УДК 517.587

ПОЛИНОМЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПО СОБОЛЕВУ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПОЛИНОМАМИ ШАРЛЬЕ

И. И. Шарапудинов, И. Г. Гусейнов

Шарапудинов Идрис Идрисович, доктор физико-математических наук, заведующий отделом математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, 367025, Россия, Махачкала, М. Гаджиева, 45, sharapud@mail.ru

Гусейнов Ибрагим Гусейнович, аспирант, Дагестанский государственный университет, Россия, 367000, Махачкала, М. Гаджиева, 43-а; инженер-исследователь отдела математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, Россия, 367025, Махачкала, М. Гаджиева, 45, ibraa2g@gmail.com

Рассмотрена задача о конструировании полиномов $s_{r,n}^{\alpha}(x)$, порожденных полиномами Шарлье $s_n^{\alpha}(x)$ и ортонормированных относительно скалярного произведения типа Соболева вида $\langle f,g\rangle = \sum\limits_{k=0}^{r-1}\Delta^k f(0)\Delta^k g(0) + \sum\limits_{j=0}^{\infty}\Delta^r f(j)\Delta^r g(j)\rho(j)$, где $\rho(x) = \alpha^x e^{-\alpha}/\Gamma(x+1)$. Показано, что система полиномов $s_{r,n}^{\alpha}(x)$, порожденная полиномами Шарлье, полна в гильбертовом пространстве $W_{l_\rho}^r$, состоящем из дискретных функций, заданных на сетке $\Omega = \{0,1,\ldots\}$, в котором введено скалярное произведение $\langle f,g\rangle$. Найдена явная формула вида $s_{r,k+r}^{\alpha}(x) = \sum\limits_{l=0}^{k} b_l^r x^{[l+r]}$, в которой $x^{[m]} = x(x-1)\ldots(x-m+1)$. Установлена связь полиномов $s_{r,n}^{\alpha}(x)$ с порождающими их ортонормированными классическими полиномами Шарлье $s_n^{\alpha}(x)$ вида $s_{r,k+r}^{\alpha}(x) = U_k^r\left[s_{k+r}^{\alpha}(x) - \sum\limits_{\nu=0}^{r-1}V_{k,\nu}^r x^{[\nu]}\right]$, в которой для чисел U_k^r, $V_{k,\nu}^r$ найдены явные выражения.

Ключевые слова: полиномы, ортогональные по Соболеву, полиномы Шарлье, скалярное произведение типа Соболева.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-196-205

ВВЕДЕНИЕ

Теория полиномов, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева, получила в последние три десятилетия интенсивное развитие и нашла ряд важных приложений (см. [1–6] и цитированную там литературу). Характерной особенностью скалярных произведений типа Соболева является, в частности, то, что они, как правило, содержат слагаемые, которые «контролируют» поведение соответствующих ортогональных полиномов в одной или нескольких точках числовой оси. Например, часто рассматривают скалярное произведение вида

$$\langle f,g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a) + \int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)\,dt, \qquad (1)$$

в котором f и g — функции, заданные на $[a,b]$ и непрерывно дифференцируемые там $r-1$ раз, для которых $f^{(r-1)}(x)$ и $g^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывны и $f^{(r)}(x)$, $g^{(r)}(x) \in L_\rho^2(a,b)$, где $L_\rho^2(a,b)$ — пространство Лебега с весом $\rho(x)$. Следует отметить, что полиномы, ортогональные по Соболеву, по своим свойствам могут весьма существенно отличаться от обычных ортогональных на интервале полиномов. Например, в некоторых случаях оказывается так, что полиномы, ортогональные по Соболеву на интервале (a,b), могут иметь нули, совпадающие с одним или с обоими концами этого интервала. Это обстоятельство имеет важное значение для некоторых приложений, в которых требуется, чтобы значения частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ по рассматриваемой системе ортогональных полиномов совпали в концах интервала (a,b) со значениями $f(a)$ и $f(b)$. Заметим, что обычные ортогональные с положительным на (a,b) весом полиномы этим важным свойством не обладают. Скалярное произведение (1) имеет одну особую точку, а именно точку a, в окрестности которой «контролируется» поведение соответствующих полиномов, ортогональных по Соболеву. Это достигается за счет наличия в скалярном произведении (1) слагаемого вида $\sum\limits_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a)$.

В настоящей работе, следуя [7], мы рассмотрим дискретный аналог скалярного произведения (1) следующего вида:

$$\langle f,g\rangle = \sum_{k=0}^{r-1}\Delta^k f(0)\Delta^k g(0) + \sum_{j=0}^{\infty}\Delta^r f(j)\Delta^r g(j)\rho(j), \tag{2}$$

где функции f и g заданы на множестве $\Omega=\{0,1,\ldots,\}$, $\rho=\rho(j)$ — дискретная весовая функция, заданная на множестве Ω. В случае, когда $r=0$ мы будем считать, что $\sum\limits_{k=0}^{r-1}\Delta^k f(0)\Delta^k g(0)=0$. При $r\geqslant 1$ особой точкой в скалярном произведении (2) является $x=0$, в которой «контролируется» поведение соответствующих ортогональных по Соболеву полиномов дискретной переменной, благодаря присутствию в (2) выражения $\sum\limits_{k=0}^{r-1}\Delta^k f(0)\Delta^k g(0)$. Основное внимание будет уделено изучению свойств полиномов, ортогональных по Соболеву, порожденных классическими ортогональными полиномами Шарлье дискретной переменной.

1. СИСТЕМЫ ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ, ОРТОНОРМИРОВАННЫХ ПО СОБОЛЕВУ, ПОРОЖДЕННЫЕ ОРТОНОРМИРОВАННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Как уже отмечалось выше, системы дискретных функций, ортонормированных по Соболеву относительно скалярного произведения (2), порожденных заданной системой $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированной на дискретном множестве $\Omega=\{0,1,\ldots\}$ с весом $\rho(x)$, были рассмотрены в [7]. В дальнейшем нам понадобятся некоторые результаты из [7], поэтому мы вкратце напомним их в этом параграфе. С этой целью, следуя [7], введем некоторые обозначения и понятия.

Если целое $k\geqslant 0$, то положим $a^{[k]}=a(a-1)\cdots(a-k+1)$, $a^{[0]}=1$ и рассмотрим следующие функции:

$$\psi_{r,k}(x)=\frac{x^{[k]}}{k!},\qquad k=0,1,\ldots,r-1, \tag{3}$$

$$\psi_{r,k}(x)=\begin{cases}\frac{1}{(r-1)!}\sum\limits_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}\psi_{k-r}(t), & r\leqslant x,\\ 0, & x=0,1,\ldots,r-1,\end{cases} \tag{4}$$

которые определены на сетке $\Omega=\{0,1,\ldots\}$. Рассмотрим некоторые важные разностные свойства системы функций $\psi_{r,k}(x)$, определенных равенствами (3) и (4).

Введем оператор конечной разности Δf: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ и положим $\Delta^{\nu+1} f(x) = \Delta\Delta^{\nu} f(x)$. Имеет место следующий факт [7]:

$$\Delta^{\nu}\psi_{r,k}(x) = \begin{cases} \psi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } 0 \leqslant \nu \leqslant r-1,\ r \leqslant k, \\ \psi_{k-r}(x), & \text{если } \nu = r \leqslant k, \\ \psi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } \nu \leqslant k < r, \\ 0, & \text{если } k < \nu \leqslant r. \end{cases} \tag{5}$$

Пусть $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ — положительная функция, для которой $\sum\limits_{x=0}^{\infty} \rho(x) < \infty$. Обозначим через l_ρ пространство дискретных функций $f, g, \ldots$, в котором скалярное произведение определяется обычным образом с помощью равенства $(f,g) = \sum\limits_{x\in\Omega} f(x)g(x)\rho(x)$. Через $W^r_{l_\rho}$ обозначим подпространство в l_ρ, состоящее из функций $f, g, \ldots$, для которых определено скалярное произведение (2). Рассмотрим задачу об ортонормированности и полноте в $W^r_{l_\rho}$ системы $\{\psi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, состоящей из функций, определенных равенствами (3) и (4). В работе [7] эта задача была решена для случая, когда $l_\rho = W^r_{l_\rho}$. В настоящей работе мы обобщаем этот результат на тот случай, когда подпространство $W^r_{l_\rho} \subset l_\rho$ не обязательно совпадает со всем пространством l_ρ. А именно справедлива следующая

Теорема 1. *Предположим, что функции $\psi_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ образуют полную в l_ρ ортонормированную систему с весом $\rho(x)$. Тогда система $\{\psi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, порожденная системой $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ посредством равенств* (3) *и* (4)*, полна в $W^r_{l_\rho}$ и ортонормирована относительно скалярного произведения* (2).

Доказательство. Из (4) и (5) следует, что если $r \leqslant k$ и $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$, то $\Delta^{\nu}\psi_{r,k}(x)\big|_{x=0} = 0$, поэтому в силу (2) и (5) имеем

$$\langle \psi_{r,k}, \psi_{r,l}\rangle = \sum_{x=0}^{\infty} \Delta^r\psi_{r,k}(x)\Delta^r\psi_{r,l}(x)\rho(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \psi_{k-r}(x)\psi_{k-l}(x)\rho(x) = \delta_{kl}, \quad k, l \geqslant r,$$

$$\langle \psi_{r,k}, \psi_{r,l}\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^{\nu}\psi_{r,k}(0)\Delta^{\nu}\psi_{r,l}(0) = \delta_{kl}, \quad k, l < r.$$

Очевидно также, что

$$\langle \psi_{r,k}, \psi_{r,l}\rangle = 0, \quad \text{если} \quad k < r \leqslant l \quad \text{или} \quad l < r \leqslant k.$$

Это означает, что функции $\psi_{r,k}(t)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ образуют в $W^r_{l_\rho}$ ортонормированную систему относительно скалярного произведения (2). Чтобы проверить полноту этой системы в $W^r_{l_\rho}$ предположим, что для функции $f \in W^r_{l_\rho}$ имеют место равенства

$$\langle \psi_{r,k}, f\rangle = 0, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Тогда, во-первых, в силу того, что $0 = \langle \psi_{r,k}, f\rangle = \Delta^k f(0)$ при $k = 0, \ldots, r-1$ имеем $f(j) = 0$ для всех $j = 0, \ldots, r-1$. Во-вторых, из равенств $\langle \psi_{r,k}, f\rangle = 0$, $k = r, r+1, \ldots$ и полноты в l_ρ исходной системы $\{\psi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ следует, что $\Delta^r f(x) \equiv 0$ $(x \in \Omega)$, и поэтому f совпадает с алгебраическим полиномом степени не выше $r-1$

(см., например, формулу Тейлора (21), в которой вместо $F(x)$ фигурирует $f(x)$). Из этих двух фактов вытекает, что $f(x) \equiv 0$ $(x \in \Omega)$. Теорема доказана. $\square$

Систему функций $\{\psi_{r,k}(t)\}_{k=0}^{\infty}$ мы будем называть системой, ортонормированной по Соболеву относительно скалярного произведения (2).

Из теоремы 1 следует, что система дискретных функций $\{\psi_{r,k}(t)\}_{k=0}^{\infty}$ является ортонормированным базисом в пространстве $W^r_{l_\rho}$, тогда для произвольной функции $f(x) \in W^r_{l_\rho}$ мы можем записать равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \psi_{r,k} \rangle \psi_{r,k}(x), \tag{6}$$

которое представляет собой ряд Фурье функции $f(x) \in W^r_{l_\rho}$ по системе $\{\psi_{r,k}(t)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированной по Соболеву. Заметим, что из полноты системы функций $\{\psi_{r,k}(t)\}_{k=0}^{\infty}$ в пространстве $W^r_{l_\rho}$ (теорема 1) следует, что ряд (6) сходится по норме пространства $W^r_{l_\rho}$. Нетрудно также показать, что ряд (6) сходится в каждой точке $x \in \{0, 1, \ldots\}$.

Поскольку коэффициенты Фурье $\langle f, \psi_{r,k} \rangle$ имеют вид

$$f_{r,k} = \langle f, \psi_{r,k} \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^\nu f(0) \Delta^\nu \psi_{r,k}(0) = \Delta^k f(0), \quad k = 0, \ldots, r-1,$$

$$f_{r,k} = \langle f, \psi_{r,k} \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^r f(j) \Delta^r \psi_{r,k}(j) \rho(j) = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^r f(j) \psi_{k-r}(j) \rho(j), \quad k = r, r+1, \ldots,$$

то равенство (6) можно переписать в следующем смешанном виде:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} f_{r,k} \psi_{r,k}(x), \qquad x \in \Omega. \tag{7}$$

В связи с этим ряд Фурье по системе $\{\psi_{r,k}(t)\}_{k=0}^{\infty}$ мы будем, следуя [8], называть смешанным рядом по исходной ортонормированной $\{\psi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$. Отметим некоторые важные свойства смешанных рядов (7) и их частичных сумм вида

$$\mathscr{Y}_{r,n}(f, x) = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r}^{n} f_{r,k} \psi_{r,k}(x). \tag{8}$$

Из (7) и (8) с учетом равенств (5) мы можем записать $(0 \leqslant \nu \leqslant r-1,\ x \in \Omega\ )$

$$\Delta^\nu f(x) = \sum_{k=0}^{r-\nu-1} \Delta^{k+\nu} f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r-\nu}^{\infty} f_{r,k+\nu} \psi_{r-\nu,k}(x), \tag{9}$$

$$\Delta^\nu \mathscr{Y}_{r,n}(f, x) = \sum_{k=0}^{r-\nu-1} \Delta^{k+\nu} f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r-\nu}^{n-\nu} f_{r,k+\nu} \psi_{r-\nu,k}(x), \tag{10}$$

$$\Delta^\nu \mathscr{Y}_{r,n}(f, x) = \mathscr{Y}_{r-\nu,n-\nu}(\Delta^\nu f, x). \tag{11}$$

2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОЛИНОМАХ ШАРЛЬЕ

При конструировании полиномов, ортогональных по Соболеву и порожденных классическими полиномами Шарлье, нам понадобится ряд свойств этих полиномов, которые мы приведем в настоящем параграфе. Для произвольного α положим

$$\rho(x) = \rho(x;\alpha) = \frac{\alpha^x e^{-\alpha}}{\Gamma(x+1)}, \tag{12}$$

$$S_n^\alpha(x) = \frac{1}{\alpha^n \rho(x)} \Delta^n\{\rho(x)x^{[n]}\}, \tag{13}$$

где $\Delta^n f(x)$ — конечная разность n-го порядка функции $f(x)$ в точке x, т.е. $\Delta^0 f(x) = f(x)$, $\Delta^1 f(x) = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, $\Delta^n f(x) = \Delta\Delta^{n-1} f(x)$ $(n \geqslant 1)$, $a^{[0]} = 1$, $a^{[k]} = a(a-1)\cdots(a-k+1)$ при $k \geqslant 1$. Для каждого $0 \leqslant n$ равенство (13) определяет [9, 10] алгебраический полином степени n. Полные доказательства приведенных ниже свойств полиномов Шарлье $S_n^\alpha(x)$ можно найти, например, в [9].

Если $\alpha > 0$, то полиномы $S_n^\alpha(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ образуют полную [9, с. 243], [11, с. 375] в l_ρ ортогональную с весом $\rho(x)$ (см. (12)) систему на множестве $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$:

$$\sum_{x\in\Omega} S_k^\alpha(x) S_n^\alpha(x) \rho(x) = \delta_{nk} h_n(\alpha), \tag{14}$$

где

$$h_n(\alpha) = \sum_{x=0}^{\infty} \rho(x)\{S_n^\alpha(x)\}^2 = \alpha^{-n} n!. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует, что полиномы

$$s_n^\alpha(x) = (h_n(\alpha))^{-\frac{1}{2}} S_n^\alpha(x) \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{16}$$

образуют ортонормированную систему на множестве Ω с весом $\rho(x) = \rho(x, \alpha)$, т.е.

$$\sum_{x\in\Omega} s_k^\alpha(x) s_n^\alpha(x) \rho(x) = \delta_{nk}.$$

Полиномы Шарлье допускают следующее явное представление:

$$S_n^\alpha(x) = \sum_{l=0}^{n} \frac{(-n)_l(-x)_l}{l!}(-\alpha)^{-l} = \sum_{l=0}^{n} \frac{n^{[l]} x^{[l]}}{l!}(-\alpha)^{-l}, \tag{17}$$

где $(a)_l = a(a+1)\ldots(a+l-1)$ — символ Похгаммера. Из (17) непосредственно следует, что

$$\Delta S_n^\alpha(x) = -\frac{n}{\alpha} S_{n-1}^\alpha(x). \tag{18}$$

3. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПО СОБОЛЕВУ ПОЛИНОМЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПОЛИНОМАМИ ШАРЛЬЕ

При $\alpha > 0$ рассмотрим на Ω полиномы $s_n^\alpha(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Эта система порождает на Ω систему полиномов $s_{r,k}^\alpha(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$, определенных равенствами

$$s_{r,k+r}^\alpha(x) = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} s_k^\alpha(t), \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{19}$$

$$s^{\alpha}_{r,k}(x) = \frac{x^{[k]}}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots, r-1. \tag{20}$$

Равенство (19) определяет для целых $x \geqslant r$ полином степени $k+r$, который мы можем продолжить на всю комплексную плоскость по принципу аналитического продолжения. Покажем, что продолженный полином, который согласно (19) удовлетворяет первому из равенств определения (4), удовлетворяет также и второму из равенств (4). Другими словами, покажем, что $s^{\alpha}_{r,k+r}(x)$ обращается в нуль в точках $x = 0, 1, \ldots, r-1$. С этой целью мы рассмотрим следующий дискретный аналог формулы Тейлора ($x \in \{r, r+1, \ldots\}$):

$$F(x) = Q_{r-1}(F, x) + \frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}\Delta^r F(t), \tag{21}$$

где

$$Q_{r-1}(F, x) = F(0) + \frac{\Delta F(0)}{1!}x + \frac{\Delta^2 F(0)}{2!}x^{[2]} + \ldots + \frac{\Delta^{r-1}F(0)}{(r-1)!}x^{[r-1]}. \tag{22}$$

Так как для функции $F(t) = t^{[l+r]}$, где целое $l \geqslant 0$, имеем $\Delta^r F(t) = (l+r)^{[r]}t^{[l]}$ и $Q_{r-1}(F, t) \equiv 0$, то из (21) следует, что

$$\frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}t^{[l]} =$$
$$= \frac{1}{(l+r)^{[r]}(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}\Delta^r F(t) = \frac{x^{[l+r]}}{(l+r)^{[r]}}. \tag{23}$$

В то же время для любого целого $l \geqslant 0$ функция $x^{[l+r]}$ обращается в нуль в узлах $x \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$. Поэтому полином $s^{\alpha}_{r,k+r}(x)$ также обращается в нуль при $x = 0, 1, \ldots, r-1$, так как в силу (19), (16) и (17) его можно представить в виде линейной комбинации функций вида $x^{[l+r]}$. Таким образом, для полинома $s^{\alpha}_{r,k}(x)$, заданного при $k \geqslant r$ равенством (19), имеет место равенство (4), в котором вместо $\psi_{r,k}$ фигурирует $s^{\alpha}_{r,k}$. Поэтому из теоремы 1 и равенств (19), (20) вытекает следующее соотношение ортогональности:

$$\langle s^{\alpha}_{r,n}, s^{\alpha}_{r,m}\rangle = \sum_{k=0}^{r-1}\Delta^k s^{\alpha}_{r,n}(0)\Delta^k s^{\alpha}_{r,m}(0) + \sum_{j=0}^{\infty}\Delta^r s^{\alpha}_{r,n}(j)\Delta^r s^{\alpha}_{r,m}(j)\rho(j) = \delta_{nm}.$$

Тем самым мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 2. *Если $\alpha > 0$, то система полиномов $s^{\alpha}_{r,k}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$, порожденная полиномами Шарлье $s^{\alpha}_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ посредством равенств* (19) *и* (20)*, полна в $W^r_{l_\rho}$ и ортонормирована относительно скалярного произведения* (2).

4. ДАЛЬНЕЙШИЕ СВОЙСТВА ПОЛИНОМОВ $\mathbf{s^{\alpha}_{r,k}(x)}$

Перейдем к исследованию дальнейших свойств полиномов $s^{\alpha}_{r,k}(x)$. В первую очередь, мы установим явный вид этих полиномов, представляющий собой разложение $s^{\alpha}_{r,k}(x)$ по обобщенным степеням $x^{[l]}$ $(l = r, r+1, \ldots, k)$.

Теорема 3. *Для $\alpha > 0$ имеют место равенства*

$$s^{\alpha}_{r,k+r}(x) = \frac{1}{(h_n(\alpha))^{1/2}} \sum_{l=0}^{k} \frac{k^{[l]} x^{[l+r]}}{l!(l+r)^{[r]}} (-\alpha)^{-l}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Доказательство. В равенстве (19) подставим вместо $s^{\alpha}_{k}(t)$ его выражение из (16):

$$s^{\alpha}_{r,k+r}(x) = \frac{(h_k(\alpha))^{-\frac{1}{2}}}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} S^{\alpha}_{k}(t).$$

Отсюда и из (17)

$$s^{\alpha}_{r,k+r}(x) = \frac{(h_k(\alpha))^{-\frac{1}{2}}}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} \sum_{l=0}^{k} \frac{k^{[l]} t^{[l]}}{l!} (-\alpha)^{-l} =$$

$$= \frac{1}{(h_k(\alpha))^{\frac{1}{2}}} \sum_{l=0}^{k} \frac{k^{[l]}}{l!} (-\alpha)^{-l} \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} t^{[l]}.$$

Воспользовавшись (23), мы получим требуемое. □

Теперь установим связь полиномов $s^{\alpha}_{r,k}(x)$ с порождающими их полиномами Шарлье $S^{\alpha}_{k}(x)$, которая не содержит знаков суммирования с переменным верхним пределом типа (19). Имеет место следующая

Теорема 4. *При $k \geqslant 0$ имеют место равенства*

$$s^{\alpha}_{r,k+r}(x) = \frac{(-\alpha)^r}{(k+r)^{[r]}} \left(\frac{\alpha^k}{k!}\right)^{\frac{1}{2}} \left[S^{\alpha}_{k+r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{(k+r)^{[\nu]} x^{[\nu]}}{(-\alpha)^{\nu} \nu!} \right], \tag{24}$$

$$s^{\alpha}_{r,k+r}(x) = (-1)^r \left(\frac{\alpha^r}{(k+r)^{[r]}}\right)^{\frac{1}{2}} \left[s^{\alpha}_{k+r}(x) - \left(\frac{\alpha^{k+r}}{(k+r)!}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{(k+r)^{[\nu]} x^{[\nu]}}{(-\alpha)^{\nu} \nu!} \right]. \tag{25}$$

Доказательство. Применим формулу (21) к полиному $F(x) = S^{\alpha}_{k+r}(x)$ и запишем

$$F(x) = Q_{r-1}(F, x) + \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} \Delta^r S^{\alpha}_{k+r}(t). \tag{26}$$

Вместо $\Delta^r S^{\alpha}_{k+r}(t)$ подставим его значение, которое согласно формуле (18) равно $\frac{(k+r)^{[r]}}{(-\alpha)^r} S^{\alpha}_{k}(t)$, тогда из (26) получим:

$$F(x) - Q_{r-1}(F, x) = \frac{(k+r)^{[r]}}{(-\alpha)^r} \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} S^{\alpha}_{k}(t). \tag{27}$$

Из (19) и (27) с (16) находим

$$\frac{(k+r)^{[r]}}{(-\alpha)^r} \{h_k(\alpha)\}^{\frac{1}{2}} s^{\alpha}_{r,k+r}(x) = F(x) - Q_{r-1}(F, x). \tag{28}$$

Из (28) получаем:

$$s_{r,k+r}^{\alpha}(x)=\frac{(-\alpha)^r}{(k+r)^{[r]}}\{h_k(\alpha)\}^{-\frac{1}{2}}[F(x)-Q_{r-1}(F,x)]. \tag{29}$$

Далее, в силу (18) $\Delta^\nu S_{k+r}^{\alpha}(x)=\frac{(k+r)^{[\nu]}}{(-\alpha)^\nu}S_{k+r-\nu}^{\alpha}(x)$, поэтому из (17) находим

$$\Delta^\nu S_{k+r}^{\alpha}(0)=\frac{(k+r)^{[\nu]}}{(-\alpha)^\nu}=A_{r,k,\nu}. \tag{30}$$

Равенства (22) и (30), взятые вместе, дают

$$F(x)-Q_{r-1}(F,x)=S_{k+r}^{\alpha}(x)-\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{A_{r,k,\nu}x^{[\nu]}}{\nu!}. \tag{31}$$

Равенство (24) непосредственно вытекает из (29), (30) и (31), а равенство (25), в свою очередь, можно получить из (24) и (16). □

5. РАЗНОСТНЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЧНЫХ СУММ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ $\{s_{r,k}^{\alpha}(x)\}_{k=0}^{\infty}$

Основные разностные свойства сумм Фурье по полиномам $s_{r,k}^{\alpha}(x)$, которые согласно (8) имеют вид

$$\mathscr{Y}_{r,n}^{\alpha}(f,x)=\sum_{k=0}^{r-1}\Delta^k f(0)\frac{x^{[k]}}{k!}+\sum_{k=r}^{n}f_{r,k}s_{r,k}^{\alpha}(x),$$

где

$$f_{r,k}=\langle f,s_{r,k}^{\alpha}\rangle=\sum_{j=0}^{\infty}\Delta^r f(j)s_{k-r}^{\alpha}(j)\rho(j),\qquad k=r,r+1,\ldots,$$

выражены равенствами (9), (10) и (11). Для системы $\{s_{r,k}^{\alpha}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ они принимают вид $(0\leqslant\nu\leqslant r-1)$

$$\Delta^\nu f(x)=\sum_{k=0}^{r-\nu-1}\Delta^{k+\nu}f(0)\frac{x^{[k]}}{k!}+\sum_{k=r-\nu}^{\infty}f_{r,k+\nu}s_{r-\nu,k}^{\alpha}(x),$$
$$\Delta^\nu\mathscr{Y}_{r,n}^{\alpha}(f,x)=\sum_{k=0}^{r-\nu-1}\Delta^{k+\nu}f(0)\frac{x^{[k]}}{k!}+\sum_{k=r-\nu}^{n-\nu}f_{r,k+\nu}s_{r-\nu,k}^{\alpha}(x),$$
$$\Delta^\nu\mathscr{Y}_{r,n}^{\alpha}(f,x)=\mathscr{Y}_{r-\nu,n-\nu}^{\alpha}(\Delta^\nu f,x).$$

Из (9) и (10) мы также можем записать для $n\geqslant r>\nu\geqslant 0$

$$\Delta^\nu f(x)-\Delta^\nu\mathscr{Y}_{r,n}^{\alpha}(f,x)=\sum_{k=n-\nu+1}^{\infty}f_{r,k+\nu}s_{r-\nu,k}^{\alpha}(x). \tag{32}$$

Равенство (32) дает выражение для погрешности, возникающей в результате замены конечной разности $\Delta^\nu f(x)$ ее приближенным значением $\Delta^\nu\mathscr{Y}_{r,n}^{\alpha}(f,x)$.

Библиографический список

1. *Iserles A., Koch P. E., Norsett S. P., Sanz-Serna J. M.* On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory. 1991. Vol. 65, iss. 2. P. 151–175. DOI: 10.1016/0021-9045(91)90100-O
2. *Marcellan F., Alfaro M., Rezola M. L.* Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // J. Comput. Appl. Math. 1993. Vol. 48, iss. 1–2. P. 113–131. DOI: 10.1016/0377-0427(93)90318-6
3. *Meijer H. G.* Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory. 1993. Vol. 73, iss. 1. P. 1–16. DOI: 10.1006/jath.1993.1029
4. *Kwon K. H., Littlejohn L. L.* The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k // Ann. Numer. Anal. 1995. Vol. 2. P. 289–303.
5. *Kwon K. H., Littlejohn L. L.* Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Rocky Mountain J. Math. 1998. Vol. 28. P. 547–594. DOI: 10.1216/rmjm/1181071786
6. *Marcellan F., Xu Y.* On Sobolev orthogonal polynomials. arXiv:1403.6249v1 [math.CA]. 25 Mar 2014. 40 p.
7. *Шарапудинов И. И., Гаджиева З. Д.* Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 310–321. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-310-321
8. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Махачкала : Изд-во ДНЦ РАН, 2004. 176 с.
9. *Шарапудинов И. И.* Многочлены, ортогональные на сетках. Махачкала : Изд-во Даг. гос. пед. ун-та, 1997. 252 с.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции : в 3 т. Т. 2. М. : Наука, 1974. 296 с.
11. *Ширяев А. Н.* Вероятность-1. М. : Изд-во МЦНМО, 2007. 552 с.

Образец для цитирования:

Шарапудинов И. И., Гусейнов И. Г. Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные полиномами Шарлье // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 2. С. 196–205. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-196-205

Polynomials Orthogonal with Respect to Sobolev Type Inner Product Generated by Charlier Polynomials

I. I. Sharapudinov, I. G. Guseinov

Idris I. Sharapudinov, https://orcid.org/0000-0002-2290-9878, Dagestan Scientific Center of RAS, 45, M. Gadzhieva Str., Makhachkala, 367025, Russia, sharapud@mail.ru

Ibraghim G. Guseinov, https://orcid.org/0000-0002-3888-6383, Dagestan State University, 43-a, M. Gadzhieva Str., Makhachkala, 367000, Russia; Dagestan Scientific Center RAS, 45, M. Gadzhieva Str., Makhachkala, 367025, Russia, ibraa2g@gmail.ru

The problem of constructing of the Sobolev orthogonal polynomials $s_{r,n}^{\alpha}(x)$ generated by Charlier polynomials $s_n^{\alpha}(x)$ is considered. It is shown that the system of polynomials $s_{r,n}^{\alpha}(x)$ generated by Charlier polynomials is complete in the space $W_{l_\rho}^r$, consisted of the discrete functions, given on the grid $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$. $W_{l_\rho}^r$ is a Hilbert space with the inner product $\langle f, g \rangle$. An explicit formula in the form of $s_{r,k+r}^{\alpha}(x) = \sum\limits_{l=0}^{k} b_l^r x^{[l+r]}$, where $x^{[m]} = x(x-1)\dots(x-m+1)$, is found. The connection between the polynomials $s_{r,n}^{\alpha}(x)$ and the classical Charlier polynomials $s_n^{\alpha}(x)$ in the form of $s_{r,k+r}^{\alpha}(x) = U_k^r \left[s_{k+r}^{\alpha}(x) - \sum\limits_{\nu=0}^{r-1} V_{k,\nu}^r x^{[\nu]} \right]$, where for the numbers U_k^r, $V_{k,\nu}^r$ we found the explicit expressions, is established.

Key words: Sobolev orthogonal polynomials, Charlier polynomials, Sobolev-type inner product.

References

1. Iserles A., Koch P. E., Norsett S. P., Sanz-Serna J. M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products. *J. Approx. Theory*, 1991, vol. 65, iss. 2, pp. 151–175. DOI: 10.1016/0021-9045(91)90100-O
2. Marcellan F., Alfaro M., Rezola M. L. Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions. *J. Comput. Appl. Math.*, 1993, vol. 48, iss. 1–2, pp. 113–131. DOI: 10.1016/0377-0427(93)90318-6
3. Meijer H. G. Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space. *J. Approx. Theory*, 1993, vol. 73, iss. 1, pp. 1–16. DOI: 10.1006/jath.1993.1029
4. Kwon K. H., Littlejohn L. L. The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k. *Ann. Numer. Anal.*, 1995, vol. 2, pp. 289–303.
5. Kwon K. H., Littlejohn L. L. Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations. *Rocky Mountain J. Math.*, 1998, vol. 28, pp. 547–594. DOI: 10.1216/rmjm/1181071786
6. Marcellan F., Xu Y. On Sobolev orthogonal polynomials. *arXiv:1403.6249v1* [math.CA]. 25 Mar 2014. 40 p.
7. Sharapudinov I. I., Gadzhieva Z. D. Sobolev orthogonal polynomials generated by Meixner polynomials. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 310–321 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-310-321
8. Sharapudinov I. I. *Smeshannyj rjady po ortogonal'nym polinomam* [Mixed Series in Orthogonal Polynomials]. Makhachkala, Izd-vo DNC RAN, 2004. 176 p. (in Russian).
9. Sharapudinov I. I. *Mnogochleny, ortogonal'nye na setkah* [Polynomials Orthogonal on Grids]. Makhachkala, Izd-vo Dag. gos. ped. un-ta, 1997. 252 p. (in Russian).
10. Bateman H., Erdelyi A. *Higher Transcendental Functions*. Vol. 2. New York, McGraw-Hill Book Company, 1953. 396 p. (Rus. ed.: Moscow, Nauka, 1974. 296 p.)
11. Shirjaev A. N. *Verojatnost'-1* [Probability-1]. Moscow, MTsNMO, 2007. 552 p. (in Russian).

Cite this article as:

Sharapudinov I. I., Guseinov I. G. Polynomials Orthogonal with Respect to Sobolev Type Inner Product Generated by Charlier Polynomials. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 2, pp. 196–205 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-196-205