

## МЕХАНИКА

УДК 51.74

### ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ КВАДРАТУР К РЕШЕНИЮ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

М. А. Барулина

Барулина Марина Александровна, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт проблем точной механики и управления РАН, 410024, Россия, Саратов, Рабочая, 24, marina@ibarulina.ru

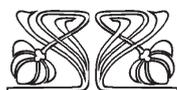
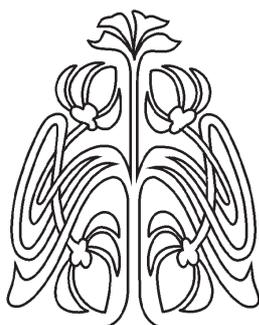
В статье описывается применение обобщенного метода дифференциальных квадратур к решению двумерных задач механики на примере изучения собственных колебаний прямоугольной пластины при различных видах граничных условий. Метод дифференциальных квадратур (МДК) является эффективным методом решения дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных. Основными задачами при использовании МДК, как и других квадратурных методов, являются задачи выбора распределения для построения сетки и нахождения весовых коэффициентов и задача включения граничных условий в разрешающую систему линейных алгебраических уравнений. В статье используется обобщенный подход к учету граничных условий и приводится универсальный алгоритм формирования разрешающей системы. Показано на примере частотного анализа прямоугольной пластины, что МДК позволяет решать двумерные задачи механики с приемлемой точностью с относительно малым количеством узлов на сетке на основе классического неравномерного распределения Чебышева – Гаусса – Лобатто и при использовании обобщенного подхода к учету граничных условий.

*Ключевые слова:* метод дифференциальных квадратур, численные методы, дифференциальные уравнения, собственные частоты, прямоугольная пластина.

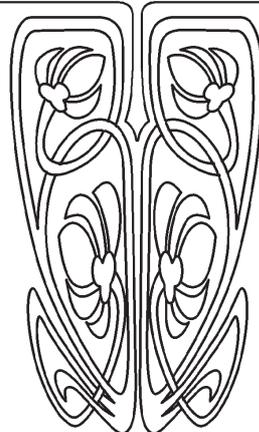
DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-206-216

#### ВВЕДЕНИЕ

Метод дифференциальных квадратур (МДК) является одним из численных методов решения дифференциальных уравнений и их систем, широко используемым за рубежом, но незначительно распространен в России. В то же время простота подхода, реализующегося в МДК, универсальность и точность получаемых результатов позволяют использовать МДК для широкого круга одно-



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





и многомерных задач механики, как стационарных, так и нестационарных. МДК впервые был предложен в начале 1970-х Р. Беллманом (Bellman) и его коллегами [1]. МДК, аналогично другим квадратурным методам [2], аппроксимирует производную функции в любой точке линейным суммированием всех значений этой функции вдоль линии сетки. Ключевой задачей в МДК является нахождение весовых коэффициентов для такой аппроксимации. Подход, который предлагал Беллман для нахождения весовых коэффициентов, приводил к плохо обусловленным матрицам, что ограничивало использование МДК. В конце 1980-х были разработаны новые подходы к вычислению весовых коэффициентов, что позволило МДК стать одним из универсальных и распространенных методов численного решения дифференциальных уравнений [3]. МДК позволяет получить решение с достаточной точностью на сетке с меньшим количеством узлов, чем метод конечных разностей и метод конечных элементов, что является несомненным его преимуществом. МДК продолжает развиваться в настоящее время [4–7]. Так, был предложен обобщенный метод дифференциальных квадратур, в котором реализован универсальный подход для учета различных граничных условий — однородных и неоднородных граничных условий 1, 2 и 3-го рода [3].

В работе описывается применение обобщенного метода дифференциальных квадратур к решению двумерных задач механики на примере изучения собственных колебаний прямоугольной пластины при различных видах граничных условий. Также в работе описан подробный алгоритм формирования разрешающей системы линейных алгебраических уравнений, соответствующей решаемому уравнению и рассматриваемым граничным условиям.

## 1. УРАВНЕНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрим тонкую прямоугольную пластину. Уравнения свободных колебаний такой пластины в безразмерной форме имеют вид [7]

$$\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} = \Omega^2 W, \quad (1)$$

где  $W$  — безразмерная функция прогибов;  $\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  — безразмерная собственная частота;  $X = x/a$ ,  $Y = y/b$ ,  $a$ ,  $b$  — геометрические размеры пластины;  $\lambda = a/b$  — соотношение сторон пластины;  $E$ ,  $h$ ,  $\nu$ ,  $\rho$  — модуль Юнга, толщина, коэффициент Пуассона и плотность пластины;  $\omega$  — круговая собственная частота;  $D = Eh^3 / [12(1 - \nu^2)]$  — изгибная жесткость. Граничные условия будут иметь вид [7]

- шарнир, или свободно опертый край (СО)

$X = 0$  или  $X = 1$ :

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = 0; \quad (2)$$

$Y = 0$  или  $Y = 1$ :

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = 0; \quad (3)$$

- жесткая заделка (Ж)

$X = 0$  или  $X = 1$ :

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial X} = 0; \quad (4)$$

$Y = 0$  или  $Y = 1$ :

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial Y} = 0; \quad (5)$$



- незакрепленный край (Н)

$X = 0$  или  $X = 1$ :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \nu \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 W}{\partial X^3} + (2 - \nu) \lambda^2 \frac{\partial^3 W}{\partial X \partial Y^2} = 0; \quad (6)$$

$Y = 0$  или  $Y = 1$ :

$$\nu \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = 0, \quad \lambda^2 \frac{\partial^3 W}{\partial Y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial X^2 \partial Y} = 0. \quad (7)$$

Если два соседних края пластины не закреплены, то дополнительно к перечисленным условиям в точках пересечения таких краев должно выполняться уравнение совместности в виде

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} = 0. \quad (8)$$

## 2. МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ КВАДРАТУР

Метод дифференциальных квадратур (МДК) является эффективным методом решения дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных. Для иллюстрации принципов МДК рассмотрим сначала одномерный случай. Для решения обыкновенного дифференциального уравнения область нахождения решения заменой переменной отображается на отрезок  $[0, 1]$  и затем дискретизируется



$N$  точками, искомая функция  $f(x)$  заменяется интерполяционным многочленом, например, Лагранжа (рис. 1) [3]:

Рис. 1. Одномерная сетка для МДК

Fig. 1. One-dimensional grid for the method of differential quadratures (MDQ)

$$f(x) = \sum_{i=1}^N f(x_i) l_i(x), \quad (9)$$

где  $x_i, i = \overline{1, N}$  — узловые точки сетки;  $l_i(x)$  — интерполяционный многочлен Лангранжа, описываемый формулой

$$l_i(x) = \frac{M(x)}{M^{(1)}(x_i)(x - x_i)}, \quad (10)$$

где  $M(x) = \prod_{i=1}^N (x - x_i)$ ,  $M^{(1)}(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^N (x_i - x_j)$ , Тогда производную порядка  $n$  функции  $f(x)$  в любой точке  $x_i$  можно представить как взвешенную линейную сумму значений функции во всех узловых точках сетки:

$$\frac{d^n f(x_i)}{dx^n} = \sum_{j=1}^N k_{i,j}^{(n)} f(x_j), \quad i = \overline{1, N}, \quad n = \overline{1, N-1}, \quad (11)$$

где  $k_{i,j}^{(n)}$  — весовые коэффициенты  $n$ -го порядка, которые находятся с помощью следующих рекуррентных формул:

$$\begin{aligned} k_{i,j}^{(1)} &= \frac{M^{(1)}(x_i)}{M^{(1)}(x_j)(x_i - x_j)}, & k_{i,i}^{(1)} &= - \sum_{j=1, j \neq i}^N k_{i,j}^{(1)}, \\ k_{i,j}^{(n)} &= n(k_{i,j}^{(1)} k_{i,i}^{(n-1)} - \frac{k_{i,j}^{(n-1)}}{x_i - x_j}), & k_{i,i}^{(n)} &= - \sum_{j=1, j \neq i}^N k_{i,j}^{(n)}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$i, j = \overline{1, N}, \quad n = \overline{1, N-1}.$$



Разложения (11) подставляются в дифференциальное уравнение, которое в результате преобразуется в систему алгебраических уравнений вида

$$DW = F, \tag{13}$$

где  $D$  — матрица, получаемая при подстановке в решаемое дифференциальное уравнение разложений вида (11);  $W = \{f(x_1) \ f(x_2) \ \dots \ f(x_N)\}^T$  — вектор-столбец неизвестных — значений функции  $f$  в узловых точках;  $F$  — вектор-столбец, независимый от  $W$ .

Формулы (10)–(12) могут быть достаточно просто распространены на двух- и многомерные дифференциальные уравнения [3]. Так, для двумерного случая область, в которой необходимо найти решение дифференциального уравнения, дискретизируется  $N$  точками по направлению  $x$ , и  $M$  точками по направлению  $y$  (рис. 2), искомая функция  $f(x, y)$  представляется в виде

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M f(x_i, y_j) r_i(x) s_j(y), \tag{14}$$

где  $r_i(x), s_j(y)$  — интерполяционные многочлены Лангранжа по  $x$  и  $y$  соответственно.

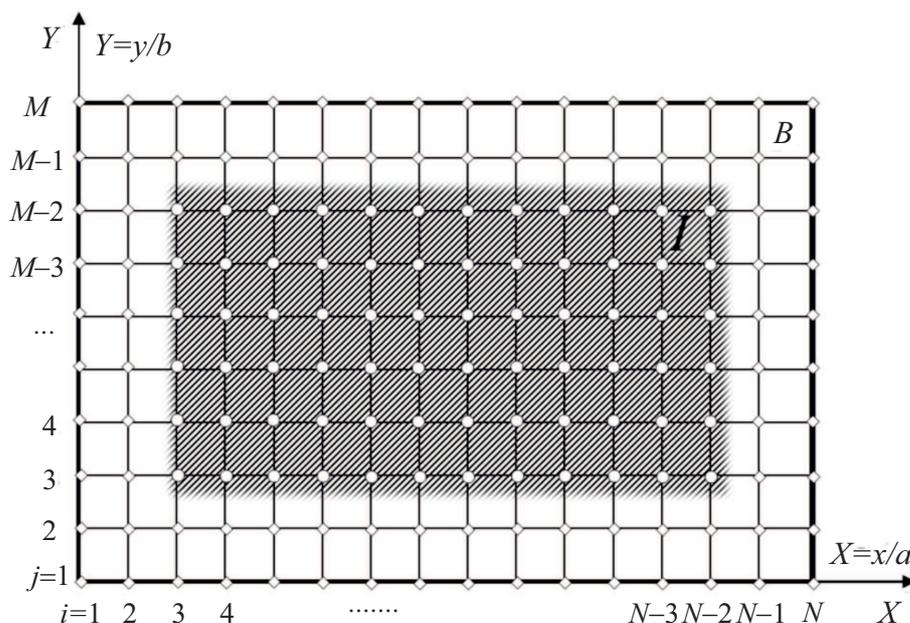


Рис. 2. Двумерная сетка для МДК:  $B$  — область граничных точек;  $I$  — внутренние точки

Fig. 2. Two-dimensional mesh for MDQ:  $B$  — boundary points region;  $I$  — interior points

Учитывая формулу (14), выражения для производных функции  $f(x, y)$  будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d^n f(x_i, y_j)}{dx^n} &= \sum_{k=1}^N a_{i,k}^{(n)} f(x_k, y_j), & \frac{d^m f(x_i, y_j)}{dy^m} &= \sum_{k=1}^M b_{j,k}^{(m)} f(x_i, y_k), \\ \frac{d^{n+m} f(x_i, y_j)}{dx^n dy^m} &= \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^M a_{i,k_1}^{(n)} b_{j,k_2}^{(m)} f(x_{k_1}, y_{k_2}), \end{aligned} \tag{15}$$



где  $i = \overline{1, N}$ ,  $n = \overline{1, N-1}$ ,  $j = \overline{1, M}$ ,  $m = \overline{1, M-1}$ ,  $a_{i,k}^{(n)}$  — весовые коэффициенты порядка  $n$  по  $x$ ;  $b_{j,k}^{(m)}$  — весовые коэффициенты порядка  $m$  по  $y$ . Весовые коэффициенты  $a_{i,k}^{(n)}$  и  $b_{j,k}^{(m)}$  определяются по рекуррентным формулам, аналогичным (12). Подстановка соотношений (15) в дифференциальное уравнение приводит к системе алгебраических уравнений, матричный вид которой совпадает с (13). Отметим, что матрица  $D$  в двумерном случае будет иметь размерность  $NM \times NM$ , вектор-столбец неизвестных будет иметь вид  $W = \{w_1 \dots w_N\}^T$ , где  $w_i = \{w_{i,1} \dots w_{i,M}\}^T$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

### 3. ДИСКРЕТИЗИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ

Для создания математической модели собственных колебаний пластины с использованием МДК используем усовершенствованный способ построения сетки [3]:

$$X_i = 3\xi_i^2 - 2\xi_i^3, \quad i = \overline{1, N}, \quad Y_j = 3\eta_j^2 - 2\eta_j^3, \quad j = \overline{1, M}, \quad (16)$$

где  $\xi_i, \eta_j$  определяются классическим неравномерным распределением Чебышева – Гаусса – Лобатто [3]:

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right], \quad \eta_j = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{j-1}{M-1} \pi \right) \right], \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}.$$

Тогда уравнение свободных поперечных колебаний пластины (1) согласно МДК переписывается в виде

$$\sum_{k=1}^N a_{i,k}^{(4)} w_{k,j} + 2\lambda^2 \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^M a_{i,k_1}^{(2)} b_{j,k_2}^{(2)} w_{k_1,k_2} + \lambda^4 \sum_{k=1}^M b_{j,k}^{(4)} w_{i,k} = \Omega^2 w_{i,j}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (17)$$

где  $a_{i,k}^{(n)}, b_{j,k}^{(n)}$  — определяемые соответствующими формулами (12) весовые коэффициенты разложения  $n$ -й производной от функции  $W$  по точкам разбиения в направлении осей  $X$  и  $Y$  соответственно;  $w_{i,j}$  — значение прогиба в точке  $(i, j)$  пластины (см. рис. 2).

Граничные условия (2)–(7) и условия совместности (8) после дискретизации примут вид ( $d = 1$  при  $X = 0$ ,  $d = N$  при  $X = 1$ ,  $n = 1$  при  $Y = 0$ ,  $n = M$  при  $Y = 1$ ):

- шарнир, или свободно опертый край (СО)  
 $X = 0$  или  $X = 1$ :

$$w_{d,j} = 0, \quad \sum_{k=1}^N a_{d,k}^{(2)} w_{k,j} = 0, \quad j = \overline{1, M}; \quad (18)$$

$Y = 0$  или  $Y = 1$ :

$$w_{i,n} = 0, \quad \sum_{k=1}^M b_{n,k}^{(2)} w_{i,k} = 0, \quad i = \overline{1, N}; \quad (19)$$

- жесткая заделка (Ж)  
 $X = 0$  или  $X = 1$ :

$$w_{d,j} = 0, \quad \sum_{k=1}^N a_{d,k}^{(1)} w_{k,j} = 0, \quad j = \overline{1, M}; \quad (20)$$



$Y = 0$  или  $Y = 1$ :

$$w_{i,n} = 0, \quad \sum_{k=1}^M b_{n,k}^{(1)} w_{i,k} = 0, \quad i = \overline{1, N}; \quad (21)$$

- незакрепленный край (Н)

$X = 0$  или  $X = 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N a_{d,k}^{(2)} w_{k,j} + \nu \lambda^2 \sum_{k=1}^M b_{j,k}^{(2)} w_{d,k} &= 0, \\ \sum_{k=1}^N a_{d,k}^{(3)} w_{k,j} + (2 - \nu) \lambda^2 \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2}^M a_{d,k_1}^{(1)} b_{j,k_2}^{(2)} w_{k_1,k_2} &= 0, \quad j = \overline{1, M}; \end{aligned} \quad (22)$$

$Y = 0$  или  $Y = 1$ :

$$\begin{aligned} \nu \sum_{k=1}^N a_{i,k}^{(2)} w_{k,n} + \lambda^2 \sum_{k=1}^M b_{n,k}^{(2)} w_{i,k} &= 0, \\ \lambda^2 \sum_{k=1}^M b_{n,k}^{(3)} w_{i,k} + (2 - \nu) \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2}^M a_{i,k_1}^{(2)} b_{n,k_2}^{(1)} w_{k_1,k_2} &= 0, \quad i = \overline{1, N}; \end{aligned} \quad (23)$$

- условие совместности деформаций в углу  $(i, j)$  пластины

$$\sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2}^M a_{i,k_1}^{(2)} b_{j,k_2}^{(2)} w_{k_1,k_2} = 0. \quad (24)$$

Уравнение (19) может быть записано в матричном виде:

$$DW = \Omega^2 W, \quad (25)$$

где  $D = \tilde{A} + 2\lambda^2 \tilde{C} + \lambda^4 \tilde{B}$ ,  $W = \{w_1 \dots w_N\}^T$ ,  $w_i = \{w_{i,1} \dots w_{i,M}\}^T$ ,  $i = \overline{1, N}$  — вектор прогибов; матрицы  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  определяются из уравнений (19) по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,N} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \dots & A_{N,N} \end{bmatrix}, & \tilde{B} &= \begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B \end{bmatrix}, \\ \tilde{C} &= \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,N} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \dots & C_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{N,1} & C_{N,2} & \dots & C_{N,N} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (26)$$

где компоненты матриц  $A$ ,  $B_{k,l}$ ,  $C_{k,l}$  определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} [B]_{d,n} &= b_{d,n}^{(4)}, & [C_{k,l}]_{d,n} &= a_{k,l}^{(2)} b_{d,n}^{(2)}, & [A_{k,l}]_{d,n} &= \begin{cases} a_{k,l}^{(4)}, & d = n, \\ 0, & d \neq n, \end{cases} \\ d, n &= \overline{1, M}, & k, l &= \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (27)$$

Размер матриц  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  равен  $NM \times NM$ . Уравнение (28) представляет собой дискретизированное уравнение свободных колебаний пластины, записанное в матричном виде. Для нахождения собственных частот и форм колебаний уравнение (19) необходимо дополнить соответствующими граничными условиями (20)–(27).



#### 4. ОБОБЩЕННЫЙ ПОДХОД К УЧЕТУ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Одной из проблем при использовании МДК является проблема учета граничных условий при формировании основного матричного уравнения вида (13). Существует несколько подходов к решению этой проблемы. Так, можно по определенной методике непосредственно изменять весовые коэффициенты в зависимости от граничных условий или выражать часть перемещений из уравнений, описывающих граничные условия, и подставлять полученные выражения в уравнение (13) [3]. Основным недостатком этих подходов является сложность их реализации, в том числе и алгоритмической. Еще один подход, описанный в работе [3], предлагает учитывать граничные условия в матричном виде и объединять их с матричным уравнением вида. Этот подход позволяет учитывать как однородные, так и неоднородные граничные условия 1, 2 и 3-го рода. МДК, использующий этот подход к реализации граничных условий, будем называть обобщенным методом дифференциальных квадратур (ОМДК). При обобщенном методе все точки сетки делятся на внутренние, входящие в область  $I$ , и граничные в области  $B$  (см. рис. 2), формируются вектора  $W_I$ ,  $W_B$ , которые содержат только точки из областей  $I$  и  $B$  соответственно, компоненты которых связаны с компонентами вектора  $W$  следующими соотношениями:

$$\{W_I\}_k = W_{i,j}, \quad k = (M-4)(i-3) + (j-2), \quad i \in [3, N-2], \quad j \in [3, M-2], \quad (28)$$

$$\{W_B\}_l = W_{i,j}, \quad (29)$$

$$l = \begin{cases} (i-1)M + j, & i \in [1, 2], \quad j \in [1, M], \\ 2M + 4(i-3) + j, & i \in [3, N-2], \quad j \in [1, 2], \\ 2M + 4(i-3) + 2 + j - M + 2, & i \in [3, N-2], \quad j \in [M-1, M], \\ 2M + 4(N-4) + (i-N+1)M + j, & i \in [N-1, N], \quad j \in [1, M]. \end{cases}$$

Как следует из соотношений (28), (29), размерность векторов  $W_I$  и  $W_B$  будет равна  $(N-4)(M-4) \times 1$  и  $(4N+4M-16) \times 1$ . При ОМДК уравнение (19) записывается не для всех точек, а только для внутренней области  $I$  ( $i = \overline{3, N-2}$ ,  $j = \overline{3, M-2}$ ). При этом полученная система уравнений будет охватывать все точки сетки и может быть представлена в следующем матричном виде:

$$D_{IB}W_B + D_{II}W_I = \Omega^2 W_I. \quad (30)$$

Для иллюстрации подхода к формированию матрицы, отражающей граничные условия, рассмотрим случай закрепления Ж-Н-Н-СО, при котором пластина жестко закреплена (Ж) при  $X = 0$ , не закреплена (Н) при  $Y = 0$  и  $X = 1$  и свободно оперта (СО) при  $Y = 1$ . Тогда система уравнений, описывающих граничные условия, будет формироваться следующим образом:

- условия (22) при  $i = 1$ ,  $d = 1$ ,  $j = \overline{2, M-1}$ ;
- условия (26) при  $i = \overline{2, N-1}$ ,  $n = 1$ ,  $j = 1$ ;
- условия (24) при  $i = N$ ,  $d = N$ ,  $j = \overline{2, M-1}$ ;
- условия (21) при  $i = \overline{2, N-1}$ ,  $n = N$ ,  $j = M$ .

Далее формируются четыре уравнения, отражающие условия в узлах  $(1, 1)$ ,  $(1, M)$ ,  $(N, 1)$ ,  $(N, M)$ :

$$W_{1,1} = 0, \quad W_{1,M} = 0, \quad W_{N,M} = 0, \quad \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2}^M a_{N,k_1}^{(2)} b_{1,k_2}^{(2)} w_{k_1,k_2} = 0.$$



В результате получается система линейных уравнений, полностью описывающих граничные условия. Эту систему также можно представить в следующем матричном виде:

$$D_{BB}W_B + D_{BI}W_I = 0. \tag{31}$$

Из (31) получаем выражение для нахождения  $W_B$  через  $W_I$ :

$$W_B = -D_{BB}^{-1}D_{BI}W_I. \tag{32}$$

Подставляя (32) в (31), получим окончательное матричное уравнение свободных колебаний прямоугольной пластины в соответствии с ОМДК:

$$(D_{II} - D_{IB}D_{BB}^{-1}D_{BI})W_I = \Omega^2W_I. \tag{33}$$

Размерность матриц  $D_{II}$ ,  $D_{IB}$ ,  $D_{BB}$ ,  $D_{BI}$  будет равна  $(N - 4)(M - 4) \times (N - 4)(M - 4)$ ,  $(N - 4)(M - 4) \times (4N + 4M - 16)$ ,  $(4N + 4M - 16) \times (4N + 4M - 16)$ ,  $(4N + 4M - 16) \times (N - 4)(M - 4)$  соответственно. Описанный подход к включению граничных условий носит универсальный характер и очевидным образом может быть распространен на однородные и неоднородные граничные условия различных видов.

### 5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Нахождение собственных частот и векторов матричного уравнения (33) является классической задачей, которая решается любым известным алгоритмом нахождения собственных значений матриц, например, QR-алгоритмом [8, 9]. Для нахождения собственных форм колебаний  $W$  пластины, значения собственных векторов  $W_I$ , найденных из уравнения (33), следует объединить с соответствующими значениями  $W_B$ , полученными на основе формулы (32). Собственные частоты  $\Omega$ , определенные из уравнения (33), будут соответствовать безразмерным собственным частотам прямоугольной пластины с рассматриваемым типом закрепления, собственные колебания которой описываются уравнением (1).

Значения первых пяти собственных частот для квадратной пластины, различным образом закрепленной, полученные с помощью МДК на сетке  $N \times M$  и соответствующие аналитические значения [10] частот, показаны в табл. 1. При расчетах здесь и далее полагалось  $\nu = 0.3$ .

Таблица 1 / Table 1

Собственные частоты квадратной пластины при разных граничных условиях  
The eigenfrequencies of a square plate with different boundary conditions

Закрепление / Boundary Conditions	Сетка / Grid	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
Ж-Ж-Ж-Ж / C-C-C-C	10 × 10	35.9378	73.3186	73.3186
	15 × 15	36.0018	73.3940	73.3940
	20 × 20	35.9848	73.4590	73.4590
	АНАЛИТ / ANALYT	35.9920	73.4130	73.4130
CO-CO-CO-CO / SS-SS-SS-SS	10 × 10	19.7393	49.3208	49.3208
	15 × 15	19.7392	49.3480	49.3480
	20 × 20	19.7332	49.3480	49.3480
	АНАЛИТ / ANALYT	19.7392	49.3480	49.3480
H-H-H-H / F-F-F-F	10 × 10	13.2810	19.6053	24.2585
	15 × 15	13.4670	19.5951	24.2581
	20 × 20	13.4601	19.5966	24.2654
	АНАЛИТ / ANALYT	13.4890	19.5960	24.4320



Окончание табл. 1 / End of the table 1

Закрепление / Boundary Conditions	Сетка / Grid	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
СО-Ж-СО-Ж / SS-C-SS-C	10 × 10	28.9490	54.6923	69.1478
	15 × 15	28.9509	54.7431	69.3271
	20 × 20	28.9509	54.7431	69.3270
	АНАЛИТ / ANALYT	28.9509	54.7431	69.3270

*Примечание.* Ж — жесткая заделка; СО — шарнир или свободно опертый край; Н — незакрепленный край; АНАЛИТ — аналитические значения.

*Note.* F — free edge; SS — simply supported edge; C — clamped edge; ANALYT — analytical values.

Как видно из табл. 1, отличие значений собственных частот, полученных с помощью ОМДК и аналитическими методами, не превышает долей единиц процента для сетки уже для сетки 15 × 15. На сетке 10 × 10 с хорошей точностью, не превышающей 1% от аналитических значений, рассчитываются первые три частоты, для более старших частот точность полученных значений ухудшается.

Значения первой частоты  $\Omega_1$  для прямоугольных пластин с различным соотношением сторон  $\lambda = a/b$  и при различном закреплении приведены в табл. 2. Значения получены на сетке 15 × 15.

Таблица 2 / Table 2

Значения первой частоты  $\Omega_1$  прямоугольной пластины при разных граничных условиях и различных соотношениях сторон  $\lambda$

The values of the first frequency  $\Omega_1$  of a rectangular plate with different boundary conditions and different aspect ratios  $\lambda$

Закрепление / Boundary Conditions	Решатель / Method	$\lambda = 2/5$	$\lambda = 2/3$	$\lambda = 1$	$\lambda = 3/2$	$\lambda = 5/2$
Ж-Ж-Ж-Ж / C-C-C-C	ОМДК / GDQM	23.644	27.099	36.0018	60.7723	147.775
	АНАЛИТ / ANALYT	23.648	27.010	35.9920	60.772	147.80
Ж-Ж-Ж-СО / C-C-C-SS	ОМДК / GDQM	23.4390	25.8607	31.8309	48.163	107.0433
	АНАЛИТ / ANALYT	23.440	25.861	31.829	48.167	107.07
Ж-Ж-СО-СО / C-C-SS-SS	ОМДК / GDQM	19.8475	19.9516	27.0555	44.8912	105.2972
	АНАЛИТ / ANALYT	16.849	19.952	27.056	44.893	105.31
Ж-Ж-СО-Н / C-C-SS-F	ОМДК / GDQM	15.5818	15.8680	16.7833	21.0635	32.6753
	АНАЛИТ / ANALYT	15.696	16.287	17.615	21.035	33.578
Ж-СО-СО-Н / C-SS-SS-F	ОМДК / GDQM	15.5424	15.6779	16.1528	18.9015	22.1081
	АНАЛИТ / ANALYT	15.649	16.067	16.865	18.540	23.067
Ж-Н-Н-Н / C-F-F-F	ОМДК / GDQM	3.5075	3.5109	3.5434	3.2364	3.5505
	АНАЛИТ / ANALYT	3.5107	3.5024	3.4917	3.4772	3.4562
СО-СО-СО-СО / SS-SS-SS-SS	ОМДК / GDQM	11.4487	14.2561	19.7392	32.0762	71.5546
	АНАЛИТ / ANALYT	11.4487	14.2561	19.7392	32.0762	71.5564
Н-Н-Н-Н / F-F-F-F	ОМДК / GDQM	3.4313	8.9317	13.4670	20.0924	21.4454
	АНАЛИТ / ANALYT	3.4629	8.9459	13.4890	20.128	21.643
СО-Ж-СО-Ж / SS-C-SS-C	ОМДК / GDQM	12.1347	17.3730	28.9509	56.3481	145.4839
	АНАЛИТ / ANALYT	12.1347	17.3730	28.9509	56.3481	145.4839

*Примечание.* Ж — жесткая заделка; СО — шарнир или свободно опертый край; Н — незакрепленный край; АНАЛИТ — аналитические значения; ОМДК — обобщенный метод дифференциальных квадратур.

*Note.* F — free edge; SS — simply supported edge; C — clamped edge; ANALYT — analytical values; GDQM — generalized differential quadrature method.

Как видно из табл. 2, наилучшие результаты с помощью ОМДК получаются, если все грани пластин закреплены. В этом случае полученные результаты в ряде



случаев совпадают с аналитическим решением с точностью до третьего знака. Если у пластины одна или несколько сторон не закреплены, то точность ОМДК ухудшается, но и в этом случае речь идет о непревышающем 1% расхождении получаемых результатов с аналитическим решением.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод дифференциальных квадратур с усовершенствованным способом построения сетки на основе классического неравномерного распределения Чебышева – Гаусса – Лобатто и при использовании обобщенного подхода к учету граничных условий является мощным, универсальным и эффективным методом численного решения дифференциальных уравнений. Как было показано на примере частотного анализа прямоугольной пластины, ОМДК позволяет решать двумерные задачи механики с приемлемой точностью на сетке с относительно малым количеством узлов. Использование описанного здесь обобщенного подхода к учету граничных условий позволяет решать задачи с различными типами однородных и неоднородных граничных условий.

## Библиографический список

1. *Bellman R. E., Kashef B. G., Casti J.* Differential quadrature: A technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations // *J. Comput. Phys.* 1972. Vol. 10, iss. 1. P. 40–52. DOI: 10.1016/0021-9991(72)90089-7
2. *Вержбицкий В. М.* Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения) : учеб. пособие для вузов. М. : Директ-Медиа, 2013. 400 с.
3. *Shu C.* Differential Quadrature and Its Application in Engineering. L. : Springer-Verlag, 2000. 340 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-0407-0
4. *Wu T. Y., Liu G. R.* Application of the generalized differential quadrature rule to eighth-order differential equations // *Communications in Numerical Methods in Engineering.* 2001. Vol 17, iss. 5. P. 355–364. DOI: 10.1002/cnm.412
5. *Golfam B., Rezaie F.* A new generalized approach for implementing any homogeneous and non-homogeneous boundary conditions in the generalized differential quadrature analysis of beams // *Scientia Iranica.* 2013. Vol. 20, iss. 4. P. 1114–1123.
6. *Mansell G., Merryfield W., Shizgal B., Weinert U.* A comparison of differential quadrature methods for the solution of partial-differential equations // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 1993. Vol. 104, iss. 3. P. 295–316. DOI: 10.1016/0045-7825(93)90028-V
7. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М. ; Л. : ОНТИ, 1935. 674 с.
8. *Парлетт Б.* Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М. : Мир, 1983. 384 с.
9. *Уилкинсон Дж. Х., Райниш С.* Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. М. : Машиностроение, 1976. 389 с.
10. *Leissa A. W.* The free vibration of rectangular plates // *J. Sound and Vibration.* 1973. Vol. 31, iss. 3. P. 257–293. DOI: 10.1016/S0022-460X(73)80371-2

---

### Образец для цитирования:

*Барулина М. А.* Применение обобщенного метода дифференциальных квадратур к решению двумерных задач механики // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2018. Т. 18, вып. 2. С. 206–216. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-206-216

---



## Application of Generalized Differential Quadrature Method to Two-dimensional Problems of Mechanics

M. A. Barulina

Marina A. Barulina, <https://orcid.org/0000-0003-3867-648X>, Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24, Rabochaya Str., Saratov, Russia, 410028, [marina@barulina.ru](mailto:marina@barulina.ru)

The application of the generalized differential quadrature method to the solution of two-dimensional problems of solid mechanics is discussed by an example of the sample analysis of vibrations of a rectangular plate under various types of boundary conditions. The differential quadrature method (DQM) is known as an effective method for resolving differential equations, both ordinary and partial. The main problems while using DQM, as well as other quadrature methods, are choosing the distribution for construction of the points grid and determination of the weight coefficients, and incorporating boundary conditions in the resolving system of linear algebraic equations. In the present study a generalized approach to accounting the boundary conditions is proposed and a universal algorithm for the composition of a resolving algebraic system is given. In the paper it is shown by an example of model analysis of a rectangular plate vibrations that the DQM allows us to effectively resolve two-dimensional problems of solid mechanics gaining an acceptable accuracy with a relatively small number of points on the grid. The latter is provided by the aid of the classical non-uniform Chebyshev – Gauss – Lobatto distribution and generalized approach to accounting of the boundary conditions.

**Key words:** differential quadrature method, numerical methods, differential equations, eigenfrequencies, rectangular plate.

### References

1. Bellman R. E., Kashef B. G., Casti J. Differential quadrature: A technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations. *J. Comput. Phys.*, 1972, vol. 10, iss. 1, pp. 40–52. DOI: 10.1016/0021-9991(72)90089-7
2. Verzhbitskii V. M. *Chislennyye metody (matematicheskiy analiz i obyknovennyye differentsialnyye uravneniya)* [Numerical Methods (Mathematical Analysis and Ordinary Differential Equations)]. Moscow, Direkt-Media, 2013. 400 p. (in Russian).
3. Shu C. *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*. London, Springer-Verlag, 2000. 340 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-0407-0
4. Wu T. Y., Liu G. R. Application of the generalized differential quadrature rule to eighth-order differential equations. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2001, no. 17, pp. 355–364. DOI: 10.1002/cnm.412
5. Golfam B., Rezaie F. A new generalized approach for implementing any homogeneous and non-homogeneous boundary conditions in the generalized differential quadrature analysis of beams. *Scientia Iranica*, 2013, vol. 20, iss. 4, pp. 1114–1123.
6. Mansell G., Merryfield W., Shizgal B., Weinert U. A comparison of differential quadrature methods for the solution of partial-differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1993, vol. 104, iss. 3, pp. 295–316. DOI: 10.1016/0045-7825(93)90028-V
7. Love A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge Univ. Press, 2013. 662 p. (Russ. ed: Moscow ; Leningrad, ONTI, 1935. 674 p.)
8. Parlett B. N. *The Symmetric Eigenvalue Problem (Classics in Applied Mathematics)*. Philadelphia, SIAM, 1987. 416 p. (Russ. ed: Moscow, Mir, 1983. 384 p.)
9. Wilkinson J. H., Reinsch C. *Handbook for Automatic Computation: Vol. II: Linear Algebra*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1971. 441 p. DOI: 10.1007/978-3-642-86940-2
10. Leissa A. W. The free vibration of rectangular plates. *J. Sound and Vibration*, 1973, vol. 31, iss. 3, pp. 257–293. DOI: 10.1016/S0022-460X(73)80371-2

### Cite this article as:

Barulina M. A. Application of Generalized Differential Quadrature Method to Two-dimensional Problems of Mechanics. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 2, pp. 206–216 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-206-216