УДК 517.984

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

А. А. Голубков

Голубков Андрей Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики, Специализированный учебно-научный центр (факультет) — школа-интернат имени А. Н. Колмогорова Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (СУНЦ МГУ), Россия, 121357, Москва, Кременчугская, 11, andrej2501@yandex.ru

Впервые изучена обратная задача для стандартного уравнения Штурма – Лиувилля со спектральным параметром ρ и потенциалом, кусочно-целым на спрямляемой кривой $\gamma \subset$ **C**, у которой задана только начальная точка. Ограниченная на кривой γ функция Q является кусочно-целой на ней, если γ можно разбить конечным числом точек на участки, на которых Q совпадает с целыми функциями, различными на соседних участках. Точки разбиения, начальная и конечная точки кривой называются критическими точками. Ставится задача нахождения всех критических точек γ и потенциала на ней по столбцу или строке передаточной матрицы $\hat{P}$ вдоль γ. На основе полученной асимптотики $\hat{P}$ при $|\rho| \to \infty$ доказано, что если хотя бы один её элемент ограничен при любых $\rho \in$ **C**, то γ после удаления всех «невидимых петель» вырождается в точку («невидимая петля» — такая петля кривой γ с заданной кусочно-целой функцией, узел которой совпадает с двумя последовательными критическими точками). В статье доказана единственность решения поставленной обратной задачи для кривых без «невидимых петель». На примере обратной задачи для уравнения $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r(x)}\frac{dy}{dx}\right) + \left(q(x) - r(x)\lambda^2\right) y(x) = 0$ с кусочно-целым потенциалом $q(x)$ и кусочно-постоянной функцией $r(x) \neq 0$ на отрезке действительной оси показана полезность полученных результатов при исследовании обратных задач для обобщенных уравнений Штурма – Лиувилля, приводимых к изученному в статье типу.

Ключевые слова: уравнение Штурма – Лиувилля на кривой, кусочно-целый потенциал, передаточная матрица, асимптотика, обратная спектральная задача.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-144-156

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обратные задачи для уравнения Штурма – Лиувилля стандартного вида

$$u''(z) + (Q(z) - \lambda^2)u(z) = 0 \qquad (1)$$

в случае вещественной переменной хорошо изучены для различных, в том числе комплекснозначных потенциалов [1–3]. Однако обратные спектральные задачи для обобщенных уравнений Штурма – Лиувилля

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\frac{du}{dx}\right) + \left(q(x) - r(x)\lambda^2\right) u(x) = 0 \qquad (x \in [0,1])$$

с кусочно-аналитическими комплекснозначными коэффициентами на отрезке в общем случае почти не исследованы [4]. Между тем такого типа обратные задачи имеют большое практическое значение, так как возникают, например, в спектроскопии одномерно неоднородных сред [5, 6]. Одним из эффективных методов их изучения могло бы стать преобразование с помощью соответствующих подстановок [7] обобщенных уравнений на отрезке в стандартные уравнения Штурма – Лиувилля на кривых в комплексной плоскости. Например, в случае $f(x) = 1, q(x) = 0$ полезность такого перехода продемонстрирована в статье [8]. К сожалению, несмотря на большое число работ, посвященных исследованию решений обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной плоскости (см. книги [9–11] и библиографию в них), асимптотическое поведение решений уравнений Штурма – Лиувилля (1) вдоль кривых при больших значениях модуля спектрального параметра хорошо изучено только при достаточно жестких ограничениях на форму кривой и (или) на потенциал [8, 11, 12]. Вероятно, именно поэтому среди обратных задач на комплексной плоскости детально исследована только задача о безмонодромных уравнениях Штурма – Лиувилля с мероморфным потенциалом на кусочно-гладкой кривой, являющейся границей некоторой выпуклой ограниченной области [13, 14]. В данной работе впервые рассмотрена обратная спектральная задача для уравнения (1) с потенциалом Q, кусочно-целым на спрямляемой кривой $\gamma \subset \mathbf{C}$ произвольной формы.

Определение 1. Функцию Q будем называть *кусочно-целой* на кривой $\gamma \subset \mathbf{C}$, соединяющей точки z_0, z_f и допускающей параметрическое задание непрерывной функцией $z = z(t)$ $(t \in [t_0, t_f], z(t_0) = z_0, z(t_f) = z_f)$, если Q ограничена на этой кривой и совпадает на ней с конечным числом целых функций, т. е. существуют такие целое число $N \geqslant 0$ и набор чисел $T = \{t_j\}_0^{N+1} : t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1} \equiv t_f$, что

$$Q(z(t)) = Q_i(z), \quad \text{если} \quad t \in (t_i, t_{i+1}) \quad (i = \overline{0, N}), \tag{2}$$

где все Q_i — целые функции и при $N \geqslant 1$ для всех $n \in \{1, \ldots, N\}$ функции Q_n и Q_{n-1} различны.

Замечание 1. Кусочно-целая на кривой функция может быть многозначной: принимать разные значения при прохождении кривой дважды через одну точку.

В силу (2) функция Q и все её производные вдоль кривой γ имеют конечные односторонние пределы в точках

$$z_j := z(t_j) \qquad (j = \overline{0, N+1}).$$

Если $N \geqslant 1$, то для всех $n \in \{1, \ldots, N\}$ односторонние пределы функции Q или хотя бы одной её производной конечного порядка вдоль γ различны при подходе к z_n «слева» и «справа», так как по определению 1 функции Q_n и Q_{n-1} разные. Будем называть такие точки *точками обобщенного скачка* функции Q на кривой γ. Точки обобщенного скачка, а также начальную и конечную точки кривой будем называть её *критическими точками*.

Определение 2. Назовём $W := \{N, \{z_j\}_0^{N+1}, \{Q_i\}_0^N\}$ *набором ключевых данных* кривой γ и заданной на ней с помощью (2) кусочно-целой функции Q.

Определение 3. Пусть $u_1(\gamma, z), u_2(\gamma, z)$ — непрерывно дифференцируемые решения (1) вдоль кривой γ, проходящей через точку z_b, удовлетворяющие условиям:

$$u_1(\gamma, z_b) = 1, \qquad u_1'(\gamma, z_b) = 0, \qquad u_2(\gamma, z_b) = 0, \qquad u_2'(\gamma, z_b) = 1. \tag{3}$$

Назовём *передаточной матрицей* уравнения (1) между точками z_b и z кривой γ матрицу

$$\hat{P}(\gamma, z, z_b) = \begin{pmatrix} u_1(\gamma, z) & u_2(\gamma, z) \\ u_1'(\gamma, z) & u_2'(\gamma, z) \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Если функция Q является кусочно-целой на спрямляемой кривой γ, соединяющей точки z_0 и z_f, то передаточная матрица $\hat{P}(\gamma, z_f, z_0)$ уравнения* (1) *существует и однозначно определяется заданием $\rho = \lambda^2$ и набором ключевых данных W. Матрица $\hat{P}(\gamma, z_f, z_0)$ является целой функцией параметра ρ; её определитель равен 1, и для всех $z_c, z \in \gamma$ справедливы следующие соотношения:*

$$\hat{P}(\gamma, z, z_0) = \hat{P}(\gamma, z, z_c)\hat{P}(\gamma, z_c, z_0), \tag{4}$$

$$\hat{P}(\gamma, z_0, z) = \hat{P}^{-1}(\gamma, z, z_0) = \begin{pmatrix} u_2'(\gamma, z) & -u_2(\gamma, z) \\ -u_1'(\gamma, z) & u_1(\gamma, z) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательные уравнения Штурма – Лиувилля:

$$\frac{d^2u^{(i)}}{dz^2} + (Q_i - \lambda^2)u^{(i)} = 0, \qquad z \in \mathbf{C}, \qquad i = \overline{0, N}. \tag{6}$$

В силу (2) и определения 3 решения $u_1(\gamma, z), u_2(\gamma, z)$ могут быть построены «сшиванием» непрерывно дифференцируемых решений уравнений (6) вдоль соседних участков кривой γ. Поэтому лемма 1 следует из известных свойств решений линейных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами [10, 11]. □

Следствие 1. *Для расчета передаточной матрицы вместо исходной кривой γ при решении* (1) *можно использовать любую спрямляемую кривую $\widetilde{\gamma}$ (например, ломаную), последовательно соединяющую критические точки кривой γ, если для каждого $i \in \{0, \ldots, N\}$ на участке $\widetilde{\gamma}$, соединяющем точки z_i и z_{i+1}, полагать $Q(z) = Q_i(z)$.*

Определение 4. *Петлёй* кривой γ с узлом в точке $z^{(d)}$ назовём участок кривой γ, начинающийся и кончающийся в точке её самопересечения $z^{(d)}$. Все точки петли, кроме её узла, будем называть *внутренними*.

Определение 5. Пусть на кривой γ задана кусочно-целая функция Q. Петля кривой γ называется *«невидимой петлей» уровня один* или просто *«невидимой петлей»*, если её узел совпадает с двумя последовательными критическими точками. Петля кривой γ называется *«невидимой петлей» уровня $M \geqslant 2$*, если её узел совпадает с двумя критическими точками и функция Q совпадает с одной целой функцией на всей петле, кроме конечного числа участков, как минимум один из которых является «невидимой петлёй» уровня $M - 1$, а остальные — «невидимыми петлями» меньшего уровня.

Лемма 2. *Добавление к кривой или удаление из неё «невидимой петли» любого конечного уровня не меняет начальную и конечную точку кривой, а также передаточную матрицу вдоль неё.*

Доказательство. В случае «невидимой петли» уровня один лемма следует из определения 5, формулы (4) и того, что передаточная матрица уравнения (1) с целым потенциалом вдоль любой петли равна единичной матрице [10, 11]. Применяя метод индукции по уровню «невидимой петли» и пользуясь определением 5, получим, что лемма справедлива для «невидимой петли» любого конечного уровня. □

Определение 6. Кривую с заданной на ней кусочно-целой функцией будем называть *простой*, если на кривой отсутствуют «невидимые петли» любого уровня.

Определение 7. Набор ключевых данных W будем называть *простым*, если для него выполнены следующие условия:

$$\Delta z_i := z_{i+1} - z_i \neq 0 \qquad (i = \overline{0, N}). \tag{7}$$

Упорядоченное множество точек $\{z_j\}_0^{N+1}$, входящих в простой набор ключевых данных, будем называть *множеством базовых точек* соответствующего потенциала Q.

Лемма 3. *Кривая γ с заданной на ней кусочно-целой функцией Q является простой, если и только если ей соответствует простой набор ключевых данных.*

Доказательство. Лемма непосредственно следует из определений 5, 6 и 7, так как в силу определения 5 на кривой могут быть «невидимые петли» уровня $M \geqslant 2$, только если на ней есть «невидимые петли» предыдущего уровня, а выполнение всех условий (7) равносильно отсутствию «невидимых петель» первого уровня. □

В силу следствия 1 и леммы 2 при заданной точке z_0 передаточная матрица $\hat{P}$ уравнения (1) может соответствовать бесконечно большому числу кривых с кусочно-целыми потенциалами, отличающихся в том числе количеством, расположением и формой «невидимых петель» и, значит, наборами ключевых данных. После удаления «невидимых петель» всех уровней исходная кривая либо переходит в простую кривую, либо вырождается в точку. В последнем случае очевидно, что $\hat{P} \equiv \hat{I}$, где $\hat{I}$ — единичная матрица.

Теорема 1. *Если хотя бы один элемент передаточной матрицы $\hat{P}$ уравнения* (1) *с кусочно-целым потенциалом на некоторой (не заданной) спрямляемой кривой γ ограничен на всей комплексной плоскости параметра ρ, то γ после удаления «невидимых петель» всех уровней вырождается в точку, и $\hat{P} \equiv \hat{I}$.*

Доказательство теоремы 1 приведено в параг. 3.Из теоремы 1 следует следующая теорема единственности, доказательство которой приведено в параг. 4.

Теорема 2. *Пусть $z_0^{(1)} = z_0^{(2)} = z_0$. Тогда простым спрямляемым кривым $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$ с разными простыми наборами ключевых данных $W^{(1)} = \left\{N^{(1)}, \left\{z_j^{(1)}\right\}_0^{N^{(1)}+1}, \left\{Q_i^{(1)}\right\}_0^{N^{(1)}}\right\}$ и $W^{(2)} = \left\{N^{(2)}, \left\{z_j^{(2)}\right\}_0^{N^{(2)}+1}, \left\{Q_i^{(2)}\right\}_0^{N^{(2)}}\right\}$ соответствуют передаточные матрицы $\hat{P}^{(1)}$ и $\hat{P}^{(2)}$, у которых соответствующие строки и столбцы различны хотя бы при одном значении параметра ρ.*

Следствие 2. *Пусть функция Q — кусочно-целая на спрямляемой кривой γ, у которой задана только начальная точка z_0. Тогда задание при всех $\rho \in \boldsymbol{C}$ столбца или строки отличной от единичной передаточной матрицы уравнения* (1) *между точкой z_0 и конечной точкой кривой γ однозначно определяет набор ключевых данных кривой, получающейся из γ удалением всех «невидимых петель».*

Замечание 2. В силу леммы 1 все элементы передаточной матрицы являются целыми функциями ρ. Поэтому в следствии 2 и всех последующих утверждениях достаточно требовать их задания (совпадения) на множестве точек комплексной плоскости параметра ρ, имеющем хотя бы одну конечную предельную точку.

Следствие 3. *Если два уравнения* (1) *имеют вдоль данной спрямляемой кривой γ при всех $\rho \in \boldsymbol{C}$ передаточные матрицы с одинаковым столбцом (строкой), то их потенциалы совпадают всюду на γ, за исключением, возможно, тех её однозначно определённых петель, среди внутренних точек которых нет базовых точек потенциала.*

Доказательство. В силу определения 5 и лемм 1, 2 замена потенциала Q на петле, среди внутренних точек которой нет его базовых точек, на любую целую функцию превращает эту петлю в «невидимую», не меняя передаточную матрицу. Поэтому на таких петлях потенциалы в двух рассматриваемых уравнениях могут различаться (а могут и совпадать). Если после удаления всех таких петель кривая γ вырождается в точку, то следствие доказано. Если же она превращается в некоторую кривую $\gamma_{\min}$, то последняя будет заведомо простой, так как по построению не может иметь «невидимых петель» первого уровня и, значит, любого другого. Поэтому по следствию 2 потенциал Q однозначно определен на $\gamma_{\min}$. □

Теорема 2 может быть полезной при изучении обратных задач для различных типов уравнений Штурма – Лиувилля, приводимых к уравнению (1) с кусочно-целым потенциалом. В качестве примера рассмотрим обратную спектральную задачу для уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r(x)}\frac{dy}{dx}\right) + \left(q(x) - r(x)\lambda^2\right) y(x) = 0 \tag{8}$$

с кусочно-целым потенциалом $q(x)$ и кусочно-постоянной отличной от нуля функцией $r(x)$ на отрезке $[x_0, x_f]$ действительной оси. Все коэффициенты в уравнении (8) комплекснозначные. Причем нас будут интересовать такие непрерывные решения (8), для которых функция $y'(x)/r(x)$ также непрерывна. В качестве спектральных данных обратной задачи для уравнения (8) используем его обобщенную передаточную матрицу между концами отрезка $[x_0, x_f]$:

$$\hat{P}_r(x_f, x_0) = \begin{pmatrix} y_1(x_f) & y_2(x_f) \\ y_1'(x_f)/r(x_f) & y_2'(x_f)/r(x_f) \end{pmatrix},$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ — решения (8) на отрезке $[x_0, x_f]$ в указанном выше смысле, удовлетворяющие следующим условиям:

$$y_1(x_0) = 1, \qquad y_1'(x_0)/r(x_0) = 0, \qquad y_2(x_0) = 0, \qquad y_2'(x_0)/r(x_0) = 1.$$

Нетрудно убедиться, что если уравнение (8) имеет на отрезке $[x_0, x_f]$ обобщенную передаточную матрицу $\hat{P}_r$, то замена $u(z) := y(x)$,

$$z(x) := z_0 + \int_{x_0}^{x} r(v)dv, \tag{9}$$

приводит его к уравнению (1) с кусочно-целым потенциалом, однозначно определенным на задаваемой (9) ломаной L, причём передаточная матрица этого уравнения (1) вдоль L равна $\hat{P}_r$. Пользуясь этим, из теоремы 2 можно получить два следствия.

Следствие 4. *Если два уравнения* (8) *с заданной кусочно-постоянной комплекснозначной функцией $r(x)$ имеют на отрезке $[x_0, x_f]$ обобщенные передаточные матрицы с одинаковым столбцом или одинаковой строкой, то их кусочно-целые потенциалы совпадают всюду, за исключением, возможно, однозначно* *определенных строкой или столбцом передаточной матрицы «невидимых участков» отрезка $[x_0, x_f]$, переходящих при отображении* (9) *в «невидимые петли» ломаной L.*

Следствие 5. *Пусть на некотором отрезке действительной оси хотя бы одно уравнение типа* (8) *имеет отличную от единичной обобщенную передаточную матрицу с заданным столбцом или заданной строкой. Тогда этим столбцом или строкой однозначно определена такая величина $L^{(0)} > 0$, что среди бесконечного множества уравнений типа* (8)*, имеющих на отрезке $[0, 1]$ комплексно-значный коэффициент $r(x)$ с постоянным модулем и передаточную матрицу с заданным столбцом или заданной строкой, 1) существует единственное уравнение, у которого $|r(x)| \equiv L^{(0)}$; 2) не существует уравнения, у которого $|r(x)| \equiv L^{(r)} < L^{(0)}$; 3) существует бесконечно много уравнений, у которых $|r(x)| \equiv L^{(r)} > L^{(0)}$.*

Заметим, что следствие 4 существенно ослабляет полученные в статье [4] достаточные условия однозначности нахождения потенциала $q(x)$ уравнения (8) по известному столбцу или известной строке обобщенной передаточной матрицы и известной функции $r(x)$. В соответствии с результатами статьи [4] для этого достаточно, чтобы все значения функции $r(x)$ лежали в открытой половине комплексной плоскости с границей, проходящей через ноль. По следствию 4 для этого достаточно, чтобы задаваемая (9) ломаная L не имела самопересечений. Правда, в [4] рассматривался более общий тип обобщенного уравнения Штурма – Лиувилля с тремя независимыми кусочно-аналитическими комплекснозначными коэффициентами, любые два из которых считались известными.

2. АСИМПТОТИКА ПЕРЕДАТОЧНОЙ МАТРИЦЫ

Лемма 4. *Для любой ограниченной области $G \subset \boldsymbol{C}$, любых $K \in \boldsymbol{N}$ и $i \in \{0, \dots, N\}$ и любого набора чисел $\{\mu_{i,k}\}_1^K$ существуют числа $\lambda_{i,K} > 0, C_{i,K}^{(0)} > 0$ и два непрерывно дифференцируемых решения $F_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda)$ соответствующего уравнения* (6)*, которые для всех $\lambda \neq 0$ и $z \in G$ могут быть представлены в виде*

$$F_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda) = C_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda) \exp\{\pm\lambda(z - z_i)\}, \frac{dF_{\pm K}^{(i)}}{dz} = \pm\lambda E_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda) \exp\{\pm\lambda(z - z_i)\}, \tag{10}$$

$$C_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda) := 1 + \sum_{k=1}^{K} (\pm 1)^k \frac{C_{i,k}(z)}{\lambda^k} + (\pm 1)^{K+1} \frac{B_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda)}{\lambda^{K+1}}, \tag{11}$$

$$E_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda) := 1 + \sum_{k=1}^{K} (\pm 1)^k \frac{C_{i,k}(z) + C'_{i,k-1}(z)}{\lambda^k} + (\pm 1)^{K+1} \frac{H_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda)}{\lambda^{K+1}}, \tag{12}$$

$$\begin{gathered} C'_{i,k}(z) := -(C''_{i,k-1}(z) + Q_i(z) C_{i,k-1}(z))/2, \\ C_{i,0}(z) := 1, \qquad C_{i,k}(z_i) = \mu_{i,k} \qquad (k = \overline{1, K}). \end{gathered} \tag{13}$$

Причём если $|\lambda| \geqslant \lambda_{i,K}$, то $F_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda)$ — линейно независимые решения (6) *в $\boldsymbol{C}$ и для всех $z \in L_i$ (L_i — отрезок, соединяющий точки z_i и z_{i+1}):*

$$|B_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda)| \leqslant C_{i,K}^{(0)}, \qquad |H_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda)| \leqslant C_{i,K}^{(0)}, \tag{14}$$

$$|C_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda) - 1| \leqslant 1/4, \qquad |E_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda) - 1| \leqslant 1/4. \tag{15}$$

Доказательство. Формулы (10)–(13) проверяются подстановкой в (6), а оценки (14), (15) на отрезке L_i следуют из известных результатов по асимптотическому разложению при $|\lambda| \to \infty$ решений обобщенных уравнений Штурма – Лиувилля на отрезке действительной оси [10]. $\square$

Символами $O(1)$ и $\hat{O}(1)$ будем обозначать соответственно функции и матрицы функций параметра λ, конкретный вид которых для нас не важен, ограниченные при $|\lambda| > \lambda_{cr}$, где λ_{cr} – конечная величина (разная для разных функций и матриц).

Лемма 5. *Пусть функция Q является кусочно-целой на спрямляемой кривой γ, соединяющей точки z_0 и z_f. Тогда существует такое целое число $K_0 \geqslant 2$, что для любого целого $K \geqslant K_0$ существует такое конечное $\lambda_K > 0$, что при $|\lambda| \geqslant \lambda_K$ матрица $\hat{P}(\gamma, z_f, z_0)$ может быть записана в виде*

$$\hat{P}(\gamma, z_f, z_0) = \hat{C}^{(f)}\hat{T}^{(N)}\hat{T}^{(N-1)}\ldots\hat{T}^{(2)}\hat{T}^{(1)}\hat{T}^{(0)}\hat{A}^{(0)}. \qquad (16)$$

В (16) $\hat{T}^{(0)} = \hat{I}$ *(единичная матрица),*

$$\hat{A}^{(0)} = -\frac{1}{D_K^{(0)}}\begin{pmatrix} \lambda E_{-K}^{(0)}(z_0,\lambda) & C_{-K}^{(0)}(z_0,\lambda) \\ \lambda E_{+K}^{(0)}(z_0,\lambda) & -C_{+K}^{(0)}(z_0,\lambda) \end{pmatrix}, \qquad (17)$$

$$\hat{C}^{(f)} = \begin{pmatrix} C_{+K}^{(N)}(z_{N+1},\lambda)\exp(\lambda\Delta z_N) & C_{-K}^{(N)}(z_{N+1},\lambda)\exp(-\lambda\Delta z_N) \\ \lambda E_{+K}^{(N)}(z_{N+1},\lambda)\exp(\lambda\Delta z_N) & -\lambda E_{-K}^{(N)}(z_{N+1},\lambda)\exp(-\lambda\Delta z_N) \end{pmatrix}, \qquad (18)$$

$$\hat{T}^{(n)} = \hat{T}_0^{(n)}\begin{pmatrix} \exp(\lambda\Delta z_{n-1}) & 0 \\ 0 & \exp(-\lambda\Delta z_{n-1}) \end{pmatrix} \qquad (n = \overline{1,N} \text{ при } N \geqslant 1), \qquad (19)$$

где Δz_i $(i = \overline{0,N})$ *определены в* (7). *В* (17) *и* (19) *соответственно*

$$D_K^{(0)} = -\lambda(C_{+K}^{(0)}(z_0,\lambda)E_{-K}^{(0)}(z_0,\lambda) + C_{-K}^{(0)}(z_0,\lambda)E_{+K}^{(0)}(z_0,\lambda)) \neq 0,$$

$$\hat{T}_0^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 + C_{-K}^{(n-1)}(z_n,\lambda)W_{+K}^{(n)}(\lambda) & C_{-K}^{(n-1)}(z_n,\lambda)W_{-K}^{(n)}(\lambda) \\ -C_{+K}^{(n-1)}(z_n,\lambda)W_{+K}^{(n)}(\lambda) & 1 - C_{+K}^{(n-1)}(z_n,\lambda)W_{-K}^{(n)}(\lambda) \end{pmatrix} + \frac{\hat{O}(1)}{\lambda^{K+1}},$$

причём при $|\lambda| \geqslant \lambda_K$ *функции* $W_{\pm K}^{(n)}(\lambda)$ *можно представить в виде*

$$W_{\pm K}^{(n)}(\lambda) = \pm\left(\mp\frac{1}{2\lambda}\right)^{m_n+2}\delta_n\left(1 + \frac{O(1)}{\lambda}\right) \neq 0 \qquad \left(n = \overline{1,N} \text{ при } N \geqslant 1\right), \qquad (20)$$

где целые числа m_n $(m_n \in [0, K_0 - 2])$ *и комплексные числа* $\delta_n \neq 0$ *не зависят от* λ.

Доказательство. По лемме 4 для всех $K \in \mathbf{N}$ существуют такие числа $\lambda_{i,K} > 0$ $(i = \overline{0,N})$, что при $|\lambda| \geqslant \lambda_{i,K}$ решения $u_1(\gamma,z), u_2(\gamma,z)$ уравнения (1) на участке кривой γ, соединяющем точки z_i и z_{i+1}, можно представить как линейную комбинацию решений $F_{\pm K}^{(i)}(z,\lambda)$ с

$$\begin{gathered} \{C_{0,k}(z_0)\}_1^K = 0 \quad (\text{при } \ i = 0), \\ C_{i,k}(z_i) = C_{i-1,k}(z_i) \quad (\text{при } \ N \geqslant 1, \ i = \overline{1,N}, \ k = \overline{1,K}). \end{gathered} \qquad (21)$$

Поэтому при $|\lambda| \geqslant \lambda_K := \max\{\lambda_{i,K}, \ i = \overline{0,N}\}$, пользуясь граничными условиями (3) и непрерывной дифференцируемостью $u_1(\gamma,z)$, $u_2(\gamma,z)$ в точках обобщенного скачка потенциала, получим, что для $\hat{P}(\gamma, z_f, z_0)$ справедливо представление (16), в котором матрицы $\hat{A}^{(0)}, \hat{C}^{(f)}$ и $\hat{T}^{(n)}(n = \overline{1, N}$ при $N \geqslant 1)$ удовлетворяют соотношениям (17)–(19). При этом $C^{(n)}_{\pm K}$ и $E^{(n)}_{\pm K}$ $(n = \overline{0, N})$ в силу (15) не равны нулю в точках z_n и z_{n+1}, а

$$W^{(n)}_{\pm K}(\lambda) = \frac{1}{D^{(n)}_K} \sum_{k=1}^{K-1} (\pm 1)^k \frac{C'_{n,k}(z_n) - C'_{n-1,k}(z_n)}{\lambda^k} \qquad (n = \overline{1, N} \quad \text{при} \quad N \geqslant 1), \qquad (22)$$

где $D^{(n)}_K = -\lambda(C^{(n)}_{+K}(z_n, \lambda)E^{(n)}_{-K}(z_n, \lambda) + C^{(n)}_{-K}(z_n, \lambda)E^{(n)}_{+K}(z_n, \lambda))$. Из (11)–(14) имеем:

$$D^{(i)}_K = -2\lambda \left(1 + \frac{O(1)}{\lambda}\right) \neq 0 \qquad (i = \overline{0, N}). \qquad (23)$$

Остаётся доказать справедливость (20). При $N \geqslant 1$ для всех $n \in \{1, \ldots, N\}$ по определению 1 функции Q_{n-1} и Q_n различны. Значит, существуют целое число $m_n \geqslant 0$ и комплексное число $\delta_n \neq 0$ такие, что при $z = z_n$

$$\frac{d^m Q_n}{dz^m} - \frac{d^m Q_{n-1}}{dz^m} = \delta_n \neq 0 \qquad \text{при} \quad m = m_n; \qquad (24)$$

$$\frac{d^m Q_n}{dz^m} - \frac{d^m Q_{n-1}}{dz^m} = 0 \qquad \text{при } m = \overline{0, m_n - 1}, \text{ если } m_n \geqslant 1. \qquad (25)$$

Кроме того, для всех $n \in \{1, \ldots, N\}$ в силу (13), (21), (24) и (25)

$$\left(\frac{d^m(C_{n,1}(z) - C_{n-1,1}(z))}{dz^m}\right)_{z=z_n} = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant m \leqslant m_n, \\ -\delta_n/2, & m = m_n + 1. \end{cases} \qquad (26)$$

При $m_n = 0$ (20) непосредственно следует из (22), (23) и (26). Пользуясь (13), (21), (25), (26) и методом индукции по k, получим, что для $m_n \geqslant 1$ и $k = \overline{1, m_n + 1}$

$$\left(\frac{d^m \left(C_{n,k}(z) - C_{n-1,k}(z)\right)}{dz^m}\right)_{z=z_n} = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant m \leqslant m_n + 1 - k, \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^k \delta_n, & m = m_n + 2 - k. \end{cases}$$

Полагая в последнем равенстве $m = 1$ и учитывая (22), (23), получим (20) при $m_n \geqslant 1$ и $K \geqslant m_n + 2$. Полагая $K_0 := 2 + \max\{m_n, n = \overline{1, N}\}$, получаем, что (20) выполнено для любого целого $K \geqslant K_0$ и $|\lambda| \geqslant \lambda_K$. □

Будем обозначать $(N+1)$-мерные вектора буквой со стрелкой сверху, а их скалярное произведение — круглыми скобками. Например, $\vec{z} := (\Delta z_0, \Delta z_1, \ldots, \Delta z_N)$; $\vec{\alpha}_s := (\alpha^{(s)}_0, \alpha^{(s)}_1, \ldots, \alpha^{(s)}_N)$, где $\alpha^{(s)}_i \in \{\pm 1\}$ $(i = \overline{0, N})$, а $s = 1 + \sum_{i=0}^{N} (1 + \alpha^{(s)}_i) 2^{i-1}$, т.е. $s \in \{1, \ldots, 2^{N+1}\}$ (как в двоичной системе счисления); $(\vec{z}, \vec{\alpha}_s) = \sum_{i=0}^{N} \alpha^{(s)}_i \Delta z_i$.

Следствие 6. *В условиях леммы 5 при $K \geqslant K_0$ и $|\lambda| \geqslant \lambda_K$ элементы матрицы $\hat{P}(\gamma, z_f, z_0)$ могут быть записаны в виде*

$$p_{\alpha\beta} = \sum_{s=1}^{2^{N+1}} d^{(s)}_{\alpha\beta}(\lambda) \exp\{\lambda h_s\} \quad (\alpha, \beta \in \{1, 2\}), \qquad (27)$$

где $h_s = (\vec{z}, \vec{\alpha}_s)$ не зависят от λ и все функции $d^{(s)}_{\alpha\beta}(\lambda)$ можно представить в виде

$$d^{(s)}_{\alpha\beta}(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{m^{(s)}_{\alpha\beta}} \delta^{(s)}_{\alpha\beta} \left(1 + \frac{O(1)}{\lambda}\right) \neq 0 \qquad (\alpha, \beta \in \{1, 2\}, s = \overline{1, 2^{N+1}}),$$

где целые числа $m^{(s)}_{\alpha\beta} \geqslant 0$ и комплексные числа $\delta^{(s)}_{\alpha\beta} \neq 0$ не зависят от λ.

Часть показателей экспонент в (27) может совпадать, и возникает вопрос: не сокращаются ли в (27) коэффициенты при экспонентах, наиболее быстро растущих с ростом $|\lambda|$? Для простых кривых отрицательный ответ даёт следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть* $h_{\max} := \max\{|h_s|,\ s = \overline{1, 2^{N+1}}\}$, *где* $h_s := (\vec{z}, \vec{\alpha}_s)$. *Тогда существуют хотя бы два различных* $s_0 \in \{1, \ldots, 2^{N+1}\}$ *таких, что* $|h_{s_0}| = h_{\max}$, *причём если* $\vec{z} \neq \vec{0}$, *то* $h_{\max} > 0$. *Кроме того, при выполнении* (7) $h_{s_0} \neq h_s$ *для любого* h_{s_0} *такого, что* $|h_{s_0}| = h_{\max}$ *и для всех* $s \in \{1, \ldots, 2^{N+1}\} \backslash \{s_0\}$.

Доказательство. Существование хотя бы одного $s_0 \in \{1, \ldots, 2^{N+1}\} : |h_{s_0}| = h_{\max}$ следует из конечности множества $\{h_s, s = \overline{1, 2^{N+1}}\}$. Так как множество $\{\vec{\alpha}_s, s = \overline{1, 2^{N+1}}\}$ можно разбить на пары векторов, сумма которых равна нулю, то число таких s_0, что $|h_{s_0}| = h_{\max}$, всегда чётное. Допустим, что $h_{\max} = 0$. Тогда все $h_s = 0$, и компоненты вектора $\vec{z}$ удовлетворяют, в частности, системе линейных однородных уравнений вида: в уравнении под номером n $(n = \overline{1, N})$ коэффициент при Δz_n равен минус 1, а остальные коэффициенты равны 1. В последнем $N + 1$ уравнении все коэффициенты равны 1. Такая система имеет только тривиальное решение, поэтому $h_{\max} = 0$, только если $\vec{z} = \vec{0}$.

Докажем вторую часть леммы. Пусть существует $s_1 \in \{1, \ldots, 2^{N+1}\} \backslash \{s_0\}$: $(\vec{z}, (\vec{\alpha}_{s_1} - \vec{\alpha}_{s_0})) = 0$. В силу (7) $\Delta z_i \neq 0$ для всех $i = \overline{0, N}$, поэтому $\vec{\alpha}_{s_0}$ и $\vec{\alpha}_{s_1}$ имеют минимум две не совпадающие (противоположные по знаку) компоненты с номерами $0 \leqslant i_1 < \ldots < i_J \leqslant N$. Положим $\vec{\epsilon}_0 := (\vec{\alpha}_{s_1} + \vec{\alpha}_{s_0})/2$. Тогда $h_{\max} = |(\vec{z}, \vec{\epsilon}_0)| > 0$ (в силу (7) и первой части леммы) и у $\vec{\epsilon}_0$ не равны нулю (равны ± 1) только компоненты с номерами, отличными от $i_1, i_2, \ldots, i_J$. Значит, $2 \leqslant J \leqslant N$, что возможно, только если $N \geqslant 2$.

Рассмотрим все вектора вида $\vec{\beta}_p = (\beta_0, \ldots, \beta_N)$, где $\beta_i \in \{\pm 1\}$ при $i \in \{i_1, \ldots, i_J\}$, а остальные компоненты равны нулю $(p = \overline{1, 2^J})$. Пусть для всех $p \in \{1, \ldots, 2^J\}$ $|(\vec{z}, \vec{\beta}_p)| = 0$. Тогда $\Delta z_{i_1}, \Delta z_{i_2}, \ldots, \Delta z_{i_J}$ удовлетворяют, в частности, J линейным однородным уравнениям следующего вида: в уравнении под номером j $(j = \overline{1, J-1})$ коэффициент при Δz_{i_j} равен минус 1, а остальные коэффициенты равны 1. В последнем уравнении все коэффициенты равны 1. Очевидно, такая система имеет только тривиальное решение, что противоречит (7). Значит, среди векторов $\vec{\beta}_p$ $(p = \overline{1, 2^J})$ есть хотя бы один $\vec{\beta}_{p_0}$: $|(\vec{z}, \vec{\beta}_{p_0})| > 0$. Рассмотрим два вектора: $\vec{\eta}_{\pm} = \vec{\epsilon}_0 \pm \vec{\beta}_{p_0}$. По построению они оба входят в множество $\{\vec{\alpha}_s, s = \overline{1, 2^{N+1}}\}$. Причём $(\vec{z}, \vec{\eta}_{\pm}) = (\vec{z}, \vec{\epsilon}_0) \pm (\vec{z}, \vec{\beta}_{p_0})$ и $|(\vec{z}, \vec{\beta}_{p_0})| > 0$. Поэтому $\max\{|(\vec{z}, \vec{\eta}_+)|, |(\vec{z}, \vec{\eta}_-)|\} > |(\vec{z}, \vec{\epsilon}_0)| = h_{\max}$ (при геометрическом представлении комплексных чисел использованное неравенство эквивалентно тому, что медиана всегда меньше большей из двух сторон треугольника, между которыми она лежит). Полученное противоречие доказывает вторую часть леммы 6. □

Лемма 7. *Пусть у передаточных матриц* $\hat{P}$ *и* $\hat{\widetilde{P}}$ *на всей комплексной плоскости параметра* ρ *совпадают первые или вторые строки. Тогда хотя бы один из элементов матрицы* $\hat{P}^{(0)} := \hat{\widetilde{P}}(\hat{P})^{-1}$ *равен нулю на всей комплексной плоскости* ρ.

Доказательство. Перемножая матрицы, получим:

$$\hat{P}^{(0)} = \begin{pmatrix} p_{22}\widetilde{p}_{11} - p_{21}\widetilde{p}_{12} & p_{11}\widetilde{p}_{12} - p_{12}\widetilde{p}_{11} \\ p_{22}\widetilde{p}_{21} - p_{21}\widetilde{p}_{22} & p_{11}\widetilde{p}_{22} - p_{12}\widetilde{p}_{21} \end{pmatrix}.$$

Откуда следует, что если у матриц $\hat{P}$ и $\hat{\widetilde{P}}$ совпадают элементы первой строки, то $p_{12}^{(0)} = 0$, а если второй, то $p_{21}^{(0)} = 0$. □

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Пусть в условиях теоремы 1 после исключения всех «невидимых петель» кривая γ превращается в простую кривую $\gamma_{\min}$. Тогда $\hat{P}$ можно рассчитать вдоль $\gamma_{\min}$. Из леммы 6 следует, что в этом случае все показатели экспонент в правых частях равенств (27) с максимальными (при данном $\lambda \neq 0$) модулями различны и не равны нулю, и существует минимум два противоположно направленных луча, исходящих из нуля комплексной плоскости параметра λ (и, значит, минимум один луч, исходящий из нуля комплексной плоскости параметра ρ), такие, что среди 2^{N+1} слагаемых в (27) для каждого элемента $\hat{P}$ существует ровно одно слагаемое, имеющее наибольший экспоненциальный рост при $\lambda \to \infty$ ($\rho \to \infty$) вдоль каждого из этих лучей, и значит, каждый из элементов матрицы $\hat{P}$ при этом неограниченно возрастает. Последнее противоречит условию теоремы 1. Значит, после исключения всех «невидимых петель» кривая γ вырождается в точку, и, следовательно, $\hat{P} \equiv \hat{I}$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Докажем теорему 2 методом от противного, рассмотрев два случая.

Случай 1. Пусть у передаточных матриц $\hat{P}^{(1)}$ и $\hat{P}^{(2)}$ при всех $\rho \in \mathbf{C}$ совпадает одна из строк. Из (4), (5) следует, что передаточная матрица уравнения (1) вдоль кривой γ, получающейся при последовательном обходе сначала кривой $\gamma^{(1)}$ (с заданным на ней кусочно-целым потенциалом) от точки $z^{(1)}_{N^{(1)}+1}$ к точке z_0, а затем кривой $\gamma^{(2)}$ от точки z_0 к точке $z^{(2)}_{N^{(2)}+1}$, будет равна $\hat{P} = \hat{P}^{(2)}\,(\hat{P}^{(1)})^{-1}$. Тогда в силу леммы 7 и теоремы 1 кривая γ после удаления «невидимых петель» всех уровней вырождается в точку. По условию $z^{(1)}_0 = z^{(2)}_0 = z_0$ и простые наборы ключевых данных $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ различны. Это означает, что существует целое число $i_0 \geqslant 1$ такое, что для всех $i = \overline{0, i_0 - 1}$ $z^{(2)}_i = z^{(1)}_i = z_i$ и при $i_0 \geqslant 2$ для всех $i = \overline{0, i_0 - 2}$ $\quad Q^{(2)}_i = Q^{(1)}_i$, но при этом $z^{(2)}_{i_0} \neq z^{(1)}_{i_0}$ или (и) $Q^{(2)}_{i_0-1} \neq Q^{(1)}_{i_0-1}$. Пусть для определённости $N^{(1)} \leqslant N^{(2)}$.

Допустим, что $i_0 = N^{(1)} + 1$. Тогда после удаления всех невидимых петель у кривой γ останется только участок простой кривой $\gamma^{(2)}$, соединяющий точки $z^{(2)}_{N^{(1)}+1}$ и $z^{(2)}_{N^{(2)}+1}$. Поскольку γ должна вырождаться в точку, то $N^{(1)} = N^{(2)}$, т.е. наборы ключевых данных $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ совпадают, что противоречит условию теоремы.

Пусть $i_0 < N^{(1)} + 1$, а функции $Q^{(1)}_{i_0-1}$ и $Q^{(2)}_{i_0-1}$ различны. Тогда после удаления у кривой γ «невидимых петель», образованных участками кривых $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$ от точки z_0 до точки z_{i_0-1}, оставшаяся кривая $\gamma_{\min}$ сначала будет совпадать с участком кривой $\gamma^{(1)}$ от точки $z^{(1)}_{N^{(1)}+1}$ до точки z_{i_0-1}, а затем с участком кривой $\gamma^{(2)}$ от точки z_{i_0-1} до точки $z^{(2)}_{N^{(2)}+1}$. Причём точка z_{i_0-1} будет точкой обобщенного скачка потенциала Q на кривой $\gamma_{\min}$ и, значит (так как по условию наборы ключевых данных $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ простые), кривой $\gamma_{\min}$ будет соответствовать простой набор ключевых данных, что противоречит тому, что она должна вырождаться в точку. Следовательно,

$$Q^{(1)}_{i_0-1} = Q^{(2)}_{i_0-1}. \tag{28}$$

Допустим, что $i_0 < N^{(1)} + 1$, выполнено (28), но $z^{(2)}_{i_0} \neq z^{(1)}_{i_0}$. Тогда опять же кривой γ будет соответствовать простой набор ключевых данных. Следовательно,

$$z^{(1)}_{i_0} = z^{(2)}_{i_0}. \tag{29}$$

Формулы (28), (29) противоречат определению числа i_0, что доказывает теорему в случае 1.

Случай 2. Обозначим $z_f^{(\alpha)} := z_{N^{(\alpha)}+1}^{(\alpha)}$ $(\alpha \in \{1,2\})$. Пусть у передаточных матриц $\hat{P}^{(1)}$ и $\hat{P}^{(2)}$ при всех $\rho \in \mathbf{C}$ совпадают элементы одного из столбцов. Тогда в силу (5) у передаточных матрицы $\hat{P}_{inv}^{(1)}(\gamma^{(1)}, z_0, z_f^{(1)})$ и $\hat{P}_{inv}^{(2)}(\gamma^{(2)}, z_0, z_f^{(2)})$ совпадают элементы одной из строк. Пусть $\tau := z_f^{(1)} - z_f^{(2)}$. Сделав в уравнении (1) с потенциалом $Q^{(2)}(z)$ замену переменной: $x = z + \tau$, после обратного переобозначения x на z получим, что матрица $\hat{P}_{inv}^{(2)}$ является передаточной для уравнения (1) с потенциалом $Q^{(2)}(z-\tau)$ между точками $z_f^{(1)}$ и $z_0 + \tau$ простой кривой, получающейся из $\gamma^{(2)}$ параллельным переносом. Пользуясь теоремой 2, доказанной выше для случая 1, получаем:

$$\begin{gathered} N^{(2)} = N^{(1)} = N, \qquad Q_i^{(2)}(z-\tau) = Q_i^{(1)}(z), \\ z_i^{(2)} + \tau = z_i^{(1)} \qquad (i = \overline{0,N}), \qquad z_{N+1}^{(2)} + \tau = z_{N+1}^{(1)}. \end{gathered} \tag{30}$$

По условию теоремы $z_0^{(2)} = z_0^{(1)}$, поэтому из (30) при $i = 0$ следует, что $\tau = 0$. Но при $\tau = 0$ (30) противоречит тому, что $W^{(1)} \neq W^{(2)}$. Это противоречие доказывает теорему.

Благодарности. Автор благодарен В. А. Юрко и М. Ю. Игнатьеву за полезные обсуждения полученных результатов.

Библиографический список

1. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 331 с.
2. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма – Лиувилля. М. : Наука, 1984. 240 с.
3. *Yurko V. A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht : VSP, 2002. 316 p.
4. *Голубков А. А., Макаров В. А.* Обратная спектральная задача для обобщенного уравнения Штурма – Лиувилля с комплекснозначными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 10. С. 1498–1502.
5. *Голубков А. А., Макаров В. А.* Восстановление координатной зависимости тензора диэлектрической проницаемости диагонального вида одномерно-неоднородной среды // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2010. № 3. С. 32–36.
6. *Ангелуц А. А., Голубков А. А., Макаров В. А., Шкуринов А. П.* Восстановление спектра диэлектрической проницаемости однородной среды в терагерцовом диапазоне частот по измерениям угловых зависимостей коэффициентов пропускания плоскопараллельной пластины // Письма в ЖЭТФ. 2011. Т. 93, № 4. С. 209–212.
7. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма – Лиувилля и Дирака. М. : Наука, 1988. 432 с.
8. *Ишкин Х. К.* О необходимых условиях локализации спектра задачи Штурма—Лиувилля на кривой // Матем. заметки. 2005. Т. 78, № 1. С. 72–84. DOI : 10.4213/mzm2563
9. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1983. 352 с.
10. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Изд-во иностр. лит., 1958. 475 с.
11. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1968. 465 с.
12. *Ишкин Х. К.* Критерий локализации спектра оператора Штурма — Лиувилля на кривой // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, № 1. С. 52–88.

13. *Ишкин Х. К.* О критерии однозначности решений уравнения Штурма – Лиувилля // Матем. заметки. 2008. Т. 84, № 4. С. 552–566. DOI : 10.4213/mzm4173
14. *Ишкин Х. К.* О критерии безмонодромности уравнения Штурма — Лиувилля // Матем. заметки. 2013. Т. 94, № 4. С. 552–568. DOI : 10.4213/mzm10319

Образец для цитирования:
Голубков А. А. Обратная задача для операторов Штурма – Лиувилля в комплексной плоскости // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 2. С. 144–156. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-144-156

Inverse Problem for Sturm – Liouville Operators in the Complex Plane

A. A. Golubkov

Andrey A. Golubkov, https://orcid.org/0000-0002-5265-1310, The Advanced Educational Scientific Center (faculty) — Kolmogorov's boarding school of Moscow State University, 11, Kremenchugskaya Str., Moscow, 121357, Russia, andrej2501@yandex.ru

The inverse problem for the standard Sturm – Liouville equation with a spectral parameter ρ and a potential function, piecewise-entire on a rectifiable curve $\gamma \subset \mathbf{C}$, on which only the starting point is given, is studied for the first time. A function Q that is bounded on a curve γ is piecewise-entire on it if γ can be splitted by a finite number of points into parts on which Q coincides with entire functions, different in neighboring parts. The split points, the initial and final points of the curve are called critical points. The problem is to find all the critical points of the curve γ and the potential on it by the column or row of the transfer matrix $\hat{P}$ along γ. On the basis of the obtained asymptotics of matrix $\hat{P}$ for $|\rho| \to \infty$, it is proved that if at least one of its elements is bounded for $\forall \rho \in \mathbf{C}$, then the curve γ degenerates to a point after removing all „invisible loops". An „invisible loop" is a loop of the curve γ (with a given piecewise-entire function) whose knot coincides with two successive critical points. The uniqueness of the solution of the inverse problem for curves without „invisible loops" is proved. On the example of the inverse problem for the equation $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r(x)}\frac{dy}{dx}\right) + \left(q(x) - r(x)\lambda^2\right) y(x) = 0$ with a piecewise-entire function $q(x)$ and a piecewise constant function $r(x) \neq 0$ on the segment of the real axis, the usefulness of the results obtained in the article is shown for the study of inverse problems for generalized Sturm – Liouville equations, which can be reduced to the type studied in the article.

Key words: Sturm – Liouville equation on a curve, piecewise-entire potential function, transfer matrix, asymptotics, inverse spectral problem.

Acknowledgements: The author is grateful to Vyacheslav A. Yurko and Mikhail Yu. Ignatiev for useful discussions of the results obtained.

References

1. Marchenko V. A. *Sturm – Liouville operators and their applications*. Birkhäuser, 1986. 393 p. (Russ.ed. : Kiev, Naukova Dumka, 1977. 331 p.)
2. Levitan B. M. *Inverse Sturm – Liouville problems*. Utrecht, VNU Sci. Press, 1987. 246 p. (Russ.ed. : Moscow, Nauka, 1984. 240 p.)
3. Yurko V. A. *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht, VSP, 2002. 316 p.
4. Golubkov A. A., Makarov V. A. Inverse spectral problem for a generalized Sturm-– Liouville equation with complex-valued coefficients. *Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 10, pp. 1514–1519. DOI : 10.1134/S0012266111100156

5. Golubkov A. A., Makarov V. A. Reconstruction of the coordinate dependence of the diagonal form of the dielectric permittivity tensor of a one-dimensionally inhomogeneous medium. *Moscow University Physics Bulletin*, 2010, vol. 65, no. 3, pp. 189–194. DOI : 10.3103/S0027134910030070
6. Angeluts A. A., Golubkov A. A., Makarov V. A., Shkurinov A. P. Reconstruction of the spectrum of the relative permittivity of the plane-parallel plate from the angular dependences of its transmission coefficients. *JETP Letters*, 2011, vol. 93, no. 4, pp. 191—194. DOI : 10.1134/S0021364011040047
7. Levitan B. M., Sargsyan I. S. *Sturm – Liouville and Dirac Operators*. Mathematics and Its Applications (Soviet Series), vol. 59. Dordrecht, Springer, 1990. 350 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1988. 432 p.). DOI 10.1007/978-94-011-3748-5
8. Ishkin Kh. K. Necessary Conditions for the Localization of the Spectrum of the Sturm – Liouville Problem on a Curve. *Math. Notes*, 2005, vol. 78, no. 1, pp. 64–75. DOI: 10.1007/s11006-005-0100-5.
9. Fedoryuk M. V. *Asymptotic analysis: linear ordinary differential equations*. Berlin, Springer–Verlag, 1993. 363 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1983. 352 p.)
10. Coddington E. A., Levinson N. *Theory of ordinary differential equations*. New York, McGraw-Hill, 1955. 429 p. (Russ. ed.: Moscow, Izd-vo inostr. lit., 1958. 475 p.)
11. Wasow W. *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*. New York, Dover Publications, 1988. 384 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1968. 465 p.)
12. Ishkin Kh. K. Localization criterion for the spectrum of the Sturm – Liouville operator on a curve. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2017, vol. 28, no. 1, pp. 37–63. DOI: 10.1090/spmj/1438
13. Ishkin Kh. K. On the uniqueness criterion for solutions of the Sturm – Liouville equation. *Math. Notes*, 2008, vol. 84, no. 4, pp. 515—528. DOI : 10.1134/S000143460809023X
14. Ishkin Kh. K. On a trivial monodromy criterion for the Sturm – Liouville equation. *Math. Notes*, 2013, vol. 94, no. 4, pp. 508–523. DOI : 10.1134/S0001434613090216

Cite this article as:
Golubkov A. A. Inverse Problem for Sturm – Liouville Operators in the Complex Plane. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 2, pp. 144–156 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-144-156