначать символом $M(\bar{a},\pi\bar{x},\tau\bar{w})$.

Далее, определим отображение $P : B_0 \to M_u(\mathbf{Z})$, где $M_u(\mathbf{Z})$ — кольцо матриц размера $u\times u$ с элементами из кольца целых чисел $\mathbf{Z}$, положив для любого $\bar{a} = (a_1\ldots a_u\, 0)\in B_0$

$$P(\bar{a}) = \begin{pmatrix} a_u & a_u & a_u & \ldots & a_u & 0\\ 0 & a_{u-1} & a_{u-1} & \ldots & a_{u-1} & 0\\ 0 & 0 & a_{u-2} & \ldots & a_{u-2} & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицу, состоящую из элементов матрицы $P(\bar{a})$, находящихся на пересечении ее первых k строк и первых k столбцов, обозначим через $P_k(\bar{a})$ $(k\leqslant u)$. Под нормой матрицы $C = (c_{ij})\in M_u(\mathbf{Z})$ будем понимать число $||C|| = \sum\limits_{i=1}^{u}\sum\limits_{j=1}^{u}|c_{ij}|$, а под высотой элемента $\bar{c} = (c_1\ldots c_u)^T\in M_{u\times 1}(\mathbf{Z})$ — число $h(\bar{c}) = \sum\limits_{i=1}^{u}|c_i|$. Наконец, подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & u-1 & u\\ u-1 & u-2 & \ldots & 1 & u\end{pmatrix}\in S_u$ обозначим σ.

Лемма 1. *Для любых элементов $\bar{a}\in B_0$, $\tau\in S_u$ справедливы равенства*

$$h(P(\bar{a})\cdot(\tau\sigma\bar{w}')^T) = \sum_{k=0}^{u-2}a_{u-k}\sum_{i=1}^{u-1-k}|w_{\tau(i)}| = \sum_{k=1}^{u-1}|w_{\tau(k)}|\sum_{i=k+1}^{u}a_i = \sum_{k=1}^{u-1}|w_{\tau(k)}|tr\, P_{u-k}(\bar{a}).$$

Доказательство. Имеем

$$P(\bar{a})\cdot(\tau\sigma\bar{w}')^T = \left(a_u\sum_{i=1}^{u-1}|w_{\tau(i)}|, a_{u-1}\sum_{i=1}^{u-2}|w_{\tau(i)}|,\ldots,a_2\sum_{i=1}^{1}|w_{\tau(i)}|, 0\right)^T.$$

Отсюда

$$h(P(\bar{a})\cdot(\tau\sigma\bar{w}')^T)=\sum_{k=0}^{u-2}a_{u-k}\sum_{i=1}^{u-1-k}|w_{\tau(i)}|=a_u|w_{\tau(u-1)}|+(a_u|w_{\tau(u-2)}|+\ldots+$$
$$+a_u|w_{\tau(1)}|)+(a_{u-1}|w_{\tau(u-2)}|+a_{u-1}|w_{\tau(u-3)}|+\ldots+a_{u-1}|w_{\tau(1)}|)+\ldots+a_2|w_{\tau(1)}|=$$
$$=|w_{\tau(u-1)}|a_u+|w_{\tau(u-2)}|(a_u+a_{u-1})+\ldots+|w_{\tau(1)}|(a_u+a_{u-1}+\ldots+a_2)=$$
$$=\sum_{k=1}^{u-1}|w_{\tau(k)}|\sum_{i=k+1}^{u}a_i=\sum_{k=1}^{u-1}|w_{\tau(k)}|tr\,P_{u-k}(\bar{a}).\qquad\square$$

Следствие 1. *Пусть* $|w_1|=|w_2|=\ldots=|w_u|=2s-1$, $s\in\mathbf{N}$. *Тогда для любых* $\bar{a}\in B_0$, $\tau\in S_u$ *справедливы равенства*

$$h(P(\bar{a})\cdot(\tau\sigma\bar{w}')^T)=(2s-1)||P(\bar{a})||=(2s-1)\sum_{k=1}^{u-1}ka_{k+1}.$$

Если к тому же $a_u=a_{u-1}=\ldots=a_2=r$, *то* $h(P(\bar{a})\cdot(\tau\sigma\bar{w}')^T)=(2s-1)ru(u-1)/2$.

Следствие 2. *Если для всякого* $i\in I_u$ $|w_i|=2k_i$, $k_i\in\mathbf{N}$, *то для любых* $\bar{a}\in B_0$, $\tau\in S_u$ *число* $h(P(\bar{a})\cdot(\tau\sigma\bar{w}')^T)$ *четное.*

Лемма 2. *Для любого монома* $M(\bar{a},\pi\bar{x},\tau\bar{w})$ *из многочлена* $\mathscr{R}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ *справедливо равенство* $\operatorname{sgn}M(\bar{a},\pi\bar{x},\tau\bar{w})=(-1)^{h(P(\bar{a})\cdot(\tau\sigma\bar{w}')^T)}\operatorname{sgn}\pi\operatorname{sgn}(\tau w)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\operatorname{sgn}M(\bar{a},\pi\bar{x},\tau\bar{w})=$$
$$=(-1)^{|w_{\tau(u-1)}|a_u+|w_{\tau(u-2)}|(a_u+a_{u-1})+\ldots+|w_{\tau(1)}|(a_u+a_{u-1}+\ldots+a_2)}\operatorname{sgn}(x_{\pi(1)}\cdots x_{\pi(m)}w_{\tau(1)}\cdots w_{\tau(u)})=$$
$$=(-1)^{h(P(\bar{a})\cdot(\tau\sigma\bar{w}')^T)}\operatorname{sgn}\pi\operatorname{sgn}(w_{\tau(1)}\cdots w_{\tau(u)})=(-1)^{h(P(\bar{a})\cdot(\tau\sigma\bar{w}')^T)}\operatorname{sgn}\pi\operatorname{sgn}(\tau w).\qquad\square$$

Следствие 3. *Справедливо равенство*

$$\mathscr{R}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})=\sum_{\bar{a}\in B_0}\sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in S_u}(-1)^{h(P(\bar{a})\cdot(\tau\sigma\bar{w}')^T)}\operatorname{sgn}\pi\operatorname{sgn}(\tau w)M(\bar{a},\pi\bar{x},\tau\bar{w}).$$

В частности, при $t=m-1=u$

$$\mathscr{R}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})=(-1)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}-1}\cdot\sum_{s=1}^{m-1}(-1)^s\sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in S_{m-1}}\operatorname{sgn}\pi\operatorname{sgn}\tau\times$$
$$\times x_{\pi(1)}y_{\tau(1)}x_{\pi(2)}y_{\tau(2)}\cdots x_{\pi(s-1)}y_{\tau(s-1)}x_{\pi(s)}x_{\pi(s+1)}y_{\tau(s)}x_{\pi(s+2)}\cdots x_{\pi(m)}y_{\tau(m-1)},$$

а при $t=m=u$

$$\mathscr{R}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})=(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}\sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in S_m}\operatorname{sgn}\pi\operatorname{sgn}\tau x_{\pi(1)}y_{\tau(1)}x_{\pi(2)}y_{\tau(2)}\cdots x_{\pi(m)}y_{\tau(m)}.$$

Следствие 4. *Пусть* $|w_1|=|w_2|=\ldots=|w_u|=2s-1$, $s\in\mathbf{N}$. *Тогда справедливо равенство* $\operatorname{sgn}M(\bar{a},\pi\bar{x},\tau\bar{w})=(-1)^{||P(\bar{a})||}\operatorname{sgn}\pi\operatorname{sgn}\tau$, *и, значит,*

$$\mathscr{R}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})=\sum_{\bar{a}\in B_0}\sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in S_u}(-1)^{||P(\bar{a})||}\operatorname{sgn}\pi\ \operatorname{sgn}\tau\,M(\bar{a},\pi\bar{x},\tau\bar{w}).$$

Доказательство. Вытекает из леммы 2 и следствия 1. $\square$

Следствие 5. *Пусть* $|w_1| = |w_2| = \ldots = |w_u| = 2s$, $s \in \mathbf{N}$. *Тогда справедливо равенство* $\operatorname{sgn} M(\bar{a}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}) = \operatorname{sgn}\pi$, *и, значит,*

$$\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{a}\in B_0}\sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in S_u} \operatorname{sgn}\pi\, M(\bar{a}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}).$$

Доказательство. Вытекает из леммы 2 и следствия 2. □

Приведем еще один метод для вычисления значения $(-1)^{h(P(\bar{a})\cdot(\tau\sigma\bar{w}')^T)}$. Определим отображения $\xi : B_0 \to \mathbf{Z}^u$, $\eta : \mathbf{Z}^u \to \mathbf{Z}^u$, положив для любого $\bar{a} = (a_1 \ldots a_u\, 0) \in B_0$, $\bar{c} = (c_1 \ldots c_u) \in \mathbf{Z}^u$

$$\xi(\bar{a}) = (\xi(\bar{a})_1 \ldots \xi(\bar{a})_{u-1}\, 0), \qquad \eta(\bar{c}) = (\eta(\bar{c})_1 \ldots \eta(\bar{c})_u),$$

где $\xi(\bar{a})_s = \sum\limits_{i=s+1}^{u} a_i - 2\left[\frac{1}{2}\sum\limits_{i=s+1}^{u} a_i\right]$, $s \in I_{u-1}$, $\eta(\bar{c})_r = |c_r| - 2[|c_r|/2]$, $r \in I_u$, $[p]$ — целая часть числа p.

Нетрудно видеть, что для произвольных $\tau \in S_u$, $\bar{a} \in B_0$ справедливы равенства

$$\eta(\tau\bar{w}') = \tau\eta(\bar{w}'), \qquad (-1)^{h(P(\bar{a})\cdot(\tau\sigma\bar{w}')^T)} = (-1)^{(\xi(\bar{a}),\tau\eta(\bar{w}'))},$$

где $(\xi(\bar{a}), \tau\eta(\bar{w}')) = \sum\limits_{s=1}^{u-1} \xi(\bar{a})_s \cdot (\tau\eta(\bar{w}'))_s$.

2. СВЯЗЬ МЕЖДУ МНОГОЧЛЕНАМИ $\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ И $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$

В работе [1] доказано, что справедливо равенство

$$\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{n}\in B_1}\sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in S_u} (-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})\cdot(\tau\alpha\bar{w}')^T)} \operatorname{sgn}\pi \operatorname{sgn}(\tau w) M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}),$$

где

$$h(\mathscr{N}(\bar{n})\cdot(\tau\alpha\bar{w}')^T) = \sum_{k=0}^{u-1} n_{u+1-k} \sum_{i=1}^{u-k} |w_{\tau(i)}| = \sum_{k=1}^{u} |w_{\tau(k)}| \sum_{i=k+1}^{u+1} n_i,$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & u \\ u & u-1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in S_u.$$

Явный вид многочленов $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ и $\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ позволяет установить связь между ними.

Пусть $r \in I_u$, $S_u(r) = \{\tau \in S_u | \tau(r) = r\}$, $w_{\hat{r}} = w_1 \cdots w_{r-1} w_{r+1} \cdots w_u$, $\gamma_r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r-1 & r & r+1 & \ldots & u-1 & u \\ 1 & 2 & \ldots & r-1 & r+1 & r+2 & \ldots & u & r \end{pmatrix}$, $S'_{u-1}(r)$ — группа подстановок степени $u-1$, определенная на множестве $I_u \setminus \{r\}$. Очевидно, что отображение $\varphi_r : S_u(r) \to S'_{u-1}(r)$, для которого

$$\varphi_r \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r-1 & r & r+1 & \ldots & u \\ \omega(1) & \omega(2) & \ldots & \omega(r-1) & r & \omega(r+1) & \ldots & \omega(u) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r-1 & r+1 & \ldots & u \\ \omega(1) & \omega(2) & \ldots & \omega(r-1) & \omega(r+1) & \ldots & \omega(u) \end{pmatrix} = \omega',$$

является изоморфизмом групп $S_u(r)$ и $S'_{u-1}(r)$.

Лемма 3. *Для произвольного элемента $\bar{a} = (a_1 \ldots a_u\, 0) \in B_0$ и любого $\tau \in S_u$ такого, что $\tau(u) = r$, справедливо равенство*

$$(-1)^{h(P(\bar{a})\cdot(\tau\sigma\bar{w}')^T)} \operatorname{sgn}(\tau w) = (-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})\cdot(\rho'_\tau \alpha_r \bar{w}_{\hat{r}})^T)} \cdot (-1)^{|w_r|(|w_{r+1}|+\ldots+|w_u|)} \operatorname{sgn}(\rho'_\tau w_{\hat{r}}),$$

где $\bar{n} = (a_1 \ldots a_u) \in B'_1 = \{\bar{n}' = (n'_1 \ldots n'_u) \in \mathbf{N}^u \mid n'_1 + \ldots + n'_u = m\}$,

$$\rho'_\tau = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & r-1 & r+1 & r+2 & \ldots & u \\ \tau(1) & \ldots & \tau(r-1) & \tau(r) & \tau(r+1) & \ldots & \tau(u-1) \end{pmatrix} \in S'_{u-1}(r),$$

$$\alpha_r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & \hat{r} & \ldots & \ldots & u \\ u & u-1 & \ldots & \ldots & \hat{r} & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in S'_{u-1}(r)$$

(знак «$\hat{\ }$» означает, что число r пропущено).

Доказательство. Положим $\tau = \rho_\tau \gamma_r$, где

$$\rho_\tau = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & r-1 & r & r+1 & r+2 & \ldots & u \\ \tau(1) & \ldots & \tau(r-1) & r & \tau(r) & \tau(r+1) & \ldots & \tau(u-1) \end{pmatrix} \in S_u(r),$$

тогда мы можем записать, что

$$(-1)^{h(P(\bar{a})\cdot(\tau\sigma\bar{w}')^T)} \operatorname{sgn}(\tau w) = (-1)^{h(P(\bar{a})\cdot(\rho_\tau\gamma_r\sigma\bar{w}')^T)} \operatorname{sgn}(\rho_\tau\gamma_r w) =$$
$$= (-1)^{h(P(\bar{a})\cdot(\rho_\tau((\gamma_r\sigma)\bar{w}'))^T)} \operatorname{sgn}(\rho_\tau(\gamma_r w)).$$

Нетрудно видеть, что

$$\gamma_r\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & j-2 & j-1 & j & \ldots & u-1 & u \\ u & u-1 & \ldots & r+2 & r+1 & r-1 & \ldots & 1 & r \end{pmatrix},$$

где $j = u - (r-1)$, $\operatorname{sgn}(\rho_\tau(\gamma_r w)) = \operatorname{sgn}((\rho_\tau w_{\hat{r}}) w_r) = \operatorname{sgn}(w_{\rho_\tau(1)} \cdots w_{\rho_\tau(r-1)} \times$ $\times\, w_{\rho_\tau(r+1)} \cdots w_{\rho_\tau(u)} w_r) = (-1)^{|w_r|(|w_{r+1}|+\ldots+|w_u|)} \operatorname{sgn}(\rho_\tau w_{\hat{r}})$.

Далее,

$$P(\bar{a})\cdot(\rho_\tau((\gamma_r\sigma)\bar{w}')^T) = \begin{pmatrix} a_u & a_u & a_u & \ldots & a_u & 0 \\ 0 & a_{u-1} & a_{u-1} & \ldots & a_{u-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{\rho_\tau(u)} \\ w_{\rho_\tau(u-1)} \\ \vdots \\ w_{\rho_\tau(1)} \\ w_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{u-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{p}.$$

Согласно лемме 1 из работы [1]

$$\begin{pmatrix} a_u & a_u & a_u & \ldots & a_u \\ 0 & a_{u-1} & a_{u-1} & \ldots & a_{u-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{\rho_\tau(u)} \\ w_{\rho_\tau(u-1)} \\ \vdots \\ w_{\rho_\tau(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{u-1} \end{pmatrix} = \bar{q} = \mathscr{N}(\bar{n})(\rho'_\tau \alpha_r \bar{w}_{\hat{r}})^T,$$

где $\bar{n} = (a_1 \ldots a_u)$, $\rho'_\tau = \varphi_r(\rho_\tau) \in S'_{u-1}(r)$, $\alpha_r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & \hat{r} & \ldots & \ldots & u \\ u & u-1 & \ldots & \ldots & \hat{r} & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in S'_{u-1}(r)$.

Замечая, что $h(\bar{p}) = \sum\limits_{i=1}^{u} p_i = \sum\limits_{i=1}^{u-1} p_i = h(\bar{q})$, приходим к равенству

$$(-1)^{h(P(\bar{a})\cdot(\tau\sigma\bar{w}')^T)} \operatorname{sgn}(\tau w) = (-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})\cdot(\rho'_\tau \alpha_r \bar{w}_{\hat{r}})^T)} \cdot (-1)^{|w_r|(|w_{r+1}|+\ldots+|w_u|)} \operatorname{sgn}(\rho'_\tau w_{\hat{r}}). \quad \square$$

Предложение 1. *Для любых натуральных чисел t, u, m, удовлетворяющих неравенствам $t \geqslant u$, $m \geqslant u$, $m > 1$, и произвольного поля F справедливо равенство*

$$\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{r=1}^{u} (-1)^{|w_r|(|w_{r+1}|+\ldots+|w_u|)} \mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1},\ldots,\hat{i}_{r+1}}|\bar{w}_{\hat{r}})w_r,$$

где $\bar{w}_{\hat{r}} = (w_1 \ldots w_{r-1} w_{r+1} \ldots w_u)$, $\bar{y}_{\widehat{i_r+1},\ldots,\hat{i}_{r+1}} = (y_1 \ldots y_{i_r} y_{i_{r+1}+1} \ldots y_t)$, $i_1 = 0$.

Доказательство. Согласно следствию 3

$$\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{a}\in B_0} \sum_{\pi\in S_m} \sum_{\tau\in S_u} (-1)^{h(P(\bar{a})\cdot(\tau\sigma\bar{w}')^T)} \operatorname{sgn}\pi \operatorname{sgn}(\tau w) M(\bar{a}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}) =$$

$$= |\text{ полагаем } \tau = \rho_\tau \gamma_r, \text{ где } r = \tau(u)| =$$

$$= \sum_{r=1}^{u} \sum_{\bar{a}\in B_0} \sum_{\pi\in S_m} \sum_{\rho_\tau\in S_u(r)} (-1)^{h(P(\bar{a})\cdot(\rho_\tau\gamma_r\sigma\bar{w}')^T)} \operatorname{sgn}\pi \operatorname{sgn}(\rho_\tau\gamma_r w) M(\bar{a}, \pi\bar{x}, \rho_\tau\gamma_r\bar{w}) =$$

$$= |\text{применяем лемму 3}| = \sum_{r=1}^{u} \sum_{\bar{n}\in B_1'} \sum_{\pi\in S_m} \sum_{\rho_\tau'\in S_{u-1}'(r)} (-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})\cdot(\rho_\tau'\alpha_r\bar{w}_{\hat{r}}')^T)} \operatorname{sgn}\pi \times$$

$$\times \operatorname{sgn}(\rho_\tau' w_{\hat{r}}) M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \rho_\tau'\bar{w}_{\hat{r}}) w_r (-1)^{|w_r|(|w_{r+1}|+\ldots+|w_u|)} = \sum_{r=1}^{u} (-1)^{|w_r|(|w_{r+1}|+\ldots+|w_u|)} \times$$

$$\times \left(\sum_{\bar{n}\in B_1'} \sum_{\pi\in S_m} \sum_{\rho_\tau'\in S_{u-1}'(r)} (-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})\cdot(\rho_\tau'\alpha_r\bar{w}_{\hat{r}}')^T)} \operatorname{sgn}\pi \operatorname{sgn}(\rho_\tau' w_{\hat{r}}) M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \rho_\tau'\bar{w}_{\hat{r}}) \right) w_r =$$

$$= |\text{учитываем равенство для многочлена } \mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})| =$$

$$= \sum_{r=1}^{u} (-1)^{|w_r|(|w_{r+1}|+\ldots+|w_u|)} \mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1},\ldots,\hat{i}_{r+1}}|\bar{w}_{\hat{r}})w_r. \qquad \square$$

Следствие 6. *Пусть для любого $r \in I_u$ $|w_r| = 2s_r$, $s_r \in \mathbf{N}$. Тогда справедливо равенство* $\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum\limits_{r=1}^{u} \mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1},\ldots,\hat{i}_{r+1}}|\bar{w}_{\hat{r}})w_r$.

Следствие 7. *Пусть $|w_1| = |w_2| = \ldots = |w_u| = 2s - 1$, $s \in \mathbf{N}$. Тогда справедливо равенство* $\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum\limits_{r=1}^{u} (-1)^{u-r} \mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1},\ldots,\hat{i}_{r+1}}|\bar{w}_{\hat{r}})w_r$. *В частности, если $t = u = m$, то* $\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum\limits_{r=1}^{m} (-1)^{m-r} \mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}_{\hat{r}}|\bar{w}_{\hat{r}})y_r$.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА $\mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$

Пусть $t \in I_m$, $u = t$, $w_i = y_i$ для всякого $i \in I_t$,

$$\mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{a}\in B_0} \sum_{\pi\in S_m} \sum_{\tau\in S_u} \operatorname{sgn}\pi M(\bar{a}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}),$$

$$\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{n}\in B_1} \sum_{\pi\in S_m} \sum_{\tau\in S_u} \operatorname{sgn}\pi M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}) \qquad (t < m).$$

Лемма 4. *Для любого натурального числа $t \in I_m$ и произвольного поля F многочлен* $\mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum\limits_{\bar{a}\in B_0} \sum\limits_{\pi\in S_m} \sum\limits_{\tau\in S_t} \operatorname{sgn}\pi M(\bar{a}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w})$ *следует из* $S_m^-(\bar{x})$.

Доказательство. Пусть $t, i_1, \ldots, i_t \in I_m$, причем $i_1 < i_2 < \ldots < i_t$, $\tau \in S_t$. Определим эндоморфизм $\varphi_{i_1,\ldots,i_t,\tau}$ алгебры $F\{Z\}$, положив

$$\varphi_{i_1,\ldots,i_t,\tau}(z) = \begin{cases} x_{i_j} y_{\tau(j)}, & \text{если } z = x_{i_j}, (j \in I_t) \\ z, & \text{если } z \notin \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}\}. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что если $t < m$, то

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_t \leqslant m} \sum_{\tau \in S_t} \varphi_{i_1,\ldots,i_t,\tau}(S_m^-(\bar{x})) = \mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) + \mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}).$$

Отсюда получаем, что

$$\mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_t \leqslant m} \sum_{\tau \in S_t} \varphi_{i_1,\ldots,i_t,\tau}(S_m^-(\bar{x})) - \mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}).$$

Поскольку $\{S_m^-(\bar{x})\}^T \lhd_T F\{Z\}$, то

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_t \leqslant m} \sum_{\tau \in S_t} \varphi_{i_1,\ldots,i_t,\tau}(S_m^-(\bar{x})) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T,$$

а по теореме 3 из работы [1] $\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$, но тогда и

$$\mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_t \leqslant m} \sum_{\tau \in S_t} \varphi_{i_1,\ldots,i_t,\tau}(S_m^-(\bar{x})) - \mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T.$$

Если же $t = m$, то $\sum\limits_{\tau \in S_m} \varphi_{1,\ldots,m,\tau}(S_m^-(\bar{x})) = \mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$. □

Следствие 8. *Для любого натурального числа $m > 1$ и произвольного поля F многочлен $\mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}_m, \bar{y}_m|\bar{w}) = \sum\limits_{\pi \in S_m} \sum\limits_{\tau \in S_m} \operatorname{sgn} \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} y_{\tau(2)} \cdots x_{\pi(m)} y_{\tau(m)}$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Доказательство. Полагая в лемме 4 $t = m$, получаем требуемый результат. □

Выше мы определили многочлен $\mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ для случая, когда $t = u$, $t \leqslant m$. Рассмотрим теперь общий случай, когда $t \geqslant u$, $m \geqslant u$.

Теорема 1. *Для любого натурального числа $m > 1$ и произвольного поля F многочлен $\mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum\limits_{\bar{a} \in B_0} \sum\limits_{\pi \in S_m} \sum\limits_{\tau \in S_u} \operatorname{sgn} \pi M(\bar{a}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Доказательство. Проведем математическую индукцию по парам $(t, u) \in A(\preceq) = \{(t, u) \in \mathbf{N}^2 |\ t \geqslant u,\ u \leqslant m\}$ с минимальными элементами (t, t), $t \in I_m$, где $\preceq$ — лексикографический порядок. В силу леммы 4 теорема 1 верна для любого минимального элемента $(t, t) \in A(\preceq)$.

Пусть (t, u) — произвольный элемент множества A, отличный от минимального. Предположим, что для любого $(t_1, u_1) \in A$ такого, что $(t_1, u_1) \prec (t, u)$ теорема 1 верна. Покажем, что она будет верной и для пары (t, u). Для элемента (t, u) возможны следующие случаи: 1) среди подслов $w_1, \ldots, w_u$ существует хотя бы одно w_s, для которого $|w_s| \geqslant 3$; 2) для любого $i \in I_u$ $|w_i| \leqslant 2$, при этом найдется w_r такое, что $|w_r| = 2$. Рассмотрим каждый из них по порядку.

Пусть $w_s = b_s y_{i_{s+1}-2} y_{i_{s+1}-1} y_{i_{s+1}}$ (если $|w_s| = 3$, то слово b_s полагаем пустым). Нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$\mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \varphi \mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_{s+1}-1}, \hat{i}_{s+1}} | \bar{w}_{\widehat{i_{s+1}-1}, \hat{i}_{s+1}}),$$

где φ — эндоморфизм алгебры $F\{Z\}$ такой, что

$$\varphi(z) = \begin{cases} y_{i_{s+1}-2} y_{i_{s+1}-1} y_{i_{s+1}}, & \text{если } z = y_{i_{s+1}-2}, \\ z, & \text{если } z \neq y_{i_{s+1}-2}, \end{cases}$$

$$\bar{y}_{\widehat{i_{s+1}-1}, \hat{i}_{s+1}} = (y_1 \dots y_{i_{s+1}-2}\, y_{i_{s+1}+1} \dots y_t), \quad w_{\widehat{i_{s+1}-1}, \hat{i}_{s+1}} = w_1 \cdots w_{s-1} (b_s y_{i_{s+1}-2}) w_{s+1} \cdots w_u.$$

Так как ассоциированная с многочленом $\mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_{s+1}-1}, \hat{i}_{s+1}} | \bar{w}_{\widehat{i_{s+1}-1}, \hat{i}_{s+1}})$ пара $(t-2, u) \prec \prec (t, u)$, то по индуктивному предположению он следует из $S_m^-(\bar{x})$, но тогда и $\mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.

Во втором случае предположим, что $w_r = y_{i_r+1} y_{i_r+2}$. Рассмотрим эндоморфизмы $\varphi_1, \dots, \varphi_m, \psi_{i_1+1}, \dots, \psi_{i_u+1}$ алгебры $F\{Z\}$, определенные следующим образом:

$$\varphi_i(z) = \begin{cases} x_i w_r, & \text{если } z = x_i, \\ z, & \text{если } z \neq x_i, \end{cases} \qquad \psi_{i_j+1}(z) = \begin{cases} w_r y_{i_j+1}, & \text{если } z = y_{i_j+1}, \\ z, & \text{если } z \neq y_{i_j+1}, \end{cases}$$

где $i \in I_m$, $j \in C = I_u \backslash \{r\}$, $i_1 = 0$. Нетрудно видеть, что

$$\mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1}, \widehat{i_r+2}} | \bar{w}_{\hat{r}}) -$$
$$- \sum_{j \in C} \psi_{i_j+1} \mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1}, \widehat{i_r+2}} | \bar{w}_{\hat{r}}) + \mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1}, \widehat{i_r+2}} | \bar{w}_{\hat{r}}) w_r,$$

где $\bar{w}_{\hat{r}} = (w_1 \dots w_{r-1} w_{r+1} \dots w_u)$.

Так как ассоциированная с многочленом $\mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1}, \widehat{i_r+2}} | \bar{w}_{\hat{r}})$ пара $(t-2, u-1) \prec \prec (t, u)$, то по индуктивному предположению он является следствием $S_m^-(\bar{x})$. По замечанию 2 из работы [1] многочлен $\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1}, \widehat{i_r+2}} | \bar{w}_{\hat{r}})$ также есть следствие многочлена $S_m^-(\bar{x})$. Значит, и $\mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$. Если пара $(t, u) = (2, 1)$, то $\mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, y_1|y_1) y_2$.

Поскольку ассоциированная с многочленом $\mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, y_1|y_1)$ пара $(1, 1)$ является минимальным элементом частично упорядоченного множества $A(\preceq)$, то по доказанному $\mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, y_1|y_1) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$, но тогда и $\mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$. □

4. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА $\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$

Представим многочлен $\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ в виде $\mathscr{R}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) + \mathscr{R}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$, где многочлен $\mathscr{R}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ $(\mathscr{R}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}))$ состоит из всех мономов многочлена $\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$, для которых $(-1)^{h(P(\bar{a}) \cdot (\tau\sigma\bar{w}')^T)} \operatorname{sgn}(\tau w) = 1(-1)$. Таким образом,

$$\mathscr{R}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{a} \in B_0} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} \delta_{1\,(-1)^{h(P(\bar{a}) \cdot (\tau\sigma\bar{w}')^T)} \operatorname{sgn}(\tau w)} \operatorname{sgn} \pi M(\bar{a}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}),$$
$$\mathscr{R}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{a} \in B_0} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} -\delta_{-1\,(-1)^{h(P(\bar{a}) \cdot (\tau\sigma\bar{w}')^T)} \operatorname{sgn}(\tau w)} \operatorname{sgn} \pi M(\bar{a}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}),$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Теорема 2. *Для любого натурального числа $m > 1$ и произвольного поля F характеристики не два многочлен $\mathscr{R}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Доказательство. По следствию 1 из работы [2] многочлен $\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$, а по теореме 1 многочлен $\mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$, но тогда $\mathscr{R}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \frac{1}{2}(\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) + \mathscr{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$. □

Предложение 2. *Для любого натурального числа $m > 1$ и произвольного поля F характеристики не два многочлен $\mathscr{R}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Доказательство. По следствию 1 из работы [2] многочлен $\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$, а по теореме 2 многочлен $\mathscr{R}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$, но тогда $\mathscr{R}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) - \mathscr{R}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$. □

Следствие 9. *Для любого натурального числа $m > 1$ и произвольного поля F характеристики не два многочлены*

$$b_{2m}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in A_m^+} \operatorname{sgn} \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(m-1)} x_{\pi(m)} y_{\tau(m)},$$

$$h_{2m}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in A_m^-} \operatorname{sgn} \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(m-1)} x_{\pi(m)} y_{\tau(m)},$$

где $A_m^+ = \{\tau \in S_m | \operatorname{sgn} \tau = 1\}$, $A_m^- = \{\tau \in S_m | \operatorname{sgn} \tau = -1\}$, являются следствиями стандартного многочлена $S_m^-(\bar{x})$.

Доказательство. Полагая в следствии 1 $s = r = 1$, $u = m$ и учитывая следствие 4, получаем, что

$$\mathscr{R}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in A_m^{\operatorname{sgn}(-1)^{m(m-1)/2}}} \operatorname{sgn} \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(m-1)} x_{\pi(m)} y_{\tau(m)},$$

$$-\mathscr{R}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in A_m^{-\operatorname{sgn}(-1)^{m(m-1)/2}}} \operatorname{sgn} \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(m-1)} x_{\pi(m)} y_{\tau(m)}.$$

Нетрудно видеть, что в зависимости от числа m наши суммы совпадают либо с многочленом $b_{2m}(\bar{x}, \bar{y})$, либо с многочленом $h_{2m}(\bar{x}, \bar{y})$, но по теореме 2 и предложению 2 они следуют из $S_m^-(\bar{x})$. □

Замечание 1. В работе [1] доказано, что если $\operatorname{char} F \neq 2$, то $b_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y})$, $h_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$. Основные свойства многочленов $b_{2m}(\bar{x}, \bar{y})$, $h_{2m}(\bar{x}, \bar{y})$, $b_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y})$, $h_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y})$ и связь между ними рассмотрены в работе [3].

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ $\mathscr{D}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ И $\mathscr{E}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$

Приводимые ниже результаты дополняют результаты, полученные в парагр. 3 и статье [1]. Пусть $t, i_1, \ldots, i_t \in I_m$, причем $i_1 < i_2 < \ldots < i_t$, $\tau \in S_t$, $u = t$, $w_i = y_i$ для всякого $i \in I_t$,

$$\mathscr{D}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{n} \in B_1} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} \operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}) \qquad (t < m),$$

$$\mathscr{E}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{a} \in B_0} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} \operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau M(\bar{a}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}).$$

Определим эндоморфизм $\psi_{i_1,\ldots,i_t,\tau}$ алгебры $F\{Z\}$, положив для всякого $z \in Z$

$$\psi_{i_1,\ldots,i_t,\tau}(z) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\tau x_{i_1} y_{\tau(1)}, & \text{если } z = x_{i_1}, \\ x_{i_j} y_{\tau(j)}, & \text{если } z = x_{i_j}\ (j \in I_t \setminus \{1\}), \\ z, & \text{если } z \notin \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}\}. \end{cases}$$

Сохраняя обозначения парагр. 2, докажем следующее предложение.

Предложение 3. *Для любого натурального числа $t \in I_m \setminus \{1\}$ и произвольного поля F справедливо равенство*

$$\mathscr{E}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{r=1}^{t} (-1)^{t-r} \mathscr{D}(\bar{x}, \bar{y}_{\hat{r}}|\bar{w}_{\hat{r}}) y_r.$$

Доказательство. Учитывая, что $u = t$, и полагая $\tau = \rho_\tau \gamma_r$, где $r = \tau(u)$, будем иметь

$$\mathscr{E}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{r=1}^{u} \sum_{\bar{a} \in B_0} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\rho_\tau \in S_u(r)} \operatorname{sgn}\pi \operatorname{sgn}(\rho_\tau \gamma_r) M(\bar{a}, \pi\bar{x}, \rho_\tau \gamma_r \bar{w}) =$$

$$= \sum_{r=1}^{u} \operatorname{sgn}\gamma_r \left(\sum_{\bar{n} \in B_1'} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\rho_\tau' \in S_{u-1}'(r)} \operatorname{sgn}\pi \operatorname{sgn}\rho_\tau' M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \rho_\tau' \bar{w}_{\hat{r}}) \right) w_r =$$

$$= \sum_{r=1}^{u} (-1)^{u-r} \mathscr{D}(\bar{x}, \bar{y}_{\hat{r}}|\bar{w}_{\hat{r}}) y_r.$$

□

Предложение 4. *Для любого натурального числа $t \in I_{m-1}$ и произвольного поля F многочлен $\mathscr{D}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum\limits_{\bar{n} \in B_1} \sum\limits_{\pi \in S_m} \sum\limits_{\tau \in S_t} \operatorname{sgn}\pi \operatorname{sgn}\tau M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Доказательство. Проведем математическую индукцию по числу t. Пусть $t = 1$, тогда

$$\sum_{i=1}^{m} \psi_i(S_m^-(\bar{x})) = \sum_{n=1}^{m-1} \sum_{\pi \in S_m} \operatorname{sgn}\pi x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)} y_1 x_{\pi(n+1)} \cdots x_{\pi(m)} + S_m^-(\bar{x}) y_1.$$

Отсюда

$$\mathscr{D}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{n=1}^{m-1} \sum_{\pi \in S_m} \operatorname{sgn}\pi x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)} y_1 x_{\pi(n+1)} \cdots x_{\pi(m)} = \sum_{i=1}^{m} \psi_i(S_m^-(\bar{x})) - S_m^-(\bar{x}) y_1.$$

Поскольку $\{S_m^-(\bar{x})\}^T \lhd_T F\{Z\}$, то $\sum\limits_{i=1}^{m} \psi_i(S_m^-(\bar{x})), S_m^-(\bar{x}) y_1 \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$, и, значит, $\mathscr{D}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$.

Пусть теперь $1 < t \leqslant m - 1$. Предположим, что для всякого $a < t$ предложение 4 верно. Покажем, что оно будет верным и для числа t. Нетрудно видеть, что

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_t \leqslant m} \sum_{\tau \in S_t} \psi_{i_1,\ldots,i_t,\tau}(S_m^-(\bar{x})) = \mathscr{D}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) + \mathscr{E}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}).$$

Отсюда и из предложения 3 получаем, что

$$\mathscr{D}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_t\leqslant m}\sum_{\tau\in S_t}\psi_{i_1,\ldots,i_t,\tau}(S_m^-(\bar{x})) - \sum_{r=1}^{t}(-1)^{t-r}\mathscr{D}(\bar{x},\bar{y}_{\hat{r}}|\bar{w}_{\hat{r}})y_r =$$

$$= \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_t\leqslant m}\sum_{\tau\in S_t}\psi_{i_1,\ldots,i_t,\tau}(S_m^-(\bar{x})) - \sum_{r=1}^{t}(-1)^{t-r}\xi_r(\mathscr{D}(\bar{x},\bar{y}_{\hat{t}}|\bar{w}_{\hat{t}}))y_r,$$

где ξ_r $(r\in I_t)$ — эндоморфизм алгебры $F\{Z\}$ такой, что

$$\xi_r(z) = \begin{cases} y_{r+s+1}, & \text{если } z = y_{r+s},\ s\in\{0,1,\ldots,t-1-r\},\\ z, & \text{если } z\notin\{y_r,\ldots,y_{t-1}\}.\end{cases}$$

Так как ассоциированное с многочленом $\mathscr{D}(\bar{x},\bar{y}_{\hat{t}}|\bar{w}_{\hat{t}})$ число $t-1<t$, то по индуктивному предположению он является следствием стандартного многочлена $S_m^-(\bar{x})$. Учитывая, что $\{S_m^-(\bar{x})\}^T \triangleleft_T F\{Z\}$, получаем, что $\mathscr{D}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})\in\{S_m^-(\bar{x})\}^T$. Таким образом, предложение 4 верно для всякого $t\in I_{m-1}$. □

Следствие 10. *Для любого натурального числа $m>1$ и произвольного поля F многочлен*

$$\mathscr{D}(\bar{x}_m,\bar{y}_{m-1}|\bar{w}) = \sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in S_{m-1}}\operatorname{sgn}\pi\operatorname{sgn}\tau\, x_{\pi(1)}y_{\tau(1)}x_{\pi(2)}y_{\tau(2)}\cdots y_{\tau(m-1)}x_{\pi(m)}$$

следует из $S_m^-(\bar{x})$.

Доказательство. Полагая в предложении 4 $t=m-1$, получаем требуемый результат. □

Предложение 5. *Для любого натурального числа $t\in I_m$ и произвольного поля F многочлен $\mathscr{E}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) = \sum\limits_{\bar{a}\in B_0}\sum\limits_{\pi\in S_m}\sum\limits_{\tau\in S_t}\operatorname{sgn}\pi\operatorname{sgn}\tau M(\bar{a},\pi\bar{x},\tau\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Доказательство. Если $t=1$, то $\mathscr{E}(\bar{x},y_1|\bar{w}) = S_m^-(\bar{x})y_1$. Пусть $1<t<m$, тогда из равенства

$$\mathscr{E}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_t\leqslant m}\sum_{\tau\in S_t}\psi_{i_1,\ldots,i_t,\tau}(S_m^-(\bar{x})) - \mathscr{D}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}),$$

а также из предложения 4 и того, что $\{S_m^-(\bar{x})\}^T \triangleleft_T F\{Z\}$, заключаем, что $\mathscr{E}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})\in\{S_m^-(\bar{x})\}^T$. Если же $t=m$, то $\mathscr{E}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) = \sum\limits_{\tau\in S_m}\psi_{1,\ldots,m,\tau}(S_m^-(\bar{x}))$. Отсюда и из того, что $\{S_m^-(\bar{x})\}^T \triangleleft_T F\{Z\}$, следует, что $\mathscr{E}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})\in\{S_m^-(\bar{x})\}^T$. □

Следствие 11. *Для любого натурального числа $m>1$ и произвольного поля F многочлен $\mathscr{E}(\bar{x}_m,\bar{y}_m|\bar{w}) = \sum\limits_{\pi\in S_m}\sum\limits_{\tau\in S_m}\operatorname{sgn}\pi\operatorname{sgn}\tau\, x_{\pi(1)}y_{\tau(1)}x_{\pi(2)}y_{\tau(2)}\cdots x_{\pi(m)}y_{\tau(m)}$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Доказательство. Полагая в предложении 5 $t=m$, получаем требуемый результат. □

Отметим, что впервые этот факт был доказан Ченгом в [4].

Замечание 2. Многочлены $\mathscr{D}(\bar{x}_m,\bar{y}_{m-1}|\bar{w})$ и $\mathscr{E}(\bar{x}_m,\bar{y}_m|\bar{w})$ называются двойными многочленами Капелли нечетной и четной степени и обозначаются символами $C_{2m-1}(\bar{x},\bar{y})$ и $C_{2m}(\bar{x},\bar{y})$ соответственно. Основные свойства двойных и кратных многочленов Капелли, а также их обобщений приведены в работе [5].

6. ВТОРОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ $\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ И $\mathscr{R}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$

Результаты параг. 5 позволяют получить еще одно разложение многочленов $\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ и $\mathscr{R}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$, отличное от приведенных в [1] и параг. 4 данной статьи. Пусть

$$\mathscr{K}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})=\sum_{\bar{n}\in B_1}\sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in S_u}\delta_{1\,(-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})\cdot(\tau\alpha\bar{w}')^T)}}\operatorname{sgn}\pi\operatorname{sgn}(\tau w)M(\bar{n},\pi\bar{x},\tau\bar{w}),$$
$$\mathscr{K}^-(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})=\sum_{\bar{n}\in B_1}\sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in S_u}-\delta_{-1\,(-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})\cdot(\tau\alpha\bar{w}')^T)}}\operatorname{sgn}\pi\operatorname{sgn}(\tau w)M(\bar{n},\pi\bar{x},\tau\bar{w}),$$
$$\mathscr{G}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})=\sum_{\bar{a}\in B_0}\sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in S_u}\delta_{1\,(-1)^{h(P(\bar{a})\cdot(\tau\sigma\bar{w}')^T)}}\operatorname{sgn}\pi\operatorname{sgn}(\tau w)M(\bar{a},\pi\bar{x},\tau\bar{w}),$$
$$\mathscr{G}^-(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})=\sum_{\bar{a}\in B_0}\sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in S_u}-\delta_{-1\,(-1)^{h(P(\bar{a})\cdot(\tau\sigma\bar{w}')^T)}}\operatorname{sgn}\pi\operatorname{sgn}(\tau w)M(\bar{a},\pi\bar{x},\tau\bar{w}),$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Очевидно, что $\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})=\mathscr{K}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})+\mathscr{K}^-(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$, $\mathscr{R}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})=\mathscr{G}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})+\mathscr{G}^-(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$. Кроме того, нетрудно видеть, что при $u=t=m-1$ один из многочленов $\mathscr{K}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ или $\mathscr{K}^-(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ (в зависимости от числа m) будет равен нулю. Аналогично, при $u=t=m$ один из многочленов $\mathscr{G}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ или $\mathscr{G}^-(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ в зависимости от числа m равен нулю.

Теорема 3. *Для любого натурального числа $m>1$ и произвольного поля F характеристики не два многочлен $\mathscr{K}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Доказательство. Проведем математическую индукцию по парам $(t,u)\in A(\preceq)=\{(t,u)\in\mathbf{N}^2|\ t\geqslant u, u<m\}$ с минимальными элементами (t,t), $t\in I_{m-1}$, где $\preceq$ — лексикографический порядок. Покажем, что для всякого минимального элемента (t,t) теорема 3 верна. Действительно, по теореме 2 из статьи [2] $\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})\in\{S_m^-(\bar{x})\}^T$, по предложению 4 $\mathscr{D}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})\in\{S_m^-(\bar{x})\}^T$, но тогда и $\mathscr{K}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})=\frac{1}{2}(\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})+\mathscr{D}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}))\in\{S_m^-(\bar{x})\}^T$.

Пусть (t,u) — произвольный элемент множества A, отличный от минимального. Предположим, что для любого $(t_1,u_1)\in A$ такого, что $(t_1,u_1)\prec(t,u)$, теорема 3 верна. Покажем, что она будет верной и для пары (t,u). Для элемента (t,u) возможны следующие случаи:

1) среди подслов $w_1,\ldots,w_u$ существует хотя бы одно w_s, для которого $|w_s|\geqslant 3$;

2) для любого $i\in I_u$ $|w_i|\leqslant 2$, при этом найдется w_r такое, что $|w_r|=2$. Рассмотрим каждый из них по порядку.

Пусть $w_s=b_sy_{i_{s+1}-2}y_{i_{s+1}-1}y_{i_{s+1}}$ (если $|w_s|=3$, то слово b_s полагаем пустым). Нетрудно видеть, что для любых $\bar{n}\in B_1$, $\tau\in S_u$ справедливы равенства

$$(-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})(\tau\alpha\bar{w}')^T)}=(-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})\,(\tau\alpha\bar{w}'_{\widehat{i_{s+1}-1},\hat{i}_{s+1}})^T)},\qquad \operatorname{sgn}(\tau w)=\operatorname{sgn}(\tau w_{\widehat{i_{s+1}-1},\hat{i}_{s+1}}),$$

где $w_{\widehat{i_{s+1}-1},\hat{i}_{s+1}}=w_1\cdots w_{s-1}(b_sy_{i_{s+1}-2})w_{s+1}\cdots w_u$. Отсюда следует, что

$$\mathscr{K}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})=\varphi\mathscr{K}^+(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{i_{s+1}-1},\hat{i}_{s+1}}|\bar{w}_{\widehat{i_{s+1}-1},\hat{i}_{s+1}}),$$

где φ — эндоморфизм алгебры $F\{Z\}$ такой, что $\varphi(y_{i_{s+1}-2})=y_{i_{s+1}-2}y_{i_{s+1}-1}y_{i_{s+1}}$ и $\varphi(z)=z$, если $z\neq y_{i_{s+1}-2}$. Так как ассоциированная с многочленом $\mathscr{K}^+(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{i_{s+1}-1},\hat{i}_{s+1}}|\bar{w}_{\widehat{i_{s+1}-1},\hat{i}_{s+1}})$ пара $(t-2,u)\prec(t,u)$, то по индуктивному предположению он следует из $S_m^-(\bar{x})$, но тогда и $\mathscr{K}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.

Во втором случае предположим, что $w_r = y_{i_r+1}y_{i_r+2}$. Рассмотрим эндоморфизмы $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \psi_{i_1+1}, \ldots, \psi_{i_u+1}$ алгебры $F\{Z\}$, определенные следующим образом:

$$\varphi_i(z) = \begin{cases} x_i w_r, & \text{если } z = x_i, \\ z, & \text{если } z \neq x_i, \end{cases} \qquad \psi_{i_j+1}(z) = \begin{cases} w_r y_{i_j+1}, & \text{если } z = y_{i_j+1}, \\ z, & \text{если } z \neq y_{i_j+1}, \end{cases}$$

где $i \in I_m$, $j \in C = I_u \backslash \{r\}$, $i_1 = 0$. Нетрудно видеть, что

$$\mathscr{K}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \mathscr{K}^+(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1},\widehat{i_r+2}}|\bar{w}_{\hat{r}}) -$$
$$- \sum_{j\in C} \psi_{i_j+1} \mathscr{K}^+(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1},\widehat{i_r+2}}|\bar{w}_{\hat{r}}) - \mathscr{K}^+(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1},\widehat{i_r+2}}|\bar{w}_{\hat{r}}) w_r,$$

где $\bar{w}_{\hat{r}} = (w_1 \ldots w_{r-1} w_{r+1} \ldots w_u)$. Так как ассоциированная с многочленом $\mathscr{K}^+(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1},\widehat{i_r+2}}|\bar{w}_{\hat{r}})$ пара $(t-2, u-1) \prec (t, u)$, то по индуктивному предположению он является следствием $S_m^-(\bar{x})$, но тогда и $\mathscr{K}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$. Если пара $(t, u) = (2, 1)$, то $\mathscr{K}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$, а по теореме 2 из работы [2] $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$. □

Предложение 6. *Для любого натурального числа $m > 1$ и произвольного поля F характеристики не два многочлен $\mathscr{K}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Доказательство. По теореме 2 из статьи [2] многочлен $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$, а по теореме 3 $\mathscr{K}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$, но тогда

$$\mathscr{K}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) - \mathscr{K}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T.$$
□

Проводя аналогичные рассуждения для многочленов $\mathscr{G}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$, $\mathscr{G}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ и учитывая теорему 3, придем к следующим результатам.

Теорема 4. *Для любого натурального числа $m > 1$ и произвольного поля F характеристики не два многочлен $\mathscr{G}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Предложение 7. *Для любого натурального числа $m > 1$ и произвольного поля F характеристики не два многочлен $\mathscr{G}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Отметим, что с некоторыми известными следствиями стандартного многочлена можно также познакомиться в [6–8].

7. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Пусть A — произвольная ассоциативная алгебра над полем F со стандартным тождеством $S_m^-(\bar{x})$, $T[A]$ — ее идеал тождеств. Так как $T[A] \lhd_T F\{Z\}$, то $T[A] \supseteq \{S_m^-(\bar{x})\}^T$. Отсюда вытекает, что все следствия, полученные нами из многочлена $S_m^-(\bar{x})$, будут тождествами алгебры A. Нетрудно видеть, что если $dim\, A < \infty$ и $m > \dim A$, то $S_m^-(\bar{x}) \in T[A]$. В частности, если A есть матричная алгебра $M_n(F)$, то в силу теоремы Амицура – Левицкого [9] наименьшее m, при котором $S_m^-(\bar{x}) \in T[M_n(F)]$, равно $2n$.

Можно также рассматривать тождества векторных подпространств алгебры A. Тождества некоторых подпространств интересны как сами по себе, так и в связи с задачей описания G-градуированных тождеств G-градуированной алгебры A, где G —

некоторая группа, и A допускает G-градуировку. В частности, для $A = M_n(F)$ базис верхнетреугольных матриц описан в [10, 11], некоторые тождества подпространств симметрических и кососимметрических матриц для некоторых полей можно найти в [12–14]. Базис Z_2-градуированных тождеств Z_2-градуированной матричной алгебры $M^{(m,k)}(F)$ при $m = 2$, $k = 1$ и $char\, F = 0$ найден в [15], в общем случае базис неизвестен.

Приводимый ниже результат будет полезен при изучении Z_2-градуированных тождеств Z_2-градуированной матричной алгебры $M^{(m,m)}(F)$ при любых m, F.

Пусть $m \in \mathbf{N}$, $M_{m+m}(F)$ — алгебра матриц, градуированная подпространствами

$$M_0^{(m,m)}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} C_{m\times m}(F) & 0_{m\times m} \\ 0_{m\times m} & D_{m\times m}(F) \end{pmatrix} \right\},\ M_1^{(m,m)}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 0_{m\times m} & B_{m\times m}(F) \\ A_{m\times m}(F) & 0_{m\times m} \end{pmatrix} \right\},$$

$T[M_1^{(m,m)}(F), M_{m+m}(F)]$ — идеал тождеств векторного подпространства $M_1^{(m,m)}(F)$.

Предложение 8. *Для любого натурального числа m*

$$b_{2(2m)-1}(\bar{x}, \bar{y}),\ h_{2(2m)-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_1^{(m,m)}, M_{m+m}(F)].$$

Доказательство. Проведем для многочлена $b_{2(2m)-1}(\bar{x}, \bar{y})$, так как для многочлена $h_{2(2m)-1}(\bar{x}, \bar{y})$ оно аналогично.

Пусть

$$a^i = \begin{pmatrix} 0_{m\times m} & B^i_{m\times m}(F) \\ A^i_{m\times m}(F) & 0_{m\times m} \end{pmatrix}, \qquad b^j = \begin{pmatrix} 0_{m\times m} & C^j_{m\times m}(F) \\ D^j_{m\times m}(F) & 0_{m\times m} \end{pmatrix} \in M_1^{(m,m)}(F),$$

где $i = \overline{1, 2m}$, $j = \overline{1, 2m-1}$, тогда

$$b_{2(2m)-1}(a^1, \ldots, a^{2m}, b^1, \ldots, b^{2m-1}) =$$
$$= \begin{pmatrix} 0_{m\times m} & b_{2(2m)-1}(B^1, \ldots, B^{2m}, D^1, \ldots, D^{2m-1}) \\ b_{2(2m)-1}(A^1, \ldots, A^{2m}, C^1, \ldots, C^{2m-1}) & 0_{m\times m} \end{pmatrix} = 0,$$

поскольку в силу предложения 3 статьи [1] $b_{2(2m)-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_m(F)]$. $\square$

Библиографический список

1. *Антонов С. Ю., Антонова А. В.* К теореме Ченга. II // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 127–137. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-127-137
2. *Антонов С. Ю., Антонова А. В.* К теореме Ченга // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 247–251. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-247-251
3. *Антонов С. Ю., Антонова А. В.* О квазимногочленах Капелли // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 371–382. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-371-382
4. *Chang Q.* Some consequences of the standard polynomial // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 104, № 3. P. 707–710.
5. *Антонов С. Ю., Антонова А. В.* О кратных многочленах Капелли // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2016. Т. 158, № 1. С. 5–25.
6. *Гатева Т. В.* Сложность произведения многообразий ассоциативных алгебр // УМН. 1981. Т. 36, вып. 1(217). С. 203–204.

7. *Кемер А. Р.* Замечание о стандартном тождестве // Матем. заметки. 1978. Т. 23, № 5. С. 753–757.
8. *Leron U.* Multilinear identities of the matrix ring // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. Vol. 183. P. 175–202.
9. *Amitsur S. A., Levitzki J.* Minimal identities for algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1950. Vol. 1, № 4. P. 449–463. DOI: 10.1090/S0002-9939-1950-0036751-9
10. *Мальцев Ю. Н.* Базис тождеств алгебры верхних треугольных матриц // Алгебра и логика. 1971. Т. 10, № 4. С. 393–400.
11. *Сидеров П. Н.* Базис тождеств алгебры треугольных матриц над произвольным полем // ПЛИСКА Български матем. студии. 1981. Т. 2. С. 143–152.
12. *Kostant B.* A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur – Levitzki, and cohomology theory // J. Math. Mech. 1958. Vol. 7. P. 237–264. DOI: 10.1007/b94535_8
13. *Rowen L. H.* Standard polynomials in matrix algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 190. P. 253–284.
14. *Wenxin M., Racine M.* Minimal identities of symmetric matrices // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 320, № 1. P. 171–192. DOI: 10.1090/S0002-9947-1990-0961598-6
15. *Аверьянов И. В.* Базис градуированных тождеств супералгебры $M_{1,2}(F)$ // Матем. заметки. 2009. Т. 85, вып. 4. С. 483–501. DOI: 10.4213/mzm4298

Образец для цитирования:

Антонов С. Ю., Антонова А. В. К теореме Ченга. III // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 2. С. 128–143. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-128-143

To Chang Theorem. III

S. Yu. Antonov, A. V. Antonova

Stepan Yu. Antonov, https://orcid.org/0000-0003-1705-3929, Kazan State Power Engineering University, 51, Krasnoselskaya Str., Kazan, 420066, Russia, antonovst-vm@rambler.ru

Alina V. Antonova, https://orcid.org/0000-0001-7047-7275, Kazan State Power Engineering University, 51, Krasnoselskaya Str., Kazan, 420066, Russia, antonovakazan@rambler.ru

Various multilinear polynomials of Capelli type belonging to a free associative algebra $F\{X \cup Y\}$ over an arbitrary field F generated by a countable set $X \cup Y$ are considered. The formulas expressing coefficients of polynomial Chang $\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ are found. It is proved that if the characteristic of field F is not equal two then polynomial $\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ may be represented by different ways in the form of sum of two consequences of standard polynomial $S^{-}(\bar{x})$. The decomposition of Chang polynomial $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ different from already known is given. Besides, the connection between polynomials $\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ and $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ is found. Some consequences of standard polynomial being of great interest for algebras with polynomial identities are obtained. In particular, a new identity of minimal degree for odd component of Z_2-graded matrix algebra $M^{(m,m)}(F)$ is given.

Key words: T-ideal, standard polynomial, Capelli polynomial.

References

1. Antonov S. Yu., Antonova A. V. To Chang theorem. II. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, no. 2, pp. 127–137 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-127-137

2. Antonov S. Yu., Antonova A. V. To Chang theorem. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, no. 3, pp. 247–251 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-247-251
3. Antonov S. Yu., Antonova A. V. Quasi-polynomials of Capelli. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, no. 4, pp. 371–382 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-371-382
4. Chang Q. Some consequences of the standard polynomial. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1988, vol. 104, no. 3, pp. 707–710.
5. Antonov S. Yu., Antonova A. V. On multiple polynomials of Capelli type. *Physics and mathematics*, Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Ser. Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2016, vol. 158, no. 1, pp. 5–25 (in Russian).
6. Gateva T. V. The complexity of a bundle of varieties of associative algebras. *Russian Math. Surveys*, 1981, vol. 36, iss. 1, pp. 233.
7. Kemer A. R. Remark on the standard identity. *Math. Notes*, 1978, vol. 23, no. 5, pp. 414–416. DOI: 10.1007/BF01789011
8. Leron U. Multilinear identities of the matrix ring. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1973. vol. 183, pp. 175–202.
9. Amitsur S. A., Levitzki J. Minimal identities for algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 1, no. 4, pp. 449–463. DOI: 10.1090/S0002-9939-1950-0036751-9
10. Mal'tsev Y. N. Basis for identities of the algebra of upper triangular matrices. *Algebra and Logic*, 1971, vol. 10, iss. 4, pp. 242–247. DOI: 10.1007/BF02219811
11. Siderov P. N. A basis for the identities of an algebra of triangular matrices over an arbitrary field. *PLISKA Studia Math. Bulgar.*, 1981, vol. 2, pp. 143–152 (in Russian).
12. Kostant B. A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur – Levitzki, and cohomology theory. *J. Math. Mech.*, 1958, vol. 7, pp. 237–264. DOI: 10.1007/b94535_8
13. Rowen L. H. Standard polynomials in matrix algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1974, vol. 190, pp. 253–284.
14. Wenxin M., Racine M. Minimal identities of symmetric matrices. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1990, vol. 320, no. 1, pp. 171–192. DOI: 10.1090/S0002-9947-1990-0961598-6
15. Aver'yanov I. V. Basis of graded identities of the superalgebra $M_{1,2}(F)$. *Math. Notes*, 2009, vol. 85, no. 4, pp. 467–483. DOI: 10.1134/S0001434609030195

Cite this article as:

Antonov S. Yu., Antonova A. V. To Chang theorem. III. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 2, pp. 128–143 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-128-143