УДК 517.51

О ДВОИЧНЫХ БАЗИСНЫХ СПЛАЙНАХ 2-Й СТЕПЕНИ

С. Ф. Лукомский, М. Д. Мушко

Лукомский Сергей Федорович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, LukomskiiSF@nfo.sgu.ru
Мушко Максим Дмитриевич, студент, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, dart-maximus@yandex.ru

Классические B-сплайны определяются как свертка $B_{n+1} = B_n * B_0$, где B_0 есть характеристическая функция единичного отрезка. Классический B-сплайн является масштабирующей функцией и удовлетворяет неравенству Рисса. Поэтому классический B-сплайн любого порядка порождает кратномасштабный анализ (КМА) Рисса. В статье рассмотрен новый вид B-сплайнов, которые получаются двукратным интегрированием 3-й функции Уолша. Указан алгоритм построения интерполяционного сплайна второй степени по двоичной системе узлов. Получена оценка интерполяции. Доказано, что система сдвигов построенного B-сплайна порождает КМА (V_n) в смысле Де Бора, ДеВора и Рона. Этот КМА не является Риссовским. Тем не менее мы можем указать порядок приближения функций из пространств Соболева подпространствами (V_n).

Ключевые слова: двоичные B-сплайны, кратномасштабный анализ, пространства Соболева.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-172-182

ВВЕДЕНИЕ

B-сплайны как разделенные разности были введены Карри (Curry) и Шёнбергом (Schoenberg) [1]. Название B-сплайны появилось в работе Шёнберга [2, 3]. Подробное изложение этой теории можно найти в [4, 5]. Принципиальными здесь являются два момента. Во-первых, совокупность B-сплайнов является базисом в пространстве кусочно-многочленных функций. Во-вторых, в задаче интерполяции изменение значения функции в одном узле не требует пересчета всего представления.

B-сплайны на равномерной сетке были определены в терминах сверток и подробно изучены Стрембергом (Strömberg), Баттлом (Battle) и Лемарье (Lemarie) в [6–8]. Оказалось, что введенные таким образом базисные сплайны порождают КМА Рисса.

Мы предлагаем строить базисные сплайны, интегрируя дважды функцию Уолша W_3. После интегрирований получается сплайн 2-й степени, близкий по своим свойствам и возможностям традиционным B-сплайнам.

1. Мы покажем, что сдвиги такого B-сплайна образуют базис в пространстве кусочно-многочленных функций.

2. Мы укажем итерационный алгоритм построения интерполяционного сплайна по равномерной сетке.

3. Получим оценку отклонения интерполяционного сплайна от интерполируемой функции.

4. Мы покажем, что система сдвигов построенного B-сплайна порождает КМА (V_n) в смысле Де Бора, ДеВора и Рона, и укажем порядок приближения функций из пространств Соболева подпространствами (V_n).

1. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ДВОИЧНЫМИ БАЗИСНЫМИ СПЛАЙНАМИ 2-Й СТЕПЕНИ

Пусть $If(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt \quad (x \in [0,1])$ — оператор интегрирования, $r_n(t) = \operatorname{sign}\sin 2^{n+1}\pi t$ — функции Радемахера, $W_{2^n-1}(x) = \prod\limits_{k=0}^{n-1} r_k(x)$ — функции Уолша.

Определение 1. Функцию

$$\psi(x) = \begin{cases} (4I)^2 W_3(x), & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

будем называть *двоичным базисным сплайном 2-й степени (см. [9])*.

Очевидно, что $\psi(x)$ есть кусочно-монотонная функция, совпадающая с многочленом 2-й степени на каждом отрезке $\left[\frac{k}{4}, \frac{k+1}{4}\right]$ $(k = 0,1,2,3)$. Функция ψ симметрична относительно точки $x = \frac{1}{2}$, на отрезке $[0, \frac{1}{4}]$ задается равенством $\psi(x) = 8x^2$ и $\psi(x) = -4(x - \frac{1}{2})^2 + 1$ при $x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.

На рис. 1 и 2 приведены графики функций $\frac{1}{4}\psi'$ и ψ.

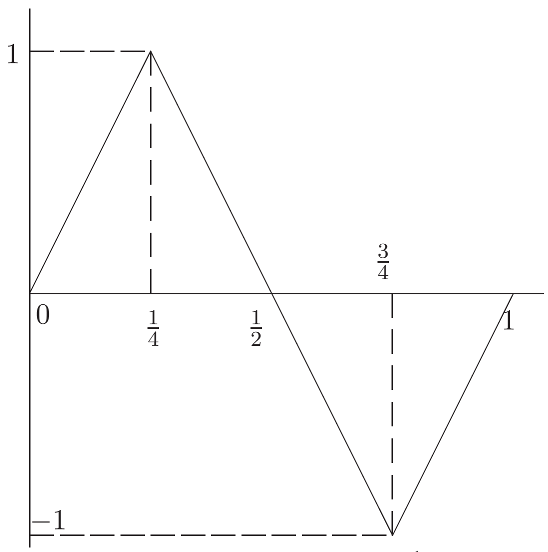

Рис. 1. График функции $\frac{1}{4}\psi'(x)$
Fig. 1. The graph of the function $\frac{1}{4}\psi'(x)$

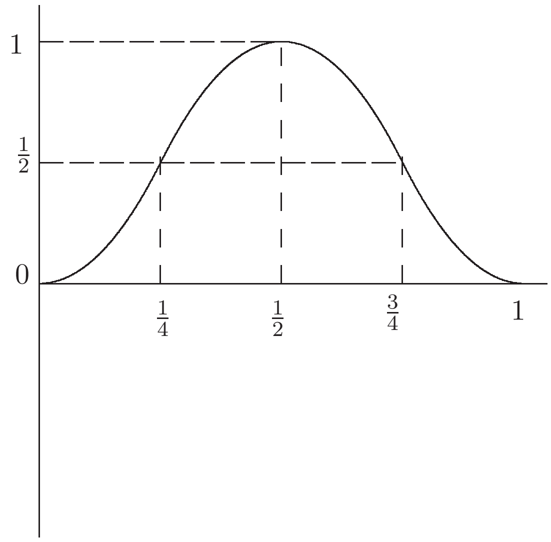

Рис. 2. График функции $\psi(x)$
Fig. 2. The graph of the function $\psi(x)$

Определение 2. Обозначим через $Q_2[0,+\infty)$ совокупность кусочно-многочленных функций 2-й степени, имеющих непрерывные производные на $[0,+\infty)$, и которые на каждом отрезке $\left[\frac{k}{4}, \frac{k+1}{4}\right]$ совпадают с некоторым многочленом второй степени. Аналогично определяется и пространство $Q_2(-\infty,+\infty)$.

Теорема 1. *При всех $x \in \mathbb{R}$ справедливы равенства*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi\left(x + \frac{n}{4}\right) = 2, \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi\left(x + \frac{n}{2}\right) = 1. \tag{1}$$

Доказательство. Функция $4IW_3(t)$ антипериодична на отрезке $[0,1]$ с периодом $T = \frac{1}{2}$, т.е. для любых $t_1, t_2 \in [0,1]$ таких, что $|t_1 - t_2| = \frac{1}{2}$, имеем

$4IW_3(t_1) = -4IW_3(t_2)$. Поэтому для любых $t_1, t_2 \in [0,1]$ таких, что $|t_1 - t_2| = \frac{1}{2}$

$$4\left(\int\limits_0^{t_1} 4IW_3(t)\,dt + \int\limits_0^{t_2} 4IW_3(t)\,dt\right) = \psi(t_1) + \psi(t_2) = 1.$$

В самом деле, пусть $t_2 = \frac{1}{2} + t_1$. Тогда ввиду антипериодичности

$$\int\limits_0^{t_1} 4IW_3(t)\,dt + \int\limits_0^{t_2} 4IW_3(t)\,dt = \int\limits_0^{t_1} 4IW_3(t)\,dt + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} 4IW_3(t)\,dt + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+t_1} 4IW_3(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{2}} 4IW_3(t)\,dt = \frac{1}{4}.$$

Поэтому при $x \in \left[\frac{k}{4}, \frac{k+1}{4}\right]$

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \psi\left(x + \frac{l}{4}\right) = \psi\left(x - \frac{k}{4}\right) + \psi\left(x - \frac{k-1}{4}\right) + \psi\left(x - \frac{k-2}{4}\right) + \psi\left(x - \frac{k-3}{4}\right) = 2,$$

и при $x \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \psi\left(x + \frac{l}{2}\right) = \psi\left(x - \frac{k}{2}\right) + \psi\left(x - \frac{k-1}{2}\right) = 1. \qquad \square$$

Теорема 2. *Совокупность функций* $\psi\left(x - \frac{n}{4}\right)$ $(n \geqslant -3, n \neq -1)$ *образует базис в пространстве* $Q_2[0, +\infty)$.

Доказательство. Так как для функции ψ справедливы равенства (1), то любая из функций $\psi\left(x + \frac{k}{4}\right)$ есть линейная комбинация остальных. Поэтому из системы $\left\{\psi\left(x + \frac{k}{4}\right)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ можно выбросить любую функцию. Удалим функцию $\psi\left(x + \frac{1}{4}\right)$ и покажем, что любую функцию $f \in Q_2[0, +\infty)$ можно единственным образом представить в виде

$$f(x) = \sum_{k=-3, k\neq -1}^{+\infty} c_k \psi\left(x - \frac{k}{4}\right). \tag{2}$$

Рассмотрим $f(x) \in Q_2[0, +\infty)$ на отрезке $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, на котором она есть многочлен $f_0(x) = a_{2,0}x^2 + a_{1,0}x + a_{0,0}$. Покажем, что на отрезке $\left[0, \frac{1}{4}\right]$

$$f_0(x) = c_{-3}\psi\left(x + \frac{3}{4}\right) + c_{-2}\psi\left(x + \frac{2}{4}\right) + c_0\psi\left(x + \frac{0}{4}\right), \tag{3}$$

причем слагаемое $c_{-1}\psi\left(x + \frac{1}{4}\right)$ в (3) отсутствует. Равенство (3) рассмотрим как уравнение относительно c_{-3}, c_{-2}, c_0. В точке $x = 0$ должны выполняться соотношения

$$f_0(0) = c_{-3}\psi\left(0 + \frac{3}{4}\right) + c_{-2}\psi\left(0 + \frac{2}{4}\right), f_0'(0) = c_{-3}\psi'\left(0 + \frac{3}{4}\right), \tag{4}$$

так как $\psi\left(0+\frac{0}{4}\right)=\psi'\left(0+\frac{0}{4}\right)=\psi'\left(0+\frac{2}{4}\right)=0$. Система (4) имеет единственное решение

$$c_{-3}=\frac{f_0'(0)}{\psi'\left(0+\frac{3}{4}\right)}, \qquad c_{-2}=\frac{f_0(0)-c_{-3}\psi\left(0+\frac{3}{4}\right)}{\psi\left(0+\frac{2}{4}\right)}.$$

Таким образом, коэффициенты c_{-2} и c_{-3} определены однозначно. Для нахождения c_0 достаточно в (3) положить $x=\frac{1}{4}$. Так как многочлен 2-й степени на отрезке $[0,\frac{1}{4}]$ полностью определяется значениями в граничных точках и производной в точке $x=0$, то равенство (3) доказано.

Для нахождения коэффициента c_1 записываем равенство (2) на отрезке $\left[\frac{1}{4},\frac{2}{4}\right]$

$$f_1(x)=c_{-2}\psi\left(x+\frac{2}{4}\right)+c_0\psi\left(x+\frac{0}{4}\right)+c_1\psi\left(x-\frac{1}{4}\right), \tag{5}$$

где $f_1(x)$ — сужение $f(x)$ на отрезок $\left[\frac{1}{4},\frac{2}{4}\right]$, а коэффициенты c_{-2} и c_0 уже известны. Полагая в (5) $x=\frac{2}{4}$, находим c_1 и т. д. Продолжая этот процесс, получаем рекуррентные соотношения для нахождения всех коэффициентов в (2). □

Замечание. Очевидно, что аналогичными рассуждениями можно доказать, что система $\left\{\psi\left(x+\frac{k}{4}\right)\right\}_{k\in\mathbb{Z},k\neq-1}$ есть базис пространства $Q_2(-\infty,+\infty)$.

При фиксированном $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 4$, определим функцию $\varphi(x):=\psi\left(\frac{n}{4}x\right)$. Для нее $\operatorname{supp}\varphi=\left[0,\frac{4}{n}\right]$, $\varphi(x)$ есть многочлен 2-й степени на каждом отрезке $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$, $\varphi'(0)=\varphi'\left(\frac{2}{n}\right)=\varphi'\left(\frac{4}{n}\right)=0$, $\varphi'\left(\frac{1}{n}\right)=n$, $\varphi'\left(\frac{3}{n}\right)=-n$.

Рассмотрим следующую интерполяционную задачу. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[0,1]$, $x_k=\frac{k}{n}$ $(k=\overline{0,n})$ — равномерная сетка на $[0,1]$. Через $S(x)$ обозначим интерполяционный сплайн 2-й степени, совпадающий с $f(x)$ в узлах x_k, который построим следующим образом:

(-1)-*й шаг.* Пусть $M_0\in\mathbb{R}$ произвольно. Полагаем $S_{-1}(x)=-\frac{M_0}{n}\varphi\left(x+\frac{3}{n}\right)$. В этом случае $S'_{-1}(0)=M_0$.

0-*й шаг.* Определим $S_0(x)$ равенством

$$S_0(x)=S_{-1}(x)+\varphi\left(x-\frac{2}{n}\right)\left(f\left(\frac{0}{n}\right)-S_{-1}\left(\frac{0}{n}\right)\right).$$

В этом случае $S_0(0)=f(0)$, $S_0'(0)=M_0$.

k-*й шаг.* $(1\leqslant k\leqslant n)$

$$S_k(x)=S_{k-1}(x)+2\varphi\left(x-\frac{k-1}{n}\right)\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-S_{k-1}\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

После k-го шага, $S_k\left(\frac{j}{n}\right)=f\left(\frac{j}{n}\right)$, $(j=1,2,\ldots,k)$.

Наконец полагаем $S(x)=S_n(x)$. Очевидно, что $S(x)$ интерполирует функцию $f(x)$ в узлах $x_k=\frac{k}{n}$ $(k=0,1,\ldots,n)$ и $S'(0)=M_0$.

Для оценки погрешности интерполяции определим функции

$$\psi_k(x)=f(x_{k-1}+x)-f(x_{k-2}+x)+\dots+(-1)^{k-1}f(x_0+x), \qquad x\in[0,1/n], \qquad k=\overline{1,n}.$$

Теорема 3. *Выберем $M_0=\frac{2}{h}(f(x_1)-f(x_0))$ и пусть $h=x_k-x_{k-1}$. Тогда для $x\in[x_{k-1},x_k]$ $(k=\overline{1,n})$ справедливо неравенство*

$$|S(x)-f(x)|\leqslant\omega(h,\psi_{k-1})+\omega(h,\psi_k)+\omega(h,f),$$

где $\omega(h,f)$ — равномерный модуль непрерывности.

Доказательство. Пусть $x_k = \frac{k}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ — узлы интерполяции и $S(x)$ — интерполяционный многочлен функции $f(x)$ на $[0, 1]$, построенный по этим узлам.

Обозначим $M_j = S'(x_j) = S'\left(\frac{j}{n}\right)$. На отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ производная $S'(x)$ есть линейная функция, поэтому при $x \in [x_{j-1}, x_j]$

$$S'(x) = M_{j-1}\frac{x_j - x}{h} + M_j\frac{x - x_{j-1}}{h}, (h = 1/n).$$

Проинтегрируем это равенство на $[x_{j-1}, x_j]$, получим:

$$S(x) - S(x_{j-1}) = \frac{M_{j-1}}{2h}[(x_j - x_{j-1})^2 - (x_j - x)^2] + \frac{M_j}{2h}(x - x_{j-1})^2. \tag{6}$$

Подставляя в (6) $x = x_j$, получаем:

$$f(x_j) - f(x_{j-1}) = \frac{h}{2}(M_{j-1} + M_j)\ (j = \overline{1, n}). \tag{7}$$

Таким образом, для нахождения $M_0, M_1, \ldots, M_n$ имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} M_0 + M_1 + 0M_2 + 0M_3 + \cdots + 0M_{n-1} + 0M_n &= (f(x_1) - f(x_0))\tfrac{2}{h}, \\ M_1 + M_2 + 0M_3 + \cdots + 0M_{n-1} + 0M_n &= (f(x_2) - f(x_1))\tfrac{2}{h}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{n-1} + M_n &= (f(x_n) - f(x_{n-1}))\tfrac{2}{h}. \end{aligned}$$

В этой системе $M_0 = S'(0)$ считаем известным. Решая ее, находим

$$\begin{aligned} &M_1 = (f(x_1) - f(x_0))\tfrac{2}{h} - M_0, \\ &M_2 = (f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0))\tfrac{2}{h} + M_0, \\ &M_3 = (f(x_3) - 2f(x_2) + 2f(x_1) - f(x_0))\tfrac{2}{h} - M_0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &M_k = \tfrac{2}{h}(f(x_k) - 2f(x_{k-1}) + \cdots + 2(-1)^{k-1}f(x_1) + (-1)^k f(x_0)) + (-1)^k M_0, \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Если выберем $M_0 = \frac{2}{h}(f(x_1) - f(x_0))$, то для M_k получим выражение

$$M_k = \frac{2}{h}(f(x_k) - 2f(x_{k-1}) + 2f(x_{k-2}) + \cdots + 2(-1)^{k-2}f(x_2) + (-1)^{k-1}f(x_1)).$$

Учитывая определение ψ_k, имеем

$$M_k = \frac{2}{h}(\psi_k(h) - \psi_k(0)) \quad \Rightarrow \quad |M_k| \leqslant \frac{2}{h}\omega(h, \psi_k). \tag{8}$$

При $x \in [x_{k-1}, x_k]$ получаем:

$$|S(x) - S(x_{k-1})| \leqslant \frac{h}{2}(|M_k| + |M_{k-1}|) \leqslant \omega(h, \psi_{k-1}) + \omega(h, \psi_k).$$

Поэтому при $x \in [x_{k-1}, x_k]$

$$\begin{gathered} |S(x) - f(x)| \leqslant |S(x) - S(x_{k-1})| + |S(x_{k-1}) - f(x))| \leqslant \\ \leqslant \omega(h, \psi_{k-1}) + \omega(h, \psi_k) + \omega(h, f). \end{gathered}$$

□

Теорема 4. *Если f'' существует и ограничена на $[0,1]$, то при $x \in [x_{k-1}, x_k]$*

$$|S(x) - f(x)| \leqslant kh^2 \sup_{0 \leqslant x \leqslant x_k} |f''(x)| + 3h \sup_{0 \leqslant x \leqslant h} |f'(x)|.$$

Доказательство. Пусть $x \in [x_{k-1}, x_k]$. Из (8) находим

$$M_k = \frac{2}{h} \psi_k'(\xi_k) h = 2\psi_k'(\xi_k), \qquad \xi_k \in [0, h].$$

Из определения ψ_k получаем:

$$|\psi_k'(\xi_k)| \leqslant h \frac{k}{2} \sup_{0 \leqslant x \leqslant x_k} |f''(x)| + \sup_{0 \leqslant x \leqslant h} |f'(x)|.$$

Поэтому

$$|S(x) - S_k(x)| \leqslant \frac{h}{2}(|M_k| + |M_{k-1}|) \leqslant h^2 k \sup_{0 \leqslant x \leqslant x_k} |f''(x)| + 2h \sup_{0 \leqslant x \leqslant h} |f'(x)|,$$

откуда и следует утверждение теоремы. □

2. ДВОИЧНЫЙ БАЗИСНЫЙ СПЛАЙН 2-Й СТЕПЕНИ КАК ГЕНЕРАТОР КМА

Традиционно кратномасштабный анализ (КМА) определяют как совокупность замкнутых в $L_2(\mathbb{R})$ подпространств $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, удовлетворяющих следующим условиям (аксиомам):

A1) $V_n \subset V_{n+1}$;

A2) $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} V_n = L_2(\mathbb{R})$;

A3) $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{Z}} V_n = \{0\}$;

A4) $f(x) \in V_n$ тогда и только тогда, когда $f(2x) \in V_{n+1}$;

A5) существует функция $\phi \in L_2(\mathbb{R})$, сдвиги $(\phi(x+k))_{k \in \mathbb{Z}}$ которой образуют ортонормированный базис V_0 (базис Рисса V_0).

В этом случае КМА называют соответственно ортогональным или КМА Рисса. Функция ϕ из аксиомы A5 называется *масштабирующей*. Она удовлетворяет уравнению

$$\phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_n \phi(2x + n), \qquad (\beta_n) \in l_2,$$

которое называют *масштабирующим*.

При определении КМА можно поступить по-другому. Сначала задать функцию $\phi \in L_2(\mathbb{R})$, построить замкнутые в $L_2(\mathbb{R})$ подпространства

$$V_n = \overline{(2^{\frac{n}{2}} \phi(2^n x + k))_{k \in \mathbb{Z}}}$$

и потребовать, чтобы выполнялись аксиомы A1)–A3) (см. [10, 11]). Такой КМА называют часто *обобщенным* или *порожденным функцией* ϕ.

В этом параграфе мы покажем, что базисный сплайн ψ порождает обобщенный КМА, который не является КМА Рисса. Сначала покажем, что базисный сплайн $\psi(\frac{x}{4})$ удовлетворяет масштабирующему уравнению.

Теорема 5. *Обозначим* $F(x)=\psi(\frac{x}{4})$. *Справедливо равенство*

$$F(x)=\frac{1}{4}F(2x)+\frac{1}{2}F(2x-1)+\frac{1}{2}F(2x-2)+\frac{1}{2}F(2x-3)+\frac{1}{4}F(2x-4). \tag{9}$$

Доказательство. По построению $F(2)=1$, $F(0)=F(4)=0$, $F(1)=F(3)=\frac{1}{2}$, $F\left(\frac{1}{2}\right)=F\left(4-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$, $F\left(2+\frac{1}{2}\right)=F\left(2-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{8}$. Обозначим для краткости $S_0(x)=(F(2x)+F(2x-4))\frac{1}{4}$, $S_1(x)=S_0+\frac{1}{2}(F(2x-1)+F(2x-3))$, $S_2(x)=S_1(x)+\frac{1}{2}F(2x-2)$.

Так как $S_0(x)=F(x)=0$ при $x=0$, $x=4$, $S_0'(x)=F'(x)=0$ при $x=0,4$, то $S_0(x)=F(x)$ на $\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup\left[4-\frac{1}{2},4\right]$, причем $S_0(x)$ симметрична относительно точки $x=2$.

Аналогично убеждаемся, что $S_1(x)=F(x)$ на $[0,1]\cup[3,4]$ и $S_2(x)=S_1(x)+\frac{1}{2}F(2x-2)=F(x)$ всюду. □

Преобразование Фурье функции $f\in L_2(\mathbb{R})$ определим равенством

$$\hat{f}(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-2\pi i\omega x}\,dx.$$

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\hat{F}(\omega)=\frac{4^3}{(\pi\omega)^3}e^{\pi i4\omega}\sin 2\pi\omega\sin^2\pi\omega=2^7e^{\pi i4\omega}\cos\pi\omega\left(\frac{\sin\pi\omega}{\pi\omega}\right)^3.$$

Доказательство. Дважды интегрируя по частям, находим

$$\hat{\psi}(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)e^{-2\pi i\omega x}\,dx=\frac{4}{(\pi i\omega)^2}\int\limits_{0}^{1}W_3(x)e^{-2\pi i\omega x}\,dx=$$

$$=\frac{4}{(\pi\omega)^3}e^{-\pi i\omega}\left(2\sin\frac{\pi\omega}{2}-sin\pi\omega\right)=\frac{16}{(\pi\omega)^3}e^{-\pi i\omega}\sin\frac{\pi\omega}{2}\sin^2\frac{\pi\omega}{4}.$$

Поэтому $\hat{F}(\omega)=\hat{\psi}_{\cdot\frac{1}{4}}(\omega)=4\hat{\psi}(4\omega)=\left(\frac{4}{\pi\omega}\right)^3e^{-\pi i\omega}\sin 2\pi\omega\sin^2\pi\omega$. □

Образуем подпространства

$$V_n=\overline{(2^{\frac{n}{2}}F(2^nx+k))_{k\in\mathbb{Z}}}.$$

Теорема 6. *Совокупность* $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *образует КМА, т.е. выполнены аксиомы А1)–А3).*

Доказательство. Функция $F(x)$ — масштабирующая, имеет компактный носитель, и $\hat{F}(0)\neq 0$. Поэтому по теореме 1.4 из [10, с. 20] $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ образуют КМА (см. также [12,13]). □

Определение 3. Пусть $f,g\in L_2(\mathbb{R})$. Выражение

$$[f,g](\omega)\stackrel{df}{=}\sum_{k\in\mathbb{Z}}f(\omega+k)\overline{g(\omega+k)}$$

называют *скобочным произведением* (см. [14]).

Определение 4. Пусть $s > 0$. Множество

$$W_2^s(\mathbb{R}) = \{f \in L_2(\mathbb{R}) : \ \|f\|_{W_2^s(\mathbb{R})} = \|(1 + |\cdot|)^s \hat{f}\|_{L_2(\mathbb{R})} < +\infty\}$$

называют *пространством Соболева*.

Определение 5. Пусть $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, $\varphi_{n,k} = 2^{\frac{n}{2}}\varphi(2^n x + k)$. Оператор

$$\mathfrak{P}_n : \ f \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} (f, \varphi_{n,k})\varphi_{n,k}$$

называют *квазиинтерполяционным оператором*.

Определение 6. Оператор $\mathfrak{P}_n$ доставляет аппроксимацию порядка $m \in \mathbb{R}_+$, если для всех $f \in W_2^m(\mathbb{R})$

$$\|f - \mathfrak{P}_n f\|_{L_2(\mathbb{R})} = O(2^{-nm}).$$

Лемма 2. *[7, с. 22; 8] Пусть функция φ удовлетворяет условиям:*
1) скобочное произведение $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}]$ существенно ограничено;
2) $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] - |\hat{\varphi}|^2 = O(|\cdot|^{2m})$;
3) $1 - |\hat{\varphi}|^2 = O(|\cdot|^{2m_0})$.
Тогда $\mathfrak{P}_n$ доставляет аппроксимацию порядка $m_1 = \min(m, 2m_0)$. Здесь символ $f = O(|\cdot|^m)$ означает, что $\limsup\limits_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^m} \leqslant C$, $C > 0$.

Отметим, что если скобочное произведение $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}]$ существенно ограничено, то модуль $|\hat{\varphi}|$ тоже существенно ограничен.

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{F}(\omega + k)|^2 = 4^7 \cos^2 \pi\omega \left(\frac{8}{15} + \frac{13}{30}\cos 2\pi\omega + \frac{1}{30}\cos^2 2\pi\omega\right).$$

Доказательство. Используя лемму 1, имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{F}(\omega + k)|^2 = 4^7 \cos^2 \pi\omega \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\sin \pi(\omega + k)}{\pi(\omega + k)}\right)^6 = 4^7 \sin^6 \pi\omega \cos^2 \pi\omega \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\pi(\omega + k))^6}.$$

При $m \in \mathbb{N}$ справедливо равенство [15, с. 149],

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x + \pi k)^{2m}} = -\frac{1}{(2m-1)!}\frac{d^{2m-1}}{dx^{2m-1}}\operatorname{ctg} x.$$

Учитывая, что при $m = 3$

$$\left.\frac{d^{2m-1}}{dx^{2m-1}}\operatorname{ctg} x\right|_{m=3} = \frac{1}{\sin^6 x}\left(\frac{8}{15} + \frac{13}{30}\cos 2x + \frac{1}{30}\cos^2 2x\right),$$

получаем утверждение леммы. □

Определим функцию $\varphi(x) = \frac{1}{2^7}F(x)$. Из лемм 1 и 3 следует, что

$$\hat{\varphi}(\omega) = e^{-\pi i\omega} \cos \pi\omega \left(\frac{\sin \pi\omega}{\pi\omega}\right)^3,$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega+k)|^2 = \cos^2 \pi\omega \left(\frac{8}{15} + \frac{13}{30}\cos 2\pi\omega + \frac{1}{30}\cos^2 2\pi\omega\right),$$

$\varphi(x)$ удовлетворяет масштабирующему уравнению (9), и, значит, функция φ порождает КМА $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Однако этот КМА не является риссовским, так как сумма $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega+k)|^2$ неограничена снизу положительной постоянной.

Теорема 7. *Оператор $\mathfrak{P}_n$, построенный по функции $\varphi(x) = \frac{1}{2^7}F(x)$, доставляет аппроксимацию порядка* 1.

Доказательство. Воспользуемся леммой 3. Во-первых, $[\hat{\varphi},\hat{\varphi}]$ существенно ограничены. Во-вторых,

$$[\hat{\varphi},\hat{\varphi}] - |\hat{\varphi}|^2 = \cos^2 \pi\omega \left(\frac{8}{15} + \frac{13}{30}\cos 2\pi\omega + \frac{1}{30}\cos^2 2\pi\omega - \left(\frac{\sin \pi\omega}{\pi\omega}\right)^6\right) \approx \omega^2.$$

Наконец,

$$1 - |\hat{\varphi}|^2 = 1 - \cos^2 \pi\omega \left(\frac{\sin \pi\omega}{\pi\omega}\right)^6 \approx \omega^2.$$

Поэтому по лемме 3 оператор $\mathfrak{P}_n$ доставляет аппроксимацию порядка 1. □

Благодарности. Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152) .

Библиографический список

1. *Curry H. B., Schoenberg I. J.*, On spline distributions and their limits: the Pollya distributions // Bull. Amer. Math. Soc. 1947. Vol. 53. Abstract 380t. P. 1114.
2. *Schoenberg I. J.* On spline functions (with a supplement by T. N. E. Greville) // Inequalities I / ed. O. Shisha. N. Y. : Academic Press, 1967. P. 255–291.
3. *Schoenberg I. J.* Contributions to problem of approximation of equidistant data by analytic functions // Quart. Appl. Math. 1946. Vol. 4. P. 45–99, 112–141.
4. *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М. : Мир, 1972. 319 с.
5. *Де Бор С.* Практическое руководство по сплайнам. М. : Радио и связь, 1985. 304 с.
6. *Strömberg J.-O.* A modified Franklin system and higher-order spline systems on R^n as unconditional bases for Hardy spaces // Conference in Harmonic Analysis in Honor of A.Zigmund (The Wadsworth Mathematics Series) / eds. W. Beckner, A. P. Calderon. Springer, 1982. Vol. 2. P. 475–494.
7. *Battle G.* A block spin construction of ondelettes. Part 1: Lemarie functions // Comm. Math. Phys. 1987. Vol. 110. P. 601–615.
8. *Lemarie P.-G., Meyer Y.* Ondelettes et bases Hilbertiennes // Rev. Math. Iber. 1987. Vol. 2, № 1/2. P. 1–18.
9. *Чумаченко С.* Об одном из аналогов системы Фабера – Шаудера // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. 2016. Т. 53. С. 163–164.
10. Mathematics in image processing / ed. Hongkai Zhao. IAS/Park City Mathematics Series. 2013. Vol. 19. 245 p.
11. *De Boor C., DeVore R. A., Ron A.* Approximation from shift-invariant subspaces of $L_2(R^d)$ // Transactions of the American Mathematical Society. 1994. Vol. 341, № 2. P. 787–806.

12. *De Boor C., DeVore R. A., Ron A.* On the construction of multivariante (pre) wavelets // Constructive approximation. 1993. Vol. 9, № 2. P. 123–166.
13. *Jia R. Q., Shen Z.* Multiresolution and Wavelets // Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser. 1994. Vol. 37, № 2. P. 271–300.
14. *Jia R. Q., Micchelli C. A.* Using the refinement equations for the construction of pre-wavelets II: Powers of two // Curves and surfaces / eds. P.-J. Laurent, A. Le Mehaute, L. L. Schumaker. Elsevier Inc., 1999. P. 209–246.
15. *Чуи Ч.* Введение в вейвлеты. М. : Мир, 2001. 412 с.

Образец для цитирования:
Лукомский С. Ф., Мушко М. Д. О двоичных базисных сплайнах 2-й степени // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 2. С. 172–182. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-172-182

On Binary B-splines of Second Order

S. F. Lukomskii, M. D. Mushko

Sergey F. Lukomskii, https://orcid.org/0000-0003-3038-2698, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, LukomskiiSF@info.sgu.ru
Maxim D. Mushko, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, dart-maximus@yandex.ru

The classical B-spline is defined recursively as the convolution $B_{n+1} = B_n * B_0$, where B_0 is the characteristic function of the unit interval. The classical B-spline is a refinable function and satisfies the Riesz inequality. Therefore any B-spline B_n generates the Riesz multiresolution analysis (MRA). We define binary B-splines, obtained by double integration of the third Walsh function. We give an algorithm for constructing an interpolating spline of the second degree for a binary node system and find the approximation order of this interpolation process. We also prove that the system of dilations and shifts of the constructed B-spline generates an MRA (V_n) in De Boor sense. This MRA is not Riesz. But we can find the approximation order of functions from the Sobolev spaces $W_2^s, s > 0$ by the subspaces (V_n).

Key words: binary B-splines, multiresolution analysis, Sobolev spaces.

Acknowledgements: The authors are grateful to the referee for useful comments. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00152).

References

1. Curry H. B., Schoenberg I. J., On spline distributions and their limits: the Pollya distributions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1947, vol. 53, Abstract 380t, p. 1114.
2. Schoenberg I. J. On spline functions (with a supplement by T. N. E. Greville). *Inequalities I*. Ed. O. Shisha. New York, Academic Press, 1967, pp. 255–291.
3. Schoenberg I. J. Contributions to problem of approximation of equidistant data by analytic functions. *Quart. Appl. Math.*, 1946, vol. 4, pp. 45–99, 112–141.
4. Alberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L. *The theory of splines and their Applications*. Academic Press, 1967. 296 p.
5. De Boor C. *A practical guide to splines*. New York, Springer-Verlag, 2001. 348 p. (Russ. ed.: Moscow, Radio i sviaz', 1985. 304 p.)

6. Strömberg J.-O. A modified Franklin system and higher-order spline systems on R^n as unconditional bases for Hardy spaces. *Conference in Harmonic Analysis in Honor of A.Zigmund (The Wadsworth Mathematics Series)*. Eds. W. Beckner, A. P. Calderon. Springer, 1982, vol. 2, pp. 475–494.
7. Battle G. A block spin construction of ondelettes. Part 1: Lemarie functions. *Comm. Math. Phys.*, 1987, vol. 110, pp. 601–615.
8. Lemarie P.-G., Meyer Y. Ondelettes et bases Hilbertiennes. *Rev. Math. Iber.*, 1987, vol. 2, no. 1/2, pp. 1–18.
9. Chumachenko S. On an analogue of the Faber – Schauder system. *Trudy matematicheskogo centra N. I. Lobachevsky* [Proceedings of the N. I. Lobachevsky Mathematical Center]. 2016, vol. 53, pp. 163–164 (in Russian).
10. *Mathematics in image processing*. Ed. Hongkai Zhao. IAS/Park City Mathematics Series. 2013, vol. 19. 245 p.
11. De Boor C., DeVore R. A., Ron A. Approximation from shift-invariant subspaces of $L_2(R^d)$. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1994, vol. 341, no. 2, pp. 787–806.
12. De Boor C., DeVore R. A., Ron A. On the construction of multivariante (pre) wavelets. *Constructive approximation*, 1993, vol. 9, no. 2, pp. 123–166.
13. Jia R. Q., Shen Z. Multiresolution and Wavelets. *Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser.*, 1994, vol. 37, no. 2, pp. 271–300.
14. Jia R. Q., Micchelli C. A. Using the refinement equations for the construction of pre-wavelets II: Powers of two. *Curves and surfaces*. Eds. P.-J. Laurent, A. Le Mehaute, L. L. Schumaker. Elsevier Inc., 1999, pp. 209–246.
15. Chui Ch. K. *An Introduction to Wavelets*. San Diego, CA, USA, Academic Press, 1992. 264 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 2001. 412 p.)

Cite this article as:

Lukomskii S. F., Mushko M. D. On Binary B-splines of Second Order. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 2, pp. 172–182 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-172-182