УДК 519.633

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕНУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ

В. П. Курдюмов, А. П. Хромов, В. А. Халова

Курдюмов Виталий Павлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, Kurdyumov47@yandex.ru

Хромов Август Петрович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, KhromovAP@info.sgu.ru

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, KhalovaVA@gmail.com

Исследуется смешанная задача для волнового уравнения с непрерывным комплексным потенциалом в случае ненулевой начальной скорости $u_t(x,0) = \psi(x)$ и двух типов двухточечных граничных условий: концы закреплены и когда каждое из граничных условий содержит производную по x. Резольвентным подходом с использованием рекомендаций А. Н. Крылова по ускорению сходимости рядов Фурье получается методом Фурье классическое решение в случае $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$ (уравнение удовлетворяется почти всюду). Показывается также, что в случае, когда $\psi(x) \in L[0,1]$, ряд формального решения для задачи с закрепленными концами сходится равномерно в любой ограниченной области, а для второй задачи он сходится лишь всюду, и для обеих задач является обобщенным решением в равномерной метрике.

Ключевые слова: волновое уравнение, формальное решение, спектральная задача, резольвента.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-157-171

ВВЕДЕНИЕ

Для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \qquad x \in [0,1], \qquad t \in (-\infty, \infty) \tag{1}$$

исследуется смешанная задача с начальными условиями

$$u(x,0) = 0, \qquad u'_t(x,0) = \psi(x) \tag{2}$$

и граничными условиями двух следующих видов:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{3}$$

$$u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0, \tag{4}$$

где $q(x) \in C[0,1]$ и комплекснозначна, α_i, β_i $(i = 1,2)$ — комплекснозначные числа.

В работе используется резольвентный подход, впервые предложенный одним из авторов [1] с использованием приема А. Н. Крылова [2] ускорения сходимости рядов Фурье. Этот подход позволил в [1, 3] получить классическое решение (т. е. дважды непрерывно дифференцируемое) сформулированных задач для начальных условий $u(x,0) = \varphi(x)$, $u'_t(x,0) = 0$ при минимальных требованиях гладкости на $\varphi(x)$, а в [4, 5] — для начальных условий (2) при минимальных требованиях на $\psi(x)$. В [6] исследовалось поведение формального решения рассматриваемых задач при ослаблении требований на $\varphi(x)$ в условиях $u(x,0) = \varphi(x)$, $u'_t(x,0) = 0$. В настоящей работе, как и в [6], мы понижаем требования гладкости на $\psi(x)$. Для случая, когда $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$ ($W_2^1[0,1] = \{f(x)|\ f(x)$ абсолютно непрерывна на $[0,1]$ и $f'(x) \in L_2[0,1]\}$), мы построим классическое решение этих задач (в этом случае уравнение (1) выполняется почти всюду (п. в.)). В случае, когда $\psi(x) \in L[0,1]$, покажем, что для задачи с закрепленными концами ряд формального решения сходится равномерно в любой ограниченной области, а для второй задачи он сходится лишь всюду, и для обеих задач является обобщенным решением в равномерной метрике. Мы рассматриваем также случай, когда $\psi(x) \in L_2[0,1]$. При этом свойства обобщенного решения улучшаются: для обеих задач формальный ряд сходится равномерно, удовлетворяет начальным и граничным условиям, являясь обобщенным решением в равномерной метрике. Отметим, что информация обзорного характера о исследованиях методом Фурье задач математической физики содержится, в частности, в книгах В. А. Стеклова [7], И. Г. Петровского [8], В. И. Смирнова [9], О. А. Ладыженской [10] и В. А. Ильина [11] (см. также [12]).

1. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(3) ДЛЯ $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$

Предполагаем, что в задаче (1)–(3) $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$ и $\psi(0) = \psi(1) = 0$. Метод Фурье связан со спектральной задачей для оператора L:

$$Ly = -y'' + q(x)y, \qquad y(0) = y(1) = 0.$$

Собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, простые, с асимптотикой [13, с. 74, 75]

$$\lambda_n = \rho_n^2 \qquad (\operatorname{Re}\rho_n \geqslant 0), \qquad \rho_n = n\pi + o(1).$$

Обозначим $\tilde{\gamma}_n = \{\rho|\ |\rho - n\pi| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, а $n \geqslant n_0$ и n_0 таково, что при всех $n \geqslant n_0$ внутрь $\tilde{\gamma}_n$ попадает лишь по одному ρ_n. Пусть γ_n — образ $\tilde{\gamma}_n$ в λ-плоскости ($\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \geqslant 0$). Обозначим через $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ резольвенту оператора L (λ — спектральный параметр, E — единичный оператор).

Формальное решение задачи (1)–(3) по методу Фурье представим в виде [14, 15]

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi)(x)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda, \tag{5}$$

где $r > 0$ фиксировано, на контуре $|\lambda| = r$ нет собственных значений, все γ_n при $n \geqslant n_0$ находятся вне $|\lambda| = r$. Представление (5) не ново. Главное сейчас для нас, что радиус $\tilde{\gamma}_n$ один и тот же для всех $n \geqslant n_0$. Приступаем к преобразованию (5), используя идею А. Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье.

Обозначим через $z_1(x,\rho)$, $z_2(x,\rho)$ решения уравнения

$$y''(x) - q(x)y(x) + \rho^2 y(x) = 0$$

с начальными условиями

$$z_1(0,\rho) = z_2'(0,\rho) = 1, \qquad z_1'(0,\rho) = z_2(0,\rho) = 0.$$

Теорема 1. *Имеет место формула [6, теорема 2]*

$$R_\lambda f = z_2(x,\rho)(f,z_1) - v(x,\rho)(f,z_2) - (M_\rho f)(x), \tag{6}$$

где $v(x,\rho) = \dfrac{z_2(x,\rho)z_1(1,\rho)}{z_2(1,\rho)}$, $(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$, $(M_\rho f)(x) = \int\limits_0^x M(x,t,\rho)f(t)\,dt$, $M(x,t,\rho) = \begin{vmatrix} z_1(t,\rho) & z_2(t,\rho) \\ z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho) \end{vmatrix}$.

Лемма 1. *Имеет место формула*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right) v(x,\rho)(\psi,z_2)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda. \tag{7}$$

Доказательство очевидно, поскольку первое и последнее слагаемые в [6] являются целыми по λ.

Нужное нам преобразование дается следующей теоремой.

Теорема 2. *Для формального решения имеет место формула*

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t), \tag{8}$$

где

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right) v^0(x,\rho)(\psi,z_2)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda, \tag{9}$$

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right) [v(x,\rho) - v^0(x,\rho)](\psi,z_2)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda, \tag{10}$$

$v^0(x,\rho) = \dfrac{z_2^0(x,\rho)z_1^0(1,\rho)}{z_2^0(1,\rho)}$ *— то же, что и* $v(x,\rho)$, *но взятое теперь для оператора* $L_0 : L_0 y = -y''(x)$, $y(0) = y(1) = 0$. *Таким образом,* $z_1^0(x,\rho) = \cos\rho x$, $z_2^0(x,\rho) = \dfrac{\sin\rho x}{\rho}$.

Доказательство очевидно.

Исследование $u(x,t)$ по формуле (8) опирается на следующую терему.

Теорема 3. *Для* $z_2(x,\rho)$ *имеет место формула*

$$z_2(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + \int\limits_0^x K(x,\tau)\frac{\sin\rho\tau}{\rho}\,d\tau, \tag{11}$$

где $K(x,\tau)$ *непрерывно дифференцируема по* x *и* τ, *причем* $K(x,0) \equiv 0$.

Формула (11) хорошо известна как формула оператора преобразования [16, с. 17, 23].

Лемма 2. *Имеют место формулы*

$$(\psi, z_2) = (\psi_1, z_2^0), \tag{12}$$

$$(\psi, z_2) = \frac{1}{\rho^2}\left[(\psi_1'(\xi)\cos\mu\xi, \cos n\pi\xi) - (\psi_1'(\xi)\sin\mu\xi, \sin n\pi\xi)\right], \tag{13}$$

где $\rho = n\pi + \mu$, $\psi_1(\xi) = \psi(\xi) + \int\limits_\xi^1 K(\tau, \xi)\psi(\tau)$.

Доказательство. На основании формулы (11) получаем:

$$(\psi, z_2) - (\psi, z_2^0) = \left(\psi(\xi), \int\limits_0^\xi K(\xi, \tau)\frac{\sin\rho\tau}{\rho}\,d\tau\right).$$

Отсюда сразу следует (12). Для получения (13) следует провести интегрирование по частям в (ψ_1, z_2^0) и учесть, что $\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0$.

Лемма 3. *Имеет место формула*

$$u_0(x,t) = 2\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\pi}(\psi_1(\xi), \sin n\pi\xi)\sin n\pi x \sin n\pi t. \tag{14}$$

Доказательство. Из формулы (9), учитывая (12), получаем:

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{\sin\rho x\cos\rho\sin\rho t}{\rho^2\sin\rho}(\psi_1(\xi), \sin\rho\xi)\,d\lambda.$$

Отсюда по теореме вычетов [17, с. 85] следует (14).

Лемма 4. *Ряд* $u_0(x,t)$ *сходится абсолютно и равномерно, и для его суммы имеет место формула*

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\tilde\psi(\tau)\,d\tau,$$

где $\tilde\psi(x) = -\tilde\psi(-x)$, $\tilde\psi(x+2) = \tilde\psi(x)$, $\tilde\psi(x) = \psi_1(x)$ *при* $x \in [0,1]$.

Доказательство. Так как $2\sin n\pi x\sin n\pi t = \cos n\pi(x-t) - \cos n\pi(x+t) = n\pi\int\limits_{x-t}^{x+t}\sin n\pi\tau\,d\tau$, то из леммы 3 следует, что

$$u_0(x,t) = \sum_{n=1}^\infty(\psi_1(\xi), \sin n\pi\xi)\int\limits_{x-t}^{x+t}\sin n\pi\tau\,d\tau. \tag{15}$$

Обозначим

$$\tilde\psi(x) = 2\sum_{n=1}^\infty(\psi_1(\xi), \sin n\pi\xi)\sin n\pi x. \tag{16}$$

Так как $\psi_1(\xi) \in W_2^1[0,1]$, $\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0$, то скалярные произведения в (16) имеют оценку α_n/n, где $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$. Поэтому ряд в (16) сходится абсолютно и равномерно на всей оси, и, следовательно, в силу (15) $u_0(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \tilde{\psi}(\tau)\,d\tau$. Так как ортонормированная система $\sqrt{2}\sin n\pi x$ $(n = 1, 2, \ldots)$ полна в $L_2[0,1]$, то ряд (16) сходится к $\psi_1(x)$ при $x \in [0,1]$. Свойства нечетности и периодичности $\tilde{\psi}(x)$ следуют из (16). □

Лемма 5. *Производные* $\dfrac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t^2}$ *и* $\dfrac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2}$ *существуют п. в. в* $Q_T = [0,1] \times \times [-T,T]$ *при любом* $T > 0$ *и для таких* x, t *они совпадают.*

Доказательство проводится как и в [6, лемма 6], если ввести множество $M = \{x|\ x \in [-A,A],\ \tilde{\psi}'(x)$ конечна$\}$ и учесть, что $\tilde{\psi}(x) \in W_2^1[-A,A]$ при любом $A > 0$. □

Из лемм 4 и 5 получается

Теорема 4. *Функция* $u_0(x,t)$ *есть классическое решение эталонной задачи, т. е.* $u_0(x,t)$ *удовлетворяют условиям* (1)–(3) *с функцией* $\psi_1(x)$ *вместо* $\psi(x)$, *когда уравнение* (1) *с* $q(x) = 0$ *удовлетворяется п. в.*

Для исследования ряда $u_1(x,t)$ обозначим

$$a_n(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} [v(x,\rho) - v^0(x,\rho)](\psi, z_2)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda.$$

Тогда $u_1(x,t) = \sum\limits_n u_{1n}(x,t)$, где $u_{1n}(x,t) = a_n(x,t)$ и суммирование ведется по $n = 0, n_0, n_0+1, \ldots$ и γ_0 есть $|\lambda| = r$.

Нам потребуются два следующих факта [1, леммы 4, 5].

Лемма 6. *При* $\rho \in \tilde{\gamma}_n$ *имеют место асимптотические формулы*

$$v_{x^j}^{(j)}(x,\rho) = v_{x^j}^{0(j)}(x,\rho) + O(\rho^{j-1}), \qquad j = 0, 1, 2,$$

и оценки $O(\cdot)$ *равномерны по* $x \in [0,1]$.

Лемма 7. *Обозначим через* $\theta(x)$ *любую из функций* $\cos x$ *или* $\sin x$. *Пусть* $f(x) \in L_2[0,1]$ *и* $f(x,\mu) = f(x)\theta(\mu x)$, *где* $\mu \in \tilde{\gamma}_0$ *и* $\beta_n(\mu) = (f(x,\mu), \theta(n\pi x))$. *Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n}|\beta_n(\mu)| \leqslant C\left(\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2},$$

где постоянная C *не зависит от* n_1, n_2 *и* $\mu \in \tilde{\gamma}_0$.

Лемма 8. *Ряд* $u_1(x,t)$ *и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием до второго порядка по* x *и* t, *сходятся абсолютно и равномерно в* Q_T *при любом* $T > 0$.

Доказательство легко получается с помощью лемм 6, 7 и формулы (13).

Теорема 5. *Функция $u(x,t)$ есть решение уравнения*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(u(x,t) - u_0(x,t)) = -q(x)u(x,t) \tag{17}$$

при условиях (2)*,* (3).

Доказательство. Обозначим $M = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, тогда имеем

$$M(u(x,t) - u_0(x,t)) = Mu_1(x,t). \tag{18}$$

Далее по лемме 8

$$Mu_1(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right) M\left(\left[v(x,\rho) - v^0(x,\rho)\right]\sin\rho t\right)\frac{(\psi, z_2)}{\rho}\,d\lambda.$$

Так как $M(v(x,\rho)\sin\rho t) = -q(x)v(x,\rho)\sin\rho t$ и $M(v^0(x,\rho)\sin\rho t) = 0$, то по лемме 1 $Mu_1(x,t) = -q(x)u(x,t)$. Отсюда и из (18) следует (17). Далее по лемме 1 и оценок $v^{(j)}(x,\rho) = O(n^j)$ $(j = 0,1)$, формулы (13) и леммы 7 получаем, что ряд (7) и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием один раз по x и t, сходятся абсолютно и равномерно. Поэтому $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям и условию $u(x,0) = 0$. Выполнение условия $u'_t(x,0) = \psi(x)$ следует из равномерной сходимости ряда

$$u'_t(x,0) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi)\,d\lambda$$

и полноты системы собственных и присоединенных функций оператора L^*. □

Из полученных фактов следует

Теорема 6. *Если $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$, то сумма ряда $u(x,t)$ формального решения задачи* (1)–(3) *является классическим решением этой задачи, когда уравнение* (1) *выполняется п. в.*

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(3) ДЛЯ $\psi(x) \in L_2[0,1]$

Пусть теперь $\psi(x) \in L_2[0,1]$. И в этом случае сохраняется представление (8) формального решения.

Лемма 9. *Ряд $u_1(x,t)$ и ряд, получающийся из него почленным дифференцированием по t, сходятся абсолютно и равномерно в Q_T при любом $T > 0$.*

Доказательство такое же, как и леммы 8, но вместо формулы (13) используется (12). □

Исследуем ряд $u_0(x,t)$.

Лемма 10. *Ряд $u_0(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно и для его суммы имеет место формула*

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x-t) - \Phi(x+t)], \tag{19}$$

где $\Phi(x) = \Phi(-x)$, $\Phi(x+2) = \Phi(x)$, $\Phi(x) = \int\limits_x^1 \psi_1(\tau)\,d\tau$ *на* $[0,1]$. *Кроме того, существует* $u'_{0t}(x,0)$ *для п. в.* $x \in [0,1]$ *и*

$$u'_{0t}(x,0) = \psi_1(x). \tag{20}$$

Доказательство. Обозначим через $\tilde{\psi}_1(x) = \int\limits_x^1 \psi_1(\tau)\,d\tau$ и

$$\Phi(x) = (\tilde{\psi}_1(\xi), 1) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}(\psi_1(\xi), \sin n\pi\xi)\cos n\pi x.$$

Из формулы (14) получаем:

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x-t) - \Phi(x+t)]. \tag{21}$$

Так как ряд $\Phi(x)$ сходится абсолютно и равномерно, то $\Phi(x) = \Phi(-x)$, $\Phi(x+2) = \Phi(x)$. Далее, так как $\frac{\sin n\pi\xi}{n\pi} = \int\limits_0^\xi \cos n\pi\tau\,d\tau$, то $\left(\psi_1(\xi), \frac{\sin n\pi\xi}{n\pi}\right) = (\tilde{\psi}_1(\xi), \cos n\pi\xi)$. Поэтому

$$\Phi(x) = (\tilde{\psi}_1(\xi), 1) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{\psi}_1(\xi), \cos n\pi\xi)\cos n\pi x. \tag{22}$$

Из полноты в $L_0[0,1]$ системы $1, \sqrt{2}\cos n\pi x$ $(n = 1, 2, \ldots)$ следует, что при $x \in [0,1]$

$$\Phi(x) = \tilde{\psi}_1(x). \tag{23}$$

Для доказательства формулы (20) возьмем x из множества $\{x|\ x \in (0,1),\ \Phi'(x)$ конечна$\}$. Поскольку существуют конечные производные $\Phi'_t(x \pm t)|_{t=0}$, причем $\Phi'_t(x \pm t)|_{t=0} = \mp\psi_1(x)$, то из (19) следует (20). □

Из леммы 10 следует

Лемма 11. *Функция* $u_0(x,t)$ *из* (19) *удовлетворяет условиям* (3) *и* $u_0(x,0) = 0$; $u_0(x,t)$ *абсолютно непрерывна по* t, *п. в. на* $[0,1]$ *существует* $u'_{0t}(x,0)$ *и* $u'_t(x,0) = \psi_1(x)$.

Лемма 12. *Сумма ряда* $u(x,t)$ *удовлетворяет условиям* (3) *и* $u(x,0) = 0$; $u(x,t)$ *абсолютно непрерывна по* t *п. в. на* $[0,1]]$, *существует* $u'_t(x,0)$ *и* $u'_t(x,0) = \psi(x)$.

Доказательство. Выполнение условий (3) и $u(x,0) = 0$ является очевидным. Из формулы (8) на основании лемм 9 и 11 следует, что $u(x,t)$ абсолютно непрерывна по t п. в. на $[0,1]$, существует $u'_t(x,0)$ и

$$u'_t(x,0) = \psi_1(x) + u'_{1t}(x,0). \tag{24}$$

Из формулы (10), учитывая (12) и теорему 1, получаем:

$$u'_{1t}(x,0) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi)\,d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda^0\psi_1)\,d\lambda.$$

Используя теперь теорему равносходимости для операторов L и L_0 и теорему Карлесона [18], как в доказательстве леммы 15 из [6], получим, что п. в. на $[0,1]$ $u'_{1t}(x,0) = \psi(x) - \psi_1(x)$. Отсюда и из (24) следует, что п. в. на $[0,1]$ $u'_t(x,0) = \psi(x)$.□

3. ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(3)

Сейчас мы покажем, что сумма ряда $u(x,t)$ формального решения задачи (1)–(3) является обобщенным решением этой задачи для любой $\psi(x) \in L_2[0,1]$.

Лемма 13. *Для $u(x,t)$ имеет место оценка*

$$\max_{Q_T} |u(x,t)| \leqslant C_T \|\psi\|_2,$$

где постоянная C_T зависит только от T и $\|\cdot\|_2$ — норма в $L_2[0,1]$.

Доказательство. Из формулы (23) при $x \in [0,1]$ получаем оценку $|\Phi(x)| \leqslant \leqslant \|\psi_1\|_2 \leqslant C\|\psi\|_2$. Тогда в силу четности и 2-периодичности $\Phi(x)$ из (19) следует, что $\max\limits_{Q_T} |u_0(x,t)| \leqslant C\|\psi\|_2$. А из формулы (10) по лемме 6 и теореме 3 получаем $\max\limits_{Q_T} |u_1(x,t)| \leqslant C_T\|\psi\|_2$ и, следовательно, утверждение леммы справедливо.

Пусть $\psi_h(x)$ имеет тот же смысл, что и $\psi(x)$ в теореме 6 и $u_h(x,t)$ — решение задачи (1)–(3) для такой $\psi_h(x)$. Тогда из леммы 13 следует

Теорема 7. *Если $\psi(x) \in L_2[0,1]$ и $\|\psi_h - \psi\|_2 \to 0$ при $h \to 0$, то $u_h(x,t)$ сходится к $u(x,t)$ равномерно в Q_T при любом $T > 0$, т.е. $u(x,t)$ есть обобщенное решение задачи* (1)–(3).

Пусть теперь $\psi(x) \in L[0,1]$. Покажем, что формальное решение задачи (1)–(3), которое также берем в виде (8), и в этом случае является обобщенным решением этой задачи.

Так же, как в лемме 13 получается

Лемма 14. *Ряд $u_1(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T и справедлива оценка*

$$\max_{Q_T} |u_1(x,t)| \leqslant C_T \|\psi\|_1,$$

где постоянная C_T зависит только от T и $\|\cdot\|_1$ — норма в $L[0,1]$.

Лемма 15. *Ряд $u_0(x,t)$ сходится равномерно в Q_T и для его суммы справедлива формула* (19).

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 10, для $u_0(x,t)$ справедлива формула (21), где $\Phi(x)$ есть (22), т.е.

$$\Phi(x) = (\tilde{\psi}_1(\xi), 1) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{\psi}_1(\xi), \cos n\pi\xi) \cos n\pi x. \tag{25}$$

Ряд (25) есть тригонометрический ряд абсолютно непрерывной функции $\tilde{\psi}_1(x)$, четным образом продолженной на отрезок $[-1,0]$, а затем на всю ось с периодом, равным двум. Поэтому он сходится равномерно по всей оси, и, следовательно, утверждение леммы справедливо.

Из леммы 15 следует

Лемма 16. *Имеет место оценка $\max\limits_{Q_T} |u_0(x,t)| \leqslant C\|\psi\|_1$.*

Пусть $\psi_h(x)$ и $u_h(x,t)$ — те же, что и в теореме 7, тогда из лемм 14–16 получается следующий результат.

Теорема 8. *Если $\psi(x) \in L[0,1]$, то сумма ряда $u(x,t)$ формального решения задачи* (1)–(3) *удовлетворяет условиям* (3) *и $u(x,0) = 0$. Кроме того, если $\|\psi_h - \psi\|_1 \to 0$ при $h \to 0$, то $u_h(x,t)$ сходится к $u(x,t)$ равномерно в Q_T при любом $T > 0$, т.е. $u(x,t)$ есть обобщенное решение задачи* (1)–(3).

Таким образом, если $\psi(x) \in L[0,1]$, то сумма ряда $u(x,t)$ формального решения задачи (1)–(3) обладает более слабыми, по сравнению со свойствами обобщенного решения, когда $\psi(x) \in L_2[0,1]$.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ (1), (2), (4) ДЛЯ $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$

Сначала считаем, что в задаче (1), (2), (4) $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$. Теперь оператор L такой:

$$Ly = -y'' + q(x)y,$$
$$u_1(y) = y'(0) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0, \qquad u_2(y) = y'(1) + \alpha_2 y(0) + \beta_2 y(1) = 0. \tag{26}$$

Собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, простые и для них верна асимптотика из парагр. 1. Контуры $|\lambda| = r$, γ_n, $\tilde{\gamma}_n$ — те же, что и в парагр. 1. Формальное решение (5) сохраняется, а оператор L_0 тоже другой:

$$L_0 y = -y'',$$
$$y'(0) = y'(1) = 0. \tag{27}$$

Представляя $\psi(x)$ [5, лемма 1] в виде $\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$, где $\psi_1(x) \in W_2^1[0,1]$, $\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0$, $\psi_2(x) \in C^2[0,1]$, $\psi_2(x) \in D_L$ (D_L — область определения оператора L), формальное решение представим в виде (11) из [5], т.е. в виде $u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t)$, где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda^0\psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda, \tag{28}$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi_1 - R_\lambda^0\psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda, \tag{29}$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi_2)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda g)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda,$$

R_λ^0 — резольвента оператора L_0, $g = (L - \mu_0 E)\psi_2$, μ_0 находится вне контуров $|\lambda| = r$ и γ_n при $n \geqslant n_0$.

Теорема 9. *[5, теорема 3] Имеют место формулы*

$$R_\lambda f = v_1(x,\rho)(f, z_1) + v_2(x,\rho)(f, z_2) - (M_\rho f)(x),$$

$$R_\lambda^0 f = v_1^0(x,\rho)(f, z_1^0) + v_2^0(x,\rho)(f,z_2^0) - (M_\rho^0 f)(x),$$

где M_ρ — *прежний оператор,* M_ρ^0 *определяется через* $z_j^0(x,\rho)$ *вместо* $z_j(x,\rho)$ $(j = 1,2)$,

$$v_j(x,\rho) = \frac{(-1)^j}{\Delta(\rho)} \left\{ \left[-\beta_1 z_{3-j}(1,\rho)U_2(z_2) + (z'_{3-j}(1,\rho) + \beta_2 z_{3-j}(1,\rho))U_1(z_2)\right] z_1(x,\rho) + \right.$$
$$\left. + \left[\beta_1 z_{3-j}(1,\rho)U_2(z_1) - (z'_{3-j}(1,\rho) + \beta_2 z_{3-j}(1,\rho))U_1(z_1)\right] z_2(x,\rho)\right\} \quad (j = 1,2),$$
$$\Delta(\rho) = U_1(z_1)U_2(z_2) - U_1(z_2)u_2(z_1), \quad v_1^0(x,\rho) = -\frac{\cos\rho\cos\rho x}{\rho\sin\rho}, \quad v_2^0(x,\rho) = -\cos\rho x.$$

Так же, как и леммы 3, 4, получаются две следующие леммы.

Лемма 17. *Имеет место формула*

$$u_0(x,t) = (\psi_1, 1)t + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}(\psi_1(\xi), \cos n\pi\xi)\cos n\pi x \sin n\pi t.$$

Лемма 18. *Ряд* $u_0(x,t)$ *сходится абсолютно и равномерно, и для его суммы имеет место формула*

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde\psi(\tau)\,d\tau,$$

где $\tilde\psi(-x) = \tilde\psi(x)$, $\tilde\psi(x+2) = \tilde\psi(x)$, $\tilde\psi(x) = \psi_1(x)$ *при* $x \in [0,1]$.

Лемма 5 и теорема 4 сохраняются, но теперь $u_0(x,t)$ есть решение (1), (2) с функцией $\psi_1(x)$ из (28) вместо $\psi(x)$ при $q(x) = 0$ с условиями $u'_{0x}(0,t) = u'_{0x}(1,t) = 0$. Сохраняется также и лемма 8, доказательство дословно такое же, как и в лемме 12 из [5].

Лемма 19. *[5, лемма 14] Ряд* $u_2(x,t)$ *и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием до второго порядка по* x *и* t, *сходятся абсолютно и равномерно в* Q_T *при любом* $T > 0$.

Теорема 10. *Если* $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$, *то сумма ряда* $u(x,t)$ *формального решения задачи* (1), (2), (4) *есть классическое решение этой задачи, когда уравнение* (1) *выполняется п.в.*

Доказательство проводится на основании теоремы 4 и лемм 8 и 19, как в [5, теорема 6].

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ (1), (2), (4) ДЛЯ $\psi(x) \in L_2[0,1]$

Пусть в задаче (1), (2), (4) $\psi(x) \in L_2[0,1]$. В этом случае формальное решение берем в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t), \tag{30}$$

где $u_0(x,t)$ и $u_1(x,t)$ есть (28) и (29) с функцией $\psi(x)$ вместо $\psi_1(x)$.

Лемма 20. *Ряд* $u_0(x,t)$ *сходится абсолютно и равномерно, и для его суммы имеет место формула*

$$u_0(x,t) = (\psi,1)t + \frac{1}{2}[\Phi(x+t) - \Phi(x-t)], \tag{31}$$

где $\Phi(x) = -\Phi(-x)$, $\Phi(x+2) = \Phi(x)$,

$$\Phi(x) = \int_0^x [\psi(\tau) - (\psi, 1)]\, d\tau \quad \text{при} \quad x \in [0,1]. \tag{32}$$

Доказательство. Так как $2\cos n\pi x \sin n\pi t = \sin n\pi(x+t) - \sin n\pi(x-t)$,то из леммы 17 получаем $u_0(x,t) = (\psi,1)t + \frac{1}{2}[\Phi(x+t) - \Phi(x-t)]$, где $\Phi(x) = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}(\psi(\xi), \cos n\pi\xi)\sin n\pi x$. Так как этот ряд сходится абсолютно и равномерно, то $\Phi(x) = -\Phi(-x)$, $\Phi(x+2) = \Phi(x)$. Обозначим через $\Phi_n(x)$ частичную сумму ряда $\Phi(x)$, тогда при $x \in [0,1]$ имеем

$$\left|\Phi_n(x) - \int_0^x [\psi(\tau) - (\psi,1)]\, d\tau\right| = \left|\int_0^x [\Phi_n'(\tau) - (\psi(\tau) - (\psi,1))]\, d\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant \|\Phi_n'(\tau) - (\psi(\tau) - (\psi,1))\|_2\,.$$

Последовательность $\{\Phi_n'(\tau)\}$, $\Phi_n'(\tau) = 2\sum\limits_{k=1}^{n}(\psi(\xi), \cos k\pi\xi)\cos k\pi\tau$, сходится в $L_2[0,1]$ к $\psi(\tau) - (\psi,1)$. Поэтому, переходя к пределу в последнем неравенстве, получим (32).

Лемма 21. *Имеют место формулы*

$$u_{0t}'(x,0) = \psi(x) \quad \text{п.в. на} \quad [0,1], \tag{33}$$
$$u_{0x}'(0,t) = 0, \quad u_{0x}'(1,t) = 0 \quad \text{п.в. на} \quad (-\infty,\infty). \tag{34}$$

Доказательство. Докажем формулу (33). Пусть $x \in \{x|\ x \in [0,1],\ \Phi'(x)$ конечна$\}$. Сразу получаем $\Phi_t'(x \pm t)|_{t=0} = \pm\Phi'(x)$. Поэтому из (31) и (32) следует (33). Для доказательства формул (34), используя нечетность $\Phi(x)$, запишем (31) в виде

$$u_0(x,t) = (\psi,1)t + \frac{1}{2}[\Phi(t+x) + \Phi(t-x)]. \tag{35}$$

Поскольку для $t \in \{t|\ t \in [-A,A],\ \Phi'(t)$ конечна и $A > 0\}$ имеет место $\Phi_x'(t \pm x)|_{x=0} = \pm\Phi'(t)$, то из (35) за счет произвольности числа A сразу следует первая из формул (34) (вторая доказывается аналогично с использованием 2-периодичности функции $\Phi(x)$). □

Из лемм 20 и 21 получаем следующий результат.

Лемма 22. *Функция* $u_0(x,t)$ *абсолютно непрерывна по* x, t *и удовлетворяет условию* $u_0(x,0) = 0$*; п.в. на* $[0,1]$ *существует* $u_{0t}'(x,0)$ *и п.в. на* $(-\infty,\infty)$ *существуют* $u_{0x}'(0,t)$, $u_{0x}'(1,t)$, *причем* $u_{0t}'(x,0) = \psi(x)$, $u_{0x}'(0,t) = u_{0x}'(1,t) = 0$.

Лемма 23. *Ряд* $u_1(x,t)$ *и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по* x *и* t *один раз, сходятся абсолютно и равномерно в* Q_T *при любом* $T > 0$.

Доказательство аналогично лемме 12 из [5] с использованием лемм 3, 4 из [3] (которые справедливы и для $g(x) \in L_2[0,1]$, $\rho = n\pi + \mu$, $\mu \in \tilde{\gamma}_0$) и леммы 3 из [5].

Лемма 24. *Если* $\psi(x) \in L_2[0,1]$, *то сумма ряда* $u(x,t)$ *абсолютно непрерывна по* x, t *и* $u(x,0) = 0$*; п.в. на* $[0,1]$ *существует* $u_t'(x,0)$ *и п.в. на* $(-\infty,\infty)$ *существуют* $u_x'(0,t)$, $u_x'(1,t)$*; п.в. выполняются* $u_t'(x,0) = \psi(x)$ *и условия* (4).

Доказательство. Из (30) по леммам 22 и 23 получаем, что $u(x,t)$ абсолютно непрерывна по t, п.в. на $[0,1]$ существует $u'_t(x,0)$ и $u'_t(x,0) = \psi(x) + u'_{1t}(x,0)$. Для частной суммы ряда (29) (с $\psi(x)$ вместо $\psi_1(x)$) для $u'_{1t}(x,0)$ имеем $S_N(\psi) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r_N}(R_\lambda\psi - R^0_\lambda\psi)\,d\lambda$. По теореме равносходимости для операторов L и L_0 суммы $S_N(\psi)$ при $r_N \to \infty$ равномерно на $[\delta, 1-\delta]$ при любом $\delta \in (0,1/2)$ стремятся к нулю. Поэтому из равномерной сходимости на $[0,1]$ ряда $u'_{1,t}(x,0)$ следует, что на $[0,1]$ $u'_{1t}(x,0) = 0$ и, следовательно, $u'_t(x,0) = \psi(x)$ п.в. на $[0,1]$. Выполнение п.в. по $t \in (-\infty,\infty)$ граничных условий (4) следует по формуле (30) из выполнения условий (26) для $R_\lambda\psi$ и условий (27) для $R^0_\lambda\psi$.

6. ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1), (2), (4)

Пусть $\psi_h(x)$ — та же, что и $\psi(x)$ в парагр. 4, и $u_h(x,t)$ — решение задачи (1), (2), (4) с функцией $\psi_h(x)$ вместо $\psi(x)$, представленное в теореме 10. Проводя рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве леммы 13 (используя в них формулу (16) из [5]), получим следующий результат.

Теорема 11. *Если $\psi(x) \in L_2[0,1]$ и $\|\psi_h - \psi\|_2 \to 0$ при $h \to 0$, то $u_h(x,t)$ сходится к $u(x,t)$ равномерно в Q_T при любом $T > 0$, т.е. $u(x,t)$ есть обобщенное решение задачи* (1), (2), (4).

Рассмотрим случай, когда в задаче (1), (2), (4) $\psi(x) \in L[0,1]$. Формальное решение имеет вид (30). В этом случае лемма 14 сохраняется (доказательство следует из формулы

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}(R_\lambda\psi - R^0_\lambda\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}(J_1(x,\rho) + J_2(x,\rho))\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda,$$

где $J_1(x,\rho) = (v_1(x,\rho) - v^0_1(x,\rho))(\psi, z_1) + (v_2(x,\rho) - v^0_2(x,\rho))(\psi, z_2)$, $J_2(x,\rho) = v^0_1(x,\rho)(\psi, z_1 - z^0_1) + v^0_2(x,\rho)(\psi, z_2 - z^0_2)$, с использованием [5, лемма 3, теорема 4]).

Лемма 25. *Ряд $u_0(x,t)$ сходится всюду при $x \in [0,1]$ и $t \in (-\infty,\infty)$, причем*

$$\max_{Q_T}|u_0(x,t)| \leqslant c_T\|\psi\|_1, \tag{36}$$

где постоянная c_T зависит только от T.

Доказательство. Из леммы 17 получаем:

$$u_0(x,t) = (\psi,1)t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi(\xi), \frac{\cos n\pi\xi}{n\pi}\right)[\sin n\pi(x+t) - \sin n\pi(x-t)].$$

Обозначим $\tilde\psi(x) = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\psi(\xi), \frac{\cos n\pi\xi}{n\pi}\right)\sin n\pi x$. Так как $\frac{\cos n\pi\xi}{n\pi} = \frac{1}{n\pi} - \int_0^\xi \sin n\pi\tau\,d\tau$, то $\left(\psi(\xi), \frac{\cos n\pi\xi}{n\pi}\right) = \frac{1}{n\pi}(\psi,1) - (\psi_1(\xi), \sin n\pi\xi)$, где $\psi_1(\xi) = \int\limits_\xi^1 \psi(\tau)\,d\tau$. Тогда

$$\tilde\psi(x) = 2(\psi,1)\theta(x) - 2\sum_{n=1}^{\infty}(\psi_1(\xi), \sin n\pi\xi)\sin n\pi x, \tag{37}$$

где $\theta(x)$ — нечетная 2-периодическая функция, $\theta(x) = \frac{1}{2}(1-x)$ при $x \in (0,2)$ и $\theta(x) = 0$ при $x = 0$, $x = 2$; ряд во втором слагаемом сходится на всей оси как тригонометрический ряд периодической функции ограниченной вариации. Поэтому из формулы $u_0(x,t) = (\psi,1)t + \frac{1}{2}[\tilde{\psi}(x+t) - \tilde{\psi}(x-t)]$ получаем первое утверждение леммы. Далее, поскольку из (37) при $x \in [0,1]$ следует оценка $|\tilde{\psi}(x)| \leqslant c\|\psi\|_1$, то за счет нечетности и 2-периодичности функции $\tilde{\psi}(x)$ получаем (36). □

Если $\psi_h(x)$ и $u_h(x,t)$ — те же, что и в теореме 11, то из приведенных фактов следует

Теорема 12. *Если $\psi(x) \in L[0,1]$, то ряд $u(x,t)$ формального решения задачи* (1), (2), (4) *сходится всюду при $x \in [0,1]$, $t \in (-\infty,\infty)$ и $u(x,0) = 0$. Более того, если $\|\psi_h - \psi\|_1 \to 0$ при $h \to 0$,то решение $u_h(x,t)$ задачи* (1), (2), (4) *сходится к $u(x,t)$ равномерно в Q_T при любом $T > 0$. Таким образом, $u(x,t)$ является обобщенным решением задачи* (1), (2), (4) *для $\psi(x) \in L[0,1]$.*

Библиографический список

1. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. АН. 2014. Т. 458, № 2. С. 138–140. DOI: 10.7868/S0869565214260041
2. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. 368 с.
3. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Резольвентный подход к методу Фурье в одной смешанной задаче для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, вып. 4. С. 621–630. DOI: 10.7868/S0044466915040079
4. *Курдюмов В. П., Хромов А. П.* Обоснование метода Фурье для волнового уравнения при минимальных требованиях на исходные данные // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 32–36.
5. *Гуревич А. П., Курдюмов В. П., Хромов А. П.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 1. С. 13–29. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-13-29
6. *Хромов А. П.* Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56, вып. 2. С. 239–251. DOI: 10.7868/S0044466916020149
7. *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики. М. : Наука, 1983. 432 с.
8. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1953. 360 с.
9. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики : в 4 т. Т. 4. М. : Гостехиздат, 1953. 804 с.
10. *Ладыженская О. А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. М. : Гостехиздат, 1953. 282 с.
11. *Ильин В. А.* Избранные труды : в 2 т. Т. 1. М. : Изд-во ООО «Макс-пресс», 2008. 727 с.
12. *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений // УМН. 1960. Т. 15, № 2. С. 97–154.
13. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.
14. *Расулов М. Л.* Метод контурного интеграла. М. : Наука, 1964. 462 с.
15. *Вагабов А. И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д : Изд-во Рост. ун-та, 1994. 160 с.
16. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувиля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 392 с.

17. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М. : Наука, 1965. 716 с.
18. *Carleson L.* On convergence and growth of partial sums of Fourier series // Acta Math. 1966. Vol. 116, № 1. P. 135–157.

Образец для цитирования:
Курдюмов В. П., Хромов А. П., Халова В. А. Смешанная задача для волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 2. С. 157–171. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-157-171

A Mixed Problem for a Wave Equation with a Nonzero Initial Velocity

V. P. Kurdyumov, A. P. Khromov, V. A. Khalova

Vitaly P. Kurdyumov, https://orcid.org/0000-0001-8534-7692, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, Kurdyumov47@yandex.ru
Avgust P. Khromov, http://orcid.org/0000-0002-2454-8009, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru
Victoriya A. Khalova, https://orcid.org/0000-0003-2148-4932, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, KhalovaVA@gmail.com

We study a mixed problem for the wave equation with a continuous complex potential in the case of a nonzero initial velocity $u_t(x,0) = \psi(x)$ and two types of two-point boundary conditions: the ends are fixed and when each of the boundary boundary conditions contains a derivative with respect to x. A classical solution in the case $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$ is obtained by the Fourier method with respect to the acceleration of the convergence of Fourier series by the resolvent approach with the help of A. N. Krylov's recommendations (the equation is satisfied almost everywhere). It is also shown that in the case when $\psi(x) \in L[0,1]$ the series of a formal solution for a problem with fixed ends converges uniformly in any bounded domain, and for the second problem it converges only everywhere and for both problems is a generalized solution in the uniform metric.

Key words: wave equation, formal solution, spectral problem, resolvent.

References

1. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Resolvent approach in the Fourier method. *Dokl. Math.*, 2014, vol. 90, iss. 2, pp. 545–548. DOI: 10.1134/S1064562414060076
2. Krylov A. N. *On Some Differential Equations of Mathematical Physics Having Applications in Engineering*. Leningrad, Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., 1950. 368 p. (in Russian).
3. Kornev V. V., Khromov A. P. Resolvent approach to the Fourier method in a mixed problem for the wave equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, iss. 4, pp. 618–627. DOI: 10.1134/S0965542515040077
4. Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Obosnovanie metoda Fur'e dlia volnovogo uravneniia pri minimal'nykh trebovaniiakh na iskhodnye dannye [Justification of the Fourier method for the wave equation with minimum requirements for initial data]. *Matematika. Mekhanika* [Mathematics. Mechanics]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2015, iss. 17, pp. 32–36 (in Russian).

5. Gurevich A. P., Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Justification of Fourier method in a mixed problem for wave equation with non-zero velocity. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 1, pp. 13–29 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-13-29
6. Khromov A. P. Behavior of the formal solution to a mixed problem for the wave equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2016, vol. 56, iss. 2, pp. 243–255. DOI: 10.1134/S0965542516020135
7. Steklov V. A. *Fundamental Problems of Mathematical Physics*. Moscow, Nauka, 1983. 432 p. (in Russian).
8. Petrovsky I. G. *Lectures on partial differential equations*. New York, Interscience, 1954. 245 p. (Russ. ed.: Moscow, Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., 1953. 360 p.)
9. Smirnov V. I. *A Course of Higher Mathematics*. Vol. 4. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1964. (Russ. ed.: Moscow, Gostekhizdat, 1953. 804 p.)
10. Ladyzhenskaya O. A. *Mixed Problems for Hyperbolic Equations*. Moscow, Gostekhizdat, 1953. 282 p. (in Russian).
11. Il'in V. A. *Selected Works*. Vol. 1. Moscow, Maks-press, 2008. 727 p. (in Russian).
12. Il'in V. A. The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations. *Russ. Math. Surv.*, 1960, vol. 15, iss. 1, pp. 85–142.
13. Naimark M. A. *Linear Differential Operators: Two Volumes Bound as One*. Dover Publications, Inc., 2012. 528 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1969. 528 p.)
14. Rasulov M. L. *Contour Integral Method and Its Application to Problems for Differential Equations*. Moscow, Nauka, 1964. 462 p. (in Russian).
15. Vagabov A. I. *Introduction to the Spectral Theory of Differential Operators*. Rostov on Don, Izd-vo Rost. un-ta, 1994. 160 p. (in Russian).
16. Marchenko V. A. *Sturm – Liouville Operators and Their Applications*. Kiev, Naukova Dumka, 1977. 392 p. (in Russian).
17. Lavrentiev M. A., Shabat B. V. *Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable*. Moscow, Nauka, 1965. 716 p. (in Russian).
18. Carleson L. On convergence and growth of partial sums of Fourier series. *Acta Math.*, 1966, vol. 116, no. 1, pp. 135–157.

Cite this article as:

Kurdyumov V. P., Khromov A. P., Khalova V. A. A Mixed Problem for a Wave Equation with a Nonzero Initial Velocity. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 2, pp. 157–171 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-157-171