



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

# ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 2

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,  
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал  
2018 Том 18

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

Издается с 2005 года

## СОДЕРЖАНИЕ

### Научный отдел

#### Математика

**Антонов С. Ю., Антонова А. В.** К теореме Ченга. III 128

**Голубков А. А.** Обратная задача для операторов Штурма–Лиувилля в комплексной плоскости 144

**Курдюмов В. П., Хромов А. П., Халова В. А.** Смешанная задача для волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью 157

**Лукомский С. Ф., Мушко М. Д.** О двоичных базисных сплайнах 2-й степени 172

**Салимов Р. Б.** Решение обратной краевой задачи для крылового профиля, расположенного вблизи прямолинейного экрана, в новой постановке 183

**Шарапудинов И. И., Гусейнов И. Г.** Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные полиномами Шарлье 196

#### Механика

**Барулина М. А.** Применение обобщенного метода дифференциальных квадратур к решению двумерных задач механики 206

**Татосов А. В., Шляпкин А. С.** Движение проппанта в раскрывающейся трещине гидроразрыва пласта 217

#### Информатика

**Косолапов Ю. В.** О построении  $(k, l)$ -схемы визуальной криптографии с применением класса линейных хэш-функций над бинарным полем 227

**Кушников В. А., Богомолов А. С., Адамович К. Ю.** Математическое моделирование динамики показателей безопасности дорожно-транспортной системы региона России 240

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (группы научных специальностей: 01.01.00 – математика; 01.02.00 – механика; 05.13.00 – информатика, вычислительная техника и управление).

Журнал входит в международные базы данных Emerging Sources Citation Index, MathSciNet, zbMATH

Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-56162 от 15 ноября 2013 года

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год

**Директор издательства**  
Бучко Ирина Юрьевна

**Редактор**  
Крылова Елена Борисовна

**Художник**  
Соколов Дмитрий Валерьевич

**Редактор-стилист**  
Кочкаева Инна Анатольевна

**Верстка**  
Степанова Наталия Ивановна

**Технический редактор**  
Каргин Игорь Анатольевич

**Корректор**  
Кочкаева Инна Анатольевна

**Адрес учредителя, издателя и издательства:**  
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83  
**Тел.:** +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89  
**E-mail:** izvestiya@sgu.ru

Подписано в печать 28.05.18.  
Формат 60x84 1/8.  
Усл. печ. л. 14,41(15,5).  
Тираж 500 экз. Заказ 53-Т.

Отпечатано в типографии Саратовского университета.  
**Адрес типографии:**  
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2018



## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <http://mmi.sgu.ru/ru/dlya-avtorov>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования в журнале. В случае положительного решения об опубликовании статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <http://mmi.sgu.ru>.

---

### Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,  
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,  
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: [mmi@sgu.ru](mailto:mmi@sgu.ru)

Website: <http://mmi.sgu.ru/>

### Ответственный секретарь серии:

Халова Виктория Анатольевна

## CONTENTS

### Scientific Part

#### Mathematics

**Antonov S. Yu., Antonova A. V.** To Chang theorem. III 128

**Golubkov A. A.** Inverse Problem for Sturm–Liouville Operators in the Complex Plane 144

**Kurdyumov V. P., Khromov A. P., Khalova V. A.** A Mixed Problem for a Wave Equation with a Nonzero Initial Velocity 157

**Lukomskii S. F., Mushko M. D.** On Binary  $B$ -splines of Second Order 172

**Salimov R. B.** The Solution of the Inverse Boundary Value Problem for a Wing Profile, Located Close to Rectilinear Screen, in a New Setting 183

**Sharapudinov I. I., Guseinov I. G.** Polynomials Orthogonal with Respect to Sobolev Type Inner Product Generated by Charlier Polynomials 196

#### Mechanics

**Barulina M. A.** Application of Generalized Differential Quadrature Method to Two-dimensional Problems of Mechanics 206

**Tatosov A. V., Shlyapkin A. S.** The Motion of Propping Agent in an Opening Crack in Hydraulic Fracturing Plast 217

#### Computer Sciences

**Kosolapov Yu. V.** On the Construction of  $(k, n)$ -schemes of Visual Cryptography Using a Class of Linear Hash Functions Over a Binary Field 227

**Kushnikov V. A., Bogomolov A. S., Adamovich K. Yu.** Mathematical Model for Predicting the Safety Parameters of Regional Road Transport System 240



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА  
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.  
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

**Главный редактор**

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Заместитель главного редактора**

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Ответственный секретарь**

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

**Члены редакционной коллегии:**

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)

Индейцев Дмитрий Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Республика Беларусь)

Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Манжиров Александр Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, доктор физ.-мат. наук, акад. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Пархоменко Павел Павлович, доктор техн. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D., профессор (Киль, Великобритания)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Республика Беларусь)

Субботин Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Екатеринбург, Россия)

Харченко Вячеслав Сергеевич, доктор техн. наук, профессор (Харьков, Украина)

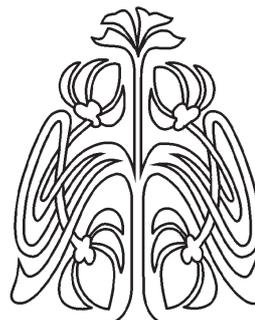
Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Янг Чуань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)



**РЕДАКЦИОННАЯ  
КОЛЛЕГИЯ**

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL  
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES.  
SERIES: MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»**

**Editor-in-Chief** – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

**Deputy Editor-in-Chief** – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

**Executive Secretary** – Victoriya A. Khalova (Saratov, Russia)

**Members of the Editorial Board:**

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)

Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)

Dmitry A. Indeitsev (St. Petersburg, Russia)

Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)

Vyacheslav S. Kharchenko (Kharkiv, Ukraine)

August P. Khromov (Saratov, Russia)

Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)

Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)

Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)

Alexander V. Manzhirrov (Moscow, Russia)

Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)

Nikita F. Morozov (St. Petersburg, Russia)

Semen R. Nasyrov (Kazan', Russia)

Pavel P. Parkhomenko (Moscow, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)

Alexander F. Rezchikov (Saratov, Russia)

Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)

Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)

Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)

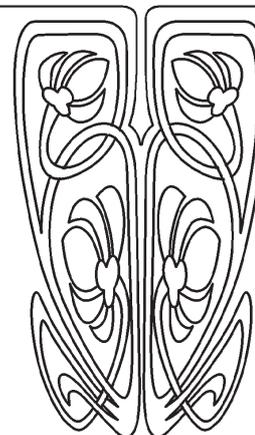
Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)

Yurii N. Subbotin (Ekaterinburg, Russia)

Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)

Vyacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)

Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)



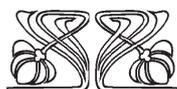
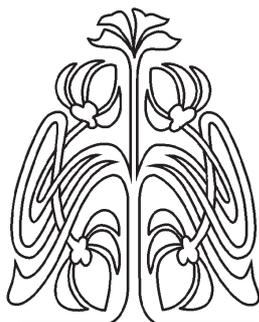


# МАТЕМАТИКА

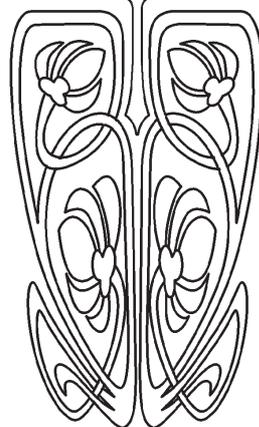
УДК 512

## К ТЕОРЕМЕ ЧЕНГА. III

С. Ю. Антонов, А. В. Антонова



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ



Антонов Степан Юрьевич, старший преподаватель кафедры высшей математики, Казанский государственный энергетический университет, Россия, 420066, Казань, Красносельская, 51, antonovst-vm@rambler.ru

Антонова Алина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Казанский государственный энергетический университет, Россия, 420066, Казань, Красносельская, 51, antonovakazan@rambler.ru

В данной статье рассмотрены различные полилинейные многочлены типа Капелли, принадлежащие свободной ассоциативной алгебре  $F\{X \cup Y\}$  над произвольным полем  $F$ , порожденной счетным множеством  $X \cup Y$ . Найдены формулы, выражающие коэффициенты многочлена Ченга  $\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ . Доказано, что если характеристика поля  $F$  не равна двум, то многочлен  $\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  может быть различными способами представлен в виде суммы двух следствий стандартного многочлена  $S^-(\bar{x})$ . В статье приведено разложение многочлена Ченга  $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ , отличное от уже известного. Кроме того, найдена связь между многочленами  $\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  и  $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ . В работе получены некоторые следствия стандартного многочлена, представляющие интерес для алгебр с полиномиальными тождествами. В частности, приведено новое тождество минимальной степени для нечетной компоненты  $Z_2$ -градуированной матричной алгебры  $M^{(m,m)}(F)$ .

*Ключевые слова:*  $T$ -идеал, стандартный многочлен, многочлен Капелли.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-128-143

*Окончание* (2015. Т. 15, вып. 3. С. 247–251; 2017. Т. 17, вып. 2. С. 127–137).

### ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является продолжением работы [1]. В ней мы находим явный вид многочлена

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) &= \mathcal{R}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_t | w_1, \dots, w_u) = \\ &= \sum_{\bar{a} \in B_0} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} \operatorname{sgn} \mu x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(a_1)} w_{\tau(1)} \times \\ &\times x_{\pi(a_1+1)} \cdots x_{\pi(a_1+a_2)} w_{\tau(2)} x_{\pi(a_1+a_2+1)} \cdots x_{\pi(a_1+\dots+a_u)} w_{\tau(u)}, \end{aligned}$$



устанавливаем связь между  $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  и

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = & \sum_{\bar{n} \in B_1} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} \operatorname{sgn} \mu x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n_1)} w_{\tau(1)} x_{\pi(n_1+1)} \cdots x_{\pi(n_1+n_2)} w_{\tau(2)} \times \\ & \times x_{\pi(n_1+n_2+1)} \cdots x_{\pi(n_1+\dots+n_u)} w_{\tau(u)} x_{\pi(n_1+\dots+n_u+1)} \cdots x_{\pi(n_1+\dots+n_{u+1})}, \end{aligned}$$

приводим некоторые следствия стандартного многочлена  $S_m^-(x_1, \dots, x_m)$  и даем некоторые приложения к PI-алгебрам. Все обозначения, введенные в работе [1], сохраняют свой смысл и в части III.

### 1. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОГОЧЛЕНА $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$

Пусть  $v = z_{i_{\pi(1)}} \cdots z_{i_{\pi(r)}}$ , где  $i_1 < \dots < i_r$ ,  $\pi \in S_r$ , — произвольный моном алгебры  $F\{Z\}$ ,  $|v|$  — длина монома  $v$ ,  $\operatorname{sgn} v = \operatorname{sgn} \pi$ . Представим каким-либо образом слово  $v$  в виде произведения его непустых подслов  $v_1 \cdots v_n$  ( $n \leq r$ ) и по определению положим  $\bar{v} = (v_1 \dots v_n)$ ,  $\bar{v}' = (|v_1| \dots |v_n|)$ ,  $\sigma v = v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(n)}$ ,  $\sigma \bar{v} = (v_{\sigma(1)} \dots v_{\sigma(n)})$ ,  $\sigma \bar{v}' = (|v_{\sigma(1)}| \dots |v_{\sigma(n)}|)$ ,  $\sigma \in S_n$ . Учитывая введенные обозначения, всякий моном  $x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(a_1)} w_{\tau(1)} x_{\pi(a_1+1)} \cdots x_{\pi(a_1+a_2)} w_{\tau(2)} x_{\pi(a_1+a_2+1)} \cdots x_{\pi(a_1+\dots+a_u)} w_{\tau(u)}$ , содержащийся в записи многочлена  $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ , будем обозначать символом  $M(\bar{a}, \pi \bar{x}, \tau \bar{w})$ .

Далее, определим отображение  $P : B_0 \rightarrow M_u(\mathbf{Z})$ , где  $M_u(\mathbf{Z})$  — кольцо матриц размера  $u \times u$  с элементами из кольца целых чисел  $\mathbf{Z}$ , положив для любого  $\bar{a} = (a_1 \dots a_u 0) \in B_0$

$$P(\bar{a}) = \begin{pmatrix} a_u & a_u & a_u & \dots & a_u & 0 \\ 0 & a_{u-1} & a_{u-1} & \dots & a_{u-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_{u-2} & \dots & a_{u-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицу, состоящую из элементов матрицы  $P(\bar{a})$ , находящихся на пересечении ее первых  $k$  строк и первых  $k$  столбцов, обозначим через  $P_k(\bar{a})$  ( $k \leq u$ ). Под нормой матрицы  $C = (c_{ij}) \in M_u(\mathbf{Z})$  будем понимать число  $\|C\| = \sum_{i=1}^u \sum_{j=1}^u |c_{ij}|$ , а под высотой

элемента  $\bar{c} = (c_1 \dots c_u)^T \in M_{u \times 1}(\mathbf{Z})$  — число  $h(\bar{c}) = \sum_{i=1}^u |c_i|$ . Наконец, подстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & u-1 & u \\ u-1 & u-2 & \dots & 1 & u \end{pmatrix} \in S_u \text{ обозначим } \sigma.$$

**Лемма 1.** Для любых элементов  $\bar{a} \in B_0$ ,  $\tau \in S_u$  справедливы равенства

$$h(P(\bar{a}) \cdot (\tau \sigma \bar{w}')^T) = \sum_{k=0}^{u-2} a_{u-k} \sum_{i=1}^{u-1-k} |w_{\tau(i)}| = \sum_{k=1}^{u-1} |w_{\tau(k)}| \sum_{i=k+1}^u a_i = \sum_{k=1}^{u-1} |w_{\tau(k)}| \operatorname{tr} P_{u-k}(\bar{a}).$$

**Доказательство.** Имеем

$$P(\bar{a}) \cdot (\tau \sigma \bar{w}')^T = \left( a_u \sum_{i=1}^{u-1} |w_{\tau(i)}|, a_{u-1} \sum_{i=1}^{u-2} |w_{\tau(i)}|, \dots, a_2 \sum_{i=1}^1 |w_{\tau(i)}|, 0 \right)^T.$$



Отсюда

$$\begin{aligned} h(P(\bar{a}) \cdot (\tau\sigma\bar{w}')^T) &= \sum_{k=0}^{u-2} a_{u-k} \sum_{i=1}^{u-1-k} |w_{\tau(i)}| = a_u |w_{\tau(u-1)}| + (a_u |w_{\tau(u-2)}| + \dots + \\ &+ a_u |w_{\tau(1)}|) + (a_{u-1} |w_{\tau(u-2)}| + a_{u-1} |w_{\tau(u-3)}| + \dots + a_{u-1} |w_{\tau(1)}|) + \dots + a_2 |w_{\tau(1)}| = \\ &= |w_{\tau(u-1)}| a_u + |w_{\tau(u-2)}| (a_u + a_{u-1}) + \dots + |w_{\tau(1)}| (a_u + a_{u-1} + \dots + a_2) = \\ &= \sum_{k=1}^{u-1} |w_{\tau(k)}| \sum_{i=k+1}^u a_i = \sum_{k=1}^{u-1} |w_{\tau(k)}| \text{tr } P_{u-k}(\bar{a}). \quad \square \end{aligned}$$

**Следствие 1.** Пусть  $|w_1| = |w_2| = \dots = |w_u| = 2s - 1$ ,  $s \in \mathbf{N}$ . Тогда для любых  $\bar{a} \in B_0$ ,  $\tau \in S_u$  справедливы равенства

$$h(P(\bar{a}) \cdot (\tau\sigma\bar{w}')^T) = (2s - 1) \|P(\bar{a})\| = (2s - 1) \sum_{k=1}^{u-1} k a_{k+1}.$$

Если к тому же  $a_u = a_{u-1} = \dots = a_2 = r$ , то  $h(P(\bar{a}) \cdot (\tau\sigma\bar{w}')^T) = (2s - 1) r u (u - 1) / 2$ .

**Следствие 2.** Если для всякого  $i \in I_u$   $|w_i| = 2k_i$ ,  $k_i \in \mathbf{N}$ , то для любых  $\bar{a} \in B_0$ ,  $\tau \in S_u$  число  $h(P(\bar{a}) \cdot (\tau\sigma\bar{w}')^T)$  четное.

**Лемма 2.** Для любого монома  $M(\bar{a}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w})$  из многочлена  $\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  справедливо равенство  $\text{sgn } M(\bar{a}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}) = (-1)^{h(P(\bar{a}) \cdot (\tau\sigma\bar{w}')^T)} \text{sgn } \pi \text{sgn } (\tau w)$ .

**Доказательство.** Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} &\text{sgn } M(\bar{a}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}) = \\ &= (-1)^{|w_{\tau(u-1)}| a_u + |w_{\tau(u-2)}| (a_u + a_{u-1}) + \dots + |w_{\tau(1)}| (a_u + a_{u-1} + \dots + a_2)} \text{sgn } (x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(m)} w_{\tau(1)} \dots w_{\tau(u)}) = \\ &= (-1)^{h(P(\bar{a}) \cdot (\tau\sigma\bar{w}')^T)} \text{sgn } \pi \text{sgn } (w_{\tau(1)} \dots w_{\tau(u)}) = (-1)^{h(P(\bar{a}) \cdot (\tau\sigma\bar{w}')^T)} \text{sgn } \pi \text{sgn } (\tau w). \quad \square \end{aligned}$$

**Следствие 3.** Справедливо равенство

$$\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{a} \in B_0} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} (-1)^{h(P(\bar{a}) \cdot (\tau\sigma\bar{w}')^T)} \text{sgn } \pi \text{sgn } (\tau w) M(\bar{a}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}).$$

В частности, при  $t = m - 1 = u$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) &= (-1)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2} - 1} \cdot \sum_{s=1}^{m-1} (-1)^s \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_{m-1}} \text{sgn } \pi \text{sgn } \tau \times \\ &\times x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} y_{\tau(2)} \dots x_{\pi(s-1)} y_{\tau(s-1)} x_{\pi(s)} x_{\pi(s+1)} y_{\tau(s)} x_{\pi(s+2)} \dots x_{\pi(m)} y_{\tau(m-1)}, \end{aligned}$$

а при  $t = m = u$

$$\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_m} \text{sgn } \pi \text{sgn } \tau x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} y_{\tau(2)} \dots x_{\pi(m)} y_{\tau(m)}.$$

**Следствие 4.** Пусть  $|w_1| = |w_2| = \dots = |w_u| = 2s - 1$ ,  $s \in \mathbf{N}$ . Тогда справедливо равенство  $\text{sgn } M(\bar{a}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}) = (-1)^{\|P(\bar{a})\|} \text{sgn } \pi \text{sgn } \tau$ , и, значит,

$$\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{a} \in B_0} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} (-1)^{\|P(\bar{a})\|} \text{sgn } \pi \text{sgn } \tau M(\bar{a}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}).$$

**Доказательство.** Вытекает из леммы 2 и следствия 1. □



**Следствие 5.** Пусть  $|w_1| = |w_2| = \dots = |w_u| = 2s$ ,  $s \in \mathbf{N}$ . Тогда справедливо равенство  $\operatorname{sgn} M(\bar{a}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}) = \operatorname{sgn} \pi$ , и, значит,

$$\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{a} \in B_0} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} \operatorname{sgn} \pi M(\bar{a}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}).$$

**Доказательство.** Вытекает из леммы 2 и следствия 2.  $\square$

Приведем еще один метод для вычисления значения  $(-1)^{h(P(\bar{a}) \cdot (\tau\sigma\bar{w}')^T)}$ . Определим отображения  $\xi : B_0 \rightarrow \mathbf{Z}^u$ ,  $\eta : \mathbf{Z}^u \rightarrow \mathbf{Z}^u$ , положив для любого  $\bar{a} = (a_1 \dots a_u 0) \in B_0$ ,  $\bar{c} = (c_1 \dots c_u) \in \mathbf{Z}^u$

$$\xi(\bar{a}) = (\xi(\bar{a})_1 \dots \xi(\bar{a})_{u-1} 0), \quad \eta(\bar{c}) = (\eta(\bar{c})_1 \dots \eta(\bar{c})_u),$$

где  $\xi(\bar{a})_s = \sum_{i=s+1}^u a_i - 2 \left\lfloor \frac{1}{2} \sum_{i=s+1}^u a_i \right\rfloor$ ,  $s \in I_{u-1}$ ,  $\eta(\bar{c})_r = |c_r| - 2 \lfloor |c_r|/2 \rfloor$ ,  $r \in I_u$ ,  $[p]$  — целая часть числа  $p$ .

Нетрудно видеть, что для произвольных  $\tau \in S_u$ ,  $\bar{a} \in B_0$  справедливы равенства

$$\eta(\tau\bar{w}') = \tau\eta(\bar{w}'), \quad (-1)^{h(P(\bar{a}) \cdot (\tau\sigma\bar{w}')^T)} = (-1)^{(\xi(\bar{a}), \tau\eta(\bar{w}'))},$$

где  $(\xi(\bar{a}), \tau\eta(\bar{w}')) = \sum_{s=1}^{u-1} \xi(\bar{a})_s \cdot (\tau\eta(\bar{w}'))_s$ .

## 2. СВЯЗЬ МЕЖДУ МНОГОЧЛЕНАМИ $\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ И $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$

В работе [1] доказано, что справедливо равенство

$$\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{n} \in B_1} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} (-1)^{h(\mathcal{N}(\bar{n}) \cdot (\tau\alpha\bar{w}')^T)} \operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} (\tau w) M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}),$$

где

$$h(\mathcal{N}(\bar{n}) \cdot (\tau\alpha\bar{w}')^T) = \sum_{k=0}^{u-1} n_{u+1-k} \sum_{i=1}^{u-k} |w_{\tau(i)}| = \sum_{k=1}^u |w_{\tau(k)}| \sum_{i=k+1}^{u+1} n_i,$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & u \\ u & u-1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in S_u.$$

Явный вид многочленов  $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  и  $\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  позволяет установить связь между ними.

Пусть  $r \in I_u$ ,  $S_u(r) = \{\tau \in S_u | \tau(r) = r\}$ ,  $w_{\hat{r}} = w_1 \dots w_{r-1} w_{r+1} \dots w_u$ ,  $\gamma_r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & u-1 & u \\ 1 & 2 & \dots & r-1 & r+1 & r+2 & \dots & u & r \end{pmatrix}$ ,  $S'_{u-1}(r)$  — группа подстановок степени  $u-1$ , определенная на множестве  $I_u \setminus \{r\}$ . Очевидно, что отображение  $\varphi_r : S_u(r) \rightarrow S'_{u-1}(r)$ , для которого

$$\varphi_r \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & u \\ \omega(1) & \omega(2) & \dots & \omega(r-1) & r & \omega(r+1) & \dots & \omega(u) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r-1 & r+1 & \dots & u \\ \omega(1) & \omega(2) & \dots & \omega(r-1) & \omega(r+1) & \dots & \omega(u) \end{pmatrix} = \omega',$$

является изоморфизмом групп  $S_u(r)$  и  $S'_{u-1}(r)$ .



**Лемма 3.** Для произвольного элемента  $\bar{a} = (a_1 \dots a_u 0) \in B_0$  и любого  $\tau \in S_u$  такого, что  $\tau(u) = r$ , справедливо равенство

$$(-1)^{h(P(\bar{a}) \cdot (\tau\sigma\bar{w}')^T)} \operatorname{sgn}(\tau w) = (-1)^{h(\mathcal{N}(\bar{n}) \cdot (\rho'_\tau \alpha_r \bar{w}_{\hat{r}})^T)} \cdot (-1)^{|w_r|(|w_{r+1}| + \dots + |w_u|)} \operatorname{sgn}(\rho'_\tau w_{\hat{r}}),$$

где  $\bar{n} = (a_1 \dots a_u) \in B'_1 = \{\bar{n}' = (n'_1 \dots n'_u) \in \mathbf{N}^u \mid n'_1 + \dots + n'_u = m\}$ ,

$$\rho'_\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r-1 & r+1 & r+2 & \dots & u \\ \tau(1) & \dots & \tau(r-1) & \tau(r) & \tau(r+1) & \dots & \tau(u-1) \end{pmatrix} \in S'_{u-1}(r),$$

$$\alpha_r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \hat{r} & \dots & \dots & u \\ u & u-1 & \dots & \dots & \hat{r} & \dots & 1 \end{pmatrix} \in S'_{u-1}(r)$$

(знак « $\hat{\phantom{r}}$ » означает, что число  $r$  пропущено).

**Доказательство.** Положим  $\tau = \rho_\tau \gamma_r$ , где

$$\rho_\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r-1 & r & r+1 & r+2 & \dots & u \\ \tau(1) & \dots & \tau(r-1) & r & \tau(r) & \tau(r+1) & \dots & \tau(u-1) \end{pmatrix} \in S_u(r),$$

тогда мы можем записать, что

$$\begin{aligned} (-1)^{h(P(\bar{a}) \cdot (\tau\sigma\bar{w}')^T)} \operatorname{sgn}(\tau w) &= (-1)^{h(P(\bar{a}) \cdot (\rho_\tau \gamma_r \sigma \bar{w}')^T)} \operatorname{sgn}(\rho_\tau \gamma_r w) = \\ &= (-1)^{h(P(\bar{a}) \cdot (\rho_\tau ((\gamma_r \sigma) \bar{w}')^T))} \operatorname{sgn}(\rho_\tau (\gamma_r w)). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\gamma_r \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j-2 & j-1 & j & \dots & u-1 & u \\ u & u-1 & \dots & r+2 & r+1 & r-1 & \dots & 1 & r \end{pmatrix},$$

где  $j = u - (r - 1)$ ,  $\operatorname{sgn}(\rho_\tau (\gamma_r w)) = \operatorname{sgn}((\rho_\tau w_{\hat{r}}) w_r) = \operatorname{sgn}(w_{\rho_\tau(1)} \dots w_{\rho_\tau(r-1)} \times \dots \times w_{\rho_\tau(r+1)} \dots w_{\rho_\tau(u)} w_r) = (-1)^{|w_r|(|w_{r+1}| + \dots + |w_u|)} \operatorname{sgn}(\rho_\tau w_{\hat{r}})$ .

Далее,

$$P(\bar{a}) \cdot (\rho_\tau ((\gamma_r \sigma) \bar{w}')^T) = \begin{pmatrix} a_u & a_u & a_u & \dots & a_u & 0 \\ 0 & a_{u-1} & a_{u-1} & \dots & a_{u-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{\rho_\tau(u)} \\ w_{\rho_\tau(u-1)} \\ \vdots \\ w_{\rho_\tau(1)} \\ w_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{u-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{p}.$$

Согласно лемме 1 из работы [1]

$$\begin{pmatrix} a_u & a_u & a_u & \dots & a_u \\ 0 & a_{u-1} & a_{u-1} & \dots & a_{u-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{\rho_\tau(u)} \\ w_{\rho_\tau(u-1)} \\ \vdots \\ w_{\rho_\tau(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{u-1} \end{pmatrix} = \bar{q} = \mathcal{N}(\bar{n}) (\rho'_\tau \alpha_r \bar{w}_{\hat{r}})^T,$$

где  $\bar{n} = (a_1 \dots a_u)$ ,  $\rho'_\tau = \varphi_r(\rho_\tau) \in S'_{u-1}(r)$ ,  $\alpha_r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \hat{r} & \dots & \dots & u \\ u & u-1 & \dots & \dots & \hat{r} & \dots & 1 \end{pmatrix} \in S'_{u-1}(r)$ .

Замечая, что  $h(\bar{p}) = \sum_{i=1}^u p_i = \sum_{i=1}^{u-1} p_i = h(\bar{q})$ , приходим к равенству

$$(-1)^{h(P(\bar{a}) \cdot (\tau\sigma\bar{w}')^T)} \operatorname{sgn}(\tau w) = (-1)^{h(\mathcal{N}(\bar{n}) \cdot (\rho'_\tau \alpha_r \bar{w}_{\hat{r}})^T)} \cdot (-1)^{|w_r|(|w_{r+1}| + \dots + |w_u|)} \operatorname{sgn}(\rho'_\tau w_{\hat{r}}). \quad \square$$



**Предложение 1.** Для любых натуральных чисел  $t, u, m$ , удовлетворяющих неравенствам  $t \geq u$ ,  $m \geq u$ ,  $m > 1$ , и произвольного поля  $F$  справедливо равенство

$$\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) = \sum_{r=1}^u (-1)^{|w_r|(|w_{r+1}| + \dots + |w_u|)} \mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1, \dots, \hat{i}_{r+1}}} | \bar{w}_{\hat{r}}) w_r,$$

где  $\bar{w}_{\hat{r}} = (w_1 \dots w_{r-1} w_{r+1} \dots w_u)$ ,  $\bar{y}_{\widehat{i_r+1, \dots, \hat{i}_{r+1}}} = (y_1 \dots y_{i_r} y_{i_r+1+1} \dots y_t)$ ,  $\hat{i}_1 = 0$ .

**Доказательство.** Согласно следствию 3

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) &= \sum_{\bar{a} \in B_0} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} (-1)^{h(P(\bar{a}) \cdot (\tau \sigma \bar{w})^T)} \operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn}(\tau w) M(\bar{a}, \pi \bar{x}, \tau \bar{w}) = \\ &= | \text{полагаем } \tau = \rho_\tau \gamma_r, \text{ где } r = \tau(u) | = \\ &= \sum_{r=1}^u \sum_{\bar{a} \in B_0} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\rho_\tau \in S_{u(r)}} (-1)^{h(P(\bar{a}) \cdot (\rho_\tau \gamma_r \sigma \bar{w}')^T)} \operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn}(\rho_\tau \gamma_r w) M(\bar{a}, \pi \bar{x}, \rho_\tau \gamma_r \bar{w}) = \\ &= | \text{применяем лемму 3} | = \sum_{r=1}^u \sum_{\bar{n} \in B'_1} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\rho'_\tau \in S'_{u-1}(r)} (-1)^{h(\mathcal{N}(\bar{n}) \cdot (\rho'_\tau \alpha_r \bar{w}'_{\hat{r}})^T)} \operatorname{sgn} \pi \times \\ &\times \operatorname{sgn}(\rho'_\tau w_{\hat{r}}) M(\bar{n}, \pi \bar{x}, \rho'_\tau \bar{w}_{\hat{r}}) w_r (-1)^{|w_r|(|w_{r+1}| + \dots + |w_u|)} = \sum_{r=1}^u (-1)^{|w_r|(|w_{r+1}| + \dots + |w_u|)} \times \\ &\times \left( \sum_{\bar{n} \in B'_1} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\rho'_\tau \in S'_{u-1}(r)} (-1)^{h(\mathcal{N}(\bar{n}) \cdot (\rho'_\tau \alpha_r \bar{w}'_{\hat{r}})^T)} \operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn}(\rho'_\tau w_{\hat{r}}) M(\bar{n}, \pi \bar{x}, \rho'_\tau \bar{w}_{\hat{r}}) \right) w_r = \\ &= | \text{учитываем равенство для многочлена } \mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) | = \\ &= \sum_{r=1}^u (-1)^{|w_r|(|w_{r+1}| + \dots + |w_u|)} \mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1, \dots, \hat{i}_{r+1}}} | \bar{w}_{\hat{r}}) w_r. \quad \square \end{aligned}$$

**Следствие 6.** Пусть для любого  $r \in I_u$   $|w_r| = 2s_r$ ,  $s_r \in \mathbb{N}$ . Тогда справедливо равенство  $\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) = \sum_{r=1}^u \mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1, \dots, \hat{i}_{r+1}}} | \bar{w}_{\hat{r}}) w_r$ .

**Следствие 7.** Пусть  $|w_1| = |w_2| = \dots = |w_u| = 2s - 1$ ,  $s \in \mathbb{N}$ . Тогда справедливо равенство  $\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) = \sum_{r=1}^u (-1)^{u-r} \mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1, \dots, \hat{i}_{r+1}}} | \bar{w}_{\hat{r}}) w_r$ . В частности, если  $t = u = m$ , то  $\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) = \sum_{r=1}^m (-1)^{m-r} \mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}_{\hat{r}} | \bar{w}_{\hat{r}}) y_r$ .

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА $\mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w})$

Пусть  $t \in I_m$ ,  $u = t$ ,  $w_i = y_i$  для всякого  $i \in I_t$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) &= \sum_{\bar{a} \in B_0} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} \operatorname{sgn} \pi M(\bar{a}, \pi \bar{x}, \tau \bar{w}), \\ \mathcal{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) &= \sum_{\bar{n} \in B_1} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} \operatorname{sgn} \pi M(\bar{n}, \pi \bar{x}, \tau \bar{w}) \quad (t < m). \end{aligned}$$

**Лемма 4.** Для любого натурального числа  $t \in I_m$  и произвольного поля  $F$  многочлен  $\mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) = \sum_{\bar{a} \in B_0} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_t} \operatorname{sgn} \pi M(\bar{a}, \pi \bar{x}, \tau \bar{w})$  следует из  $S_m^-(\bar{x})$ .



**Доказательство.** Пусть  $t, i_1, \dots, i_t \in I_m$ , причем  $i_1 < i_2 < \dots < i_t$ ,  $\tau \in S_t$ . Определим эндоморфизм  $\varphi_{i_1, \dots, i_t, \tau}$  алгебры  $F\{Z\}$ , положив

$$\varphi_{i_1, \dots, i_t, \tau}(z) = \begin{cases} x_{i_j} y_{\tau(j)}, & \text{если } z = x_{i_j}, (j \in I_t) \\ z, & \text{если } z \notin \{x_{i_1}, \dots, x_{i_t}\}. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что если  $t < m$ , то

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_t \leq m} \sum_{\tau \in S_t} \varphi_{i_1, \dots, i_t, \tau}(S_m^-(\bar{x})) = \mathcal{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) + \mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}).$$

Отсюда получаем, что

$$\mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_t \leq m} \sum_{\tau \in S_t} \varphi_{i_1, \dots, i_t, \tau}(S_m^-(\bar{x})) - \mathcal{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}).$$

Поскольку  $\{S_m^-(\bar{x})\}^T \triangleleft_T F\{Z\}$ , то

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_t \leq m} \sum_{\tau \in S_t} \varphi_{i_1, \dots, i_t, \tau}(S_m^-(\bar{x})) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T,$$

а по теореме 3 из работы [1]  $\mathcal{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$ , но тогда и

$$\mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_t \leq m} \sum_{\tau \in S_t} \varphi_{i_1, \dots, i_t, \tau}(S_m^-(\bar{x})) - \mathcal{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T.$$

Если же  $t = m$ , то  $\sum_{\tau \in S_m} \varphi_{1, \dots, m, \tau}(S_m^-(\bar{x})) = \mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w})$ . □

**Следствие 8.** Для любого натурального числа  $m > 1$  и произвольного поля  $F$  многочлен  $\mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}_m, \bar{y}_m | \bar{w}) = \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_m} \text{sgn } \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} y_{\tau(2)} \cdots x_{\pi(m)} y_{\tau(m)}$  следует из  $S_m^-(\bar{x})$ .

**Доказательство.** Полагая в лемме 4  $t = m$ , получаем требуемый результат. □

Выше мы определили многочлен  $\mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w})$  для случая, когда  $t = u$ ,  $t \leq m$ . Рассмотрим теперь общий случай, когда  $t \geq u$ ,  $m \geq u$ .

**Теорема 1.** Для любого натурального числа  $m > 1$  и произвольного поля  $F$  многочлен  $\mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) = \sum_{\bar{a} \in B_0} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} \text{sgn } \pi M(\bar{a}, \pi \bar{x}, \tau \bar{w})$  следует из  $S_m^-(\bar{x})$ .

**Доказательство.** Проведем математическую индукцию по парам  $(t, u) \in A(\preceq) = \{(t, u) \in \mathbf{N}^2 \mid t \geq u, u \leq m\}$  с минимальными элементами  $(t, t)$ ,  $t \in I_m$ , где  $\preceq$  — лексикографический порядок. В силу леммы 4 теорема 1 верна для любого минимального элемента  $(t, t) \in A(\preceq)$ .

Пусть  $(t, u)$  — произвольный элемент множества  $A$ , отличный от минимального. Предположим, что для любого  $(t_1, u_1) \in A$  такого, что  $(t_1, u_1) \prec (t, u)$  теорема 1 верна. Покажем, что она будет верной и для пары  $(t, u)$ . Для элемента  $(t, u)$  возможны следующие случаи: 1) среди подслов  $w_1, \dots, w_u$  существует хотя бы одно  $w_s$ , для которого  $|w_s| \geq 3$ ; 2) для любого  $i \in I_u$   $|w_i| \leq 2$ , при этом найдется  $w_r$  такое, что  $|w_r| = 2$ . Рассмотрим каждый из них по порядку.



Пусть  $w_s = b_s y_{i_{s+1}-2} y_{i_{s+1}-1} y_{i_{s+1}}$  (если  $|w_s| = 3$ , то слово  $b_s$  полагаем пустым). Нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$\mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) = \varphi \mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_{s+1}-1, i_{s+1}}} | \bar{w}_{\widehat{i_{s+1}-1, i_{s+1}}}),$$

где  $\varphi$  — эндоморфизм алгебры  $F\{Z\}$  такой, что

$$\varphi(z) = \begin{cases} y_{i_{s+1}-2} y_{i_{s+1}-1} y_{i_{s+1}}, & \text{если } z = y_{i_{s+1}-2}, \\ z, & \text{если } z \neq y_{i_{s+1}-2}, \end{cases}$$

$$\bar{y}_{\widehat{i_{s+1}-1, i_{s+1}}} = (y_1 \cdots y_{i_{s+1}-2} y_{i_{s+1}+1} \cdots y_t), \quad \bar{w}_{\widehat{i_{s+1}-1, i_{s+1}}} = w_1 \cdots w_{s-1} (b_s y_{i_{s+1}-2}) w_{s+1} \cdots w_u.$$

Так как ассоциированная с многочленом  $\mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_{s+1}-1, i_{s+1}}} | \bar{w}_{\widehat{i_{s+1}-1, i_{s+1}}})$  пара  $(t-2, u) \prec \prec (t, u)$ , то по индуктивному предположению он следует из  $S_m^-(\bar{x})$ , но тогда и  $\mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w})$  следует из  $S_m^-(\bar{x})$ .

Во втором случае предположим, что  $w_r = y_{i_r+1} y_{i_r+2}$ . Рассмотрим эндоморфизмы  $\varphi_1, \dots, \varphi_m, \psi_{i_1+1}, \dots, \psi_{i_u+1}$  алгебры  $F\{Z\}$ , определенные следующим образом:

$$\varphi_i(z) = \begin{cases} x_i w_r, & \text{если } z = x_i, \\ z, & \text{если } z \neq x_i, \end{cases} \quad \psi_{i_j+1}(z) = \begin{cases} w_r y_{i_j+1}, & \text{если } z = y_{i_j+1}, \\ z, & \text{если } z \neq y_{i_j+1}, \end{cases}$$

где  $i \in I_m, j \in C = I_u \setminus \{r\}, i_1 = 0$ . Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) &= \sum_{i=1}^m \varphi_i \mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1, i_r+2}} | \bar{w}_{\widehat{r}}) - \\ &- \sum_{j \in C} \psi_{i_j+1} \mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1, i_r+2}} | \bar{w}_{\widehat{r}}) + \mathcal{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1, i_r+2}} | \bar{w}_{\widehat{r}}) w_r, \end{aligned}$$

где  $\bar{w}_{\widehat{r}} = (w_1 \cdots w_{r-1} w_{r+1} \cdots w_u)$ .

Так как ассоциированная с многочленом  $\mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1, i_r+2}} | \bar{w}_{\widehat{r}})$  пара  $(t-2, u-1) \prec \prec (t, u)$ , то по индуктивному предположению он является следствием  $S_m^-(\bar{x})$ . По замечанию 2 из работы [1] многочлен  $\mathcal{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1, i_r+2}} | \bar{w}_{\widehat{r}})$  также есть следствие многочлена  $S_m^-(\bar{x})$ . Значит, и  $\mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w})$  следует из  $S_m^-(\bar{x})$ . Если пара  $(t, u) = (2, 1)$ , то  $\mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) = \mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, y_1 | y_1) y_2$ .

Поскольку ассоциированная с многочленом  $\mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, y_1 | y_1)$  пара  $(1, 1)$  является минимальным элементом частично упорядоченного множества  $A(\preceq)$ , то по доказанному  $\mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, y_1 | y_1) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$ , но тогда и  $\mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$ .  $\square$

#### 4. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА $\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w})$

Представим многочлен  $\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w})$  в виде  $\mathcal{R}^+(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) + \mathcal{R}^-(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w})$ , где многочлен  $\mathcal{R}^+(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w})$  ( $\mathcal{R}^-(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w})$ ) состоит из всех мономов многочлена  $\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w})$ , для которых  $(-1)^{h(P(\bar{a}) \cdot (\tau \sigma \bar{w}')^T)} \text{sgn}(\tau w) = 1(-1)$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^+(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) &= \sum_{\bar{a} \in B_0} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} \delta_{1(-1)^{h(P(\bar{a}) \cdot (\tau \sigma \bar{w}')^T)} \text{sgn}(\tau w)} \text{sgn} \pi M(\bar{a}, \pi \bar{x}, \tau \bar{w}), \\ \mathcal{R}^-(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) &= \sum_{\bar{a} \in B_0} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} -\delta_{-1(-1)^{h(P(\bar{a}) \cdot (\tau \sigma \bar{w}')^T)} \text{sgn}(\tau w)} \text{sgn} \pi M(\bar{a}, \pi \bar{x}, \tau \bar{w}), \end{aligned}$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.



**Теорема 2.** Для любого натурального числа  $m > 1$  и произвольного поля  $F$  характеристики не два многочлен  $\mathcal{R}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  следует из  $S_m^-(\bar{x})$ .

**Доказательство.** По следствию 1 из работы [2] многочлен  $\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$ , а по теореме 1 многочлен  $\mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$ , но тогда  $\mathcal{R}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \frac{1}{2}(\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) + \mathcal{R}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$ .  $\square$

**Предложение 2.** Для любого натурального числа  $m > 1$  и произвольного поля  $F$  характеристики не два многочлен  $\mathcal{R}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  следует из  $S_m^-(\bar{x})$ .

**Доказательство.** По следствию 1 из работы [2] многочлен  $\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$ , а по теореме 2 многочлен  $\mathcal{R}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$ , но тогда  $\mathcal{R}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) - \mathcal{R}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$ .  $\square$

**Следствие 9.** Для любого натурального числа  $m > 1$  и произвольного поля  $F$  характеристики не два многочлены

$$b_{2m}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in A_m^+} \text{sgn } \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(m-1)} x_{\pi(m)} y_{\tau(m)},$$

$$h_{2m}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in A_m^-} \text{sgn } \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(m-1)} x_{\pi(m)} y_{\tau(m)},$$

где  $A_m^+ = \{\tau \in S_m \mid \text{sgn } \tau = 1\}$ ,  $A_m^- = \{\tau \in S_m \mid \text{sgn } \tau = -1\}$ , являются следствиями стандартного многочлена  $S_m^-(\bar{x})$ .

**Доказательство.** Полагая в следствии 1  $s = r = 1$ ,  $u = m$  и учитывая следствие 4, получаем, что

$$\mathcal{R}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in A_m^{\text{sgn } (-1)^{m(m-1)/2}}} \text{sgn } \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(m-1)} x_{\pi(m)} y_{\tau(m)},$$

$$-\mathcal{R}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in A_m^{\text{sgn } (-1)^{m(m-1)/2}}} \text{sgn } \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(m-1)} x_{\pi(m)} y_{\tau(m)}.$$

Нетрудно видеть, что в зависимости от числа  $m$  наши суммы совпадают либо с многочленом  $b_{2m}(\bar{x}, \bar{y})$ , либо с многочленом  $h_{2m}(\bar{x}, \bar{y})$ , но по теореме 2 и предложению 2 они следуют из  $S_m^-(\bar{x})$ .  $\square$

**Замечание 1.** В работе [1] доказано, что если  $\text{char } F \neq 2$ , то  $b_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $h_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$ . Основные свойства многочленов  $b_{2m}(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $h_{2m}(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $b_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $h_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y})$  и связь между ними рассмотрены в работе [3].

## 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ $\mathcal{D}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ И $\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$

Приводимые ниже результаты дополняют результаты, полученные в парагр. 3 и статье [1]. Пусть  $t, i_1, \dots, i_t \in I_m$ , причем  $i_1 < i_2 < \dots < i_t$ ,  $\tau \in S_t$ ,  $u = t$ ,  $w_i = y_i$  для всякого  $i \in I_t$ ,

$$\mathcal{D}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{n} \in B_1} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} \text{sgn } \pi \text{sgn } \tau M(\bar{n}, \pi \bar{x}, \tau \bar{w}) \quad (t < m),$$

$$\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{a} \in B_0} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} \text{sgn } \pi \text{sgn } \tau M(\bar{a}, \pi \bar{x}, \tau \bar{w}).$$



Определим эндоморфизм  $\psi_{i_1, \dots, i_t, \tau}$  алгебры  $F\{Z\}$ , положив для всякого  $z \in Z$

$$\psi_{i_1, \dots, i_t, \tau}(z) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \tau x_{i_1} y_{\tau(1)}, & \text{если } z = x_{i_1}, \\ x_{i_j} y_{\tau(j)}, & \text{если } z = x_{i_j} (j \in I_t \setminus \{1\}), \\ z, & \text{если } z \notin \{x_{i_1}, \dots, x_{i_t}\}. \end{cases}$$

Сохраняя обозначения парагр. 2, докажем следующее предложение.

**Предложение 3.** Для любого натурального числа  $t \in I_m \setminus \{1\}$  и произвольного поля  $F$  справедливо равенство

$$\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) = \sum_{r=1}^t (-1)^{t-r} \mathcal{D}(\bar{x}, \bar{y}_{\hat{r}} | \bar{w}_{\hat{r}}) y_r.$$

**Доказательство.** Учтывая, что  $u = t$ , и полагая  $\tau = \rho_\tau \gamma_r$ , где  $r = \tau(u)$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) &= \sum_{r=1}^u \sum_{\bar{a} \in B_0} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\rho_\tau \in S_u(r)} \operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} (\rho_\tau \gamma_r) M(\bar{a}, \pi \bar{x}, \rho_\tau \gamma_r \bar{w}) = \\ &= \sum_{r=1}^u \operatorname{sgn} \gamma_r \left( \sum_{\bar{n} \in B'_1} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\rho'_\tau \in S'_{u-1}(r)} \operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \rho'_\tau M(\bar{n}, \pi \bar{x}, \rho'_\tau \bar{w}_{\hat{r}}) \right) w_r = \\ &= \sum_{r=1}^u (-1)^{u-r} \mathcal{D}(\bar{x}, \bar{y}_{\hat{r}} | \bar{w}_{\hat{r}}) y_r. \end{aligned} \quad \square$$

**Предложение 4.** Для любого натурального числа  $t \in I_{m-1}$  и произвольного поля  $F$  многочлен  $\mathcal{D}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) = \sum_{\bar{n} \in B_1} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_t} \operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau M(\bar{n}, \pi \bar{x}, \tau \bar{w})$  следует из  $S_m^-(\bar{x})$ .

**Доказательство.** Проведем математическую индукцию по числу  $t$ . Пусть  $t = 1$ , тогда

$$\sum_{i=1}^m \psi_i(S_m^-(\bar{x})) = \sum_{n=1}^{m-1} \sum_{\pi \in S_m} \operatorname{sgn} \pi x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)} y_1 x_{\pi(n+1)} \cdots x_{\pi(m)} + S_m^-(\bar{x}) y_1.$$

Отсюда

$$\mathcal{D}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) = \sum_{n=1}^{m-1} \sum_{\pi \in S_m} \operatorname{sgn} \pi x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)} y_1 x_{\pi(n+1)} \cdots x_{\pi(m)} = \sum_{i=1}^m \psi_i(S_m^-(\bar{x})) - S_m^-(\bar{x}) y_1.$$

Поскольку  $\{S_m^-(\bar{x})\}^T \triangleleft_T F\{Z\}$ , то  $\sum_{i=1}^m \psi_i(S_m^-(\bar{x})), S_m^-(\bar{x}) y_1 \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$ , и, значит,  $\mathcal{D}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$ .

Пусть теперь  $1 < t \leq m - 1$ . Предположим, что для всякого  $a < t$  предложение 4 верно. Покажем, что оно будет верным и для числа  $t$ . Нетрудно видеть, что

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_t \leq m} \sum_{\tau \in S_t} \psi_{i_1, \dots, i_t, \tau}(S_m^-(\bar{x})) = \mathcal{D}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) + \mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}).$$



Отсюда и из предложения 3 получаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_t \leq m} \sum_{\tau \in S_t} \psi_{i_1, \dots, i_t, \tau}(S_m^-(\bar{x})) - \sum_{r=1}^t (-1)^{t-r} \mathcal{D}(\bar{x}, \bar{y}_r|\bar{w}_r) y_r = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_t \leq m} \sum_{\tau \in S_t} \psi_{i_1, \dots, i_t, \tau}(S_m^-(\bar{x})) - \sum_{r=1}^t (-1)^{t-r} \xi_r(\mathcal{D}(\bar{x}, \bar{y}_r|\bar{w}_r)) y_r, \end{aligned}$$

где  $\xi_r$  ( $r \in I_t$ ) — эндоморфизм алгебры  $F\{Z\}$  такой, что

$$\xi_r(z) = \begin{cases} y_{r+s+1}, & \text{если } z = y_{r+s}, \quad s \in \{0, 1, \dots, t-1-r\}, \\ z, & \text{если } z \notin \{y_r, \dots, y_{t-1}\}. \end{cases}$$

Так как ассоциированное с многочленом  $\mathcal{D}(\bar{x}, \bar{y}_r|\bar{w}_r)$  число  $t-1 < t$ , то по индуктивному предположению он является следствием стандартного многочлена  $S_m^-(\bar{x})$ . Учитывая, что  $\{S_m^-(\bar{x})\}^T \triangleleft_T F\{Z\}$ , получаем, что  $\mathcal{D}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$ . Таким образом, предложение 4 верно для всякого  $t \in I_{m-1}$ .  $\square$

**Следствие 10.** Для любого натурального числа  $m > 1$  и произвольного поля  $F$  многочлен

$$\mathcal{D}(\bar{x}_m, \bar{y}_{m-1}|\bar{w}) = \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_{m-1}} \text{sgn } \pi \text{sgn } \tau x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} y_{\tau(2)} \cdots y_{\tau(m-1)} x_{\pi(m)}$$

следует из  $S_m^-(\bar{x})$ .

**Доказательство.** Полагая в предложении 4  $t = m-1$ , получаем требуемый результат.  $\square$

**Предложение 5.** Для любого натурального числа  $t \in I_m$  и произвольного поля  $F$  многочлен  $\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{a} \in B_0} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_t} \text{sgn } \pi \text{sgn } \tau M(\bar{a}, \pi \bar{x}, \tau \bar{w})$  следует из  $S_m^-(\bar{x})$ .

**Доказательство.** Если  $t = 1$ , то  $\mathcal{E}(\bar{x}, y_1|\bar{w}) = S_m^-(\bar{x}) y_1$ . Пусть  $1 < t < m$ , тогда из равенства

$$\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_t \leq m} \sum_{\tau \in S_t} \psi_{i_1, \dots, i_t, \tau}(S_m^-(\bar{x})) - \mathcal{D}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}),$$

а также из предложения 4 и того, что  $\{S_m^-(\bar{x})\}^T \triangleleft_T F\{Z\}$ , заключаем, что  $\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$ . Если же  $t = m$ , то  $\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\tau \in S_m} \psi_{1, \dots, m, \tau}(S_m^-(\bar{x}))$ . Отсюда и из того, что  $\{S_m^-(\bar{x})\}^T \triangleleft_T F\{Z\}$ , следует, что  $\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$ .  $\square$

**Следствие 11.** Для любого натурального числа  $m > 1$  и произвольного поля  $F$  многочлен  $\mathcal{E}(\bar{x}_m, \bar{y}_m|\bar{w}) = \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_m} \text{sgn } \pi \text{sgn } \tau x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} y_{\tau(2)} \cdots x_{\pi(m)} y_{\tau(m)}$  следует из  $S_m^-(\bar{x})$ .

**Доказательство.** Полагая в предложении 5  $t = m$ , получаем требуемый результат.  $\square$

Отметим, что впервые этот факт был доказан Ченгом в [4].

**Замечание 2.** Многочлены  $\mathcal{D}(\bar{x}_m, \bar{y}_{m-1}|\bar{w})$  и  $\mathcal{E}(\bar{x}_m, \bar{y}_m|\bar{w})$  называются двойными многочленами Капелли нечетной и четной степени и обозначаются символами  $C_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y})$  и  $C_{2m}(\bar{x}, \bar{y})$  соответственно. Основные свойства двойных и кратных многочленов Капелли, а также их обобщений приведены в работе [5].



## 6. ВТОРОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ И $\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$

Результаты парагр. 5 позволяют получить еще одно разложение многочленов  $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  и  $\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ , отличное от приведенных в [1] и парагр. 4 данной статьи. Пусть

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) &= \sum_{\bar{n} \in B_1} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} \delta_{1(-1)^{h(\mathcal{N}(\bar{n}) \cdot (\tau\alpha\bar{w}')^T)} \operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn}(\tau w)} M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}), \\ \mathcal{K}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) &= \sum_{\bar{n} \in B_1} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} -\delta_{-1(-1)^{h(\mathcal{N}(\bar{n}) \cdot (\tau\alpha\bar{w}')^T)} \operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn}(\tau w)} M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}), \\ \mathcal{G}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) &= \sum_{\bar{a} \in B_0} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} \delta_{1(-1)^{h(P(\bar{a}) \cdot (\tau\sigma\bar{w}')^T)} \operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn}(\tau w)} M(\bar{a}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}), \\ \mathcal{G}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) &= \sum_{\bar{a} \in B_0} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} -\delta_{-1(-1)^{h(P(\bar{a}) \cdot (\tau\sigma\bar{w}')^T)} \operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn}(\tau w)} M(\bar{a}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}),\end{aligned}$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Очевидно, что  $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \mathcal{K}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) + \mathcal{K}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ ,  $\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \mathcal{G}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) + \mathcal{G}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ . Кроме того, нетрудно видеть, что при  $u = t = m - 1$  один из многочленов  $\mathcal{K}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  или  $\mathcal{K}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  (в зависимости от числа  $m$ ) будет равен нулю. Аналогично, при  $u = t = m$  один из многочленов  $\mathcal{G}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  или  $\mathcal{G}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  в зависимости от числа  $m$  равен нулю.

**Теорема 3.** Для любого натурального числа  $m > 1$  и произвольного поля  $F$  характеристики не два многочлен  $\mathcal{K}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  следует из  $S_m^-(\bar{x})$ .

**Доказательство.** Проведем математическую индукцию по парам  $(t, u) \in A(\preceq) = \{(t, u) \in \mathbf{N}^2 \mid t \geq u, u < m\}$  с минимальными элементами  $(t, t)$ ,  $t \in I_{m-1}$ , где  $\preceq$  — лексикографический порядок. Покажем, что для всякого минимального элемента  $(t, t)$  теорема 3 верна. Действительно, по теореме 2 из статьи [2]  $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$ , по предложению 4  $\mathcal{D}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$ , но тогда и  $\mathcal{K}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \frac{1}{2}(\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) + \mathcal{D}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$ .

Пусть  $(t, u)$  — произвольный элемент множества  $A$ , отличный от минимального. Предположим, что для любого  $(t_1, u_1) \in A$  такого, что  $(t_1, u_1) \prec (t, u)$ , теорема 3 верна. Покажем, что она будет верной и для пары  $(t, u)$ . Для элемента  $(t, u)$  возможны следующие случаи:

- 1) среди подслов  $w_1, \dots, w_u$  существует хотя бы одно  $w_s$ , для которого  $|w_s| \geq 3$ ;
- 2) для любого  $i \in I_u$   $|w_i| \leq 2$ , при этом найдется  $w_r$  такое, что  $|w_r| = 2$ . Рассмотрим каждый из них по порядку.

Пусть  $w_s = b_s y_{i_{s+1}-2} y_{i_{s+1}-1} y_{i_{s+1}}$  (если  $|w_s| = 3$ , то слово  $b_s$  полагаем пустым). Нетрудно видеть, что для любых  $\bar{n} \in B_1$ ,  $\tau \in S_u$  справедливы равенства

$$(-1)^{h(\mathcal{N}(\bar{n}) \cdot (\tau\alpha\bar{w}')^T)} = (-1)^{h(\mathcal{N}(\bar{n}) \cdot (\tau\alpha\bar{w}'_{\widehat{i_{s+1}-1, \hat{i}_{s+1}}})^T)}, \quad \operatorname{sgn}(\tau w) = \operatorname{sgn}(\tau w_{\widehat{i_{s+1}-1, \hat{i}_{s+1}}}),$$

где  $w_{\widehat{i_{s+1}-1, \hat{i}_{s+1}}} = w_1 \cdots w_{s-1} (b_s y_{i_{s+1}-2}) w_{s+1} \cdots w_u$ . Отсюда следует, что

$$\mathcal{K}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \varphi \mathcal{K}^+(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_{s+1}-1, \hat{i}_{s+1}}} | \bar{w}_{\widehat{i_{s+1}-1, \hat{i}_{s+1}}}),$$

где  $\varphi$  — эндоморфизм алгебры  $F\{Z\}$  такой, что  $\varphi(y_{i_{s+1}-2}) = y_{i_{s+1}-2} y_{i_{s+1}-1} y_{i_{s+1}}$  и  $\varphi(z) = z$ , если  $z \neq y_{i_{s+1}-2}$ . Так как ассоциированная с многочленом  $\mathcal{K}^+(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_{s+1}-1, \hat{i}_{s+1}}} | \bar{w}_{\widehat{i_{s+1}-1, \hat{i}_{s+1}}})$  пара  $(t-2, u) \prec (t, u)$ , то по индуктивному предположению он следует из  $S_m^-(\bar{x})$ , но тогда и  $\mathcal{K}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  следует из  $S_m^-(\bar{x})$ .



Во втором случае предположим, что  $w_r = y_{i_r+1}y_{i_r+2}$ . Рассмотрим эндоморфизмы  $\varphi_1, \dots, \varphi_m, \psi_{i_1+1}, \dots, \psi_{i_u+1}$  алгебры  $F\{Z\}$ , определенные следующим образом:

$$\varphi_i(z) = \begin{cases} x_i w_r, & \text{если } z = x_i, \\ z, & \text{если } z \neq x_i, \end{cases} \quad \psi_{i_j+1}(z) = \begin{cases} w_r y_{i_j+1}, & \text{если } z = y_{i_j+1}, \\ z, & \text{если } z \neq y_{i_j+1}, \end{cases}$$

где  $i \in I_m, j \in C = I_u \setminus \{r\}, i_1 = 0$ . Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) &= \sum_{i=1}^m \varphi_i \mathcal{K}^+(\bar{x}, \widehat{\bar{y}}_{i_r+1, i_r+2} | \bar{w}_{\hat{r}}) - \\ &- \sum_{j \in C} \psi_{i_j+1} \mathcal{K}^+(\bar{x}, \widehat{\bar{y}}_{i_r+1, i_r+2} | \bar{w}_{\hat{r}}) - \mathcal{K}^+(\bar{x}, \widehat{\bar{y}}_{i_r+1, i_r+2} | \bar{w}_{\hat{r}}) w_r, \end{aligned}$$

где  $\bar{w}_{\hat{r}} = (w_1 \dots w_{r-1} w_{r+1} \dots w_u)$ . Так как ассоциированная с многочленом  $\mathcal{K}^+(\bar{x}, \widehat{\bar{y}}_{i_r+1, i_r+2} | \bar{w}_{\hat{r}})$  пара  $(t-2, u-1) \prec (t, u)$ , то по индуктивному предположению он является следствием  $S_m^-(\bar{x})$ , но тогда и  $\mathcal{K}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  следует из  $S_m^-(\bar{x})$ . Если пара  $(t, u) = (2, 1)$ , то  $\mathcal{K}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ , а по теореме 2 из работы [2]  $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$ .  $\square$

**Предложение 6.** Для любого натурального числа  $m > 1$  и произвольного поля  $F$  характеристики не два многочлен  $\mathcal{K}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  следует из  $S_m^-(\bar{x})$ .

**Доказательство.** По теореме 2 из статьи [2] многочлен  $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$ , а по теореме 3  $\mathcal{K}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$ , но тогда

$$\mathcal{K}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) - \mathcal{K}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T. \quad \square$$

Проводя аналогичные рассуждения для многочленов  $\mathcal{G}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}), \mathcal{G}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  и учитывая теорему 3, придем к следующим результатам.

**Теорема 4.** Для любого натурального числа  $m > 1$  и произвольного поля  $F$  характеристики не два многочлен  $\mathcal{G}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  следует из  $S_m^-(\bar{x})$ .

**Предложение 7.** Для любого натурального числа  $m > 1$  и произвольного поля  $F$  характеристики не два многочлен  $\mathcal{G}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  следует из  $S_m^-(\bar{x})$ .

Отметим, что с некоторыми известными следствиями стандартного многочлена можно также познакомиться в [6–8].

## 7. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Пусть  $A$  — произвольная ассоциативная алгебра над полем  $F$  со стандартным тождеством  $S_m^-(\bar{x})$ ,  $T[A]$  — ее идеал тождеств. Так как  $T[A] \triangleleft_T F\{Z\}$ , то  $T[A] \supseteq \{S_m^-(\bar{x})\}^T$ . Отсюда вытекает, что все следствия, полученные нами из многочлена  $S_m^-(\bar{x})$ , будут тождествами алгебры  $A$ . Нетрудно видеть, что если  $\dim A < \infty$  и  $m > \dim A$ , то  $S_m^-(\bar{x}) \in T[A]$ . В частности, если  $A$  есть матричная алгебра  $M_n(F)$ , то в силу теоремы Амицура–Левицкого [9] наименьшее  $m$ , при котором  $S_m^-(\bar{x}) \in T[M_n(F)]$ , равно  $2n$ .

Можно также рассматривать тождества векторных подпространств алгебры  $A$ . Тождества некоторых подпространств интересны как сами по себе, так и в связи с задачей описания  $G$ -градуированных тождеств  $G$ -градуированной алгебры  $A$ , где  $G$  —



некоторая группа, и  $A$  допускает  $G$ -градуировку. В частности, для  $A = M_n(F)$  базис верхнетреугольных матриц описан в [10, 11], некоторые тождества подпространств симметрических и кососимметрических матриц для некоторых полей можно найти в [12–14]. Базис  $Z_2$ -градуированных тождеств  $Z_2$ -градуированной матричной алгебры  $M^{(m,k)}(F)$  при  $m = 2$ ,  $k = 1$  и  $\text{char } F = 0$  найден в [15], в общем случае базис неизвестен.

Приводимый ниже результат будет полезен при изучении  $Z_2$ -градуированных тождеств  $Z_2$ -градуированной матричной алгебры  $M^{(m,m)}(F)$  при любых  $m, F$ .

Пусть  $m \in \mathbf{N}$ ,  $M_{m+m}(F)$  — алгебра матриц, градуированная подпространствами

$$M_0^{(m,m)}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} C_{m \times m}(F) & 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} & D_{m \times m}(F) \end{pmatrix} \right\}, \quad M_1^{(m,m)}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 0_{m \times m} & B_{m \times m}(F) \\ A_{m \times m}(F) & 0_{m \times m} \end{pmatrix} \right\},$$

$T[M_1^{(m,m)}(F), M_{m+m}(F)]$  — идеал тождеств векторного подпространства  $M_1^{(m,m)}(F)$ .

**Предложение 8.** Для любого натурального числа  $m$

$$b_{2(2m)-1}(\bar{x}, \bar{y}), h_{2(2m)-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_1^{(m,m)}, M_{m+m}(F)].$$

**Доказательство.** Проведем для многочлена  $b_{2(2m)-1}(\bar{x}, \bar{y})$ , так как для многочлена  $h_{2(2m)-1}(\bar{x}, \bar{y})$  оно аналогично.

Пусть

$$a^i = \begin{pmatrix} 0_{m \times m} & B_{m \times m}^i(F) \\ A_{m \times m}^i(F) & 0_{m \times m} \end{pmatrix}, \quad b^j = \begin{pmatrix} 0_{m \times m} & C_{m \times m}^j(F) \\ D_{m \times m}^j(F) & 0_{m \times m} \end{pmatrix} \in M_1^{(m,m)}(F),$$

где  $i = \overline{1, 2m}$ ,  $j = \overline{1, 2m-1}$ , тогда

$$\begin{aligned} & b_{2(2m)-1}(a^1, \dots, a^{2m}, b^1, \dots, b^{2m-1}) = \\ & = \begin{pmatrix} 0_{m \times m} & b_{2(2m)-1}(B^1, \dots, B^{2m}, D^1, \dots, D^{2m-1}) \\ b_{2(2m)-1}(A^1, \dots, A^{2m}, C^1, \dots, C^{2m-1}) & 0_{m \times m} \end{pmatrix} = 0, \end{aligned}$$

поскольку в силу предложения 3 статьи [1]  $b_{2(2m)-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_m(F)]$ .  $\square$

### Библиографический список

1. Антонов С. Ю., Антонова А. В. К теореме Ченга. II // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 127–137. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-127-137
2. Антонов С. Ю., Антонова А. В. К теореме Ченга // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 247–251. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-247-251
3. Антонов С. Ю., Антонова А. В. О квазимногочленах Капелли // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 371–382. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-371-382
4. Chang Q. Some consequences of the standard polynomial // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 104, № 3. P. 707–710.
5. Антонов С. Ю., Антонова А. В. О кратных многочленах Капелли // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2016. Т. 158, № 1. С. 5–25.
6. Гатева Т. В. Сложность произведения многообразий ассоциативных алгебр // УМН. 1981. Т. 36, вып. 1(217). С. 203–204.



7. Кемер А. Р. Замечание о стандартном тождестве // Матем. заметки. 1978. Т. 23, № 5. С. 753–757.
8. Leron U. Multilinear identities of the matrix ring // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. Vol. 183. P. 175–202.
9. Amitsur S. A., Levitzki J. Minimal identities for algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1950. Vol. 1, № 4. P. 449–463. DOI: 10.1090/S0002-9939-1950-0036751-9
10. Мальцев Ю. Н. Базис тождеств алгебры верхних треугольных матриц // Алгебра и логика. 1971. Т. 10, № 4. С. 393–400.
11. Сидеров П. Н. Базис тождеств алгебры треугольных матриц над произвольным полем // ПЛИСКА Български матем. студии. 1981. Т. 2. С. 143–152.
12. Kostant B. A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur–Levitzki, and cohomology theory // J. Math. Mech. 1958. Vol. 7. P. 237–264. DOI: 10.1007/b94535\_8
13. Rowen L. H. Standard polynomials in matrix algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 190. P. 253–284.
14. Wenxin M., Racine M. Minimal identities of symmetric matrices // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 320, № 1. P. 171–192. DOI: 10.1090/S0002-9947-1990-0961598-6
15. Аверьянов И. В. Базис градуированных тождеств супералгебры  $M_{1,2}(F)$  // Матем. заметки. 2009. Т. 85, вып. 4. С. 483–501. DOI: 10.4213/mzm4298

---

**Образец для цитирования:**

Антонов С. Ю., Антонова А. В. К теореме Ченга. III // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 2. С. 128–143. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-128-143

---

## To Chang Theorem. III

S. Yu. Antonov, A. V. Antonova

Stepan Yu. Antonov, <https://orcid.org/0000-0003-1705-3929>, Kazan State Power Engineering University, 51, Krasnoselskaya Str., Kazan, 420066, Russia, antonovst-vm@rambler.ru

Alina V. Antonova, <https://orcid.org/0000-0001-7047-7275>, Kazan State Power Engineering University, 51, Krasnoselskaya Str., Kazan, 420066, Russia, antonovakazan@rambler.ru

Various multilinear polynomials of Capelli type belonging to a free associative algebra  $F\{X \cup Y\}$  over an arbitrary field  $F$  generated by a countable set  $X \cup Y$  are considered. The formulas expressing coefficients of polynomial Chang  $\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  are found. It is proved that if the characteristic of field  $F$  is not equal two then polynomial  $\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  may be represented by different ways in the form of sum of two consequences of standard polynomial  $S^-(\bar{x})$ . The decomposition of Chang polynomial  $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  different from already known is given. Besides, the connection between polynomials  $\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  and  $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$  is found. Some consequences of standard polynomial being of great interest for algebras with polynomial identities are obtained. In particular, a new identity of minimal degree for odd component of  $Z_2$ -graded matrix algebra  $M^{(m,m)}(F)$  is given.

*Key words:*  $T$ -ideal, standard polynomial, Capelli polynomial.

## References

1. Antonov S. Yu., Antonova A. V. To Chang theorem. II. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, no. 2, pp. 127–137 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-127-137



2. Antonov S. Yu., Antonova A. V. To Chang theorem. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, no. 3, pp. 247–251 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-247-251
3. Antonov S. Yu., Antonova A. V. Quasi-polynomials of Capelli. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, no. 4, pp. 371–382 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-371-382
4. Chang Q. Some consequences of the standard polynomial. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1988, vol. 104, no. 3, pp. 707–710.
5. Antonov S. Yu., Antonova A. V. On multiple polynomials of Capelli type. *Physics and mathematics*, Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Ser. Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2016, vol. 158, no. 1, pp. 5–25 (in Russian).
6. Gateva T. V. The complexity of a bundle of varieties of associative algebras. *Russian Math. Surveys*, 1981, vol. 36, iss. 1, pp. 233.
7. Kemer A. R. Remark on the standard identity. *Math. Notes*, 1978, vol. 23, no. 5, pp. 414–416. DOI: 10.1007/BF01789011
8. Leron U. Multilinear identities of the matrix ring. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1973, vol. 183, pp. 175–202.
9. Amitsur S. A., Levitzki J. Minimal identities for algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 1, no. 4, pp. 449–463. DOI: 10.1090/S0002-9939-1950-0036751-9
10. Mal'tsev Y. N. Basis for identities of the algebra of upper triangular matrices. *Algebra and Logic*, 1971, vol. 10, iss. 4, pp. 242–247. DOI: 10.1007/BF02219811
11. Siderov P. N. A basis for the identities of an algebra of triangular matrices over an arbitrary field. *PLISKA Studia Math. Bulgar.*, 1981, vol. 2, pp. 143–152 (in Russian).
12. Kostant B. A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur–Levitzki, and cohomology theory. *J. Math. Mech.*, 1958, vol. 7, pp. 237–264. DOI: 10.1007/b94535\_8
13. Rowen L. H. Standard polynomials in matrix algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1974, vol. 190, pp. 253–284.
14. Wenxin M., Racine M. Minimal identities of symmetric matrices. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1990, vol. 320, no. 1, pp. 171–192. DOI: 10.1090/S0002-9947-1990-0961598-6
15. Aver'yanov I. V. Basis of graded identities of the superalgebra  $M_{1,2}(F)$ . *Math. Notes*, 2009, vol. 85, no. 4, pp. 467–483. DOI: 10.1134/S0001434609030195

---

**Cite this article as:**

Antonov S. Yu., Antonova A. V. To Chang theorem. III. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 2, pp. 128–143 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-128-143

---



УДК 517.984

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

А. А. Голубков

Голубков Андрей Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики, Специализированный учебно-научный центр (факультет) — школа-интернат имени А. Н. Колмогорова Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (СУНЦ МГУ), Россия, 121357, Москва, Кременчугская, 11, andrej2501@yandex.ru

Впервые изучена обратная задача для стандартного уравнения Штурма – Лиувилля со спектральным параметром  $\rho$  и потенциалом, кусочно-целым на спрямляемой кривой  $\gamma \subset \mathbf{C}$ , у которой задана только начальная точка. Ограниченная на кривой  $\gamma$  функция  $Q$  является кусочно-целой на ней, если  $\gamma$  можно разбить конечным числом точек на участки, на которых  $Q$  совпадает с целыми функциями, различными на соседних участках. Точки разбиения, начальная и конечная точки кривой называются критическими точками. Ставится задача нахождения всех критических точек  $\gamma$  и потенциала на ней по столбцу или строке передаточной матрицы  $\hat{P}$  вдоль  $\gamma$ . На основе полученной асимптотики  $\hat{P}$  при  $|\rho| \rightarrow \infty$  доказано, что если хотя бы один её элемент ограничен при любых  $\rho \in \mathbf{C}$ , то  $\gamma$  после удаления всех «невидимых петель» вырождается в точку («невидимая петля» — такая петля кривой  $\gamma$  с заданной кусочно-целой функцией, узел которой совпадает с двумя последовательными критическими точками). В статье доказана единственность решения поставленной обратной задачи для кривых без «невидимых петель». На примере обратной задачи для уравнения  $\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{r(x)} \frac{dy}{dx} \right) + (q(x) - r(x)\lambda^2) y(x) = 0$  с кусочно-целым потенциалом  $q(x)$  и кусочно-постоянной функцией  $r(x) \neq 0$  на отрезке действительной оси показана полезность полученных результатов при исследовании обратных задач для обобщенных уравнений Штурма – Лиувилля, приводимых к изученному в статье типу.

*Ключевые слова:* уравнение Штурма – Лиувилля на кривой, кусочно-целый потенциал, передаточная матрица, асимптотика, обратная спектральная задача.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-144-156

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обратные задачи для уравнения Штурма – Лиувилля стандартного вида

$$u''(z) + (Q(z) - \lambda^2)u(z) = 0 \quad (1)$$

в случае вещественной переменной хорошо изучены для различных, в том числе комплекснозначных потенциалов [1–3]. Однако обратные спектральные задачи для обобщенных уравнений Штурма – Лиувилля

$$\frac{d}{dx} \left( f(x) \frac{du}{dx} \right) + (q(x) - r(x)\lambda^2) u(x) = 0 \quad (x \in [0, 1])$$

с кусочно-аналитическими комплекснозначными коэффициентами на отрезке в общем случае почти не исследованы [4]. Между тем такого типа обратные задачи имеют большое практическое значение, так как возникают, например, в спектроскопии одномерно неоднородных сред [5, 6]. Одним из эффективных методов их изучения могло бы стать преобразование с помощью соответствующих подстановок [7]



обобщенных уравнений на отрезке в стандартные уравнения Штурма – Лиувилля на кривых в комплексной плоскости. Например, в случае  $f(x) = 1, q(x) = 0$  полезность такого перехода продемонстрирована в статье [8]. К сожалению, несмотря на большое число работ, посвященных исследованию решений обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной плоскости (см. книги [9–11] и библиографию в них), асимптотическое поведение решений уравнений Штурма – Лиувилля (1) вдоль кривых при больших значениях модуля спектрального параметра хорошо изучено только при достаточно жестких ограничениях на форму кривой и (или) на потенциал [8, 11, 12]. Вероятно, именно поэтому среди обратных задач на комплексной плоскости детально исследована только задача о безмонодромных уравнениях Штурма – Лиувилля с мероморфным потенциалом на кусочно-гладкой кривой, являющейся границей некоторой выпуклой ограниченной области [13, 14]. В данной работе впервые рассмотрена обратная спектральная задача для уравнения (1) с потенциалом  $Q$ , кусочно-целым на спрямляемой кривой  $\gamma \subset \mathbf{C}$  произвольной формы.

**Определение 1.** Функцию  $Q$  будем называть *кусочно-целой* на кривой  $\gamma \subset \mathbf{C}$ , соединяющей точки  $z_0, z_f$  и допускающей параметрическое задание непрерывной функцией  $z = z(t)$  ( $t \in [t_0, t_f], z(t_0) = z_0, z(t_f) = z_f$ ), если  $Q$  ограничена на этой кривой и совпадает на ней с конечным числом целых функций, т. е. существуют такие целое число  $N \geq 0$  и набор чисел  $T = \{t_j\}_0^{N+1} : t_0 < t_1 < \dots < t_{N+1} \equiv t_f$ , что

$$Q(z(t)) = Q_i(z), \quad \text{если } t \in (t_i, t_{i+1}) \quad (i = \overline{0, N}), \quad (2)$$

где все  $Q_i$  — целые функции и при  $N \geq 1$  для всех  $n \in \{1, \dots, N\}$  функции  $Q_n$  и  $Q_{n-1}$  различны.

**Замечание 1.** Кусочно-целая на кривой функция может быть многозначной: принимать разные значения при прохождении кривой дважды через одну точку.

В силу (2) функция  $Q$  и все её производные вдоль кривой  $\gamma$  имеют конечные односторонние пределы в точках

$$z_j := z(t_j) \quad (j = \overline{0, N+1}).$$

Если  $N \geq 1$ , то для всех  $n \in \{1, \dots, N\}$  односторонние пределы функции  $Q$  или хотя бы одной её производной конечного порядка вдоль  $\gamma$  различны при подходе к  $z_n$  «слева» и «справа», так как по определению 1 функции  $Q_n$  и  $Q_{n-1}$  разные. Будем называть такие точки *точками обобщенного скачка* функции  $Q$  на кривой  $\gamma$ . Точки обобщенного скачка, а также начальную и конечную точки кривой будем называть её *критическими точками*.

**Определение 2.** Назовём  $W := \{N, \{z_j\}_0^{N+1}, \{Q_i\}_0^N\}$  набором *ключевых данных* кривой  $\gamma$  и заданной на ней с помощью (2) кусочно-целой функции  $Q$ .

**Определение 3.** Пусть  $u_1(\gamma, z), u_2(\gamma, z)$  — непрерывно дифференцируемые решения (1) вдоль кривой  $\gamma$ , проходящей через точку  $z_b$ , удовлетворяющие условиям:

$$u_1(\gamma, z_b) = 1, \quad u_1'(\gamma, z_b) = 0, \quad u_2(\gamma, z_b) = 0, \quad u_2'(\gamma, z_b) = 1. \quad (3)$$

Назовём *передаточной матрицей* уравнения (1) между точками  $z_b$  и  $z$  кривой  $\gamma$  матрицу

$$\hat{P}(\gamma, z, z_b) = \begin{pmatrix} u_1(\gamma, z) & u_2(\gamma, z) \\ u_1'(\gamma, z) & u_2'(\gamma, z) \end{pmatrix}.$$



**Лемма 1.** Если функция  $Q$  является кусочно-целой на спрямляемой кривой  $\gamma$ , соединяющей точки  $z_0$  и  $z_f$ , то передаточная матрица  $\hat{P}(\gamma, z_f, z_0)$  уравнения (1) существует и однозначно определяется заданием  $\rho = \lambda^2$  и набором ключевых данных  $W$ . Матрица  $\hat{P}(\gamma, z_f, z_0)$  является целой функцией параметра  $\rho$ ; её определитель равен 1, и для всех  $z_c, z \in \gamma$  справедливы следующие соотношения:

$$\hat{P}(\gamma, z, z_0) = \hat{P}(\gamma, z, z_c) \hat{P}(\gamma, z_c, z_0), \quad (4)$$

$$\hat{P}(\gamma, z_0, z) = \hat{P}^{-1}(\gamma, z, z_0) = \begin{pmatrix} u_2'(\gamma, z) & -u_2(\gamma, z) \\ -u_1'(\gamma, z) & u_1(\gamma, z) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

**Доказательство.** Рассмотрим вспомогательные уравнения Штурма – Лиувилля:

$$\frac{d^2 u^{(i)}}{dz^2} + (Q_i - \lambda^2) u^{(i)} = 0, \quad z \in \mathbf{C}, \quad i = \overline{0, N}. \quad (6)$$

В силу (2) и определения 3 решения  $u_1(\gamma, z), u_2(\gamma, z)$  могут быть построены «сшиванием» непрерывно дифференцируемых решений уравнений (6) вдоль соседних участков кривой  $\gamma$ . Поэтому лемма 1 следует из известных свойств решений линейных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами [10, 11].

□

**Следствие 1.** Для расчета передаточной матрицы вместо исходной кривой  $\gamma$  при решении (1) можно использовать любую спрямляемую кривую  $\tilde{\gamma}$  (например, ломаную), последовательно соединяющую критические точки кривой  $\gamma$ , если для каждого  $i \in \{0, \dots, N\}$  на участке  $\tilde{\gamma}$ , соединяющем точки  $z_i$  и  $z_{i+1}$ , полагать  $Q(z) = Q_i(z)$ .

**Определение 4.** Петлёй кривой  $\gamma$  с узлом в точке  $z^{(d)}$  назовём участок кривой  $\gamma$ , начинающийся и кончающийся в точке её самопересечения  $z^{(d)}$ . Все точки петли, кроме её узла, будем называть *внутренними*.

**Определение 5.** Пусть на кривой  $\gamma$  задана кусочно-целая функция  $Q$ . Петля кривой  $\gamma$  называется «невидимой петлей» уровня один или просто «невидимой петлей», если её узел совпадает с двумя последовательными критическими точками. Петля кривой  $\gamma$  называется «невидимой петлей» уровня  $M \geq 2$ , если её узел совпадает с двумя критическими точками и функция  $Q$  совпадает с одной целой функцией на всей петле, кроме конечного числа участков, как минимум один из которых является «невидимой петлёй» уровня  $M - 1$ , а остальные — «невидимыми петлями» меньшего уровня.

**Лемма 2.** Добавление к кривой или удаление из неё «невидимой петли» любого конечного уровня не меняет начальную и конечную точку кривой, а также передаточную матрицу вдоль неё.

**Доказательство.** В случае «невидимой петли» уровня один лемма следует из определения 5, формулы (4) и того, что передаточная матрица уравнения (1) с целым потенциалом вдоль любой петли равна единичной матрице [10, 11]. Применяя метод индукции по уровню «невидимой петли» и пользуясь определением 5, получим, что лемма справедлива для «невидимой петли» любого конечного уровня. □

**Определение 6.** Кривую с заданной на ней кусочно-целой функцией будем называть *простой*, если на кривой отсутствуют «невидимые петли» любого уровня.



**Определение 7.** Набор ключевых данных  $W$  будем называть *простым*, если для него выполнены следующие условия:

$$\Delta z_i := z_{i+1} - z_i \neq 0 \quad (i = \overline{0, N}). \quad (7)$$

Упорядоченное множество точек  $\{z_j\}_0^{N+1}$ , входящих в простой набор ключевых данных, будем называть *множеством базовых точек* соответствующего потенциала  $Q$ .

**Лемма 3.** Кривая  $\gamma$  с заданной на ней кусочно-целой функцией  $Q$  является *простой*, если и только если ей соответствует простой набор ключевых данных.

**Доказательство.** Лемма непосредственно следует из определений 5, 6 и 7, так как в силу определения 5 на кривой могут быть «невидимые петли» уровня  $M \geq 2$ , только если на ней есть «невидимые петли» предыдущего уровня, а выполнение всех условий (7) равносильно отсутствию «невидимых петель» первого уровня.  $\square$

В силу следствия 1 и леммы 2 при заданной точке  $z_0$  передаточная матрица  $\hat{P}$  уравнения (1) может соответствовать бесконечно большому числу кривых с кусочно-целыми потенциалами, отличающихся в том числе количеством, расположением и формой «невидимых петель» и, значит, наборами ключевых данных. После удаления «невидимых петель» всех уровней исходная кривая либо переходит в простую кривую, либо вырождается в точку. В последнем случае очевидно, что  $\hat{P} \equiv \hat{I}$ , где  $\hat{I}$  — единичная матрица.

**Теорема 1.** Если хотя бы один элемент передаточной матрицы  $\hat{P}$  уравнения (1) с кусочно-целым потенциалом на некоторой (не заданной) спрямляемой кривой  $\gamma$  ограничен на всей комплексной плоскости параметра  $\rho$ , то  $\gamma$  после удаления «невидимых петель» всех уровней вырождается в точку, и  $\hat{P} \equiv \hat{I}$ .

Доказательство теоремы 1 приведено в парагр. 3. Из теоремы 1 следует следующая теорема единственности, доказательство которой приведено в парагр. 4.

**Теорема 2.** Пусть  $z_0^{(1)} = z_0^{(2)} = z_0$ . Тогда простым спрямляемым кривым  $\gamma^{(1)}$  и  $\gamma^{(2)}$  с разными простыми наборами ключевых данных  $W^{(1)} = \left\{ N^{(1)}, \left\{ z_j^{(1)} \right\}_0^{N^{(1)+1}}, \left\{ Q_i^{(1)} \right\}_0^{N^{(1)}} \right\}$  и  $W^{(2)} = \left\{ N^{(2)}, \left\{ z_j^{(2)} \right\}_0^{N^{(2)+1}}, \left\{ Q_i^{(2)} \right\}_0^{N^{(2)}} \right\}$  соответствуют передаточные матрицы  $\hat{P}^{(1)}$  и  $\hat{P}^{(2)}$ , у которых соответствующие строки и столбцы различны хотя бы при одном значении параметра  $\rho$ .

**Следствие 2.** Пусть функция  $Q$  — кусочно-целая на спрямляемой кривой  $\gamma$ , у которой задана только начальная точка  $z_0$ . Тогда задание при всех  $\rho \in \mathbf{C}$  столбца или строки отличной от единичной передаточной матрицы уравнения (1) между точкой  $z_0$  и конечной точкой кривой  $\gamma$  однозначно определяет набор ключевых данных кривой, получающейся из  $\gamma$  удалением всех «невидимых петель».

**Замечание 2.** В силу леммы 1 все элементы передаточной матрицы являются целыми функциями  $\rho$ . Поэтому в следствии 2 и всех последующих утверждениях достаточно требовать их задания (совпадения) на множестве точек комплексной плоскости параметра  $\rho$ , имеющем хотя бы одну конечную предельную точку.



**Следствие 3.** Если два уравнения (1) имеют вдоль данной спрямляемой кривой  $\gamma$  при всех  $\rho \in \mathbf{C}$  передаточные матрицы с одинаковым столбцом (строкой), то их потенциалы совпадают всюду на  $\gamma$ , за исключением, возможно, тех её однозначно определённых петель, среди внутренних точек которых нет базовых точек потенциала.

**Доказательство.** В силу определения 5 и лемм 1, 2 замена потенциала  $Q$  на петле, среди внутренних точек которой нет его базовых точек, на любую целую функцию превращает эту петлю в «невидимую», не меняя передаточную матрицу. Поэтому на таких петлях потенциалы в двух рассматриваемых уравнениях могут различаться (а могут и совпадать). Если после удаления всех таких петель кривая  $\gamma$  вырождается в точку, то следствие доказано. Если же она превращается в некоторую кривую  $\gamma_{\min}$ , то последняя будет заведомо простой, так как по построению не может иметь «невидимых петель» первого уровня и, значит, любого другого. Поэтому по следствию 2 потенциал  $Q$  однозначно определен на  $\gamma_{\min}$ .  $\square$

Теорема 2 может быть полезной при изучении обратных задач для различных типов уравнений Штурма – Лиувилля, приводимых к уравнению (1) с кусочно-целым потенциалом. В качестве примера рассмотрим обратную спектральную задачу для уравнения

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{r(x)} \frac{dy}{dx} \right) + (q(x) - r(x)\lambda^2) y(x) = 0 \quad (8)$$

с кусочно-целым потенциалом  $q(x)$  и кусочно-постоянной отличной от нуля функцией  $r(x)$  на отрезке  $[x_0, x_f]$  действительной оси. Все коэффициенты в уравнении (8) комплекснозначные. Причем нас будут интересовать такие непрерывные решения (8), для которых функция  $y'(x)/r(x)$  также непрерывна. В качестве спектральных данных обратной задачи для уравнения (8) используем его обобщенную передаточную матрицу между концами отрезка  $[x_0, x_f]$ :

$$\hat{P}_r(x_f, x_0) = \begin{pmatrix} y_1(x_f) & y_2(x_f) \\ y_1'(x_f)/r(x_f) & y_2'(x_f)/r(x_f) \end{pmatrix},$$

где  $y_1(x), y_2(x)$  — решения (8) на отрезке  $[x_0, x_f]$  в указанном выше смысле, удовлетворяющие следующим условиям:

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0)/r(x_0) = 0, \quad y_2(x_0) = 0, \quad y_2'(x_0)/r(x_0) = 1.$$

Нетрудно убедиться, что если уравнение (8) имеет на отрезке  $[x_0, x_f]$  обобщенную передаточную матрицу  $\hat{P}_r$ , то замена  $u(z) := y(x)$ ,

$$z(x) := z_0 + \int_{x_0}^x r(v)dv, \quad (9)$$

приводит его к уравнению (1) с кусочно-целым потенциалом, однозначно определенным на задаваемой (9) ломаной  $L$ , причём передаточная матрица этого уравнения (1) вдоль  $L$  равна  $\hat{P}_r$ . Пользуясь этим, из теоремы 2 можно получить два следствия.

**Следствие 4.** Если два уравнения (8) с заданной кусочно-постоянной комплекснозначной функцией  $r(x)$  имеют на отрезке  $[x_0, x_f]$  обобщенные передаточные матрицы с одинаковым столбцом или одинаковой строкой, то их кусочно-целые потенциалы совпадают всюду, за исключением, возможно, однозначно



определенных строкой или столбцом передаточной матрицы «невидимых участков» отрезка  $[x_0, x_f]$ , переходящих при отображении (9) в «невидимые петли» ломаной  $L$ .

**Следствие 5.** Пусть на некотором отрезке действительной оси хотя бы одно уравнение типа (8) имеет отличную от единичной обобщенную передаточную матрицу с заданным столбцом или заданной строкой. Тогда этим столбцом или строкой однозначно определена такая величина  $L^{(0)} > 0$ , что среди бесконечного множества уравнений типа (8), имеющих на отрезке  $[0, 1]$  комплексно-значный коэффициент  $r(x)$  с постоянным модулем и передаточную матрицу с заданным столбцом или заданной строкой, 1) существует единственное уравнение, у которого  $|r(x)| \equiv L^{(0)}$ ; 2) не существует уравнения, у которого  $|r(x)| \equiv L^{(r)} < L^{(0)}$ ; 3) существует бесконечно много уравнений, у которых  $|r(x)| \equiv L^{(r)} > L^{(0)}$ .

Заметим, что следствие 4 существенно ослабляет полученные в статье [4] достаточные условия однозначности нахождения потенциала  $q(x)$  уравнения (8) по известному столбцу или известной строке обобщенной передаточной матрицы и известной функции  $r(x)$ . В соответствии с результатами статьи [4] для этого достаточно, чтобы все значения функции  $r(x)$  лежали в открытой половине комплексной плоскости с границей, проходящей через ноль. По следствию 4 для этого достаточно, чтобы задаваемая (9) ломаная  $L$  не имела самопересечений. Правда, в [4] рассматривался более общий тип обобщенного уравнения Штурма – Лиувилля с тремя независимыми кусочно-аналитическими комплекснозначными коэффициентами, любые два из которых считались известными.

## 2. АСИМПТОТИКА ПЕРЕДАТОЧНОЙ МАТРИЦЫ

**Лемма 4.** Для любой ограниченной области  $G \subset \mathbf{C}$ , любых  $K \in \mathbf{N}$  и  $i \in \{0, \dots, N\}$  и любого набора чисел  $\{\mu_{i,k}\}_1^K$  существуют числа  $\lambda_{i,K} > 0, C'_{i,K} > 0$  и два непрерывно дифференцируемых решения  $F_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda)$  соответствующего уравнения (6), которые для всех  $\lambda \neq 0$  и  $z \in G$  могут быть представлены в виде

$$F_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda) = C_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda) \exp\{\pm \lambda(z - z_i)\}, \quad \frac{dF_{\pm K}^{(i)}}{dz} = \pm \lambda E_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda) \exp\{\pm \lambda(z - z_i)\}, \quad (10)$$

$$C_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda) := 1 + \sum_{k=1}^K (\pm 1)^k \frac{C_{i,k}(z)}{\lambda^k} + (\pm 1)^{K+1} \frac{B_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda)}{\lambda^{K+1}}, \quad (11)$$

$$E_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda) := 1 + \sum_{k=1}^K (\pm 1)^k \frac{C_{i,k}(z) + C'_{i,k-1}(z)}{\lambda^k} + (\pm 1)^{K+1} \frac{H_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda)}{\lambda^{K+1}}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} C'_{i,k}(z) &:= -(C''_{i,k-1}(z) + Q_i(z)C_{i,k-1}(z))/2, \\ C_{i,0}(z) &:= 1, \quad C_{i,k}(z_i) = \mu_{i,k} \quad (k = \overline{1, K}). \end{aligned} \quad (13)$$

Причем если  $|\lambda| \geq \lambda_{i,K}$ , то  $F_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda)$  – линейно независимые решения (6) в  $\mathbf{C}$  и для всех  $z \in L_i$  ( $L_i$  – отрезок, соединяющий точки  $z_i$  и  $z_{i+1}$ ):

$$|B_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda)| \leq C'_{i,K}, \quad |H_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda)| \leq C'_{i,K}, \quad (14)$$

$$|C_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda) - 1| \leq 1/4, \quad |E_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda) - 1| \leq 1/4. \quad (15)$$



**Доказательство.** Формулы (10)–(13) проверяются подстановкой в (6), а оценки (14), (15) на отрезке  $L_i$  следуют из известных результатов по асимптотическому разложению при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  решений обобщенных уравнений Штурма – Лиувилля на отрезке действительной оси [10].  $\square$

Символами  $O(1)$  и  $\hat{O}(1)$  будем обозначать соответственно функции и матрицы функций параметра  $\lambda$ , конкретный вид которых для нас не важен, ограниченные при  $|\lambda| > \lambda_{cr}$ , где  $\lambda_{cr}$  – конечная величина (разная для разных функций и матриц).

**Лемма 5.** Пусть функция  $Q$  является кусочно-целой на спрямляемой кривой  $\gamma$ , соединяющей точки  $z_0$  и  $z_f$ . Тогда существует такое целое число  $K_0 \geq 2$ , что для любого целого  $K \geq K_0$  существует такое конечное  $\lambda_K > 0$ , что при  $|\lambda| \geq \lambda_K$  матрица  $\hat{P}(\gamma, z_f, z_0)$  может быть записана в виде

$$\hat{P}(\gamma, z_f, z_0) = \hat{C}^{(f)} \hat{T}^{(N)} \hat{T}^{(N-1)} \dots \hat{T}^{(2)} \hat{T}^{(1)} \hat{T}^{(0)} \hat{A}^{(0)}. \quad (16)$$

В (16)  $\hat{T}^{(0)} = \hat{I}$  (единичная матрица),

$$\hat{A}^{(0)} = -\frac{1}{D_K^{(0)}} \begin{pmatrix} \lambda E_{-K}^{(0)}(z_0, \lambda) & C_{-K}^{(0)}(z_0, \lambda) \\ \lambda E_{+K}^{(0)}(z_0, \lambda) & -C_{+K}^{(0)}(z_0, \lambda) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\hat{C}^{(f)} = \begin{pmatrix} C_{+K}^{(N)}(z_{N+1}, \lambda) \exp(\lambda \Delta z_N) & C_{-K}^{(N)}(z_{N+1}, \lambda) \exp(-\lambda \Delta z_N) \\ \lambda E_{+K}^{(N)}(z_{N+1}, \lambda) \exp(\lambda \Delta z_N) & -\lambda E_{-K}^{(N)}(z_{N+1}, \lambda) \exp(-\lambda \Delta z_N) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$\hat{T}^{(n)} = \hat{T}_0^{(n)} \begin{pmatrix} \exp(\lambda \Delta z_{n-1}) & 0 \\ 0 & \exp(-\lambda \Delta z_{n-1}) \end{pmatrix} \quad (n = \overline{1, N} \text{ при } N \geq 1), \quad (19)$$

где  $\Delta z_i$  ( $i = \overline{0, N}$ ) определены в (7). В (17) и (19) соответственно

$$D_K^{(0)} = -\lambda(C_{+K}^{(0)}(z_0, \lambda)E_{-K}^{(0)}(z_0, \lambda) + C_{-K}^{(0)}(z_0, \lambda)E_{+K}^{(0)}(z_0, \lambda)) \neq 0,$$

$$\hat{T}_0^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 + C_{-K}^{(n-1)}(z_n, \lambda)W_{+K}^{(n)}(\lambda) & C_{-K}^{(n-1)}(z_n, \lambda)W_{-K}^{(n)}(\lambda) \\ -C_{+K}^{(n-1)}(z_n, \lambda)W_{+K}^{(n)}(\lambda) & 1 - C_{+K}^{(n-1)}(z_n, \lambda)W_{-K}^{(n)}(\lambda) \end{pmatrix} + \frac{\hat{O}(1)}{\lambda^{K+1}},$$

причём при  $|\lambda| \geq \lambda_K$  функции  $W_{\pm K}^{(n)}(\lambda)$  можно представить в виде

$$W_{\pm K}^{(n)}(\lambda) = \pm \left( \mp \frac{1}{2\lambda} \right)^{m_n+2} \delta_n \left( 1 + \frac{O(1)}{\lambda} \right) \neq 0 \quad (n = \overline{1, N} \text{ при } N \geq 1), \quad (20)$$

где целые числа  $m_n$  ( $m_n \in [0, K_0 - 2]$ ) и комплексные числа  $\delta_n \neq 0$  не зависят от  $\lambda$ .

**Доказательство.** По лемме 4 для всех  $K \in \mathbf{N}$  существуют такие числа  $\lambda_{i,K} > 0$  ( $i = \overline{0, N}$ ), что при  $|\lambda| \geq \lambda_{i,K}$  решения  $u_1(\gamma, z), u_2(\gamma, z)$  уравнения (1) на участке кривой  $\gamma$ , соединяющем точки  $z_i$  и  $z_{i+1}$ , можно представить как линейную комбинацию решений  $F_{\pm K}^{(i)}(z, \lambda)$  с

$$\begin{aligned} \{C_{0,k}(z_0)\}_1^K &= 0 \quad (\text{при } i = 0), \\ C_{i,k}(z_i) &= C_{i-1,k}(z_i) \quad (\text{при } N \geq 1, i = \overline{1, N}, k = \overline{1, K}). \end{aligned} \quad (21)$$

Поэтому при  $|\lambda| \geq \lambda_K := \max\{\lambda_{i,K}, i = \overline{0, N}\}$ , пользуясь граничными условиями (3) и непрерывной дифференцируемостью  $u_1(\gamma, z), u_2(\gamma, z)$  в точках обобщенного



скачка потенциала, получим, что для  $\hat{P}(\gamma, z_f, z_0)$  справедливо представление (16), в котором матрицы  $\hat{A}^{(0)}$ ,  $\hat{C}^{(f)}$  и  $\hat{T}^{(n)}$  ( $n = \overline{1, N}$  при  $N \geq 1$ ) удовлетворяют соотношениям (17)–(19). При этом  $C_{\pm K}^{(n)}$  и  $E_{\pm K}^{(n)}$  ( $n = \overline{0, N}$ ) в силу (15) не равны нулю в точках  $z_n$  и  $z_{n+1}$ , а

$$W_{\pm K}^{(n)}(\lambda) = \frac{1}{D_K^{(n)}} \sum_{k=1}^{K-1} (\pm 1)^k \frac{C'_{n,k}(z_n) - C'_{n-1,k}(z_n)}{\lambda^k} \quad (n = \overline{1, N} \text{ при } N \geq 1), \quad (22)$$

где  $D_K^{(n)} = -\lambda(C_{+K}^{(n)}(z_n, \lambda)E_{-K}^{(n)}(z_n, \lambda) + C_{-K}^{(n)}(z_n, \lambda)E_{+K}^{(n)}(z_n, \lambda))$ . Из (11)–(14) имеем:

$$D_K^{(i)} = -2\lambda \left( 1 + \frac{O(1)}{\lambda} \right) \neq 0 \quad (i = \overline{0, N}). \quad (23)$$

Остаётся доказать справедливость (20). При  $N \geq 1$  для всех  $n \in \{1, \dots, N\}$  по определению 1 функции  $Q_{n-1}$  и  $Q_n$  различны. Значит, существуют целое число  $m_n \geq 0$  и комплексное число  $\delta_n \neq 0$  такие, что при  $z = z_n$

$$\frac{d^m Q_n}{dz^m} - \frac{d^m Q_{n-1}}{dz^m} = \delta_n \neq 0 \quad \text{при } m = m_n; \quad (24)$$

$$\frac{d^m Q_n}{dz^m} - \frac{d^m Q_{n-1}}{dz^m} = 0 \quad \text{при } m = \overline{0, m_n - 1}, \text{ если } m_n \geq 1. \quad (25)$$

Кроме того, для всех  $n \in \{1, \dots, N\}$  в силу (13), (21), (24) и (25)

$$\left( \frac{d^m (C_{n,1}(z) - C_{n-1,1}(z))}{dz^m} \right)_{z=z_n} = \begin{cases} 0, & 0 \leq m \leq m_n, \\ -\delta_n/2, & m = m_n + 1. \end{cases} \quad (26)$$

При  $m_n = 0$  (20) непосредственно следует из (22), (23) и (26). Пользуясь (13), (21), (25), (26) и методом индукции по  $k$ , получим, что для  $m_n \geq 1$  и  $k = \overline{1, m_n + 1}$

$$\left( \frac{d^m (C_{n,k}(z) - C_{n-1,k}(z))}{dz^m} \right)_{z=z_n} = \begin{cases} 0, & 0 \leq m \leq m_n + 1 - k, \\ (-\frac{1}{2})^k \delta_n, & m = m_n + 2 - k. \end{cases}$$

Полагая в последнем равенстве  $m = 1$  и учитывая (22), (23), получим (20) при  $m_n \geq 1$  и  $K \geq m_n + 2$ . Полагая  $K_0 := 2 + \max\{m_n, n = \overline{1, N}\}$ , получаем, что (20) выполнено для любого целого  $K \geq K_0$  и  $|\lambda| \geq \lambda_K$ .  $\square$

Будем обозначать  $(N + 1)$ -мерные вектора буквой со стрелкой сверху, а их скалярное произведение — круглыми скобками. Например,  $\vec{z} := (\Delta z_0, \Delta z_1, \dots, \Delta z_N)$ ;  $\vec{\alpha}_s := (\alpha_0^{(s)}, \alpha_1^{(s)}, \dots, \alpha_N^{(s)})$ , где  $\alpha_i^{(s)} \in \{\pm 1\}$  ( $i = \overline{0, N}$ ), а  $s = 1 + \sum_{i=0}^N (1 + \alpha_i^{(s)})2^{i-1}$ , т.е.  $s \in \{1, \dots, 2^{N+1}\}$  (как в двоичной системе счисления);  $(\vec{z}, \vec{\alpha}_s) = \sum_{i=0}^N \alpha_i^{(s)} \Delta z_i$ .

**Следствие 6.** В условиях леммы 5 при  $K \geq K_0$  и  $|\lambda| \geq \lambda_K$  элементы матрицы  $\hat{P}(\gamma, z_f, z_0)$  могут быть записаны в виде

$$p_{\alpha\beta} = \sum_{s=1}^{2^{N+1}} d_{\alpha\beta}^{(s)}(\lambda) \exp\{\lambda h_s\} \quad (\alpha, \beta \in \{1, 2\}), \quad (27)$$

где  $h_s = (\vec{z}, \vec{\alpha}_s)$  не зависят от  $\lambda$  и все функции  $d_{\alpha\beta}^{(s)}(\lambda)$  можно представить в виде

$$d_{\alpha\beta}^{(s)}(\lambda) = \left( \frac{1}{\lambda} \right)^{m_{\alpha\beta}^{(s)}} \delta_{\alpha\beta}^{(s)} \left( 1 + \frac{O(1)}{\lambda} \right) \neq 0 \quad (\alpha, \beta \in \{1, 2\}, s = \overline{1, 2^{N+1}}),$$

где целые числа  $m_{\alpha\beta}^{(s)} \geq 0$  и комплексные числа  $\delta_{\alpha\beta}^{(s)} \neq 0$  не зависят от  $\lambda$ .



Часть показателей экспонент в (27) может совпадать, и возникает вопрос: не сокращаются ли в (27) коэффициенты при экспонентах, наиболее быстро растущих с ростом  $|\lambda|$ ? Для простых кривых отрицательный ответ даёт следующая лемма.

**Лемма 6.** Пусть  $h_{\max} := \max\{|h_s|, s = \overline{1, 2^{N+1}}\}$ , где  $h_s := (\vec{z}, \vec{\alpha}_s)$ . Тогда существуют хотя бы два различных  $s_0 \in \{1, \dots, 2^{N+1}\}$  таких, что  $|h_{s_0}| = h_{\max}$ , причём если  $\vec{z} \neq \vec{0}$ , то  $h_{\max} > 0$ . Кроме того, при выполнении (7)  $h_{s_0} \neq h_s$  для любого  $h_{s_0}$  такого, что  $|h_{s_0}| = h_{\max}$  и для всех  $s \in \{1, \dots, 2^{N+1}\} \setminus \{s_0\}$ .

**Доказательство.** Существование хотя бы одного  $s_0 \in \{1, \dots, 2^{N+1}\} : |h_{s_0}| = h_{\max}$  следует из конечности множества  $\{h_s, s = \overline{1, 2^{N+1}}\}$ . Так как множество  $\{\vec{\alpha}_s, s = \overline{1, 2^{N+1}}\}$  можно разбить на пары векторов, сумма которых равна нулю, то число таких  $s_0$ , что  $|h_{s_0}| = h_{\max}$ , всегда чётное. Допустим, что  $h_{\max} = 0$ . Тогда все  $h_s = 0$ , и компоненты вектора  $\vec{z}$  удовлетворяют, в частности, системе линейных однородных уравнений вида: в уравнении под номером  $n$  ( $n = \overline{1, N}$ ) коэффициент при  $\Delta z_n$  равен минус 1, а остальные коэффициенты равны 1. В последнем  $N + 1$  уравнении все коэффициенты равны 1. Такая система имеет только тривиальное решение, поэтому  $h_{\max} = 0$ , только если  $\vec{z} = \vec{0}$ .

Докажем вторую часть леммы. Пусть существует  $s_1 \in \{1, \dots, 2^{N+1}\} \setminus \{s_0\} : (\vec{z}, (\vec{\alpha}_{s_1} - \vec{\alpha}_{s_0})) = 0$ . В силу (7)  $\Delta z_i \neq 0$  для всех  $i = \overline{0, N}$ , поэтому  $\vec{\alpha}_{s_0}$  и  $\vec{\alpha}_{s_1}$  имеют минимум две не совпадающие (противоположные по знаку) компоненты с номерами  $0 \leq i_1 < \dots < i_J \leq N$ . Положим  $\vec{e}_0 := (\vec{\alpha}_{s_1} + \vec{\alpha}_{s_0})/2$ . Тогда  $h_{\max} = |(\vec{z}, \vec{e}_0)| > 0$  (в силу (7) и первой части леммы) и у  $\vec{e}_0$  не равны нулю (равны  $\pm 1$ ) только компоненты с номерами, отличными от  $i_1, i_2, \dots, i_J$ . Значит,  $2 \leq J \leq N$ , что возможно, только если  $N \geq 2$ .

Рассмотрим все вектора вида  $\vec{\beta}_p = (\beta_0, \dots, \beta_N)$ , где  $\beta_i \in \{\pm 1\}$  при  $i \in \{i_1, \dots, i_J\}$ , а остальные компоненты равны нулю ( $p = \overline{1, 2^J}$ ). Пусть для всех  $p \in \{1, \dots, 2^J\}$   $|(\vec{z}, \vec{\beta}_p)| = 0$ . Тогда  $\Delta z_{i_1}, \Delta z_{i_2}, \dots, \Delta z_{i_J}$  удовлетворяют, в частности,  $J$  линейным однородным уравнениям следующего вида: в уравнении под номером  $j$  ( $j = \overline{1, J-1}$ ) коэффициент при  $\Delta z_{i_j}$  равен минус 1, а остальные коэффициенты равны 1. В последнем уравнении все коэффициенты равны 1. Очевидно, такая система имеет только тривиальное решение, что противоречит (7). Значит, среди векторов  $\vec{\beta}_p$  ( $p = \overline{1, 2^J}$ ) есть хотя бы один  $\vec{\beta}_{p_0} : |(\vec{z}, \vec{\beta}_{p_0})| > 0$ . Рассмотрим два вектора:  $\vec{\eta}_{\pm} = \vec{e}_0 \pm \vec{\beta}_{p_0}$ . По построению они оба входят в множество  $\{\vec{\alpha}_s, s = \overline{1, 2^{N+1}}\}$ . Причём  $(\vec{z}, \vec{\eta}_{\pm}) = (\vec{z}, \vec{e}_0) \pm (\vec{z}, \vec{\beta}_{p_0})$  и  $|(\vec{z}, \vec{\beta}_{p_0})| > 0$ . Поэтому  $\max\{|(\vec{z}, \vec{\eta}_+)|, |(\vec{z}, \vec{\eta}_-)|\} > |(\vec{z}, \vec{e}_0)| = h_{\max}$  (при геометрическом представлении комплексных чисел использованное неравенство эквивалентно тому, что медиана всегда меньше большей из двух сторон треугольника, между которыми она лежит). Полученное противоречие доказывает вторую часть леммы 6.  $\square$

**Лемма 7.** Пусть у передаточных матриц  $\hat{P}$  и  $\tilde{P}$  на всей комплексной плоскости параметра  $\rho$  совпадают первые или вторые строки. Тогда хотя бы один из элементов матрицы  $\hat{P}^{(0)} := \tilde{P}(\hat{P})^{-1}$  равен нулю на всей комплексной плоскости  $\rho$ .

**Доказательство.** Перемножая матрицы, получим:

$$\hat{P}^{(0)} = \begin{pmatrix} p_{22}\tilde{p}_{11} - p_{21}\tilde{p}_{12} & p_{11}\tilde{p}_{12} - p_{12}\tilde{p}_{11} \\ p_{22}\tilde{p}_{21} - p_{21}\tilde{p}_{22} & p_{11}\tilde{p}_{22} - p_{12}\tilde{p}_{21} \end{pmatrix}.$$

Откуда следует, что если у матриц  $\hat{P}$  и  $\tilde{P}$  совпадают элементы первой строки, то  $p_{12}^{(0)} = 0$ , а если второй, то  $p_{21}^{(0)} = 0$ .  $\square$



### 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Пусть в условиях теоремы 1 после исключения всех «невидимых петель» кривая  $\gamma$  превращается в простую кривую  $\gamma_{\min}$ . Тогда  $\hat{P}$  можно рассчитать вдоль  $\gamma_{\min}$ . Из леммы 6 следует, что в этом случае все показатели экспонент в правых частях равенств (27) с максимальными (при данном  $\lambda \neq 0$ ) модулями различны и не равны нулю, и существует минимум два противоположно направленных луча, исходящих из нуля комплексной плоскости параметра  $\lambda$  (и, значит, минимум один луч, исходящий из нуля комплексной плоскости параметра  $\rho$ ), такие, что среди  $2^{N+1}$  слагаемых в (27) для каждого элемента  $\hat{P}$  существует ровно одно слагаемое, имеющее наибольший экспоненциальный рост при  $\lambda \rightarrow \infty$  ( $\rho \rightarrow \infty$ ) вдоль каждого из этих лучей, и значит, каждый из элементов матрицы  $\hat{P}$  при этом неограниченно возрастает. Последнее противоречит условию теоремы 1. Значит, после исключения всех «невидимых петель» кривая  $\gamma$  вырождается в точку, и, следовательно,  $\hat{P} \equiv \hat{I}$ .

### 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Докажем теорему 2 методом от противного, рассмотрев два случая.

*Случай 1.* Пусть у передаточных матриц  $\hat{P}^{(1)}$  и  $\hat{P}^{(2)}$  при всех  $\rho \in \mathbf{C}$  совпадает одна из строк. Из (4), (5) следует, что передаточная матрица уравнения (1) вдоль кривой  $\gamma$ , получающейся при последовательном обходе сначала кривой  $\gamma^{(1)}$  (с заданным на ней кусочно-целым потенциалом) от точки  $z_{N^{(1)}+1}^{(1)}$  к точке  $z_0$ , а затем кривой  $\gamma^{(2)}$  от точки  $z_0$  к точке  $z_{N^{(2)}+1}^{(2)}$ , будет равна  $\hat{P} = \hat{P}^{(2)} (\hat{P}^{(1)})^{-1}$ . Тогда в силу леммы 7 и теоремы 1 кривая  $\gamma$  после удаления «невидимых петель» всех уровней вырождается в точку. По условию  $z_0^{(1)} = z_0^{(2)} = z_0$  и простые наборы ключевых данных  $W^{(1)}$  и  $W^{(2)}$  различны. Это означает, что существует целое число  $i_0 \geq 1$  такое, что для всех  $i = \overline{0, i_0 - 1}$   $z_i^{(2)} = z_i^{(1)} = z_i$  и при  $i_0 \geq 2$  для всех  $i = \overline{0, i_0 - 2}$   $Q_i^{(2)} = Q_i^{(1)}$ , но при этом  $z_{i_0}^{(2)} \neq z_{i_0}^{(1)}$  или (и)  $Q_{i_0-1}^{(2)} \neq Q_{i_0-1}^{(1)}$ . Пусть для определённости  $N^{(1)} \leq N^{(2)}$ .

Допустим, что  $i_0 = N^{(1)} + 1$ . Тогда после удаления всех невидимых петель у кривой  $\gamma$  останется только участок простой кривой  $\gamma^{(2)}$ , соединяющий точки  $z_{N^{(1)}+1}^{(2)}$  и  $z_{N^{(2)}+1}^{(2)}$ . Поскольку  $\gamma$  должна вырождаться в точку, то  $N^{(1)} = N^{(2)}$ , т.е. наборы ключевых данных  $W^{(1)}$  и  $W^{(2)}$  совпадают, что противоречит условию теоремы.

Пусть  $i_0 < N^{(1)} + 1$ , а функции  $Q_{i_0-1}^{(1)}$  и  $Q_{i_0-1}^{(2)}$  различны. Тогда после удаления у кривой  $\gamma$  «невидимых петель», образованных участками кривых  $\gamma^{(1)}$  и  $\gamma^{(2)}$  от точки  $z_0$  до точки  $z_{i_0-1}$ , оставшаяся кривая  $\gamma_{\min}$  сначала будет совпадать с участком кривой  $\gamma^{(1)}$  от точки  $z_{N^{(1)}+1}^{(1)}$  до точки  $z_{i_0-1}$ , а затем с участком кривой  $\gamma^{(2)}$  от точки  $z_{i_0-1}$  до точки  $z_{N^{(2)}+1}^{(2)}$ . Причём точка  $z_{i_0-1}$  будет точкой обобщенного скачка потенциала  $Q$  на кривой  $\gamma_{\min}$  и, значит (так как по условию наборы ключевых данных  $W^{(1)}$  и  $W^{(2)}$  простые), кривой  $\gamma_{\min}$  будет соответствовать простой набор ключевых данных, что противоречит тому, что она должна вырождаться в точку. Следовательно,

$$Q_{i_0-1}^{(1)} = Q_{i_0-1}^{(2)}. \tag{28}$$

Допустим, что  $i_0 < N^{(1)} + 1$ , выполнено (28), но  $z_{i_0}^{(2)} \neq z_{i_0}^{(1)}$ . Тогда опять же кривой  $\gamma$  будет соответствовать простой набор ключевых данных. Следовательно,

$$z_{i_0}^{(1)} = z_{i_0}^{(2)}. \tag{29}$$



Формулы (28), (29) противоречат определению числа  $i_0$ , что доказывает теорему в случае 1.

*Случай 2.* Обозначим  $z_f^{(\alpha)} := z_{N^{(\alpha)}+1}^{(\alpha)}$  ( $\alpha \in \{1, 2\}$ ). Пусть у передаточных матриц  $\hat{P}^{(1)}$  и  $\hat{P}^{(2)}$  при всех  $\rho \in \mathbf{C}$  совпадают элементы одного из столбцов. Тогда в силу (5) у передаточных матрицы  $\hat{P}_{inv}^{(1)}(\gamma^{(1)}, z_0, z_f^{(1)})$  и  $\hat{P}_{inv}^{(2)}(\gamma^{(2)}, z_0, z_f^{(2)})$  совпадают элементы одной из строк. Пусть  $\tau := z_f^{(1)} - z_f^{(2)}$ . Сделав в уравнении (1) с потенциалом  $Q^{(2)}(z)$  замену переменной:  $x = z + \tau$ , после обратного переобозначения  $x$  на  $z$  получим, что матрица  $\hat{P}_{inv}^{(2)}$  является передаточной для уравнения (1) с потенциалом  $Q^{(2)}(z - \tau)$  между точками  $z_f^{(1)}$  и  $z_0 + \tau$  простой кривой, получающейся из  $\gamma^{(2)}$  параллельным переносом. Пользуясь теоремой 2, доказанной выше для случая 1, получаем:

$$\begin{aligned} N^{(2)} = N^{(1)} = N, \quad Q_i^{(2)}(z - \tau) = Q_i^{(1)}(z), \\ z_i^{(2)} + \tau = z_i^{(1)} \quad (i = \overline{0, N}), \quad z_{N+1}^{(2)} + \tau = z_{N+1}^{(1)}. \end{aligned} \quad (30)$$

По условию теоремы  $z_0^{(2)} = z_0^{(1)}$ , поэтому из (30) при  $i = 0$  следует, что  $\tau = 0$ . Но при  $\tau = 0$  (30) противоречит тому, что  $W^{(1)} \neq W^{(2)}$ . Это противоречие доказывает теорему.

*Благодарности.* Автор благодарен В. А. Юрко и М. Ю. Игнатьеву за полезные обсуждения полученных результатов.

### Библиографический список

1. Марченко В. А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 331 с.
2. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма – Лиувилля. М. : Наука, 1984. 240 с.
3. Yurko V. A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht : VSP, 2002. 316 p.
4. Голубков А. А., Макаров В. А. Обратная спектральная задача для обобщенного уравнения Штурма – Лиувилля с комплекснозначными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 10. С. 1498–1502.
5. Голубков А. А., Макаров В. А. Восстановление координатной зависимости тензора диэлектрической проницаемости диагонального вида одномерно-неоднородной среды // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2010. № 3. С. 32–36.
6. Ангелуц А. А., Голубков А. А., Макаров В. А., Шкуринов А. П. Восстановление спектра диэлектрической проницаемости однородной среды в терагерцовом диапазоне частот по измерениям угловых зависимостей коэффициентов пропускания плоскопараллельной пластины // Письма в ЖЭТФ. 2011. Т. 93, № 4. С. 209–212.
7. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма – Лиувилля и Дирака. М. : Наука, 1988. 432 с.
8. Ишкин Х. К. О необходимых условиях локализации спектра задачи Штурма–Лиувилля на кривой // Матем. заметки. 2005. Т. 78, № 1. С. 72–84. DOI : 10.4213/mzm2563
9. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1983. 352 с.
10. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Изд-во иностр. лит., 1958. 475 с.
11. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1968. 465 с.
12. Ишкин Х. К. Критерий локализации спектра оператора Штурма – Лиувилля на кривой // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, № 1. С. 52–88.



13. Ишкин Х. К. О критерии однозначности решений уравнения Штурма – Лиувилля // Матем. заметки. 2008. Т. 84, № 4. С. 552–566. DOI : 10.4213/mzm4173
14. Ишкин Х. К. О критерии безмонодромности уравнения Штурма – Лиувилля // Матем. заметки. 2013. Т. 94, № 4. С. 552–568. DOI : 10.4213/mzm10319

---

**Образец для цитирования:**

Голубков А. А. Обратная задача для операторов Штурма – Лиувилля в комплексной плоскости // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 2. С. 144–156. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-144-156

---

## Inverse Problem for Sturm – Liouville Operators in the Complex Plane

A. A. Golubkov

Andrey A. Golubkov, <https://orcid.org/0000-0002-5265-1310>, The Advanced Educational Scientific Center (faculty) — Kolmogorov's boarding school of Moscow State University, 11, Kremenchugskaya Str., Moscow, 121357, Russia, [andrej2501@yandex.ru](mailto:andrej2501@yandex.ru)

The inverse problem for the standard Sturm – Liouville equation with a spectral parameter  $\rho$  and a potential function, piecewise-entire on a rectifiable curve  $\gamma \subset \mathbf{C}$ , on which only the starting point is given, is studied for the first time. A function  $Q$  that is bounded on a curve  $\gamma$  is piecewise-entire on it if  $\gamma$  can be splitted by a finite number of points into parts on which  $Q$  coincides with entire functions, different in neighboring parts. The split points, the initial and final points of the curve are called critical points. The problem is to find all the critical points of the curve  $\gamma$  and the potential on it by the column or row of the transfer matrix  $\hat{P}$  along  $\gamma$ . On the basis of the obtained asymptotics of matrix  $\hat{P}$  for  $|\rho| \rightarrow \infty$ , it is proved that if at least one of its elements is bounded for  $\forall \rho \in \mathbf{C}$ , then the curve  $\gamma$  degenerates to a point after removing all „invisible loops”. An „invisible loop” is a loop of the curve  $\gamma$  (with a given piecewise-entire function) whose knot coincides with two successive critical points. The uniqueness of the solution of the inverse problem for curves without „invisible loops” is proved. On the example of the inverse problem for the equation  $\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{r(x)} \frac{dy}{dx} \right) + (q(x) - r(x)\lambda^2) y(x) = 0$  with a piecewise-entire function  $q(x)$  and a piecewise constant function  $r(x) \neq 0$  on the segment of the real axis, the usefulness of the results obtained in the article is shown for the study of inverse problems for generalized Sturm – Liouville equations, which can be reduced to the type studied in the article.

**Key words:** Sturm – Liouville equation on a curve, piecewise-entire potential function, transfer matrix, asymptotics, inverse spectral problem.

*Acknowledgements:* The author is grateful to Vyacheslav A. Yurko and Mikhail Yu. Ignatiev for useful discussions of the results obtained.

### References

1. Marchenko V. A. *Sturm – Liouville operators and their applications*. Birkhäuser, 1986. 393 p. (Russ.ed. : Kiev, Naukova Dumka, 1977. 331 p.)
2. Levitan B. M. *Inverse Sturm – Liouville problems*. Utrecht, VNU Sci. Press, 1987. 246 p. (Russ.ed. : Moscow, Nauka, 1984. 240 p.)
3. Yurko V. A. *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht, VSP, 2002. 316 p.
4. Golubkov A. A., Makarov V. A. Inverse spectral problem for a generalized Sturm – Liouville equation with complex-valued coefficients. *Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 10, pp. 1514–1519. DOI : 10.1134/S0012266111100156



5. Golubkov A. A., Makarov V. A. Reconstruction of the coordinate dependence of the diagonal form of the dielectric permittivity tensor of a one-dimensionally inhomogeneous medium. *Moscow University Physics Bulletin*, 2010, vol. 65, no. 3, pp. 189–194. DOI : 10.3103/S0027134910030070
6. Angeluts A. A., Golubkov A. A., Makarov V. A., Shkurinov A. P. Reconstruction of the spectrum of the relative permittivity of the plane-parallel plate from the angular dependences of its transmission coefficients. *JETP Letters*, 2011, vol. 93, no. 4, pp. 191–194. DOI : 10.1134/S0021364011040047
7. Levitan B. M., Sargsyan I. S. *Sturm – Liouville and Dirac Operators*. Mathematics and Its Applications (Soviet Series), vol. 59. Dordrecht, Springer, 1990. 350 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1988. 432 p.). DOI 10.1007/978-94-011-3748-5
8. Ishkin Kh. K. Necessary Conditions for the Localization of the Spectrum of the Sturm – Liouville Problem on a Curve. *Math. Notes*, 2005, vol. 78, no. 1, pp. 64–75. DOI: 10.1007/s11006-005-0100-5.
9. Fedoryuk M. V. *Asymptotic analysis: linear ordinary differential equations*. Berlin, Springer–Verlag, 1993. 363 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1983. 352 p.)
10. Coddington E. A., Levinson N. *Theory of ordinary differential equations*. New York, McGraw-Hill, 1955. 429 p. (Russ. ed.: Moscow, Izd-vo inostr. lit., 1958. 475 p.)
11. Wasow W. *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*. New York, Dover Publications, 1988. 384 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1968. 465 p.)
12. Ishkin Kh. K. Localization criterion for the spectrum of the Sturm – Liouville operator on a curve. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2017, vol. 28, no. 1, pp. 37–63. DOI: 10.1090/spmj/1438
13. Ishkin Kh. K. On the uniqueness criterion for solutions of the Sturm – Liouville equation. *Math. Notes*, 2008, vol. 84, no. 4, pp. 515–528. DOI : 10.1134/S000143460809023X
14. Ishkin Kh. K. On a trivial monodromy criterion for the Sturm – Liouville equation. *Math. Notes*, 2013, vol. 94, no. 4, pp. 508–523. DOI : 10.1134/S0001434613090216

---

**Cite this article as:**

Golubkov A. A. Inverse Problem for Sturm – Liouville Operators in the Complex Plane. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 2, pp. 144–156 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-144-156

---



УДК 519.633

## СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕНУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ

В. П. Курдюмов, А. П. Хромов, В. А. Халова

Курдюмов Виталий Павлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, Kurdyumov47@yandex.ru

Хромов Август Петрович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, KhromovAP@info.sgu.ru

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, KhalovaVA@gmail.com

Исследуется смешанная задача для волнового уравнения с непрерывным комплексным потенциалом в случае ненулевой начальной скорости  $u_t(x, 0) = \psi(x)$  и двух типов двухточечных граничных условий: концы закреплены и когда каждое из граничных условий содержит производную по  $x$ . Резольвентным подходом с использованием рекомендаций А. Н. Крылова по ускорению сходимости рядов Фурье получается методом Фурье классическое решение в случае  $\psi(x) \in W_2^1[0, 1]$  (уравнение удовлетворяется почти всюду). Показывается также, что в случае, когда  $\psi(x) \in L[0, 1]$ , ряд формального решения для задачи с закрепленными концами сходится равномерно в любой ограниченной области, а для второй задачи он сходится лишь всюду, и для обеих задач является обобщенным решением в равномерной метрике.

*Ключевые слова:* волновое уравнение, формальное решение, спектральная задача, резольвента.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-157-171

### ВВЕДЕНИЕ

Для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in (-\infty, \infty) \quad (1)$$

исследуется смешанная задача с начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad u'_t(x, 0) = \psi(x) \quad (2)$$

и граничными условиями двух следующих видов:

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (3)$$

$$u'_x(0, t) + \alpha_1 u(0, t) + \beta_1 u(1, t) = u'_x(1, t) + \alpha_2 u(0, t) + \beta_2 u(1, t) = 0, \quad (4)$$

где  $q(x) \in C[0, 1]$  и комплекснозначна,  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 1, 2$ ) — комплекснозначные числа.



В работе используется резольвентный подход, впервые предложенный одним из авторов [1] с использованием приема А. Н. Крылова [2] ускорения сходимости рядов Фурье. Этот подход позволил в [1, 3] получить классическое решение (т.е. дважды непрерывно дифференцируемое) сформулированных задач для начальных условий  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $u'_t(x, 0) = 0$  при минимальных требованиях гладкости на  $\varphi(x)$ , а в [4, 5] — для начальных условий (2) при минимальных требованиях на  $\psi(x)$ . В [6] исследовалось поведение формального решения рассматриваемых задач при ослаблении требований на  $\varphi(x)$  в условиях  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $u'_t(x, 0) = 0$ . В настоящей работе, как и в [6], мы понижаем требования гладкости на  $\psi(x)$ . Для случая, когда  $\psi(x) \in W_2^1[0, 1]$  ( $W_2^1[0, 1] = \{f(x) \mid f(x) \text{ абсолютно непрерывна на } [0, 1] \text{ и } f'(x) \in L_2[0, 1]\}$ ), мы построим классическое решение этих задач (в этом случае уравнение (1) выполняется почти всюду (п. в.)). В случае, когда  $\psi(x) \in L[0, 1]$ , покажем, что для задачи с закрепленными концами ряд формального решения сходится равномерно в любой ограниченной области, а для второй задачи он сходится лишь всюду, и для обеих задач является обобщенным решением в равномерной метрике. Мы рассматриваем также случай, когда  $\psi(x) \in L_2[0, 1]$ . При этом свойства обобщенного решения улучшаются: для обеих задач формальный ряд сходится равномерно, удовлетворяет начальным и граничным условиям, являясь обобщенным решением в равномерной метрике. Отметим, что информация обзорного характера о исследованиях методом Фурье задач математической физики содержится, в частности, в книгах В. А. Стеклова [7], И. Г. Петровского [8], В. И. Смирнова [9], О. А. Ладыженской [10] и В. А. Ильина [11] (см. также [12]).

### 1. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(3) ДЛЯ $\psi(x) \in W_2^1[0, 1]$

Предполагаем, что в задаче (1)–(3)  $\psi(x) \in W_2^1[0, 1]$  и  $\psi(0) = \psi(1) = 0$ . Метод Фурье связан со спектральной задачей для оператора  $L$ :

$$Ly = -y'' + q(x)y, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Собственные значения оператора  $L$ , достаточно большие по модулю, простые, с асимптотикой [13, с. 74, 75]

$$\lambda_n = \rho_n^2 \quad (\operatorname{Re} \rho_n \geq 0), \quad \rho_n = n\pi + o(1).$$

Обозначим  $\tilde{\gamma}_n = \{\rho \mid |\rho - n\pi| = \delta\}$ , где  $\delta > 0$  и достаточно мало, а  $n \geq n_0$  и  $n_0$  таково, что при всех  $n \geq n_0$  внутрь  $\tilde{\gamma}_n$  попадает лишь по одному  $\rho_n$ . Пусть  $\gamma_n$  — образ  $\tilde{\gamma}_n$  в  $\lambda$ -плоскости ( $\lambda = \rho^2$ ,  $\operatorname{Re} \rho \geq 0$ ). Обозначим через  $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$  резольвенту оператора  $L$  ( $\lambda$  — спектральный параметр,  $E$  — единичный оператор).

Формальное решение задачи (1)–(3) по методу Фурье представим в виде [14, 15]

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\tilde{\gamma}_n} \right) (R_\lambda \psi)(x) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda, \quad (5)$$

где  $r > 0$  фиксировано, на контуре  $|\lambda| = r$  нет собственных значений, все  $\gamma_n$  при  $n \geq n_0$  находятся вне  $|\lambda| = r$ . Представление (5) не ново. Главное сейчас для нас, что радиус  $\tilde{\gamma}_n$  один и тот же для всех  $n \geq n_0$ . Приступаем к преобразованию (5), используя идею А. Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье.

Обозначим через  $z_1(x, \rho)$ ,  $z_2(x, \rho)$  решения уравнения

$$y''(x) - q(x)y(x) + \rho^2 y(x) = 0$$



с начальными условиями

$$z_1(0, \rho) = z_2'(0, \rho) = 1, \quad z_1'(0, \rho) = z_2(0, \rho) = 0.$$

**Теорема 1.** *Имеет место формула [6, теорема 2]*

$$R_\lambda f = z_2(x, \rho)(f, z_1) - v(x, \rho)(f, z_2) - (M_\rho f)(x), \tag{6}$$

где  $v(x, \rho) = \frac{z_2(x, \rho)z_1(1, \rho)}{z_2(1, \rho)}$ ,  $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$ ,  $(M_\rho f)(x) = \int_0^x M(x, t, \rho)f(t) dt$ ,

$$M(x, t, \rho) = \begin{vmatrix} z_1(t, \rho) & z_2(t, \rho) \\ z_1(x, \rho) & z_2(x, \rho) \end{vmatrix}.$$

**Лемма 1.** *Имеет место формула*

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) v(x, \rho)(\psi, z_2) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda. \tag{7}$$

Доказательство очевидно, поскольку первое и последнее слагаемые в [6] являются целыми по  $\lambda$ .

Нужное нам преобразование дается следующей теоремой.

**Теорема 2.** *Для формального решения имеет место формула*

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t), \tag{8}$$

где

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) v^0(x, \rho)(\psi, z_2) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda, \tag{9}$$

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) [v(x, \rho) - v^0(x, \rho)](\psi, z_2) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda, \tag{10}$$

$v^0(x, \rho) = \frac{z_2^0(x, \rho)z_1^0(1, \rho)}{z_2^0(1, \rho)}$  — то же, что и  $v(x, \rho)$ , но взятое теперь для оператора

$L_0 : L_0 y = -y''(x)$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ . Таким образом,  $z_1^0(x, \rho) = \cos \rho x$ ,  $z_2^0(x, \rho) = \frac{\sin \rho x}{\rho}$ .

Доказательство очевидно.

Исследование  $u(x, t)$  по формуле (8) опирается на следующую теорему.

**Теорема 3.** *Для  $z_2(x, \rho)$  имеет место формула*

$$z_2(x, \rho) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x K(x, \tau) \frac{\sin \rho \tau}{\rho} d\tau, \tag{11}$$

где  $K(x, \tau)$  непрерывно дифференцируема по  $x$  и  $\tau$ , причем  $K(x, 0) \equiv 0$ .

Формула (11) хорошо известна как формула оператора преобразования [16, с. 17, 23].



**Лемма 2.** *Имеют место формулы*

$$(\psi, z_2) = (\psi_1, z_2^0), \tag{12}$$

$$(\psi, z_2) = \frac{1}{\rho^2} [(\psi_1'(\xi) \cos \mu\xi, \cos n\pi\xi) - (\psi_1'(\xi) \sin \mu\xi, \sin n\pi\xi)], \tag{13}$$

где  $\rho = n\pi + \mu$ ,  $\psi_1(\xi) = \psi(\xi) + \int_{\xi}^1 K(\tau, \xi)\psi(\tau)$ .

**Доказательство.** На основании формулы (11) получаем:

$$(\psi, z_2) - (\psi, z_2^0) = \left( \psi(\xi), \int_0^{\xi} K(\xi, \tau) \frac{\sin \rho\tau}{\rho} d\tau \right).$$

Отсюда сразу следует (12). Для получения (13) следует провести интегрирование по частям в  $(\psi_1, z_2^0)$  и учесть, что  $\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0$ .

**Лемма 3.** *Имеет место формула*

$$u_0(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} (\psi_1(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x \sin n\pi t. \tag{14}$$

**Доказательство.** Из формулы (9), учитывая (12), получаем:

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \frac{\sin \rho x \cos \rho \sin \rho t}{\rho^2 \sin \rho} (\psi_1(\xi), \sin \rho\xi) d\lambda.$$

Отсюда по теореме вычетов [17, с. 85] следует (14).

**Лемма 4.** *Ряд  $u_0(x, t)$  сходится абсолютно и равномерно, и для его суммы имеет место формула*

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{\psi}(\tau) d\tau,$$

где  $\tilde{\psi}(x) = -\tilde{\psi}(-x)$ ,  $\tilde{\psi}(x+2) = \tilde{\psi}(x)$ ,  $\tilde{\psi}(x) = \psi_1(x)$  при  $x \in [0, 1]$ .

**Доказательство.** Так как  $2 \sin n\pi x \sin n\pi t = \cos n\pi(x-t) - \cos n\pi(x+t) = n\pi \int_{x-t}^{x+t} \sin n\pi\tau d\tau$ , то из леммы 3 следует, что

$$u_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_1(\xi), \sin n\pi\xi) \int_{x-t}^{x+t} \sin n\pi\tau d\tau. \tag{15}$$

Обозначим

$$\tilde{\psi}(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_1(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x. \tag{16}$$



Так как  $\psi_1(\xi) \in W_2^1[0, 1]$ ,  $\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0$ , то скалярные произведения в (16) имеют оценку  $\alpha_n/n$ , где  $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$ . Поэтому ряд в (16) сходится абсолютно и равномерно на всей оси, и, следовательно, в силу (15)  $u_0(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{\psi}(\tau) d\tau$ . Так как ортонормированная система  $\sqrt{2} \sin n\pi x$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) полна в  $L_2[0, 1]$ , то ряд (16) сходится к  $\psi_1(x)$  при  $x \in [0, 1]$ . Свойства нечетности и периодичности  $\tilde{\psi}(x)$  следуют из (16).  $\square$

**Лемма 5.** Производные  $\frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial t^2}$  и  $\frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2}$  существуют п. в. в  $Q_T = [0, 1] \times [-T, T]$  при любом  $T > 0$  и для таких  $x, t$  они совпадают.

**Доказательство** проводится как и в [6, лемма 6], если ввести множество  $M = \{x \mid x \in [-A, A], \tilde{\psi}'(x) \text{ конечна}\}$  и учесть, что  $\tilde{\psi}(x) \in W_2^1[-A, A]$  при любом  $A > 0$ .  $\square$

Из лемм 4 и 5 получается

**Теорема 4.** Функция  $u_0(x, t)$  есть классическое решение эталонной задачи, т. е.  $u_0(x, t)$  удовлетворяют условиям (1)–(3) с функцией  $\psi_1(x)$  вместо  $\psi(x)$ , когда уравнение (1) с  $q(x) = 0$  удовлетворяется п. в.

Для исследования ряда  $u_1(x, t)$  обозначим

$$a_n(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} [v(x, \rho) - v^0(x, \rho)](\psi, z_2) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda.$$

Тогда  $u_1(x, t) = \sum_n u_{1n}(x, t)$ , где  $u_{1n}(x, t) = a_n(x, t)$  и суммирование ведется по  $n = 0, n_0, n_0 + 1, \dots$  и  $\gamma_0$  есть  $|\lambda| = r$ .

Нам потребуются два следующих факта [1, леммы 4, 5].

**Лемма 6.** При  $\rho \in \tilde{\gamma}_n$  имеют место асимптотические формулы

$$v_{x^j}^{(j)}(x, \rho) = v_{x^j}^{0(j)}(x, \rho) + O(\rho^{j-1}), \quad j = 0, 1, 2,$$

и оценки  $O(\cdot)$  равномерны по  $x \in [0, 1]$ .

**Лемма 7.** Обозначим через  $\theta(x)$  любую из функций  $\cos x$  или  $\sin x$ . Пусть  $f(x) \in L_2[0, 1]$  и  $f(x, \mu) = f(x)\theta(\mu x)$ , где  $\mu \in \tilde{\gamma}_0$  и  $\beta_n(\mu) = (f(x, \mu), \theta(n\pi x))$ . Тогда справедлива оценка

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n} |\beta_n(\mu)| \leq C \left( \sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2},$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $n_1, n_2$  и  $\mu \in \tilde{\gamma}_0$ .

**Лемма 8.** Ряд  $u_1(x, t)$  и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием до второго порядка по  $x$  и  $t$ , сходятся абсолютно и равномерно в  $Q_T$  при любом  $T > 0$ .

Доказательство легко получается с помощью лемм 6, 7 и формулы (13).



**Теорема 5.** Функция  $u(x, t)$  есть решение уравнения

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (u(x, t) - u_0(x, t)) = -q(x)u(x, t) \quad (17)$$

при условиях (2), (3).

**Доказательство.** Обозначим  $M = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , тогда имеем

$$M(u(x, t) - u_0(x, t)) = Mu_1(x, t). \quad (18)$$

Далее по лемме 8

$$Mu_1(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) M([v(x, \rho) - v^0(x, \rho)] \sin \rho t) \frac{(\psi, z_2)}{\rho} d\lambda.$$

Так как  $M(v(x, \rho) \sin \rho t) = -q(x)v(x, \rho) \sin \rho t$  и  $M(v^0(x, \rho) \sin \rho t) = 0$ , то по лемме 1  $Mu_1(x, t) = -q(x)u(x, t)$ . Отсюда и из (18) следует (17). Далее по лемме 1 и оценок  $v^{(j)}(x, \rho) = O(\rho^j)$  ( $j = 0, 1$ ), формулы (13) и леммы 7 получаем, что ряд (7) и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием один раз по  $x$  и  $t$ , сходятся абсолютно и равномерно. Поэтому  $u(x, t)$  удовлетворяет граничным условиям и условию  $u(x, 0) = 0$ . Выполнение условия  $u'_t(x, 0) = \psi(x)$  следует из равномерной сходимости ряда

$$u'_t(x, 0) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \psi) d\lambda$$

и полноты системы собственных и присоединенных функций оператора  $L^*$ . □

Из полученных фактов следует

**Теорема 6.** Если  $\psi(x) \in W_2^1[0, 1]$ ,  $\psi(0) = \psi(1) = 0$ , то сумма ряда  $u(x, t)$  формального решения задачи (1)–(3) является классическим решением этой задачи, когда уравнение (1) выполняется п. в.

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(3) ДЛЯ $\psi(x) \in L_2[0, 1]$

Пусть теперь  $\psi(x) \in L_2[0, 1]$ . И в этом случае сохраняется представление (8) формального решения.

**Лемма 9.** Ряд  $u_1(x, t)$  и ряд, получающийся из него почленным дифференцированием по  $t$ , сходятся абсолютно и равномерно в  $Q_T$  при любом  $T > 0$ .

**Доказательство** такое же, как и леммы 8, но вместо формулы (13) используется (12). □

Исследуем ряд  $u_0(x, t)$ .

**Лемма 10.** Ряд  $u_0(x, t)$  сходится абсолютно и равномерно и для его суммы имеет место формула

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2} [\Phi(x - t) - \Phi(x + t)], \quad (19)$$



где  $\Phi(x) = \Phi(-x)$ ,  $\Phi(x+2) = \Phi(x)$ ,  $\Phi(x) = \int_x^1 \psi_1(\tau) d\tau$  на  $[0, 1]$ . Кроме того, существует  $u'_{0t}(x, 0)$  для п. в.  $x \in [0, 1]$  и

$$u'_{0t}(x, 0) = \psi_1(x). \tag{20}$$

**Доказательство.** Обозначим через  $\tilde{\psi}_1(x) = \int_x^1 \psi_1(\tau) d\tau$  и

$$\Phi(x) = (\tilde{\psi}_1(\xi), 1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} (\psi_1(\xi), \sin n\pi\xi) \cos n\pi x.$$

Из формулы (14) получаем:

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2} [\Phi(x-t) - \Phi(x+t)]. \tag{21}$$

Так как ряд  $\Phi(x)$  сходится абсолютно и равномерно, то  $\Phi(x) = \Phi(-x)$ ,  $\Phi(x+2) = \Phi(x)$ . Далее, так как  $\frac{\sin n\pi\xi}{n\pi} = \int_0^\xi \cos n\pi\tau d\tau$ , то  $(\psi_1(\xi), \frac{\sin n\pi\xi}{n\pi}) = (\tilde{\psi}_1(\xi), \cos n\pi\xi)$ .

Поэтому

$$\Phi(x) = (\tilde{\psi}_1(\xi), 1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{\psi}_1(\xi), \cos n\pi\xi) \cos n\pi x. \tag{22}$$

Из полноты в  $L_0[0, 1]$  системы  $1, \sqrt{2} \cos n\pi x$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) следует, что при  $x \in [0, 1]$

$$\Phi(x) = \tilde{\psi}_1(x). \tag{23}$$

Для доказательства формулы (20) возьмем  $x$  из множества  $\{x | x \in (0, 1), \Phi'(x) \text{ конечна}\}$ . Поскольку существуют конечные производные  $\Phi'_t(x \pm t)|_{t=0}$ , причем  $\Phi'_t(x \pm t)|_{t=0} = \mp \psi_1(x)$ , то из (19) следует (20).  $\square$

Из леммы 10 следует

**Лемма 11.** Функция  $u_0(x, t)$  из (19) удовлетворяет условиям (3) и  $u_0(x, 0) = 0$ ;  $u_0(x, t)$  абсолютно непрерывна по  $t$ , п. в. на  $[0, 1]$  существует  $u'_{0t}(x, 0)$  и  $u'_t(x, 0) = \psi_1(x)$ .

**Лемма 12.** Сумма ряда  $u(x, t)$  удовлетворяет условиям (3) и  $u(x, 0) = 0$ ;  $u(x, t)$  абсолютно непрерывна по  $t$  п. в. на  $[0, 1]$ , существует  $u'_t(x, 0)$  и  $u'_t(x, 0) = \psi(x)$ .

**Доказательство.** Выполнение условий (3) и  $u(x, 0) = 0$  является очевидным. Из формулы (8) на основании лемм 9 и 11 следует, что  $u(x, t)$  абсолютно непрерывна по  $t$  п. в. на  $[0, 1]$ , существует  $u'_t(x, 0)$  и

$$u'_t(x, 0) = \psi_1(x) + u'_{1t}(x, 0). \tag{24}$$

Из формулы (10), учитывая (12) и теорему 1, получаем:

$$u'_{1t}(x, 0) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \psi) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda^0 \psi_1) d\lambda.$$

Используя теперь теорему равносходимости для операторов  $L$  и  $L_0$  и теорему Карлесона [18], как в доказательстве леммы 15 из [6], получим, что п. в. на  $[0, 1]$   $u'_{1t}(x, 0) = \psi(x) - \psi_1(x)$ . Отсюда и из (24) следует, что п. в. на  $[0, 1]$   $u'_t(x, 0) = \psi(x)$ .  $\square$



### 3. ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(3)

Сейчас мы покажем, что сумма ряда  $u(x, t)$  формального решения задачи (1)–(3) является обобщенным решением этой задачи для любой  $\psi(x) \in L_2[0, 1]$ .

**Лемма 13.** Для  $u(x, t)$  имеет место оценка

$$\max_{Q_T} |u(x, t)| \leq C_T \|\psi\|_2,$$

где постоянная  $C_T$  зависит только от  $T$  и  $\|\cdot\|_2$  — норма в  $L_2[0, 1]$ .

**Доказательство.** Из формулы (23) при  $x \in [0, 1]$  получаем оценку  $|\Phi(x)| \leq \|\psi_1\|_2 \leq C\|\psi\|_2$ . Тогда в силу четности и 2-периодичности  $\Phi(x)$  из (19) следует, что  $\max_{Q_T} |u_0(x, t)| \leq C\|\psi\|_2$ . А из формулы (10) по лемме 6 и теореме 3 получаем  $\max_{Q_T} |u_1(x, t)| \leq C_T \|\psi\|_2$  и, следовательно, утверждение леммы справедливо.

Пусть  $\psi_h(x)$  имеет тот же смысл, что и  $\psi(x)$  в теореме 6 и  $u_h(x, t)$  — решение задачи (1)–(3) для такой  $\psi_h(x)$ . Тогда из леммы 13 следует

**Теорема 7.** Если  $\psi(x) \in L_2[0, 1]$  и  $\|\psi_h - \psi\|_2 \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , то  $u_h(x, t)$  сходится к  $u(x, t)$  равномерно в  $Q_T$  при любом  $T > 0$ , т.е.  $u(x, t)$  есть обобщенное решение задачи (1)–(3).

Пусть теперь  $\psi(x) \in L[0, 1]$ . Покажем, что формальное решение задачи (1)–(3), которое также берем в виде (8), и в этом случае является обобщенным решением этой задачи.

Так же, как в лемме 13 получается

**Лемма 14.** Ряд  $u_1(x, t)$  сходится абсолютно и равномерно в  $Q_T$  и справедлива оценка

$$\max_{Q_T} |u_1(x, t)| \leq C_T \|\psi\|_1,$$

где постоянная  $C_T$  зависит только от  $T$  и  $\|\cdot\|_1$  — норма в  $L[0, 1]$ .

**Лемма 15.** Ряд  $u_0(x, t)$  сходится равномерно в  $Q_T$  и для его суммы справедлива формула (19).

**Доказательство.** Как и в доказательстве леммы 10, для  $u_0(x, t)$  справедлива формула (21), где  $\Phi(x)$  есть (22), т.е.

$$\Phi(x) = (\tilde{\psi}_1(\xi), 1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{\psi}_1(\xi), \cos n\pi\xi) \cos n\pi x. \quad (25)$$

Ряд (25) есть тригонометрический ряд абсолютно непрерывной функции  $\tilde{\psi}_1(x)$ , четным образом продолженной на отрезок  $[-1, 0]$ , а затем на всю ось с периодом, равным двум. Поэтому он сходится равномерно по всей оси, и, следовательно, утверждение леммы справедливо.

Из леммы 15 следует

**Лемма 16.** Имеет место оценка  $\max_{Q_T} |u_0(x, t)| \leq C\|\psi\|_1$ .

Пусть  $\psi_h(x)$  и  $u_h(x, t)$  — те же, что и в теореме 7, тогда из лемм 14–16 получается следующий результат.



**Теорема 8.** Если  $\psi(x) \in L[0, 1]$ , то сумма ряда  $u(x, t)$  формального решения задачи (1)–(3) удовлетворяет условиям (3) и  $u(x, 0) = 0$ . Кроме того, если  $\|\psi_h - \psi\|_1 \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , то  $u_h(x, t)$  сходится к  $u(x, t)$  равномерно в  $Q_T$  при любом  $T > 0$ , т.е.  $u(x, t)$  есть обобщенное решение задачи (1)–(3).

Таким образом, если  $\psi(x) \in L[0, 1]$ , то сумма ряда  $u(x, t)$  формального решения задачи (1)–(3) обладает более слабыми, по сравнению со свойствами обобщенного решения, когда  $\psi(x) \in L_2[0, 1]$ .

**4. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ (1), (2), (4) ДЛЯ  $\psi(x) \in W_2^1[0, 1]$**

Сначала считаем, что в задаче (1), (2), (4)  $\psi(x) \in W_2^1[0, 1]$ . Теперь оператор  $L$  такой:

$$Ly = -y'' + q(x)y, \quad u_1(y) = y'(0) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0, \quad u_2(y) = y'(1) + \alpha_2 y(0) + \beta_2 y(1) = 0. \quad (26)$$

Собственные значения оператора  $L$ , достаточно большие по модулю, простые и для них верна асимптотика из парагр. 1. Контуры  $|\lambda| = r$ ,  $\gamma_n$ ,  $\tilde{\gamma}_n$  — те же, что и в парагр. 1. Формальное решение (5) сохраняется, а оператор  $L_0$  тоже другой:

$$L_0 y = -y'', \quad y'(0) = y'(1) = 0. \quad (27)$$

Представляя  $\psi(x)$  [5, лемма 1] в виде  $\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$ , где  $\psi_1(x) \in W_2^1[0, 1]$ ,  $\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0$ ,  $\psi_2(x) \in C^2[0, 1]$ ,  $\psi_2(x) \in D_L$  ( $D_L$  — область определения оператора  $L$ ), формальное решение представим в виде (11) из [5], т.е. в виде  $u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t)$ , где

$$u_0(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda^0 \psi_1) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda, \quad (28)$$

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \psi_1 - R_\lambda^0 \psi_1) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda, \quad (29)$$

$$u_2(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \psi_2) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda = \\ = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_\lambda g) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda,$$

$R_\lambda^0$  — резольвента оператора  $L_0$ ,  $g = (L - \mu_0 E)\psi_2$ ,  $\mu_0$  находится вне контуров  $|\lambda| = r$  и  $\gamma_n$  при  $n \geq n_0$ .

**Теорема 9.** [5, теорема 3] Имеют место формулы

$$R_\lambda f = v_1(x, \rho)(f, z_1) + v_2(x, \rho)(f, z_2) - (M_\rho f)(x),$$



$$R_{\lambda}^0 f = v_1^0(x, \rho)(f, z_1^0) + v_2^0(x, \rho)(f, z_2^0) - (M_{\rho}^0 f)(x),$$

где  $M_{\rho}$  – прежний оператор,  $M_{\rho}^0$  определяется через  $z_j^0(x, \rho)$  вместо  $z_j(x, \rho)$  ( $j = 1, 2$ ),

$$v_j(x, \rho) = \frac{(-1)^j}{\Delta(\rho)} \{ [-\beta_1 z_{3-j}(1, \rho) U_2(z_2) + (z'_{3-j}(1, \rho) + \beta_2 z_{3-j}(1, \rho)) U_1(z_2)] z_1(x, \rho) +$$

$$+ [\beta_1 z_{3-j}(1, \rho) U_2(z_1) - (z'_{3-j}(1, \rho) + \beta_2 z_{3-j}(1, \rho)) U_1(z_1)] z_2(x, \rho) \} \quad (j = 1, 2),$$

$$\Delta(\rho) = U_1(z_1) U_2(z_2) - U_1(z_2) U_2(z_1), \quad v_1^0(x, \rho) = -\frac{\cos \rho \cos \rho x}{\rho \sin \rho}, \quad v_2^0(x, \rho) = -\cos \rho x.$$

Так же, как и леммы 3, 4, получаются две следующие леммы.

**Лемма 17.** *Имеет место формула*

$$u_0(x, t) = (\psi_1, 1)t + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} (\psi_1(\xi), \cos n\pi\xi) \cos n\pi x \sin n\pi t.$$

**Лемма 18.** *Ряд  $u_0(x, t)$  сходится абсолютно и равномерно, и для его суммы имеет место формула*

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{\psi}(\tau) d\tau,$$

где  $\tilde{\psi}(-x) = \tilde{\psi}(x)$ ,  $\tilde{\psi}(x+2) = \tilde{\psi}(x)$ ,  $\tilde{\psi}(x) = \psi_1(x)$  при  $x \in [0, 1]$ .

Лемма 5 и теорема 4 сохраняются, но теперь  $u_0(x, t)$  есть решение (1), (2) с функцией  $\psi_1(x)$  из (28) вместо  $\psi(x)$  при  $q(x) = 0$  с условиями  $u'_{0x}(0, t) = u'_{0x}(1, t) = 0$ . Сохраняется также и лемма 8, доказательство дословно такое же, как и в лемме 12 из [5].

**Лемма 19.** [5, лемма 14] *Ряд  $u_2(x, t)$  и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием до второго порядка по  $x$  и  $t$ , сходятся абсолютно и равномерно в  $Q_T$  при любом  $T > 0$ .*

**Теорема 10.** *Если  $\psi(x) \in W_2^1[0, 1]$ , то сумма ряда  $u(x, t)$  формального решения задачи (1), (2), (4) есть классическое решение этой задачи, когда уравнение (1) выполняется п.в.*

Доказательство проводится на основании теоремы 4 и лемм 8 и 19, как в [5, теорема 6].

## 5. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ (1), (2), (4) ДЛЯ $\psi(x) \in L_2[0, 1]$

Пусть в задаче (1), (2), (4)  $\psi(x) \in L_2[0, 1]$ . В этом случае формальное решение берем в виде

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t), \tag{30}$$

где  $u_0(x, t)$  и  $u_1(x, t)$  есть (28) и (29) с функцией  $\psi(x)$  вместо  $\psi_1(x)$ .

**Лемма 20.** *Ряд  $u_0(x, t)$  сходится абсолютно и равномерно, и для его суммы имеет место формула*

$$u_0(x, t) = (\psi, 1)t + \frac{1}{2} [\Phi(x+t) - \Phi(x-t)], \tag{31}$$



где  $\Phi(x) = -\Phi(-x)$ ,  $\Phi(x + 2) = \Phi(x)$ ,

$$\Phi(x) = \int_0^x [\psi(\tau) - (\psi, 1)] d\tau \quad \text{при } x \in [0, 1]. \quad (32)$$

**Доказательство.** Так как  $2 \cos n\pi x \sin n\pi t = \sin n\pi(x + t) - \sin n\pi(x - t)$ , то из леммы 17 получаем  $u_0(x, t) = (\psi, 1)t + \frac{1}{2}[\Phi(x + t) - \Phi(x - t)]$ , где  $\Phi(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} (\psi(\xi), \cos n\pi\xi) \sin n\pi x$ . Так как этот ряд сходится абсолютно и равномерно, то  $\Phi(x) = -\Phi(-x)$ ,  $\Phi(x + 2) = \Phi(x)$ . Обозначим через  $\Phi_n(x)$  частичную сумму ряда  $\Phi(x)$ , тогда при  $x \in [0, 1]$  имеем

$$\begin{aligned} \left| \Phi_n(x) - \int_0^x [\psi(\tau) - (\psi, 1)] d\tau \right| &= \left| \int_0^x [\Phi'_n(\tau) - (\psi(\tau) - (\psi, 1))] d\tau \right| \leq \\ &\leq \|\Phi'_n(\tau) - (\psi(\tau) - (\psi, 1))\|_2. \end{aligned}$$

Последовательность  $\{\Phi'_n(\tau)\}$ ,  $\Phi'_n(\tau) = 2 \sum_{k=1}^n (\psi(\xi), \cos k\pi\xi) \cos k\pi\tau$ , сходится в  $L_2[0, 1]$  к  $\psi(\tau) - (\psi, 1)$ . Поэтому, переходя к пределу в последнем неравенстве, получим (32).

**Лемма 21.** *Имеют место формулы*

$$u'_{0t}(x, 0) = \psi(x) \quad \text{п.в. на } [0, 1], \quad (33)$$

$$u'_{0x}(0, t) = 0, \quad u'_{0x}(1, t) = 0 \quad \text{п.в. на } (-\infty, \infty). \quad (34)$$

**Доказательство.** Докажем формулу (33). Пусть  $x \in \{x | x \in [0, 1], \Phi'(x) \text{ конечна}\}$ . Сразу получаем  $\Phi'_t(x \pm t)|_{t=0} = \pm\Phi'(x)$ . Поэтому из (31) и (32) следует (33). Для доказательства формул (34), используя нечетность  $\Phi(x)$ , запишем (31) в виде

$$u_0(x, t) = (\psi, 1)t + \frac{1}{2}[\Phi(t + x) + \Phi(t - x)]. \quad (35)$$

Поскольку для  $t \in \{t | t \in [-A, A], \Phi'(t) \text{ конечна и } A > 0\}$  имеет место  $\Phi'_x(t \pm x)|_{x=0} = \pm\Phi'(t)$ , то из (35) за счет произвольности числа  $A$  сразу следует первая из формул (34) (вторая доказывается аналогично с использованием 2-периодичности функции  $\Phi(x)$ ).  $\square$

Из лемм 20 и 21 получаем следующий результат.

**Лемма 22.** *Функция  $u_0(x, t)$  абсолютно непрерывна по  $x, t$  и удовлетворяет условию  $u_0(x, 0) = 0$ ; п.в. на  $[0, 1]$  существует  $u'_{0t}(x, 0)$  и п.в. на  $(-\infty, \infty)$  существуют  $u'_{0x}(0, t)$ ,  $u'_{0x}(1, t)$ , причем  $u'_{0t}(x, 0) = \psi(x)$ ,  $u'_{0x}(0, t) = u'_{0x}(1, t) = 0$ .*

**Лемма 23.** *Ряд  $u_1(x, t)$  и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по  $x$  и  $t$  один раз, сходятся абсолютно и равномерно в  $Q_T$  при любом  $T > 0$ .*

Доказательство аналогично лемме 12 из [5] с использованием лемм 3, 4 из [3] (которые справедливы и для  $g(x) \in L_2[0, 1]$ ,  $\rho = n\pi + \mu$ ,  $\mu \in \tilde{\gamma}_0$ ) и леммы 3 из [5].

**Лемма 24.** *Если  $\psi(x) \in L_2[0, 1]$ , то сумма ряда  $u(x, t)$  абсолютно непрерывна по  $x, t$  и  $u(x, 0) = 0$ ; п.в. на  $[0, 1]$  существует  $u'_t(x, 0)$  и п.в. на  $(-\infty, \infty)$  существуют  $u'_x(0, t)$ ,  $u'_x(1, t)$ ; п.в. выполняются  $u'_t(x, 0) = \psi(x)$  и условия (4).*



**Доказательство.** Из (30) по леммам 22 и 23 получаем, что  $u(x, t)$  абсолютно непрерывна по  $t$ , п.в. на  $[0, 1]$  существует  $u'_t(x, 0)$  и  $u'_t(x, 0) = \psi(x) + u'_{1t}(x, 0)$ . Для частной суммы ряда (29) (с  $\psi(x)$  вместо  $\psi_1(x)$ ) для  $u'_{1t}(x, 0)$  имеем  $S_N(\psi) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r_N} (R_\lambda \psi - R_\lambda^0 \psi) d\lambda$ . По теореме равномерности для операторов  $L$  и  $L_0$  суммы  $S_N(\psi)$  при  $r_N \rightarrow \infty$  равномерно на  $[\delta, 1 - \delta]$  при любом  $\delta \in (0, 1/2)$  стремятся к нулю. Поэтому из равномерной сходимости на  $[0, 1]$  ряда  $u'_{1,t}(x, 0)$  следует, что на  $[0, 1]$   $u'_{1t}(x, 0) = 0$  и, следовательно,  $u'_t(x, 0) = \psi(x)$  п.в. на  $[0, 1]$ . Выполнение п.в. по  $t \in (-\infty, \infty)$  граничных условий (4) следует по формуле (30) из выполнения условий (26) для  $R_\lambda \psi$  и условий (27) для  $R_\lambda^0 \psi$ .

## 6. ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1), (2), (4)

Пусть  $\psi_h(x)$  — та же, что и  $\psi(x)$  в парагр. 4, и  $u_h(x, t)$  — решение задачи (1), (2), (4) с функцией  $\psi_h(x)$  вместо  $\psi(x)$ , представленное в теореме 10. Проводя рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве леммы 13 (используя в них формулу (16) из [5]), получим следующий результат.

**Теорема 11.** Если  $\psi(x) \in L_2[0, 1]$  и  $\|\psi_h - \psi\|_2 \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , то  $u_h(x, t)$  сходится к  $u(x, t)$  равномерно в  $Q_T$  при любом  $T > 0$ , т.е.  $u(x, t)$  есть обобщенное решение задачи (1), (2), (4).

Рассмотрим случай, когда в задаче (1), (2), (4)  $\psi(x) \in L[0, 1]$ . Формальное решение имеет вид (30). В этом случае лемма 14 сохраняется (доказательство следует из формулы

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} (R_\lambda \psi - R_\lambda^0 \psi) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} (J_1(x, \rho) + J_2(x, \rho)) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda,$$

где  $J_1(x, \rho) = (v_1(x, \rho) - v_1^0(x, \rho))(\psi, z_1) + (v_2(x, \rho) - v_2^0(x, \rho))(\psi, z_2)$ ,  $J_2(x, \rho) = v_1^0(x, \rho)(\psi, z_1 - z_1^0) + v_2^0(x, \rho)(\psi, z_2 - z_2^0)$ , с использованием [5, лемма 3, теорема 4]).

**Лемма 25.** Ряд  $u_0(x, t)$  сходится всюду при  $x \in [0, 1]$  и  $t \in (-\infty, \infty)$ , причем

$$\max_{Q_T} |u_0(x, t)| \leq c_T \|\psi\|_1, \tag{36}$$

где постоянная  $c_T$  зависит только от  $T$ .

**Доказательство.** Из леммы 17 получаем:

$$u_0(x, t) = (\psi, 1)t + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \psi(\xi), \frac{\cos n\pi\xi}{n\pi} \right) [\sin n\pi(x+t) - \sin n\pi(x-t)].$$

Обозначим  $\tilde{\psi}(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \psi(\xi), \frac{\cos n\pi\xi}{n\pi} \right) \sin n\pi x$ . Так как  $\frac{\cos n\pi\xi}{n\pi} = \frac{1}{n\pi} - \int_0^\xi \sin n\pi\tau d\tau$ ,

то  $\left( \psi(\xi), \frac{\cos n\pi\xi}{n\pi} \right) = \frac{1}{n\pi} (\psi, 1) - (\psi_1(\xi), \sin n\pi\xi)$ , где  $\psi_1(\xi) = \int_\xi^1 \psi(\tau) d\tau$ . Тогда

$$\tilde{\psi}(x) = 2(\psi, 1)\theta(x) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_1(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x, \tag{37}$$



где  $\theta(x)$  — нечетная 2-периодическая функция,  $\theta(x) = \frac{1}{2}(1 - x)$  при  $x \in (0, 2)$  и  $\theta(x) = 0$  при  $x = 0, x = 2$ ; ряд во втором слагаемом сходится на всей оси как тригонометрический ряд периодической функции ограниченной вариации. Поэтому из формулы  $u_0(x, t) = (\psi, 1)t + \frac{1}{2}[\tilde{\psi}(x+t) - \tilde{\psi}(x-t)]$  получаем первое утверждение леммы. Далее, поскольку из (37) при  $x \in [0, 1]$  следует оценка  $|\tilde{\psi}(x)| \leq c\|\psi\|_1$ , то за счет нечетности и 2-периодичности функции  $\psi(x)$  получаем (36).  $\square$

Если  $\psi_h(x)$  и  $u_h(x, t)$  — те же, что и в теореме 11, то из приведенных фактов следует

**Теорема 12.** Если  $\psi(x) \in L[0, 1]$ , то ряд  $u(x, t)$  формального решения задачи (1), (2), (4) сходится всюду при  $x \in [0, 1]$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$  и  $u(x, 0) = 0$ . Более того, если  $\|\psi_h - \psi\|_1 \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , то решение  $u_h(x, t)$  задачи (1), (2), (4) сходится к  $u(x, t)$  равномерно в  $Q_T$  при любом  $T > 0$ . Таким образом,  $u(x, t)$  является обобщенным решением задачи (1), (2), (4) для  $\psi(x) \in L[0, 1]$ .

### Библиографический список

1. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. АН. 2014. Т. 458, № 2. С. 138–140. DOI: 10.7868/S0869565214260041
2. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. 368 с.
3. Корнев В. В., Хромов А. П. Резольвентный подход к методу Фурье в одной смешанной задаче для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, вып. 4. С. 621–630. DOI: 10.7868/S0044466915040079
4. Курдюмов В. П., Хромов А. П. Обоснование метода Фурье для волнового уравнения при минимальных требованиях на исходные данные // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 32–36.
5. Гуревич А. П., Курдюмов В. П., Хромов А. П. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 1. С. 13–29. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-13-29
6. Хромов А. П. Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56, вып. 2. С. 239–251. DOI: 10.7868/S0044466916020149
7. Стеклов В. А. Основные задачи математической физики. М. : Наука, 1983. 432 с.
8. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1953. 360 с.
9. Смирнов В. И. Курс высшей математики : в 4 т. Т. 4. М. : Гостехиздат, 1953. 804 с.
10. Ладыженская О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М. : Гостехиздат, 1953. 282 с.
11. Ильин В. А. Избранные труды : в 2 т. Т. 1. М. : Изд-во ООО «Макс-пресс», 2008. 727 с.
12. Ильин В. А. О разрешимости смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений // УМН. 1960. Т. 15, № 2. С. 97–154.
13. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.
14. Расулов М. Л. Метод контурного интеграла. М. : Наука, 1964. 462 с.
15. Вагабов А. И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д : Изд-во Рост. ун-та, 1994. 160 с.
16. Марченко В. А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 392 с.



17. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М. : Наука, 1965. 716 с.
18. Carleson L. On convergence and growth of partial sums of Fourier series // Acta Math. 1966. Vol. 116, № 1. P. 135–157.

---

**Образец для цитирования:**

Курдюмов В. П., Хромов А. П., Халова В. А. Смешанная задача для волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 2. С. 157–171. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-157-171

---

## A Mixed Problem for a Wave Equation with a Nonzero Initial Velocity

V. P. Kurdyumov, A. P. Khromov, V. A. Khalova

Vitaly P. Kurdyumov, <https://orcid.org/0000-0001-8534-7692>, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, Kurdyumov47@yandex.ru

Avzug P. Khromov, <http://orcid.org/0000-0002-2454-8009>, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru

Victoriya A. Khalova, <https://orcid.org/0000-0003-2148-4932>, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, KhalovaVA@gmail.com

We study a mixed problem for the wave equation with a continuous complex potential in the case of a nonzero initial velocity  $u_t(x, 0) = \psi(x)$  and two types of two-point boundary conditions: the ends are fixed and when each of the boundary boundary conditions contains a derivative with respect to  $x$ . A classical solution in the case  $\psi(x) \in W_2^1[0, 1]$  is obtained by the Fourier method with respect to the acceleration of the convergence of Fourier series by the resolvent approach with the help of A. N. Krylov's recommendations (the equation is satisfied almost everywhere). It is also shown that in the case when  $\psi(x) \in L[0, 1]$  the series of a formal solution for a problem with fixed ends converges uniformly in any bounded domain, and for the second problem it converges only everywhere and for both problems is a generalized solution in the uniform metric.

*Key words:* wave equation, formal solution, spectral problem, resolvent.

### References

1. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Resolvent approach in the Fourier method. *Dokl. Math.*, 2014, vol. 90, iss. 2, pp. 545–548. DOI: 10.1134/S1064562414060076
2. Krylov A. N. *On Some Differential Equations of Mathematical Physics Having Applications in Engineering*. Leningrad, Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., 1950. 368 p. (in Russian).
3. Kornev V. V., Khromov A. P. Resolvent approach to the Fourier method in a mixed problem for the wave equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, iss. 4, pp. 618–627. DOI: 10.1134/S0965542515040077
4. Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Obosnovanie metoda Fur'e dlia volnovogo uravneniia pri minimal'nykh trebovaniiax na iskhodnye dannye [Justification of the Fourier method for the wave equation with minimum requirements for initial data]. *Matematika. Mekhanika* [Mathematics. Mechanics]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2015, iss. 17, pp. 32–36 (in Russian).



5. Gurevich A. P., Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Justification of Fourier method in a mixed problem for wave equation with non-zero velocity. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 1, pp. 13–29 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-13-29
6. Khromov A. P. Behavior of the formal solution to a mixed problem for the wave equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2016, vol. 56, iss. 2, pp. 243–255. DOI: 10.1134/S0965542516020135
7. Steklov V. A. *Fundamental Problems of Mathematical Physics*. Moscow, Nauka, 1983. 432 p. (in Russian).
8. Petrovsky I. G. *Lectures on partial differential equations*. New York, Interscience, 1954. 245 p. (Russ. ed.: Moscow, Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., 1953. 360 p.)
9. Smirnov V. I. *A Course of Higher Mathematics*. Vol. 4. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1964. (Russ. ed.: Moscow, Gostekhizdat, 1953. 804 p.)
10. Ladyzhenskaya O. A. *Mixed Problems for Hyperbolic Equations*. Moscow, Gostekhizdat, 1953. 282 p. (in Russian).
11. Il'in V. A. *Selected Works*. Vol. 1. Moscow, Maks-press, 2008. 727 p. (in Russian).
12. Il'in V. A. The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations. *Russ. Math. Surv.*, 1960, vol. 15, iss. 1, pp. 85–142.
13. Naimark M. A. *Linear Differential Operators: Two Volumes Bound as One*. Dover Publications, Inc., 2012. 528 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1969. 528 p.)
14. Rasulov M. L. *Contour Integral Method and Its Application to Problems for Differential Equations*. Moscow, Nauka, 1964. 462 p. (in Russian).
15. Vagabov A. I. *Introduction to the Spectral Theory of Differential Operators*. Rostov on Don, Izd-vo Rost. un-ta, 1994. 160 p. (in Russian).
16. Marchenko V. A. *Sturm–Liouville Operators and Their Applications*. Kiev, Naukova Dumka, 1977. 392 p. (in Russian).
17. Lavrentiev M. A., Shabat B. V. *Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable*. Moscow, Nauka, 1965. 716 p. (in Russian).
18. Carleson L. On convergence and growth of partial sums of Fourier series. *Acta Math.*, 1966, vol. 116, no. 1, pp. 135–157.

---

**Cite this article as:**

Kurdyumov V. P., Khromov A. P., Khalova V. A. A Mixed Problem for a Wave Equation with a Nonzero Initial Velocity. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 2, pp. 157–171 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-157-171

---



УДК 517.51

## О ДВОИЧНЫХ БАЗИСНЫХ СПЛАЙНАХ 2-Й СТЕПЕНИ

С. Ф. Лукомский, М. Д. Мушко

Лукомский Сергей Федорович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, LukomskiiSF@nfo.sgu.ru  
Мушко Максим Дмитриевич, студент, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, dart-maximus@yandex.ru

Классические В-сплайны определяются как свертка  $B_{n+1} = B_n * B_0$ , где  $B_0$  есть характеристическая функция единичного отрезка. Классический В-сплайн является масштабирующей функцией и удовлетворяет неравенству Рисса. Поэтому классический В-сплайн любого порядка порождает кратномасштабный анализ (КМА) Рисса. В статье рассмотрен новый вид В-сплайнов, которые получаются двукратным интегрированием 3-й функции Уолша. Указан алгоритм построения интерполяционного сплайна второй степени по двоичной системе узлов. Получена оценка интерполяции. Доказано, что система сдвигов построенного В-сплайна порождает КМА  $(V_n)$  в смысле Де Бора, ДеВора и Рона. Этот КМА не является Риссовским. Тем не менее мы можем указать порядок приближения функций из пространств Соболева подпространствами  $(V_n)$ .

*Ключевые слова:* двоичные В-сплайны, кратномасштабный анализ, пространства Соболева.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-172-182

### ВВЕДЕНИЕ

В-сплайны как разделенные разности были введены Карри (Corry) и Шёнбергом (Schoenberg) [1]. Название В-сплайны появилось в работе Шёнберга [2, 3]. Подробное изложение этой теории можно найти в [4, 5]. Принципиальными здесь являются два момента. Во-первых, совокупность В-сплайнов является базисом в пространстве кусочно-многочленных функций. Во-вторых, в задаче интерполяции изменение значения функции в одном узле не требует пересчета всего представления.

В-сплайны на равномерной сетке были определены в терминах сверток и подробно изучены Стрёмбергом (Strömberg), Баттлом (Battle) и Лемарье (Lemarie) в [6–8]. Оказалось, что введенные таким образом базисные сплайны порождают КМА Рисса.

Мы предлагаем строить базисные сплайны, интегрируя дважды функцию Уолша  $W_3$ . После интегрирований получается сплайн 2-й степени, близкий по своим свойствам и возможностям традиционным В-сплайнам.

1. Мы покажем, что сдвиги такого В-сплайна образуют базис в пространстве кусочно-многочленных функций.

2. Мы укажем итерационный алгоритм построения интерполяционного сплайна по равномерной сетке.

3. Получим оценку отклонения интерполяционного сплайна от интерполируемой функции.

4. Мы покажем, что система сдвигов построенного В-сплайна порождает КМА  $(V_n)$  в смысле Де Бора, ДеВора и Рона, и укажем порядок приближения функций из пространств Соболева подпространствами  $(V_n)$ .



### 1. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ДВОИЧНЫМИ БАЗИСНЫМИ СПЛАЙНАМИ 2-Й СТЕПЕНИ

Пусть  $If(x) = \int_0^x f(t) dt$  ( $x \in [0, 1]$ ) — оператор интегрирования,  $r_n(t) = \text{sign} \sin 2^{n+1}\pi t$  — функции Радемахера,  $W_{2^n-1}(x) = \prod_{k=0}^{n-1} r_k(x)$  — функции Уолша.

**Определение 1.** Функцию

$$\psi(x) = \begin{cases} (4I)^2 W_3(x), & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}$$

будем называть *двоичным базисным сплайном 2-й степени* (см. [9]).

Очевидно, что  $\psi(x)$  есть кусочно-монотонная функция, совпадающая с многочленом 2-й степени на каждом отрезке  $[\frac{k}{4}, \frac{k+1}{4}]$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ). Функция  $\psi$  симметрична относительно точки  $x = \frac{1}{2}$ , на отрезке  $[0, \frac{1}{4}]$  задается равенством  $\psi(x) = 8x^2$  и  $\psi(x) = -4(x - \frac{1}{2})^2 + 1$  при  $x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ .

На рис. 1 и 2 приведены графики функций  $\frac{1}{4}\psi'$  и  $\psi$ .

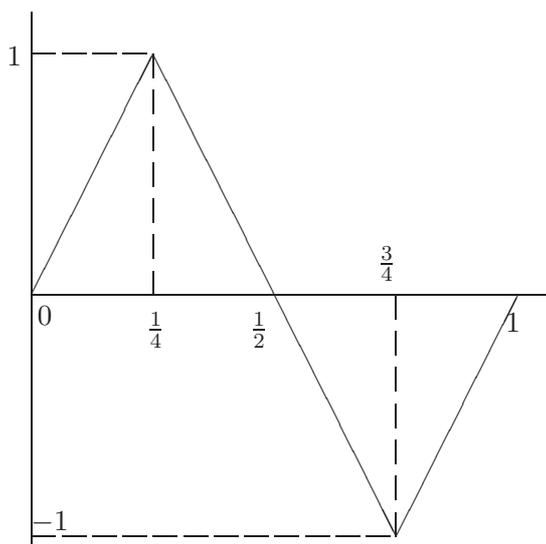


Рис. 1. График функции  $\frac{1}{4}\psi'(x)$   
Fig. 1. The graph of the function  $\frac{1}{4}\psi'(x)$

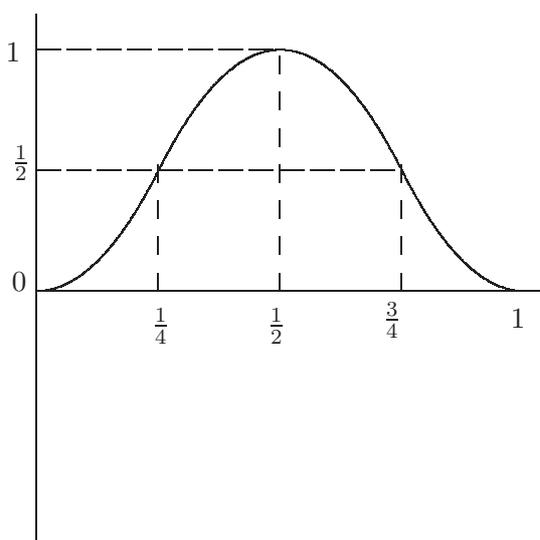


Рис. 2. График функции  $\psi(x)$   
Fig. 2. The graph of the function  $\psi(x)$

**Определение 2.** Обозначим через  $Q_2[0, +\infty)$  совокупность кусочно-многочленных функций 2-й степени, имеющих непрерывные производные на  $[0, +\infty)$ , и которые на каждом отрезке  $[\frac{k}{4}, \frac{k+1}{4}]$  совпадают с некоторым многочленом второй степени. Аналогично определяется и пространство  $Q_2(-\infty, +\infty)$ .

**Теорема 1.** При всех  $x \in \mathbb{R}$  справедливы равенства

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi\left(x + \frac{n}{4}\right) = 2, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi\left(x + \frac{n}{2}\right) = 1. \tag{1}$$

**Доказательство.** Функция  $4IW_3(t)$  антипериодична на отрезке  $[0, 1]$  с периодом  $T = \frac{1}{2}$ , т.е. для любых  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  таких, что  $|t_1 - t_2| = \frac{1}{2}$ , имеем



$4IW_3(t_1) = -4IW_3(t_2)$ . Поэтому для любых  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  таких, что  $|t_1 - t_2| = \frac{1}{2}$

$$4 \left( \int_0^{t_1} 4IW_3(t) dt + \int_0^{t_2} 4IW_3(t) dt \right) = \psi(t_1) + \psi(t_2) = 1.$$

В самом деле, пусть  $t_2 = \frac{1}{2} + t_1$ . Тогда ввиду антипериодичности

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} 4IW_3(t) dt + \int_0^{t_2} 4IW_3(t) dt &= \int_0^{t_1} 4IW_3(t) dt + \int_0^{\frac{1}{2}} 4IW_3(t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+t_1} 4IW_3(t) dt = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} 4IW_3(t) dt = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Поэтому при  $x \in [\frac{k}{4}, \frac{k+1}{4}]$

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi \left( x + \frac{l}{4} \right) = \psi \left( x - \frac{k}{4} \right) + \psi \left( x - \frac{k-1}{4} \right) + \psi \left( x - \frac{k-2}{4} \right) + \psi \left( x - \frac{k-3}{4} \right) = 2,$$

и при  $x \in [\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}]$

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi \left( x + \frac{l}{2} \right) = \psi \left( x - \frac{k}{2} \right) + \psi \left( x - \frac{k-1}{2} \right) = 1. \quad \square$$

**Теорема 2.** Совокупность функций  $\psi \left( x - \frac{n}{4} \right)$  ( $n \geq -3, n \neq -1$ ) образует базис в пространстве  $Q_2[0, +\infty)$ .

**Доказательство.** Так как для функции  $\psi$  справедливы равенства (1), то любая из функций  $\psi \left( x + \frac{k}{4} \right)$  есть линейная комбинация остальных. Поэтому из системы  $\left\{ \psi \left( x + \frac{k}{4} \right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$  можно выбросить любую функцию. Удалим функцию  $\psi \left( x + \frac{1}{4} \right)$  и покажем, что любую функцию  $f \in Q_2[0, +\infty)$  можно единственным образом представить в виде

$$f(x) = \sum_{k=-3, k \neq -1}^{+\infty} c_k \psi \left( x - \frac{k}{4} \right). \quad (2)$$

Рассмотрим  $f(x) \in Q_2[0, +\infty)$  на отрезке  $[0, \frac{1}{4}]$ , на котором она есть многочлен  $f_0(x) = a_{2,0}x^2 + a_{1,0}x + a_{0,0}$ . Покажем, что на отрезке  $[0, \frac{1}{4}]$

$$f_0(x) = c_{-3}\psi \left( x + \frac{3}{4} \right) + c_{-2}\psi \left( x + \frac{2}{4} \right) + c_0\psi \left( x + \frac{0}{4} \right), \quad (3)$$

причем слагаемое  $c_{-1}\psi \left( x + \frac{1}{4} \right)$  в (3) отсутствует. Равенство (3) рассмотрим как уравнение относительно  $c_{-3}, c_{-2}, c_0$ . В точке  $x = 0$  должны выполняться соотношения

$$f_0(0) = c_{-3}\psi \left( 0 + \frac{3}{4} \right) + c_{-2}\psi \left( 0 + \frac{2}{4} \right), \quad f'_0(0) = c_{-3}\psi' \left( 0 + \frac{3}{4} \right), \quad (4)$$



так как  $\psi(0 + \frac{0}{4}) = \psi'(0 + \frac{0}{4}) = \psi''(0 + \frac{0}{4}) = 0$ . Система (4) имеет единственное решение

$$c_{-3} = \frac{f'_0(0)}{\psi'(0 + \frac{3}{4})}, \quad c_{-2} = \frac{f_0(0) - c_{-3}\psi(0 + \frac{3}{4})}{\psi(0 + \frac{2}{4})}.$$

Таким образом, коэффициенты  $c_{-2}$  и  $c_{-3}$  определены однозначно. Для нахождения  $c_0$  достаточно в (3) положить  $x = \frac{1}{4}$ . Так как многочлен 2-й степени на отрезке  $[0, \frac{1}{4}]$  полностью определяется значениями в граничных точках и производной в точке  $x = 0$ , то равенство (3) доказано.

Для нахождения коэффициента  $c_1$  записываем равенство (2) на отрезке  $[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}]$

$$f_1(x) = c_{-2}\psi\left(x + \frac{2}{4}\right) + c_0\psi\left(x + \frac{0}{4}\right) + c_1\psi\left(x - \frac{1}{4}\right), \quad (5)$$

где  $f_1(x)$  — сужение  $f(x)$  на отрезок  $[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}]$ , а коэффициенты  $c_{-2}$  и  $c_0$  уже известны. Полагая в (5)  $x = \frac{2}{4}$ , находим  $c_1$  и т. д. Продолжая этот процесс, получаем рекуррентные соотношения для нахождения всех коэффициентов в (2).  $\square$

**Замечание.** Очевидно, что аналогичными рассуждениями можно доказать, что система  $\{\psi(x + \frac{k}{4})\}_{k \in \mathbb{Z}, k \neq -1}$  есть базис пространства  $Q_2(-\infty, +\infty)$ .

При фиксированном  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 4$ , определим функцию  $\varphi(x) := \psi(\frac{n}{4}x)$ . Для нее  $\text{supp } \varphi = [0, \frac{4}{n}]$ ,  $\varphi(x)$  есть многочлен 2-й степени на каждом отрезке  $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ ,  $\varphi'(0) = \varphi'(\frac{2}{n}) = \varphi'(\frac{4}{n}) = 0$ ,  $\varphi'(\frac{1}{n}) = n$ ,  $\varphi'(\frac{3}{n}) = -n$ .

Рассмотрим следующую интерполяционную задачу. Пусть  $f(x)$  непрерывна на  $[0, 1]$ ,  $x_k = \frac{k}{n}$  ( $k = \overline{0, n}$ ) — равномерная сетка на  $[0, 1]$ . Через  $S(x)$  обозначим интерполяционный сплайн 2-й степени, совпадающий с  $f(x)$  в узлах  $x_k$ , который построим следующим образом:

*(-1)-й шаг.* Пусть  $M_0 \in \mathbb{R}$  произвольно. Полагаем  $S_{-1}(x) = -\frac{M_0}{n}\varphi(x + \frac{3}{n})$ . В этом случае  $S'_{-1}(0) = M_0$ .

*0-й шаг.* Определим  $S_0(x)$  равенством

$$S_0(x) = S_{-1}(x) + \varphi\left(x - \frac{2}{n}\right) \left(f\left(\frac{0}{n}\right) - S_{-1}\left(\frac{0}{n}\right)\right).$$

В этом случае  $S_0(0) = f(0)$ ,  $S'_0(0) = M_0$ .

*k-й шаг.* ( $1 \leq k \leq n$ )

$$S_k(x) = S_{k-1}(x) + 2\varphi\left(x - \frac{k-1}{n}\right) \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - S_{k-1}\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

После  $k$ -го шага,  $S_k(\frac{j}{n}) = f(\frac{j}{n})$ , ( $j = 1, 2, \dots, k$ ).

Наконец полагаем  $S(x) = S_n(x)$ . Очевидно, что  $S(x)$  интерполирует функцию  $f(x)$  в узлах  $x_k = \frac{k}{n}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) и  $S'(0) = M_0$ .

Для оценки погрешности интерполяции определим функции

$$\psi_k(x) = f(x_{k-1} + x) - f(x_{k-2} + x) + \dots + (-1)^{k-1}f(x_0 + x), \quad x \in [0, 1/n], \quad k = \overline{1, n}.$$

**Теорема 3.** Выберем  $M_0 = \frac{2}{h}(f(x_1) - f(x_0))$  и пусть  $h = x_k - x_{k-1}$ . Тогда для  $x \in [x_{k-1}, x_k]$  ( $k = \overline{1, n}$ ) справедливо неравенство

$$|S(x) - f(x)| \leq \omega(h, \psi_{k-1}) + \omega(h, \psi_k) + \omega(h, f),$$

где  $\omega(h, f)$  — равномерный модуль непрерывности.





**Теорема 4.** Если  $f''$  существует и ограничена на  $[0, 1]$ , то при  $x \in [x_{k-1}, x_k]$

$$|S(x) - f(x)| \leq kh^2 \sup_{0 \leq x \leq x_k} |f''(x)| + 3h \sup_{0 \leq x \leq h} |f'(x)|.$$

**Доказательство.** Пусть  $x \in [x_{k-1}, x_k]$ . Из (8) находим

$$M_k = \frac{2}{h} \psi'_k(\xi_k) h = 2\psi'_k(\xi_k), \quad \xi_k \in [0, h].$$

Из определения  $\psi_k$  получаем:

$$|\psi'_k(\xi_k)| \leq h \frac{k}{2} \sup_{0 \leq x \leq x_k} |f''(x)| + \sup_{0 \leq x \leq h} |f'(x)|.$$

Поэтому

$$|S(x) - S_k(x)| \leq \frac{h}{2} (|M_k| + |M_{k-1}|) \leq h^2 k \sup_{0 \leq x \leq x_k} |f''(x)| + 2h \sup_{0 \leq x \leq h} |f'(x)|,$$

откуда и следует утверждение теоремы. □

## 2. ДВОИЧНЫЙ БАЗИСНЫЙ СПЛАЙН 2-Й СТЕПЕНИ КАК ГЕНЕРАТОР КМА

Традиционно кратномасштабный анализ (КМА) определяют как совокупность замкнутых в  $L_2(\mathbb{R})$  подпространств  $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , удовлетворяющих следующим условиям (аксиомам):

A1)  $V_n \subset V_{n+1}$ ;

A2)  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n = L_2(\mathbb{R})$ ;

A3)  $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} V_n = \{0\}$ ;

A4)  $f(x) \in V_n$  тогда и только тогда, когда  $f(2x) \in V_{n+1}$ ;

A5) существует функция  $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ , сдвиги  $(\phi(x+k))_{k \in \mathbb{Z}}$  которой образуют ортонормированный базис  $V_0$  (базис Рисса  $V_0$ ).

В этом случае КМА называют соответственно ортогональным или КМА Рисса. Функция  $\phi$  из аксиомы A5 называется *масштабирующей*. Она удовлетворяет уравнению

$$\phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_n \phi(2x+n), \quad (\beta_n) \in l_2,$$

которое называют *масштабирующим*.

При определении КМА можно поступить по-другому. Сначала задать функцию  $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ , построить замкнутые в  $L_2(\mathbb{R})$  подпространства

$$V_n = \overline{(2^{\frac{n}{2}} \phi(2^n x + k))_{k \in \mathbb{Z}}}$$

и потребовать, чтобы выполнялись аксиомы A1)–A3) (см. [10, 11]). Такой КМА называют часто *обобщенным* или *порожденным функцией  $\phi$* .

В этом параграфе мы покажем, что базисный сплайн  $\psi$  порождает обобщенный КМА, который не является КМА Рисса. Сначала покажем, что базисный сплайн  $\psi(\frac{x}{4})$  удовлетворяет масштабированному уравнению.



**Теорема 5.** Обозначим  $F(x) = \psi(\frac{x}{4})$ . Справедливо равенство

$$F(x) = \frac{1}{4}F(2x) + \frac{1}{2}F(2x - 1) + \frac{1}{2}F(2x - 2) + \frac{1}{2}F(2x - 3) + \frac{1}{4}F(2x - 4). \quad (9)$$

**Доказательство.** По построению  $F(2) = 1, F(0) = F(4) = 0, F(1) = F(3) = \frac{1}{2}, F(\frac{1}{2}) = F(4 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{8}, F(2 + \frac{1}{2}) = F(2 - \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{8}$ . Обозначим для краткости  $S_0(x) = (F(2x) + F(2x - 4))\frac{1}{4}, S_1(x) = S_0 + \frac{1}{2}(F(2x - 1) + F(2x - 3)), S_2(x) = S_1(x) + \frac{1}{2}F(2x - 2)$ .

Так как  $S_0(x) = F(x) = 0$  при  $x = 0, x = 4, S'_0(x) = F'(x) = 0$  при  $x = 0, 4$ , то  $S_0(x) = F(x)$  на  $[0, \frac{1}{2}] \cup [4 - \frac{1}{2}, 4]$ , причем  $S_0(x)$  симметрична относительно точки  $x = 2$ .

Аналогично убеждаемся, что  $S_1(x) = F(x)$  на  $[0, 1] \cup [3, 4]$  и  $S_2(x) = S_1(x) + \frac{1}{2}F(2x - 2) = F(x)$  всюду.  $\square$

Преобразование Фурье функции  $f \in L_2(\mathbb{R})$  определим равенством

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\omega x} dx.$$

**Лемма 1.** Справедливо равенство

$$\hat{F}(\omega) = \frac{4^3}{(\pi\omega)^3} e^{\pi i 4\omega} \sin 2\pi\omega \sin^2 \pi\omega = 2^7 e^{\pi i 4\omega} \cos \pi\omega \left( \frac{\sin \pi\omega}{\pi\omega} \right)^3.$$

**Доказательство.** Дважды интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)e^{-2\pi i\omega x} dx = \frac{4}{(\pi i\omega)^2} \int_0^1 W_3(x)e^{-2\pi i\omega x} dx = \\ &= \frac{4}{(\pi\omega)^3} e^{-\pi i\omega} \left( 2 \sin \frac{\pi\omega}{2} - \sin \pi\omega \right) = \frac{16}{(\pi\omega)^3} e^{-\pi i\omega} \sin \frac{\pi\omega}{2} \sin^2 \frac{\pi\omega}{4}. \end{aligned}$$

Поэтому  $\hat{F}(\omega) = \hat{\psi}_{\frac{1}{4}}(\omega) = 4\hat{\psi}(4\omega) = \left(\frac{4}{\pi\omega}\right)^3 e^{-\pi i\omega} \sin 2\pi\omega \sin^2 \pi\omega$ .  $\square$

Образуем подпространства

$$V_n = \overline{(2^{\frac{n}{2}} F(2^n x + k))_{k \in \mathbb{Z}}}.$$

**Теорема 6.** Совокупность  $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  образует КМА, т.е. выполнены аксиомы A1)–A3).

**Доказательство.** Функция  $F(x)$  — масштабирующая, имеет компактный носитель, и  $\hat{F}(0) \neq 0$ . Поэтому по теореме 1.4 из [10, с. 20]  $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  образуют КМА (см. также [12, 13]).  $\square$

**Определение 3.** Пусть  $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ . Выражение

$$[f, g](\omega) \stackrel{df}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\omega + k) \overline{g(\omega + k)}$$

называют *скобочным произведением* (см. [14]).



**Определение 4.** Пусть  $s > 0$ . Множество

$$W_2^s(\mathbb{R}) = \{f \in L_2(\mathbb{R}) : \|f\|_{W_2^s(\mathbb{R})} = \|(1 + |\cdot|)^s \hat{f}\|_{L_2(\mathbb{R})} < +\infty\}$$

называют *пространством Соболева*.

**Определение 5.** Пусть  $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ ,  $\varphi_{n,k} = 2^{\frac{n}{2}} \varphi(2^n x + k)$ . Оператор

$$\mathfrak{F}_n : f \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f, \varphi_{n,k}) \varphi_{n,k}$$

называют *квазиинтерполяционным оператором*.

**Определение 6.** Оператор  $\mathfrak{F}_n$  доставляет аппроксимацию порядка  $m \in \mathbb{R}_+$ , если для всех  $f \in W_2^m(\mathbb{R})$

$$\|f - \mathfrak{F}_n f\|_{L_2(\mathbb{R})} = O(2^{-nm}).$$

**Лемма 2.** [7, с. 22; 8] Пусть функция  $\varphi$  удовлетворяет условиям:

1) скобочное произведение  $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}]$  существенно ограничено;

2)  $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] - |\hat{\varphi}|^2 = O(|\cdot|^{2m})$ ;

3)  $1 - |\hat{\varphi}|^2 = O(|\cdot|^{2m_0})$ .

Тогда  $\mathfrak{F}_n$  доставляет аппроксимацию порядка  $m_1 = \min(m, 2m_0)$ . Здесь символ  $f = O(|\cdot|^m)$  означает, что  $\limsup_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|^m} \leq C$ ,  $C > 0$ .

Отметим, что если скобочное произведение  $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}]$  существенно ограничено, то модуль  $|\hat{\varphi}|$  тоже существенно ограничен.

**Лемма 3.** Справедливо равенство

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{F}(\omega + k)|^2 = 4^7 \cos^2 \pi \omega \left( \frac{8}{15} + \frac{13}{30} \cos 2\pi \omega + \frac{1}{30} \cos^2 2\pi \omega \right).$$

**Доказательство.** Используя лемму 1, имеем

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{F}(\omega + k)|^2 = 4^7 \cos^2 \pi \omega \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \frac{\sin \pi(\omega + k)}{\pi(\omega + k)} \right)^6 = 4^7 \sin^6 \pi \omega \cos^2 \pi \omega \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\pi(\omega + k))^6}.$$

При  $m \in \mathbb{N}$  справедливо равенство [15, с. 149],

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x + \pi k)^{2m}} = -\frac{1}{(2m-1)!} \frac{d^{2m-1}}{dx^{2m-1}} \operatorname{ctg} x.$$

Учитывая, что при  $m = 3$

$$\frac{d^{2m-1}}{dx^{2m-1}} \operatorname{ctg} x \Big|_{m=3} = \frac{1}{\sin^6 x} \left( \frac{8}{15} + \frac{13}{30} \cos 2x + \frac{1}{30} \cos^2 2x \right),$$

получаем утверждение леммы. □

Определим функцию  $\varphi(x) = \frac{1}{2^7} F(x)$ . Из лемм 1 и 3 следует, что

$$\hat{\varphi}(\omega) = e^{-\pi i \omega} \cos \pi \omega \left( \frac{\sin \pi \omega}{\pi \omega} \right)^3,$$



$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + k)|^2 = \cos^2 \pi\omega \left( \frac{8}{15} + \frac{13}{30} \cos 2\pi\omega + \frac{1}{30} \cos^2 2\pi\omega \right),$$

$\varphi(x)$  удовлетворяет масштабирующему уравнению (9), и, значит, функция  $\varphi$  порождает КМА  $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Однако этот КМА не является риссовским, так как сумма  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + k)|^2$  неограничена снизу положительной постоянной.

**Теорема 7.** *Оператор  $\mathfrak{F}_n$ , построенный по функции  $\varphi(x) = \frac{1}{27}F(x)$ , доставляет аппроксимацию порядка 1.*

**Доказательство.** Воспользуемся леммой 3. Во-первых,  $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}]$  существенно ограничены. Во-вторых,

$$[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] - |\hat{\varphi}|^2 = \cos^2 \pi\omega \left( \frac{8}{15} + \frac{13}{30} \cos 2\pi\omega + \frac{1}{30} \cos^2 2\pi\omega - \left( \frac{\sin \pi\omega}{\pi\omega} \right)^6 \right) \approx \omega^2.$$

Наконец,

$$1 - |\hat{\varphi}|^2 = 1 - \cos^2 \pi\omega \left( \frac{\sin \pi\omega}{\pi\omega} \right)^6 \approx \omega^2.$$

Поэтому по лемме 3 оператор  $\mathfrak{F}_n$  доставляет аппроксимацию порядка 1.  $\square$

*Благодарности.* Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152).

### Библиографический список

1. Curry H. B., Schoenberg I. J., On spline distributions and their limits: the Polya distributions // Bull. Amer. Math. Soc. 1947. Vol. 53. Abstract 380t. P. 1114.
2. Schoenberg I. J. On spline functions (with a supplement by T. N. E. Greville) // Inequalities I / ed. O. Shisha. N. Y. : Academic Press, 1967. P. 255–291.
3. Schoenberg I. J. Contributions to problem of approximation of equidistant data by analytic functions // Quart. Appl. Math. 1946. Vol. 4. P. 45–99, 112–141.
4. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М. : Мир, 1972. 319 с.
5. Де Бор С. Практическое руководство по сплайнам. М. : Радио и связь, 1985. 304 с.
6. Strömberg J.-O. A modified Franklin system and higher-order spline systems on  $R^n$  as unconditional bases for Hardy spaces // Conference in Harmonic Analysis in Honor of A. Zigmund (The Wadsworth Mathematics Series) / eds. W. Beckner, A. P. Calderon. Springer, 1982. Vol. 2. P. 475–494.
7. Battle G. A block spin construction of ondelettes. Part 1: Lemarie functions // Comm. Math. Phys. 1987. Vol. 110. P. 601–615.
8. Lemarie P.-G., Meyer Y. Ondelettes et bases Hilbertiennes // Rev. Math. Iber. 1987. Vol. 2, № 1/2. P. 1–18.
9. Чумаченко С. Об одном из аналогов системы Фабера – Шаудера // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. 2016. Т. 53. С. 163–164.
10. Mathematics in image processing / ed. Hongkai Zhao. IAS/Park City Mathematics Series. 2013. Vol. 19. 245 p.
11. De Boor C., DeVore R. A., Ron A. Approximation from shift-invariant subspaces of  $L_2(R^d)$  // Transactions of the American Mathematical Society. 1994. Vol. 341, № 2. P. 787–806.



12. De Boor C., DeVore R. A., Ron A. On the construction of multivariate (pre) wavelets // Constructive approximation. 1993. Vol. 9, № 2. P. 123–166.
13. Jia R. Q., Shen Z. Multiresolution and Wavelets // Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser. 1994. Vol. 37, № 2. P. 271–300.
14. Jia R. Q., Micchelli C. A. Using the refinement equations for the construction of pre-wavelets II: Powers of two // Curves and surfaces / eds. P.-J. Laurent, A. Le Mehaute, L. L. Schumaker. Elsevier Inc., 1999. P. 209–246.
15. Чуи Ч. Введение в вейвлеты. М. : Мир, 2001. 412 с.

---

**Образец для цитирования:**

Лукомский С. Ф., Мушко М. Д. О двоичных базисных сплайнах 2-й степени // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 2. С. 172–182. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-172-182

---

## On Binary B-splines of Second Order

S. F. Lukomskii, M. D. Mushko

Sergey F. Lukomskii, <https://orcid.org/0000-0003-3038-2698>, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, LukomskiiSF@info.sgu.ru

Maxim D. Mushko, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, dart-maximus@yandex.ru

The classical B-spline is defined recursively as the convolution  $B_{n+1} = B_n * B_0$ , where  $B_0$  is the characteristic function of the unit interval. The classical B-spline is a refinable function and satisfies the Riesz inequality. Therefore any B-spline  $B_n$  generates the Riesz multiresolution analysis (MRA). We define binary B-splines, obtained by double integration of the third Walsh function. We give an algorithm for constructing an interpolating spline of the second degree for a binary node system and find the approximation order of this interpolation process. We also prove that the system of dilations and shifts of the constructed B-spline generates an MRA ( $V_n$ ) in De Boor sense. This MRA is not Riesz. But we can find the approximation order of functions from the Sobolev spaces  $W_2^s, s > 0$  by the subspaces ( $V_n$ ).

*Key words:* binary B-splines, multiresolution analysis, Sobolev spaces.

*Acknowledgements:* The authors are grateful to the referee for useful comments. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00152).

### References

1. Curry H. B., Schoenberg I. J., On spline distributions and their limits: the Pollya distributions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1947, vol. 53, Abstract 380t, p. 1114.
2. Schoenberg I. J. On spline functions (with a supplement by T. N. E. Greville). *Inequalities I*. Ed. O. Shisha. New York, Academic Press, 1967, pp. 255–291.
3. Schoenberg I. J. Contributions to problem of approximation of equidistant data by analytic functions. *Quart. Appl. Math.*, 1946, vol. 4, pp. 45–99, 112–141.
4. Alberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L. *The theory of splines and their Applications*. Academic Press, 1967. 296 p.
5. De Boor C. *A practical guide to splines*. New York, Springer-Verlag, 2001. 348 p. (Russ. ed.: Moscow, Radio i sviaz', 1985. 304 p.)



6. Strömberg J.-O. A modified Franklin system and higher-order spline systems on  $R^n$  as unconditional bases for Hardy spaces. *Conference in Harmonic Analysis in Honor of A. Zigmund (The Wadsworth Mathematics Series)*. Eds. W. Beckner, A. P. Calderon. Springer, 1982, vol. 2, pp. 475–494.
7. Battle G. A block spin construction of ondelettes. Part 1: Lemarie functions. *Comm. Math. Phys.*, 1987, vol. 110, pp. 601–615.
8. Lemarie P.-G., Meyer Y. Ondelettes et bases Hilbertiennes. *Rev. Math. Iber.*, 1987, vol. 2, no. 1/2, pp. 1–18.
9. Chumachenko S. On an analogue of the Faber – Schauder system. *Trudy matematicheskogo centra N. I. Lobachevsky* [Proceedings of the N. I. Lobachevsky Mathematical Center]. 2016, vol. 53, pp. 163–164 (in Russian).
10. *Mathematics in image processing*. Ed. Hongkai Zhao. IAS/Park City Mathematics Series. 2013, vol. 19. 245 p.
11. De Boor C., DeVore R. A., Ron A. Approximation from shift-invariant subspaces of  $L_2(R^d)$ . *Transactions of the American Mathematical Society*, 1994, vol. 341, no. 2, pp. 787–806.
12. De Boor C., DeVore R. A., Ron A. On the construction of multivariate (pre) wavelets. *Constructive approximation*, 1993, vol. 9, no. 2, pp. 123–166.
13. Jia R. Q., Shen Z. Multiresolution and Wavelets. *Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser.*, 1994, vol. 37, no. 2, pp. 271–300.
14. Jia R. Q., Micchelli C. A. Using the refinement equations for the construction of pre-wavelets II: Powers of two. *Curves and surfaces*. Eds. P.-J. Laurent, A. Le Mehaute, L. L. Schumaker. Elsevier Inc., 1999, pp. 209–246.
15. Chui Ch. K. *An Introduction to Wavelets*. San Diego, CA, USA, Academic Press, 1992. 264 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 2001. 412 p.)

---

**Cite this article as:**

Lukomskii S. F., Mushko M. D. On Binary  $B$ -splines of Second Order. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 2, pp. 172–182 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-172-182

---



УДК 533.692

## РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО ВБЛИЗИ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ЭКРАНА, В НОВОЙ ПОСТАНОВКЕ

Р. Б. Салимов

Салимов Расих Бахтигареевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Россия, 420043, Казань, Зеленая, 1, salimov.rsb@gmail.com

Рассматривается обратная краевая задача для крылового профиля, расположенного вблизи твердой прямолинейной границы и обтекаемого потенциальным потоком несжимаемой невязкой жидкости со скоростью на бесконечности, параллельной указанной границе. Требуется определить форму и положение крылового профиля по заданному на нем распределению потенциала скорости как функции ординаты точки профиля на меньшей его части, содержащей переднюю кромку и как функции абсциссы точки профиля на остальной части и заданной разности значений функции тока на профиле и на прямолинейной границе (или величины, связанной с указанной разностью). Задача приводится к смешанной краевой задаче для аналитической в круговом кольце функции, имеющей в нем полюс второго порядка, которая, в свою очередь, сводится к краевой задаче Гильберта для однозначной аналитической в кольце функции с линейным краевым условием, связывающим действительную и мнимую части функции. Решение последней задачи дается на основе разработанных ранее методов с использованием известных формул Вилля, позволяющих определить однозначную аналитическую в круговом кольце функцию по заданным граничным значениям ее действительной части.

*Ключевые слова:* обратная краевая задача, аэрогидродинамика, крылового профиль, несжимаемая невязкая жидкость, комплексный потенциал.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-183-195

### ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть крыловой профиль  $L_z$ , расположенный в плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , обтекается установившимся потоком несжимаемой невязкой жидкости, ограниченным прямой  $y = -p$ ,  $p = \text{const}$ , и имеющим на бесконечности скорость, равную  $v_\infty e^{i\pi}$ ,  $v_\infty > 0$ .

Примем, что задняя кромка  $B$  профиля  $L_z$  имеет абсциссу  $x = 0$ ,  $D$  есть точка профиля  $L_z$ , наиболее удаленная от мнимой оси, с абсциссой  $x_D > 0$ , и абсциссы всех остальных точек  $L_z$  удовлетворяют соотношению  $0 < x < x_D$ . Будем считать, что точка разветвления потока  $A$  расположена на нижней поверхности  $L_z$ , и ее абсциссу обозначим  $x = x_A$ .

Обозначим через  $s$  дуговую абсциссу точки  $L_z$ , отсчитываемую от точки разветвления потока  $A$  на профиле  $L_z$  в положительном направлении, при котором область течения остается справа.

Пусть  $w(z) = \varphi + i\psi$  — комплексный потенциал течения вокруг  $L_z$ . Обозначая через  $v$  модуль скорости в точке  $z$ , через  $\eta$  угол наклона этой скорости к действительной оси, будем иметь  $w'(z) = ve^{-i\eta}$ .

Область течения обозначим  $D_z$ . Примем, что  $\psi = 0$  на прямой  $y = -p$ ,  $\psi = -Q = \text{const} < 0$  на профиле  $L_z$ .



На дуге  $ADB$  профиля  $L_z$  имеем  $\varphi'_s = v$ , на остальной части профиля  $\varphi'_s = -v$ .

Примем, что в точке разветвления  $A$  потенциал скорости принимает значение  $\varphi = 0$ . С увеличением дуговой абсциссы  $s$  точки  $z$  профиля потенциал скорости  $\varphi$  возрастает, его значение в точке  $B$  обозначим  $\varphi_B$ , считая, что  $\varphi$  на участке  $ADB$  профиля  $L_z$  является непрерывной функцией от  $s$ . Если потенциал скорости  $\varphi$  на участке  $AB$  нижней поверхности профиля является непрерывной функцией от  $s$ , то на этом участке (с уменьшением  $s$ )  $\varphi$  возрастает от нуля до значения в точке  $B$ , которое обозначим  $\varphi_H$ .

Разность  $\varphi_B - \varphi_H = \Gamma$  есть циркуляция скорости  $v$  по профилю  $L_z$ . Будем считать, что  $\Gamma > 0$ .

На указанной части  $BA$  нижней поверхности профиля  $L_z$  выделим точку  $N$ , в которой  $\varphi = \varphi_H/2$ , и в дальнейшем будем считать, что потенциал скорости  $\varphi$  на профиле является непрерывной функцией от  $s$  всюду, кроме точки  $N$ , при обходе  $L_z$  в положительном направлении начиная от точки  $N$  получает приращение, равное  $\varphi_B - \varphi_H = \Gamma$ .

Как показано в книге [1, с. 97–105], если контур  $L_z$  неизвестен, на нем задано распределение величины скорости  $v = v(s)$ ,  $0 \leq s \leq l$ , где  $l$  — периметр контура  $L_z$ , и требуется найти его форму, эта задача оказывается разрешимой лишь при выполнении условий разрешимости — условий замкнутости контура  $L_z$ . Сказанное справедливо и для профиля  $L_z$ , расположенного вблизи экрана. Методы преодоления возникающих при этом трудностей и подробный обзор работ по указанной проблеме изложены в книге [2].

В связи со сказанным представляется целесообразным рассмотрение задач об определении формы профиля  $L_z$ , которые оказываются разрешимыми.

В качестве такой задачи рассмотрим следующую: требуется найти форму профиля  $L_z$ , положение прямолинейной границы  $y = -p$ , т.е. число  $p$ , и величину скорости невозмущенного потока  $v_\infty$ , если на участке  $C^+BC^-$ , где  $C^+$  и  $C^-$  — точки соответственно верхней и нижней поверхности  $L_z$ , потенциал скорости  $\varphi$  задан как функция абсциссы  $x$  точки  $L_z$ , а на участке  $C^-DC^+$  — как функция ординаты  $y$  этой точки в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi^+(x), & 0 \leq x \leq x_C, & & x \in BC^+, \\ \varphi &= \varphi^-(x), & 0 \leq x \leq x_C, & & x \in BC^-, \\ \varphi &= \varphi(y), & y_{C^-} \leq y \leq y_{C^+}, & & y \in C^-DC^+, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\varphi^+(x_C) = \varphi(y_{C^+})$ ,  $\varphi^-(x_C) = \varphi(y_{C^-})$ ,  $x_C$ ,  $y_{C^-}$ ,  $y_{C^+}$  — заданные числа,  $0 < x_A < x_C < d$ ,  $x_C$  — абсцисса точек  $C^+$ ,  $C^-$ ,  $y_{C^+}$ ,  $y_{C^-}$  — ординаты точек соответственно  $C^+$ ,  $C^-$ ,  $y_{C^+} > y_{C^-}$ ,  $x_A$  — заданная абсцисса точки  $A$ , величина  $d = x_D$  определяется в процессе решения, причем  $\varphi^+(0) = \varphi_B$ ,  $\varphi^-(x_N + 0) = \varphi_H/2$  — заданные числа,  $\varphi_B > \varphi_H > 0$ ,  $x_N$  — абсцисса вышеуказанной точки  $N$ .

Будем считать, что  $\varphi^\pm(x)$ ,  $\varphi(y)$  — дифференцируемые функции, производные которых удовлетворяют условию Гельдера в интервалах их задания, включая концы, причем  $\varphi'(y) > 0$  на  $C^-DC^+$ ,  $\varphi'(x) < 0$  на  $BC^+$  и  $BA$ ,  $\varphi'_x > 0$  на  $AC^-$ , исключая точку  $A$ ,  $\varphi^{+'}(0) = \varphi^{-'}(0) < 0$ .

Примем, что в окрестности точки  $x = x_A$  справедливо представление  $(\varphi^-(x))'_x = \Phi(x) \cdot (x - x_A)$ , где  $\Phi(x)$  — функция, удовлетворяющая условию Гельдера в указанной окрестности точки  $x_A$ ,  $\Phi(x_A) > 0$ . Уместно отметить, что  $\varphi^-(x_N + 0) = \varphi_H/2$ ,  $\varphi^-(x_N - 0) = \varphi_B - \varphi_H/2$ . Будем считать, что  $(\varphi^-(x))'|_{x=x_N+0} = (\varphi^-(x))'|_{x=x_N-0}$ .



В соответствии с условиями (1) на  $L_z$  являются заданными точки  $x_C + iy_{C-}$ ,  $x_C + iy_{C+}$ , выбор которых влияет на форму  $L_z$ .

Учитывая, что  $v = \varphi'_s$  на  $ADB$ ,  $v = -\varphi'_s$  на  $BA$ , имеем

$$v = \varphi'_x \cos \eta, \quad x \in C^+BC^-, \quad v = \varphi'_y \sin \eta, \quad y \in C^-DC^+. \quad (2)$$

Аналогично тому, как это сделано в книге [1, с. 97–105], целесообразно считать, что заданы производные  $\varphi'_x$ ,  $\varphi'_y$  на участках соответственно  $C^+BC^-$ ,  $C^-DC^+$  контура  $L_z$ . Тогда значения потенциала скорости  $\varphi$  на искомом профиле  $L_z$  находятся интегрированием с соблюдением вышеуказанных свойств потенциала скорости, в частности,

$$\varphi_B = \int_{x_C}^0 (\varphi^+(x))'_x dx + \int_{y_{C-}}^{y_{C+}} \varphi'(y) dy + \int_{x_A}^{x_C} (\varphi^-(x))'_x dx, \quad \varphi_H = \int_{x_A}^0 (\varphi^-(x))'_x dx, \quad (3)$$

$\Gamma = \varphi_B - \varphi_H > 0$  — циркуляция скорости вдоль  $L_z$ .

При задании значений производных потенциала скорости надо учесть, что для практически используемых профилей на небольшой по размерам (по сравнению с хордой профиля) дуге  $C^-DC^+$  значения  $\sin \eta$  формулы (2) близки к единице (в точке  $D \sin \eta = 1$ ), поэтому в точке дуги  $C^-DC^+$  в силу (2) значение скорости  $v = \varphi'_y \sin \eta$  будет близко к значению в этой точке производной  $\varphi'_y$  (в точке  $D v = \varphi'_y$ ), на остальной части профиля, исключая небольшую по длине дугу, содержащую заднюю кромку, значение  $|\cos \eta|$  близки к единице, следовательно, распределение скорости  $v = \varphi'_x \cos \eta$  близко к распределению  $|\varphi'_x|$ . (Сказанное справедливо, в частности, для профиля  $L_z$ , когда  $\sin \eta \geq 1/\sqrt{2}$  на  $C^-DC^+$  и  $|\cos \eta| \geq 1/\sqrt{2}$  на вышеуказанной остальной части  $L_z$ .)

Таким образом, рассматриваемая в настоящей статье задача является достаточно близким аналогом вышеуказанной задачи из работы [1, с. 97–105].

## 1. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Поступая, как и в книге [1, с. 97–105] (в плоскости комплексного переменного  $z$ ), область течения  $D_z$  разрежем по линии, соединяющей точку  $N$  профиля  $L_z$  с точкой  $K$  прямой  $y = -p$ , на берегах разреза которой потенциал скорости  $\varphi$  принимает постоянные значения. Правый и левый берега этого разреза (при движении от точки  $N$  к точке  $K$ ) обозначим соответственно  $N''K''$  и  $N'K'$ . Тогда  $\varphi = \varphi_B - \varphi_H/2$  на  $N''K''$  и  $\varphi = \varphi_H/2$  на  $N'K'$ . Здесь  $\varphi_B$ ,  $\varphi_H$  обозначают то же, что и в (3).

Область  $D_z$  с указанным разрезом функцией  $w = w(z)$  отображается конформно на область  $D_w$  в плоскости  $w = \varphi + i\psi$ , причем область  $D_w$  представляет собой полуплоскость  $\psi < 0$ , из которой исключены точки отрезка  $AB$ :  $w = \varphi - iQ$ ,  $0 \leq \varphi \leq \varphi_B$ , и точки прямоугольника  $K'N'N''K''$ :  $w = \varphi + i\psi$ ,  $\varphi_H/2 \leq \varphi \leq \varphi_B - \varphi_H/2$ ,  $-Q < \psi < 0$ . Здесь и всюду в дальнейшем соответствующие точки в различных плоскостях обозначаются одними и теми же буквами.

Следуя [3, с. 229–234], введем плоскость комплексного переменного  $u = u_1 + iu_2$  и в ней возьмем прямоугольник  $D_u$ :  $-\omega_1 < u < \omega_1$ ,  $0 < u_2 < \omega_3/i$ ; задавая заранее значение  $\omega_1$ , отображим конформно область  $D_u$  на область  $D_w$  так, чтобы части границы области  $D_w$ , лежащей на действительной оси, отвечало верхнее основание  $D_u$ , а соответствующий профилю  $L_z$  участок  $N'ADB''N''$  границы области  $D_w$  переходил в нижнее основание  $D_u$ , точкам области  $D_w$ , для которых  $\varphi = \varphi_B/2$ ,  $\psi \leq -Q$ ,



отвечали соответствующие точки мнимой оси  $u_2$ , для которых  $0 \leq u_2 < \omega_3/i$  (при этом боковые стороны вышеуказанного прямоугольника в плоскости  $w$  переходят в соответствующие боковые стороны  $D_u$ ). Это отображение осуществляется функцией, использованной в работе [4],

$$w = w_1(u) \equiv B_2 \zeta(u - \omega_3) + B_1(u - \omega_3) + B_0, \quad (4)$$

если для действительных чисел  $B_2, B_1, B_0, \omega_3/i$  выполняются соотношения

$$B_0 = \varphi_B/2, \quad Q = B_2 \zeta(\omega_3)/i + B_1 \omega_3/i, \quad B_1 = B_2 \mathfrak{P}(u_{1A} - \omega_3), \quad (5)$$

$$B_2 = -\frac{\varphi_B - \varphi_H}{2[\zeta(\omega_1) + \omega_1 \mathfrak{P}(u_{1A} - \omega_3)]}, \quad (6)$$

Кроме того,

$$\zeta(\omega_1) + \omega_1 \mathfrak{P}(u_{1A} - \omega_3) = [\zeta(u_{1A} - \omega_3) - (\omega_1 - u_{1A}) \mathfrak{P}(u_{1A} - \omega_3)] \frac{\varphi_B - \varphi_H}{\varphi_H}, \quad (7)$$

где  $u_{1A}$  — абсцисса  $u_1$  точки  $A$  в плоскости  $u$ ,  $0 < u_{1A} < \omega_1$ .

Для простоты будем считать, что  $\omega_3/i > 0$  — заданное число. Из уравнения (7) определим  $u_{1A}$ , затем по формулам (5), (6) вычислим  $B_0, Q, B_1, B_2$ . Тогда функция (4) будет определена. В дальнейшем ее будем считать известной. В силу симметрии координата точки  $B$  в плоскости  $u$  равна  $u = u_{1B} = -u_{1A}$ .

В формулах (4)–(7)  $\mathfrak{P}(u) = \mathfrak{P}(u; 2\omega_1; 2\omega_3)$ ,  $\zeta(u) = \zeta(u; 2\omega_1; 2\omega_3)$  — функции Вейерштрасса, построенные для периодов  $2\omega_1, 2\omega_3$  [5, с. 337–406].

Отобразим конформно прямоугольник  $D_u$  на кольцо  $q < |\zeta^*| < 1$ , расположенное в плоскости  $\zeta^* = \rho e^{i\gamma}$  и разрезанное по отрезку  $(q, 1)$  действительной оси, функцией

$$u = u(\zeta^*) \equiv \omega_1 - \frac{\omega_1}{\pi i} (\ln \zeta^* - \ln q),$$

причем  $q$  определяется из равенства  $\frac{\omega_1}{\pi i} \ln q = \omega_3$ ;  $\ln \zeta^*$  есть однозначная ветвь  $\ln \zeta^* = \ln \rho + i\gamma$ ,  $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ . Точкам  $A$  и  $B$  отвечают соответственно  $\zeta^* = q e^{i\gamma_A}$  и  $\zeta^* = \zeta_B^* = q e^{i\gamma_B}$ ,  $\gamma_B = 2\pi - \gamma_A$ ,  $\gamma_A = \frac{\pi}{\omega_1}(\omega_1 - u_{1A})$ . Здесь  $\gamma_A < \pi$ ,  $\gamma_B > \pi$ .

Обозначим  $\omega(\zeta^*) = w_1[u(\zeta^*)]$ . Функция

$$w = \omega(\zeta^*) \equiv B_2 \zeta \left( \omega_1 - \frac{\omega_1}{\pi i} \ln \zeta^* \right) + B_1 \left( \omega_1 - \frac{\omega_1}{\pi i} \ln \zeta^* \right) + B_0 \quad (8)$$

отображает конформно вышеуказанное кольцо с разрезом в плоскости  $\zeta^*$  на область  $D_w$ . Ясно, что производная  $w'_{\zeta^*} = \omega'(\zeta^*)$  аналитична в области  $D_{\zeta^*}$  — кольце  $q < |\zeta^*| < 1$ , так как в совпадающих точках берегов вышеуказанного разреза она имеет одинаковые значения.

Обозначим

$$\varphi_1(\gamma) = \operatorname{Re} \omega(q e^{i\gamma}) = \operatorname{Re} \left[ B_2 \zeta \left( \omega_1 - \frac{\omega_1}{\pi} \gamma - \omega_3 \right) + B_1 \left( \omega_1 - \frac{\omega_1}{\pi} \gamma - \omega_3 \right) + B_0 \right]. \quad (9)$$

## 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть  $z = z(\zeta^*)$  есть аналитическая в кольце  $D_{\zeta^*}$  функция, определяемая соотношением  $w(z) = \omega(\zeta^*)$ , она осуществляет конформное отображение области  $D_{\zeta^*}$  на  $D_z$ , при котором точке  $\zeta^* = -1$  отвечает  $z = \infty$ . Эта функция  $z(\zeta^*)$  может быть



аналитически продолжена через окружность  $|\zeta^*| = 1$ . Следовательно, точка  $\zeta^* = -1$  является простым полюсом функции  $z(\zeta^*)$ . Поэтому точка  $\zeta^* = -1$  является полюсом второго порядка производной  $z'(\zeta^*)$ .

Граничные значения функции  $z(\zeta^*)$  обозначим через  $z(e^{i\gamma}) = x_0(\gamma) + iy_0(\gamma)$ ,  $z(qe^{i\gamma}) = x_1(\gamma) + iy_1(\gamma)$ . Функция

$$Z(\zeta^*) = i\zeta^* z'(\zeta^*), \quad (10)$$

аналитическая в кольце  $D_{\zeta^*}$  кроме полюса  $\zeta^* = -1$ , имеет граничные значения

$$Z(e^{i\gamma}) = (z(e^{i\gamma}))'_\gamma = x'_0(\gamma) + iy'_0(\gamma), \quad Z(qe^{i\gamma}) = (z(qe^{i\gamma}))'_\gamma = x'_1(\gamma) + iy'_1(\gamma). \quad (11)$$

На основании равенства  $w(z) = \omega(\zeta^*)$  при  $\zeta^* = qe^{i\gamma}$  с учетом (1), (9) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \varphi^+(x) &= \varphi_1(\gamma), & \gamma_{C^+} < \gamma < \gamma_B, \\ \varphi^-(x) &= \varphi_1(\gamma), & \gamma_B < \gamma < 2\pi, & \quad 0 < \gamma < \gamma_{C^-}, \\ \varphi(y) &= \varphi_1(\gamma), & \gamma_{C^-} < \gamma < \gamma_{C^+}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$\gamma_{C^-}, \gamma_{C^+}$  есть значения  $\gamma$ , при которых соответственно  $\varphi_1(\gamma_{C^+}) = \varphi^+(x_C)$ ,  $\varphi_1(\gamma_{C^-}) = \varphi^-(x_C)$ . Из первых двух равенств соотношения (12) найдем функцию  $x = x_1(\gamma)$ ,  $0 \leq \gamma < \gamma_{C^-}$ ,  $\gamma_{C^+} < \gamma < 2\pi$ , из третьего — функцию  $y_1(\gamma)$ ,  $\gamma_{C^-} < \gamma < \gamma_{C^+}$ . Следовательно, будут известны значения

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} z(qe^{i\gamma}) &= x_1(\gamma), & \gamma_{C^+} < \gamma < 2\pi, & \quad 0 \leq \gamma < \gamma_{C^-}, \\ \operatorname{Re} [e^{i\pi/2} z(qe^{i\gamma})] &= -y_1(\gamma), & \gamma_{C^-} < \gamma < \gamma_{C^+}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

На прямолинейной границе области  $D_z$  имеем  $y = -p$ , поэтому

$$\operatorname{Re} [z(e^{i\gamma}) e^{-i\frac{3\pi}{2}}] = p, \quad 0 \leq \gamma < 2\pi. \quad (14)$$

Мы получили краевые условия для искомой функции  $z(\zeta^*)$ . Так как в дальнейшем понадобятся значения производных  $(z(e^{i\gamma}))'_\gamma$ ,  $(z(qe^{i\gamma}))'_\gamma$ , целесообразно найти непосредственно выражения для этих последних производных, используя соответствующие им краевые условия.

Дифференцируя по  $\gamma$  условия (13), (14), с учетом (10), (11) получим:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} Z(qe^{i\gamma}) &= x'_1(\gamma), & \gamma_{C^+} < \gamma < 2\pi, & \quad 0 \leq \gamma < \gamma_{C^-}, \\ \operatorname{Re} [e^{i\pi/2} Z(qe^{i\gamma})] &= -y'_1(\gamma), & \gamma_{C^-} < \gamma < \gamma_{C^+}, \\ \operatorname{Re} [e^{-i3\pi/2} Z(e^{i\gamma})] &= 0, & 0 \leq \gamma < 2\pi. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Нужно найти аналитическую в кольце  $D_{\zeta^*}$  функцию  $Z(\zeta^*)$ , имеющую полюс  $\zeta^* = -1$  второго порядка и удовлетворяющую последним краевым условиям.

Для решения последней задачи введем в рассмотрение функцию

$$Z_1(\zeta^*) = (\zeta^* + 1)^2 Z(\zeta^*), \quad (16)$$

однозначную и аналитическую в кольце  $D_{\zeta^*}$  и ограниченную в окрестности точки  $\zeta^* = -1$ . Тогда согласно (15) для функции  $Z_1(\zeta^*)$  получаем краевую задачу Гильберта со следующим краевым условием:

$$\operatorname{Re} [e^{-i\nu(\tau)} Z_1(\tau)] = |\tau + 1|^2 m(\tau), \quad (17)$$



где  $\tau = e^{i\gamma}$  или  $\tau = qe^{i\gamma}$ ,

$$\left. \begin{aligned} m(e^{i\gamma}) &\equiv 0, & 0 \leq \gamma < 2\pi; \\ m(qe^{i\gamma}) &= x'_1(\gamma), & 0 \leq \gamma < \gamma_{C-}, & \gamma_{C+} < \gamma < 2\pi; \\ m(qe^{i\gamma}) &= -y'_1(\gamma), & \gamma_{C-} < \gamma < \gamma_{C+}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \nu(e^{i\gamma}) &= \frac{3\pi}{2} + \gamma, & 0 \leq \gamma < 2\pi; \\ \nu(qe^{i\gamma}) &= 2 \arg(qe^{i\gamma} + 1), & 0 \leq \gamma < \gamma_{C-}, & \gamma_{C+} < \gamma < 2\pi; \\ \nu(qe^{i\gamma}) &= -\frac{\pi}{2} + 2 \arg(qe^{i\gamma} + 1), & \gamma_{C-} < \gamma < \gamma_{C+}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Причем

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} < \arg(qe^{i\gamma} + 1) < \frac{\pi}{2}, \\ \arg(e^{i\gamma} + 1)^2 = \gamma, & \quad 0 \leq \gamma < 2\pi. \end{aligned} \quad (20)$$

При решении этой задачи будем пользоваться результатами статьи [6] и учтем, что индекс задачи равен 2.

Краевое условие (17) запишем так:

$$\operatorname{Re} \left[ e^{-\tilde{\nu}(\tau)} \frac{Z_1(\tau)}{\tau - \zeta_1^*} \right] = \frac{|\tau + 1|^2 m(\tau)}{|\tau - \zeta_1^*|} \cos(\beta_1(\tau)n\pi), \quad (21)$$

где

$$\tilde{\nu}(\tau) = \nu(\tau) - \arg(\tau - \zeta_1^*) + \beta_1(\tau)n\pi. \quad (22)$$

Кроме того,  $\beta_1(\tau) = 0$  при  $|\tau| = 1$  и  $\beta_1(\tau) = 1$  при  $|\tau| = q$ ,  $n$  — целое число,  $\zeta_1^* = re^{i\alpha}$ ,  $q < r < 1$ ,  $0 \leq \alpha < \pi$ ,  $r$  — заданное число, под  $\arg(\tau - \zeta_1^*)$  будем понимать граничное значение определенной ветви  $\arg(\zeta^* - \zeta_1^*)$ , непрерывной и однозначной в кольце  $q < |\zeta^*| < 1$  с разрезом по линии, соединяющей точки  $\zeta^* = \zeta_1^*$  и  $\zeta^* = 1$  и лежащей внутри верхнего полукольца.

Выберем числа  $\alpha, n$  так, чтобы выполнялось равенство

$$\int_0^{2\pi} \tilde{\nu}(e^{i\gamma}) d\gamma - \int_0^{2\pi} \tilde{\nu}(qe^{i\gamma}) d\gamma \equiv \int_{L_{\zeta^*}} \tilde{\nu}(\tau) \frac{d\tau}{i\tau} = 0, \quad (23)$$

где  $L_{\zeta^*}$  означает границу кольца  $D_{\zeta^*}$  с направлением, при котором область  $D_{\zeta^*}$  остается слева.

Принимая во внимание, что

$$\int_0^{2\pi} \arg(e^{i\gamma} - \zeta_1^*) d\gamma - \int_0^{2\pi} \arg(qe^{i\gamma} - \zeta_1^*) d\gamma = -2\pi\alpha,$$

$\arg(qe^{i\gamma} + 1)$  — нечетная функция от  $\gamma$  в силу (20), с учетом формул (19), (22) равенство (23) представим так:

$$\alpha + \frac{5\pi - n \cdot 2\pi}{2} + \frac{1}{4}(\gamma_{C+} - \gamma_{C-}) = 0.$$

Здесь, взяв  $n = 3$ , определим

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}(\gamma_{C+} - \gamma_{C-}), \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

далее значения  $n, \alpha$  будем считать известными.



Введем в рассмотрение однозначную аналитическую в области  $D_{\zeta^*}$  функцию

$$T(\zeta^*) = \left( \frac{\zeta^* - qe^{i\gamma_{C+}}}{\zeta^* - qe^{i\gamma_{C-}}} \right)^{1/2}, \quad (24)$$

у которой  $\arg T(\zeta^*)$  есть непрерывная в кольце  $D_{\zeta^*}$  функция, принимающая на окружности  $|\zeta^*| = q$  значения, равные

$$\arg T(qe^{i\gamma}) = \begin{cases} (\gamma_{C+} - \gamma_{C-})/4, & 0 \leq \gamma < \gamma_{C-}, \\ -\pi/2 + (\gamma_{C+} - \gamma_{C-})/4, & \gamma_{C-} < \gamma < \gamma_{C+}, \\ (\gamma_{C+} - \gamma_{C-})/4, & \gamma_{C+} < \gamma < 2\pi. \end{cases} \quad (25)$$

Краевое условие (21) представим в виде

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\Phi(\tau)} Z_1(\tau)}{(\tau - \zeta_1^*) T(\tau)} \right] = \frac{|\tau + 1|^2 m(\tau)}{|\tau - \zeta_1^*| \cdot |T(\tau)|} \cos(\beta_1(\pi) 3\pi), \quad (26)$$

где

$$\Phi(\tau) = \tilde{\nu}(\tau) - \arg T(\tau). \quad (27)$$

Эта функция является непрерывной (дифференцируемой) на  $L_{\zeta^*}$  в силу (19), (22), (25).

Условие (23) есть условие однозначности аналитической в области  $D_{\zeta^*}$  функции, граничные значения действительной части которой равны  $\tilde{\nu}(\tau)$  [7, с. 238]. Так как  $\arg T(\tau) = \operatorname{Re}[-i \ln T(\tau)]$ , то  $\arg T(\tau)$  удовлетворяет условию, получаемому из (23) заменой  $\tilde{\nu}(\tau)$  на  $\arg T(\tau)$ . Следовательно, функция  $\Phi(\tau)$  формулы (27) также удовлетворяет аналогичному условию однозначности. В связи с этим введем в рассмотрение однозначную аналитическую в области  $D_{\zeta^*}$  функцию  $\chi(\zeta^*) = \Phi(\zeta^*) + i\Psi(\zeta^*)$ , граничные значения которой равны  $\chi(\tau) = \Phi(\tau) + i\Psi(\tau)$ , причем  $\operatorname{Re} \chi(\tau) = \Phi(\tau)$ . Как известно [7, с. 238], эта функция определяется формулой Виля:

$$\begin{aligned} \chi(\zeta^*) = & \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi(e^{i\gamma}) \zeta \left( \frac{\omega_1}{\pi i} \ln \zeta^* - \frac{\omega_1}{\pi} \gamma \right) d\gamma - \\ & - \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi(qe^{i\gamma}) \left[ \zeta \left( \frac{\omega_1}{\pi i} \ln \zeta^* - \frac{\omega_1}{\pi} \gamma + \omega_3 \right) - \zeta(\omega_3) \right] d\gamma. \end{aligned} \quad (28)$$

Причем

$$\begin{aligned} \Psi(e^{i\gamma_0}) = & \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi(e^{i\gamma}) \zeta \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\gamma_0 - \gamma) \right] d\gamma - \\ & - \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi(qe^{i\gamma}) \left[ \zeta \left( \frac{\omega_1}{\pi} (\gamma_0 - \gamma) + \omega_3 \right) - \zeta(\omega_3) \right] d\gamma, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \Psi(qe^{i\gamma_0}) = & \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi(e^{i\gamma}) \left[ \zeta \left( \frac{\omega_1}{\pi} (\gamma_0 - \gamma) + \omega_3 \right) - \zeta(\omega_3) \right] d\gamma - \\ & - \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi(qe^{i\gamma}) \zeta \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\gamma_0 - \gamma) \right] d\gamma, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $\zeta(u), \omega_1, \omega_3$  означают то же, что и ранее (парагр. 1).



Краевое условие (26) запишем так

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\chi(\tau)} Z_1(\tau)}{(\tau - \zeta_1^*) T(\tau)} \right] = c(\tau), \quad (31)$$

где

$$c(\tau) = \frac{|\tau + 1|^2 m(\tau)}{|\tau - \zeta_1^*| |T(\tau)|} e^{\Psi(\tau)} \cos(\beta_1(\tau) 3\pi). \quad (32)$$

Как и в работе [6], решение задачи с последним краевым условием будем искать в виде

$$\frac{e^{-i\chi(\zeta^*)} Z_1(\zeta^*)}{(\zeta^* - \zeta_1^*) T(\zeta^*)} = \tilde{\chi}(\zeta^*) + \frac{\nu_1 + i\nu_2}{\zeta^* - \zeta_1^*} + iC_0, \quad (33)$$

где  $\tilde{\chi}(\zeta^*)$  — новая неизвестная однозначная аналитическая в области  $D_{\zeta^*}$  функция,  $\nu_1, \nu_2, C_0$  — произвольные действительные постоянные.

В силу (31), (33) имеем

$$\operatorname{Re} \tilde{\chi}(\tau) = \tilde{c}(\tau), \quad (34)$$

где

$$\tilde{c}(\tau) = c(\tau) - \operatorname{Re} \frac{\nu_1 + i\nu_2}{\tau - \zeta_1^*} = c(\tau) - \nu_1 \frac{\cos(\theta(\tau))}{|\tau - \zeta_1^*|} - \nu_2 \frac{\sin(\theta(\tau))}{|\tau - \zeta_1^*|}, \quad (35)$$

где

$$\theta(\tau) = \arg(\tau - \zeta_1^*) \quad (36)$$

есть ветвь, указанная в формуле (22).

Так как функция  $\tilde{\chi}(\zeta^*)$  должна быть однозначной, то должно выполняться условие, аналогичное (23):

$$\int_0^{2\pi} \tilde{c}(e^{i\gamma}) d\gamma - \int_0^{2\pi} \tilde{c}(qe^{i\gamma}) d\gamma = 0. \quad (37)$$

Принимая во внимание, что

$$\int_{L_{\zeta^*}} \frac{1}{\tau - \zeta_1^*} \cdot \frac{d\tau}{i\tau} = \frac{2\pi}{\zeta_1^*},$$

с учетом (35) условие (37) представим в виде

$$\frac{2\pi}{r} (\nu_1 \cos \alpha + \nu_2 \sin \alpha) = \tilde{d}, \quad (38)$$

где

$$\tilde{d} = \int_0^{2\pi} [c(e^{i\gamma}) - c(qe^{i\gamma})] d\gamma.$$

Согласно (38) имеем

$$\nu_2 = \frac{\tilde{d} r}{2\pi \sin \alpha} - \nu_1 \cot \alpha. \quad (39)$$

Учитывая это, формулу (35) запишем так:

$$\tilde{c}(\tau) = \tilde{c}_1(\tau) - \nu_1 \tilde{c}_*(\tau), \quad (40)$$



где

$$\tilde{c}_1(\tau) = c(\tau) - \frac{\tilde{d}r}{2\pi \sin \alpha} \cdot \frac{\sin \theta(\tau)}{|\tau - \zeta_1^*|}, \quad (41)$$

$$\tilde{c}_*(\tau) = \frac{\cos \theta(\tau)}{|\tau - \zeta_1^*|} - \frac{\sin \theta(\tau)}{|\tau - \zeta_1^*|} \cot \alpha. \quad (42)$$

Функция  $\tilde{c}(\tau)$  формулы (40) удовлетворяет условию (37) по построению в силу (38) при любом значении постоянной  $\nu_1$ . Поэтому каждая из функций  $\tilde{c}_1(\tau)$ ,  $\tilde{c}_*(\tau)$  удовлетворяют условию, аналогичному (37) и записанному для названной функции. Следовательно, функция  $\tilde{\chi}(\zeta^*)$ , удовлетворяющая краевому условию (34), определяется по формуле Вилля, на основании которой с учетом (40) приходим к представлению

$$\tilde{\chi}(\zeta^*) = U(\zeta^*) - \nu_1 V(\zeta^*), \quad (43)$$

где  $U(\zeta^*) = U_1(\zeta^*) + iU_2(\zeta^*)$ ,  $(U_1(\zeta^*) = \operatorname{Re} U(\zeta^*), V(\zeta^*) = V_1(\zeta^*) + iV_2(\zeta^*)$ ,  $(V_1(\zeta^*) = \operatorname{Re} V(\zeta^*))$  — функции определяемые по формуле Вилля, когда известны граничные значения соответственно  $U_1(\tau) = \tilde{c}_1(\tau)$ ,  $V_1(\tau) = \tilde{c}_*(\tau)$ . Это означает, что функция  $U(\zeta^*)$  выражается формулой, получаемой из (28) заменой  $\chi(\zeta^*)$ ,  $\Phi(\tau)$  соответственно на  $U(\zeta^*)$ ,  $\tilde{c}_1(\tau)$ , и приходим к формулам, аналогичным (29), (30), для вычисления граничных значений  $U_2(\tau)$ , заменяя  $\Psi(\tau)$  на  $U_2(\tau)$ ,  $\Phi(\tau)$  на  $\tilde{c}_1(\tau)$ . Беря в последних формулах вместо  $U(\zeta^*)$ ,  $U_1(\tau) = \tilde{c}_1(\tau)$ ,  $U_2(\tau)$  соответственно  $V(\zeta^*)$ ,  $V_1(\tau) = \tilde{c}_*(\tau)$ ,  $V_2(\tau)$ , найдем  $V(\zeta^*)$ ,  $V_2(\tau)$ .

В формулу (33) подставим выражение (16) для  $Z_1(\zeta^*)$ , (39) для  $\nu_2$ , (43) для  $\tilde{\chi}(\zeta^*)$  и придем к формуле, по которой определяется функция  $i\zeta^* z'(\zeta^*) = Z(\zeta^*)$ :

$$i\zeta^* z'(\zeta^*) = \tilde{T}(\zeta^*) \left\{ U(\zeta^*) + i \frac{\tilde{d}r}{2\pi \sin \alpha \cdot (\zeta^* - \zeta_1^*)} - \nu_1 \left[ V(\zeta^*) - \frac{1 - i \cot \alpha}{\zeta^* - \zeta_1^*} \right] + iC_0 \right\}, \quad (44)$$

где

$$\tilde{T}(\zeta^*) = \frac{(\zeta^* - \zeta_1^*) e^{i\chi(\zeta^*)}}{(\zeta^* + 1)^2} \left( \frac{\zeta^* - qe^{i\gamma C^+}}{\zeta^* - qe^{i\gamma C^-}} \right)^{1/2}, \quad (45)$$

здесь в правой части последний множитель есть функция  $T(\zeta^*)$  формулы (24).

В силу сказанного выше о формулах для определения  $U(\zeta^*)$ ,  $V(\zeta^*)$  имеем (по аналогии с (30))

$$U_2(qe^{i\gamma_0}) = \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \tilde{c}_1(e^{i\gamma}) \left[ \zeta \left( \frac{\omega_1}{\pi} (\gamma_0 - \gamma) + \omega_3 \right) - \zeta(\omega_3) \right] d\gamma - \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \tilde{c}_1(qe^{i\gamma}) \zeta \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\gamma_0 - \gamma) \right] d\gamma,$$

$$V_2(qe^{i\gamma_0}) = \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \tilde{c}_*(e^{i\gamma}) \left[ \zeta \left( \frac{\omega_1}{\pi} (\gamma_0 - \gamma) + \omega_3 \right) - \zeta(\omega_3) \right] d\gamma - \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \tilde{c}_*(qe^{i\gamma}) \zeta \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\gamma_0 - \gamma) \right] d\gamma,$$

где  $\tilde{c}_1(\tau)$ ,  $\tilde{c}_*(\tau)$  определяются формулами соответственно (41), (42) с учетом (32), (36).

Введем обозначения

$$\tilde{U}_2(\tau) = U_2(\tau) + \frac{\tilde{d}r}{2\pi \sin \alpha} \cdot \frac{\cos \theta(\tau)}{|\tau - \zeta_1^*|}, \quad \tilde{V}_2(\tau) = V_2(\tau) + \frac{\sin \theta(\tau) + \cos \theta(\tau) \cdot \cot \alpha}{|\tau - \zeta_1^*|}.$$



В соотношении (44) перейдем к пределу при  $\zeta^* \rightarrow qe^{i\gamma}$ ,  $|\zeta^*| > q$ . Учитывая, что предел левой части согласно (11) равен  $x'_1(\gamma) + iy'_1(\gamma)$ , получим:

$$y'_1(\gamma) = -|T(\tau)| \left\{ \tilde{U}_2(\tau) - \nu_1 \tilde{V}_2(\tau) + C_0 \right\}, \quad \tau = qe^{i\gamma}, \quad 0 \leq \gamma < \gamma_{C-}, \quad \gamma_{C+} < \gamma < 2\pi, \quad (46)$$

$$x'_1(\gamma) = -|T(\tau)| \left\{ \tilde{U}_2(\tau) - \nu_1 \tilde{V}_2(\tau) + C_0 \right\}, \quad \tau = qe^{i\gamma}, \quad \gamma_{C-} < \gamma < \gamma_{C+}. \quad (47)$$

Зная производную  $x'_1(\gamma)$  формулы (47), вычислим

$$x_1(\gamma) = x_{C-} + \int_{\gamma_{C-}}^{\gamma} x'_1(\gamma) d\gamma, \quad \gamma_{C-} < \gamma < \gamma_{C+}. \quad (48)$$

Ясно, что при этом должно выполняться условие  $x_1(\gamma_{C+}) = x_{C-} + \int_{\gamma_{C-}}^{\gamma_{C+}} x'_1(\gamma) d\gamma = x_{C+} = x_{C-}$ , т.е. условие

$$\int_{\gamma_{C-}}^{\gamma_{C+}} x'_1(\gamma) d\gamma = 0, \quad (49)$$

которому должна удовлетворять производная  $x'_1(\gamma)$  формулы (47).

Аналогично, имея  $y'_1(\gamma)$  формулы (46), получим:

$$\left. \begin{aligned} y_1(\gamma) &= y_{C+} + \int_{\gamma_{C+}}^{\gamma} y'_1(\gamma) d\gamma, & \gamma_{C+} < \gamma < 2\pi, \\ y_1(\gamma) &= y_{C+} + \int_{\gamma_{C+}}^{2\pi} y'_1(\gamma) d\gamma + \int_0^{\gamma} y'_1(\gamma) d\gamma, & 0 \leq \gamma < \gamma_{C-}. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Причем последняя функция должна удовлетворять соотношению  $y_1(\gamma_{C-}) = y_{C-}$  — заданному числу, следовательно, производная  $y'_1(\gamma)$  формулы (46) должна удовлетворять равенству

$$\int_{\gamma_{C+}}^{2\pi} y'_1(\gamma) d\gamma + \int_0^{\gamma_{C-}} y'_1(\gamma) d\gamma = y_{C-} - y_{C+}. \quad (51)$$

Выражение (47) подставим в равенство (49), выражение (46) — в равенство (51) и будем иметь

$$\begin{aligned} & \nu_1 \int_{\gamma_{C-}}^{\gamma_{C+}} \tilde{T}(\tau) \tilde{V}_2(\tau) d\gamma - C_0 \int_{\gamma_{C-}}^{\gamma_{C+}} \tilde{T}(\tau) d\gamma = \int_{\gamma_{C-}}^{\gamma_{C+}} \tilde{T}(\tau) \tilde{U}_2(\tau) d\gamma, \\ & \nu_1 \left( \int_{\gamma_{C+}}^{2\pi} + \int_0^{\gamma_{C-}} \right) \tilde{T}(\tau) \tilde{V}_2(\tau) d\gamma - C_0 \left( \int_{\gamma_{C+}}^{2\pi} + \int_0^{\gamma_{C-}} \right) \tilde{T}(\tau) d\gamma = \\ & = y_{C-} - y_{C+} + \left( \int_{\gamma_{C+}}^{2\pi} + \int_0^{\gamma_{C-}} \right) \tilde{T}(\tau) \tilde{U}_2(\tau) d\gamma, \end{aligned}$$

где  $\tau = qe^{i\gamma}$ .



Мы получили систему двух уравнений с неизвестными  $\nu_1, C_0$ . Ограничимся рассмотрением общего случая, когда определитель системы отличен от нуля, найдем значения  $\nu_1, C_0$  и в дальнейшем будем считать их известными.

Формулы (48), (50) определяют искомую координату точки контура  $L_z$ , когда другая координата известна (в интервале  $(\gamma_{C^-}, \gamma_{C^+}$  известна функция  $y_1(\gamma)$ , в интервалах  $(\gamma_{C^+}, 2\pi)$ ,  $(0, \gamma_{C^-})$  — функция  $x_1(\gamma)$ ).

Соотношения (49), (51) представляют собой условия замкнутости контура  $L_z$  — условия однозначности функции  $z(\zeta)$ , производная которой определяется формулой (44).

Обозначим  $|w'(z)| = v = v_1(\gamma)$  при  $z = z(qe^{i\gamma})$ , на основании равенства  $w(z) = \omega(\zeta^*)$  при  $\zeta^* = qe^{i\gamma}$ , замечая, что  $\varphi_1(\gamma) = \omega(qe^{i\gamma}) + iQ$ , придем к формуле

$$v_1(\gamma) = |\varphi'(\gamma)| / \sqrt{(x_1'(\gamma))^2 + (y_1'(\gamma))^2}, \quad 0 \leq \gamma < 2\pi, \quad (52)$$

для определения распределения величины скорости  $v$  вдоль профиля  $L_z$ .

Легко проверить, что в окрестности точки  $\zeta^* = -1$  для производной функции (8) справедливо разложение

$$w'_{\zeta^*} = \omega'(\zeta^*) = -\frac{B_2\pi i}{\omega_1(\zeta^* + 1)^2} (1 + n_2(\zeta^* + 1)^2 + n_3(\zeta^* + 1)^2 + \dots).$$

Учитывая это и формулу (44), из равенства  $w'(z) = \frac{\omega'(\zeta^*)}{z'(\zeta^*)}$  найдем  $v_\infty = \left| \frac{\omega'(\zeta^*)}{z'(\zeta^*)} \right|_{\zeta^*=-1}$ .

Используя найденные по формуле (44) значения  $z'(\zeta^*)$  и учитывая, что  $z(\zeta^*) = \int_{\zeta_B^*}^{\zeta^*} z'(\zeta^*) d\zeta^* + z(\zeta_B^*)$ , вычислим  $p = \text{Im} \int_q^1 z'(\rho e^{i\gamma_B}) i e^{i\gamma_B} d\rho + \text{Im} z(qe^{i\gamma_B})$ , где  $\text{Im} z(qe^{i\gamma_B}) = y_1(\gamma_B)$  — значению при  $\gamma = \gamma_B < 2\pi$  функции  $y_1(\gamma)$ , определяемой по первой формуле (50).

На основании результатов Н. И. Мусхелишвили, приведенных в книге [8, с. 88–95] (см. так же [9, с. 72–74]), формул, приведенных в работе [10], можно показать, что определяемая по формуле (44) производная  $z'(\zeta^*)$  непрерывна в точке  $C^+$ , в точке  $C^-$  эта производная обращается в бесконечность, что непосредственно следует из формул (44), (45), точка  $C^-$  является угловой точкой профиля  $L_z$ , скорость  $v = v_1(\gamma_{C^-})$  в ней согласно (52) обращается в нуль.

Исходные функции должны быть заданы так, чтобы контур  $L_z$  был однолиственным, в частности, не имел точек самопересечения. Эта проблема требует особого рассмотрения.

В частности, целесообразно считать, что выражение в фигурных скобках формулы (47) в точке  $C^-$  неположительно:  $\tilde{U}_2(\tau_{C^-}) - \nu_1 \tilde{V}_2(\tau_{C^-}) + C_0 \leq 0$ ,  $\tau_{C^-} = qe^{i\gamma_{C^-}}$ , ибо, в противном случае, область  $D_z$  будет неоднолистной. Ясно, что это неравенство связано с поведением линии  $L_z$  вблизи точки  $C^-$  и не является достаточным условием однолистности области  $D_z$ , оно наверняка выполняется, если исходные данные близки к таковым для реально используемых профилей.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, получено решение задачи, результаты которого могут найти применение в приложениях, в частности, при проектировании летательных аппаратов типа экранопланов.



## Библиографический список

1. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1965. 333 с.
2. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. М. : Физматлит ВО «Наука», 1994. 436 с.
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М. : Наука, 1980. 448 с.
4. Лабуткин А. Г., Салимов Р. Б. Видоизмененная обратная краевая задача для крылового профиля, расположенного вблизи прямолинейного экрана // Изв. вузов. Математика. 2008. № 2. С. 32–40.
5. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций : в 2 т. Т. 2. М. : Наука, 1968. 624 с.
6. Салимов Р. Б., Селезнев В. В. Решение краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами для кольца // Тр. сем. по краев. задачам. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1980. Вып. 17. С. 140–157.
7. Ахиезер Н. И. Элементы теории аналитических функций. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1970. 304 с.
8. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968. 513 с.
9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с.
10. Салимов Р. Б. К вычислению сингулярных интегралов с ядром Гильберта // Изв. вузов. Математика. 1970. № 12. С. 93–96.

---

### Образец для цитирования:

Салимов Р. Б. Решение обратной краевой задачи для крылового профиля, расположенного вблизи прямолинейного экрана, в новой постановке // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 2. С. 183–195. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-183-195

---

## The Solution of the Inverse Boundary Value Problem for a Wing Profile, Located Close to Rectilinear Screen, in a New Setting

R. B. Salimov

Rasih B. Salimov, <https://orcid.org/0000-0002-4717-3676>, Kazan State Architecture and Building University, 1, Zelenaya Str., Kazan, 420043, Russia, salimov.rsb@gmail.com

The paper shows the inverse boundary value problem for the airfoil located near the solid rectilinear boundary and streamlined by a potential flow of the incompressible inviscid fluid with speed parallel to the boundary, when we need to find a form and a position of the airfoil by a given distribution of speed potential as a function of the ordinates of the points of the profile on the small part of ones, containing a leading edge, and as a function with the second order pole, then the abscissa of the point of the profile on the rest and by the given difference of values of the current function on the profile and on the rectilinear boundary (or the values associated with the known difference). The problem is reduced to the mixed boundary value problem for function analytic in the annulus with the second-order pole, then the problem is narrowed to the Hilbert boundary problem for the single-valued analytic function in the annulus with linear boundary condition which connects the real and the imaginary parts of the function. The solution of the final problem is based on developed methods with the use of Ville formulas, then it will be possible to define a single-valued analytic function in the annulus by the known boundary conditions of the real part. given boundary values of its real part.

*Key words:* inverse boundary problem, aerohydrodynamics, wing profile, incompressible inviscid fluid, complex potential.



## References

1. Tumashev G. G., Nuzhin M. T. *Obratnye kraevye zadachi i ikh prilozheniya* [Inverse boundary value problems and their applications]. Kazan, Kazan Univ. Press, 1965. 333 p. (in Russian).
2. Elizarov A. M., Ilinsky N. B., Potashev A. B. *Obratnye kraevye zadachi aerogidrodinamiki* [Inverse boundary value problems of aerohydrodynamics]. Moscow, Fizmatlit VO „Nauka“, 1994. 436 p. (in Russian).
3. Sedov L. I. *Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki* [Flat problems of hydrodynamics and aerodynamics]. Moscow, Nauka, 1980. 448 p. (in Russian).
4. Labutkin A. G., Salimov R. B. A modified inverse boundary value problem for an airfoil located near a rectilinear screen. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2008, vol. 52, iss. 2, pp. 30–38. DOI: 10.1007/s11982-008-2005-6
5. Markushevich A. I. *The theory of analytic functions*, in 2 vol., vol. 2. Moscow, Nauka, 1968. 624 p. (in Russian).
6. Salimov R. B., Seleznev V. V. The solution of a Hilbert boundary value problem with discontinuous coefficients for an annulus. *Trudy Sem. Kraev. Zadacham* [Proc. of the Seminar on Boundary Value Problems]. Kazan, Kazan Univ. Press, 1980, iss. 17, pp. 140–157 (in Russian).
7. Akhiezer N. I. *Elementy teorii ellipticheskikh funktsii* [Elements of the theory of analytic functions]. Moscow, Nauka, 1970. 304 p. (in Russian).
8. Muskhelishvili N. I. *Singular integral equations*. Moscow, Nauka, 1968. 513 p. (in Russian).
9. Gakhov F. D. *Boundary value problems*. Moscow, Nauka, 1977. 640 p. (in Russian).
10. Salimov R. B. On the computation of singular integrals with Hilbert kernel. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1970, no. 12, pp. 93–96 (in Russian).

---

### Cite this article as:

Salimov R. B. The Solution of the Inverse Boundary Value Problem for a Wing Profile, Located Close to Rectilinear Screen, in a New Setting. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 2, pp. 183–195 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-183-195

---



УДК 517.587

## ПОЛИНОМЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПО СОБОЛЕВУ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПОЛИНОМАМИ ШАРЛЬЕ

И. И. Шарапудинов, И. Г. Гусейнов

Шарапудинов Идрис Идрисович, доктор физико-математических наук, заведующий отделом математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, 367025, Россия, Махачкала, М. Гаджиева, 45, sharapud@mail.ru

Гусейнов Ибрагим Гусейнович, аспирант, Дагестанский государственный университет, Россия, 367000, Махачкала, М. Гаджиева, 43-а; инженер-исследователь отдела математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, Россия, 367025, Махачкала, М. Гаджиева, 45, ibraa2g@gmail.com

Рассмотрена задача о конструировании полиномов  $s_{r,n}^\alpha(x)$ , порожденных полиномами Шарлье  $s_n^\alpha(x)$  и ортонормированных относительно скалярного произведения типа Соболева вида  $\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0) \Delta^k g(0) + \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^r f(j) \Delta^r g(j) \rho(j)$ , где  $\rho(x) = \alpha^x e^{-\alpha} / \Gamma(x+1)$ . Показано, что система полиномов  $s_{r,n}^\alpha(x)$ , порожденная полиномами Шарлье, полна в гильбертовом пространстве  $W_{l_\rho}^r$ , состоящем из дискретных функций, заданных на сетке  $\Omega = \{0, 1, \dots\}$ , в котором введено скалярное произведение  $\langle f, g \rangle$ . Найдена явная формула вида  $s_{r,k+r}^\alpha(x) = \sum_{l=0}^k b_l^r x^{[l+r]}$ , в которой  $x^{[m]} = x(x-1)\dots(x-m+1)$ . Установлена связь полиномов  $s_{r,n}^\alpha(x)$  с порождающими их ортонормированными классическими полиномами Шарлье  $s_n^\alpha(x)$  вида  $s_{r,k+r}^\alpha(x) = U_k^r \left[ s_{k+r}^\alpha(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} V_{k,\nu}^r x^{[\nu]} \right]$ , в которой для чисел  $U_k^r, V_{k,\nu}^r$  найдены явные выражения.

*Ключевые слова:* полиномы, ортогональные по Соболеву, полиномы Шарлье, скалярное произведение типа Соболева.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-196-205

### ВВЕДЕНИЕ

Теория полиномов, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева, получила в последние три десятилетия интенсивное развитие и нашла ряд важных приложений (см. [1–6] и цитированную там литературу). Характерной особенностью скалярных произведений типа Соболева является, в частности, то, что они, как правило, содержат слагаемые, которые «контролируют» поведение соответствующих ортогональных полиномов в одной или нескольких точках числовой оси. Например, часто рассматривают скалярное произведение вида

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a) g^{(\nu)}(a) + \int_a^b f^{(r)}(t) g^{(r)}(t) \rho(t) dt, \quad (1)$$

в котором  $f$  и  $g$  — функции, заданные на  $[a, b]$  и непрерывно дифференцируемые там  $r-1$  раз, для которых  $f^{(r-1)}(x)$  и  $g^{(r-1)}(x)$  абсолютно непрерывны и  $f^{(r)}(x), g^{(r)}(x) \in L_\rho^2(a, b)$ , где  $L_\rho^2(a, b)$  — пространство Лебега с весом  $\rho(x)$ . Следует отметить, что полиномы, ортогональные по Соболеву, по своим свойствам могут



весьма существенно отличаться от обычных ортогональных на интервале полиномов. Например, в некоторых случаях оказывается так, что полиномы, ортогональные по Соболеву на интервале  $(a, b)$ , могут иметь нули, совпадающие с одним или с обоими концами этого интервала. Это обстоятельство имеет важное значение для некоторых приложений, в которых требуется, чтобы значения частичных сумм ряда Фурье функции  $f(x)$  по рассматриваемой системе ортогональных полиномов совпали в концах интервала  $(a, b)$  со значениями  $f(a)$  и  $f(b)$ . Заметим, что обычные ортогональные с положительным на  $(a, b)$  весом полиномы этим важным свойством не обладают. Скалярное произведение (1) имеет одну особую точку, а именно точку  $a$ , в окрестности которой «контролируется» поведение соответствующих полиномов, ортогональных по Соболеву. Это достигается за счет наличия в скалярном произведении (1) слагаемого вида  $\sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a)$ .

В настоящей работе, следуя [7], мы рассмотрим дискретный аналог скалярного произведения (1) следующего вида:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0) \Delta^k g(0) + \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^r f(j) \Delta^r g(j) \rho(j), \quad (2)$$

где функции  $f$  и  $g$  заданы на множестве  $\Omega = \{0, 1, \dots\}$ ,  $\rho = \rho(j)$  — дискретная весовая функция, заданная на множестве  $\Omega$ . В случае, когда  $r = 0$  мы будем считать, что  $\sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0) \Delta^k g(0) = 0$ . При  $r \geq 1$  особой точкой в скалярном произведении (2) является  $x = 0$ , в которой «контролируется» поведение соответствующих ортогональных по Соболеву полиномов дискретной переменной, благодаря присутствию в (2) выражения  $\sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0) \Delta^k g(0)$ . Основное внимание будет уделено изучению свойств полиномов, ортогональных по Соболеву, порожденных классическими ортогональными полиномами Шарлье дискретной переменной.

## 1. СИСТЕМЫ ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ, ОРТОНОРМИРОВАННЫХ ПО СОБОЛЕВУ, ПОРОЖДЕННЫЕ ОРТОНОРМИРОВАННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Как уже отмечалось выше, системы дискретных функций, ортонормированных по Соболеву относительно скалярного произведения (2), порожденных заданной системой  $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ , ортонормированной на дискретном множестве  $\Omega = \{0, 1, \dots\}$  с весом  $\rho(x)$ , были рассмотрены в [7]. В дальнейшем нам понадобятся некоторые результаты из [7], поэтому мы вкратце напомним их в этом параграфе. С этой целью, следуя [7], введем некоторые обозначения и понятия.

Если целое  $k \geq 0$ , то положим  $a^{[k]} = a(a-1) \cdots (a-k+1)$ ,  $a^{[0]} = 1$  и рассмотрим следующие функции:

$$\psi_{r,k}(x) = \frac{x^{[k]}}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, r-1, \quad (3)$$

$$\psi_{r,k}(x) = \begin{cases} \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} \psi_{k-r}(t), & r \leq x, \\ 0, & x = 0, 1, \dots, r-1, \end{cases} \quad (4)$$

которые определены на сетке  $\Omega = \{0, 1, \dots\}$ . Рассмотрим некоторые важные разностные свойства системы функций  $\psi_{r,k}(x)$ , определенных равенствами (3) и (4).



Введем оператор конечной разности  $\Delta f: \Delta f(x) = f(x + 1) - f(x)$  и положим  $\Delta^{\nu+1} f(x) = \Delta \Delta^{\nu} f(x)$ . Имеет место следующий факт [7]:

$$\Delta^{\nu} \psi_{r,k}(x) = \begin{cases} \psi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } 0 \leq \nu \leq r-1, r \leq k, \\ \psi_{k-r}(x), & \text{если } \nu = r \leq k, \\ \psi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } \nu \leq k < r, \\ 0, & \text{если } k < \nu \leq r. \end{cases} \quad (5)$$

Пусть  $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  — положительная функция, для которой  $\sum_{x=0}^{\infty} \rho(x) < \infty$ . Обозначим через  $l_{\rho}$  пространство дискретных функций  $f, g, \dots$ , в котором скалярное произведение определяется обычным образом с помощью равенства  $(f, g) = \sum_{x \in \Omega} f(x)g(x)\rho(x)$ . Через  $W_{l_{\rho}}^r$  обозначим подпространство в  $l_{\rho}$ , состоящее из функций  $f, g, \dots$ , для которых определено скалярное произведение (2). Рассмотрим задачу об ортонормированности и полноте в  $W_{l_{\rho}}^r$  системы  $\{\psi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ , состоящей из функций, определенных равенствами (3) и (4). В работе [7] эта задача была решена для случая, когда  $l_{\rho} = W_{l_{\rho}}^r$ . В настоящей работе мы обобщаем этот результат на тот случай, когда подпространство  $W_{l_{\rho}}^r \subset l_{\rho}$  не обязательно совпадает со всем пространством  $l_{\rho}$ . А именно справедлива следующая

**Теорема 1.** *Предположим, что функции  $\psi_k(x)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) образуют полную в  $l_{\rho}$  ортонормированную систему с весом  $\rho(x)$ . Тогда система  $\{\psi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ , порожденная системой  $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$  посредством равенств (3) и (4), полна в  $W_{l_{\rho}}^r$  и ортонормирована относительно скалярного произведения (2).*

**Доказательство.** Из (4) и (5) следует, что если  $r \leq k$  и  $0 \leq \nu \leq r-1$ , то  $\Delta^{\nu} \psi_{r,k}(x)|_{x=0} = 0$ , поэтому в силу (2) и (5) имеем

$$\langle \psi_{r,k}, \psi_{r,l} \rangle = \sum_{x=0}^{\infty} \Delta^r \psi_{r,k}(x) \Delta^r \psi_{r,l}(x) \rho(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \psi_{k-r}(x) \psi_{l-r}(x) \rho(x) = \delta_{kl}, \quad k, l \geq r,$$

$$\langle \psi_{r,k}, \psi_{r,l} \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^{\nu} \psi_{r,k}(0) \Delta^{\nu} \psi_{r,l}(0) = \delta_{kl}, \quad k, l < r.$$

Очевидно также, что

$$\langle \psi_{r,k}, \psi_{r,l} \rangle = 0, \quad \text{если } k < r \leq l \text{ или } l < r \leq k.$$

Это означает, что функции  $\psi_{r,k}(t)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) образуют в  $W_{l_{\rho}}^r$  ортонормированную систему относительно скалярного произведения (2). Чтобы проверить полноту этой системы в  $W_{l_{\rho}}^r$  предположим, что для функции  $f \in W_{l_{\rho}}^r$  имеют место равенства

$$\langle \psi_{r,k}, f \rangle = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Тогда, во-первых, в силу того, что  $0 = \langle \psi_{r,k}, f \rangle = \Delta^k f(0)$  при  $k = 0, \dots, r-1$  имеем  $f(j) = 0$  для всех  $j = 0, \dots, r-1$ . Во-вторых, из равенств  $\langle \psi_{r,k}, f \rangle = 0$ ,  $k = r, r+1, \dots$  и полноты в  $l_{\rho}$  исходной системы  $\{\psi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$  следует, что  $\Delta^r f(x) \equiv 0$  ( $x \in \Omega$ ), и поэтому  $f$  совпадает с алгебраическим полиномом степени не выше  $r-1$



(см., например, формулу Тейлора (21), в которой вместо  $F(x)$  фигурирует  $f(x)$ ). Из этих двух фактов вытекает, что  $f(x) \equiv 0$  ( $x \in \Omega$ ). Теорема доказана.  $\square$

Систему функций  $\{\psi_{r,k}(t)\}_{k=0}^\infty$  мы будем называть системой, ортонормированной по Соболеву относительно скалярного произведения (2).

Из теоремы 1 следует, что система дискретных функций  $\{\psi_{r,k}(t)\}_{k=0}^\infty$  является ортонормированным базисом в пространстве  $W_{l_p}^r$ , тогда для произвольной функции  $f(x) \in W_{l_p}^r$  мы можем записать равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^\infty \langle f, \psi_{r,k} \rangle \psi_{r,k}(x), \tag{6}$$

которое представляет собой ряд Фурье функции  $f(x) \in W_{l_p}^r$  по системе  $\{\psi_{r,k}(t)\}_{k=0}^\infty$ , ортонормированной по Соболеву. Заметим, что из полноты системы функций  $\{\psi_{r,k}(t)\}_{k=0}^\infty$  в пространстве  $W_{l_p}^r$  (теорема 1) следует, что ряд (6) сходится по норме пространства  $W_{l_p}^r$ . Нетрудно также показать, что ряд (6) сходится в каждой точке  $x \in \{0, 1, \dots\}$ .

Поскольку коэффициенты Фурье  $\langle f, \psi_{r,k} \rangle$  имеют вид

$$f_{r,k} = \langle f, \psi_{r,k} \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^\nu f(0) \Delta^\nu \psi_{r,k}(0) = \Delta^k f(0), \quad k = 0, \dots, r-1,$$

$$f_{r,k} = \langle f, \psi_{r,k} \rangle = \sum_{j=0}^\infty \Delta^r f(j) \Delta^r \psi_{r,k}(j) \rho(j) = \sum_{j=0}^\infty \Delta^r f(j) \psi_{k-r}(j) \rho(j), \quad k = r, r+1, \dots,$$

то равенство (6) можно переписать в следующем смешанном виде:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r}^\infty f_{r,k} \psi_{r,k}(x), \quad x \in \Omega. \tag{7}$$

В связи с этим ряд Фурье по системе  $\{\psi_{r,k}(t)\}_{k=0}^\infty$  мы будем, следуя [8], называть смешанным рядом по исходной ортонормированной  $\{\psi_k(t)\}_{k=0}^\infty$ . Отметим некоторые важные свойства смешанных рядов (7) и их частичных сумм вида

$$\mathcal{Y}_{r,n}(f, x) = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r}^n f_{r,k} \psi_{r,k}(x). \tag{8}$$

Из (7) и (8) с учетом равенств (5) мы можем записать ( $0 \leq \nu \leq r-1, x \in \Omega$ )

$$\Delta^\nu f(x) = \sum_{k=0}^{r-\nu-1} \Delta^{k+\nu} f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r-\nu}^\infty f_{r,k+\nu} \psi_{r-\nu,k}(x), \tag{9}$$

$$\Delta^\nu \mathcal{Y}_{r,n}(f, x) = \sum_{k=0}^{r-\nu-1} \Delta^{k+\nu} f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r-\nu}^{n-\nu} f_{r,k+\nu} \psi_{r-\nu,k}(x), \tag{10}$$

$$\Delta^\nu \mathcal{Y}_{r,n}(f, x) = \mathcal{Y}_{r-\nu, n-\nu}(\Delta^\nu f, x). \tag{11}$$



## 2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОЛИНОМАХ ШАРЛЬЕ

При конструировании полиномов, ортогональных по Соболеву и порожденных классическими полиномами Шарлье, нам понадобится ряд свойств этих полиномов, которые мы приведем в настоящем параграфе. Для произвольного  $\alpha$  положим

$$\rho(x) = \rho(x; \alpha) = \frac{\alpha^x e^{-\alpha}}{\Gamma(x+1)}, \quad (12)$$

$$S_n^\alpha(x) = \frac{1}{\alpha^n \rho(x)} \Delta^n \{\rho(x)x^{[n]}\}, \quad (13)$$

где  $\Delta^n f(x)$  — конечная разность  $n$ -го порядка функции  $f(x)$  в точке  $x$ , т.е.  $\Delta^0 f(x) = f(x)$ ,  $\Delta^1 f(x) = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ ,  $\Delta^n f(x) = \Delta \Delta^{n-1} f(x)$  ( $n \geq 1$ ),  $a^{[0]} = 1$ ,  $a^{[k]} = a(a-1) \cdots (a-k+1)$  при  $k \geq 1$ . Для каждого  $0 \leq n$  равенство (13) определяет [9, 10] алгебраический полином степени  $n$ . Полные доказательства приведенных ниже свойств полиномов Шарлье  $S_n^\alpha(x)$  можно найти, например, в [9].

Если  $\alpha > 0$ , то полиномы  $S_n^\alpha(x)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) образуют полную [9, с. 243], [11, с. 375] в  $l_\rho$  ортогональную с весом  $\rho(x)$  (см. (12)) систему на множестве  $\Omega = \{0, 1, \dots\}$ :

$$\sum_{x \in \Omega} S_k^\alpha(x) S_n^\alpha(x) \rho(x) = \delta_{nk} h_n(\alpha), \quad (14)$$

где

$$h_n(\alpha) = \sum_{x=0}^{\infty} \rho(x) \{S_n^\alpha(x)\}^2 = \alpha^{-n} n!. \quad (15)$$

Из (14) и (15) следует, что полиномы

$$s_n^\alpha(x) = (h_n(\alpha))^{-\frac{1}{2}} S_n^\alpha(x) \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (16)$$

образуют ортонормированную систему на множестве  $\Omega$  с весом  $\rho(x) = \rho(x, \alpha)$ , т.е.

$$\sum_{x \in \Omega} s_k^\alpha(x) s_n^\alpha(x) \rho(x) = \delta_{nk}.$$

Полиномы Шарлье допускают следующее явное представление:

$$S_n^\alpha(x) = \sum_{l=0}^n \frac{(-n)_l (-x)_l}{l!} (-\alpha)^{-l} = \sum_{l=0}^n \frac{n^{[l]} x^{[l]}}{l!} (-\alpha)^{-l}, \quad (17)$$

где  $(a)_l = a(a+1) \cdots (a+l-1)$  — символ Похгаммера. Из (17) непосредственно следует, что

$$\Delta S_n^\alpha(x) = -\frac{n}{\alpha} S_{n-1}^\alpha(x). \quad (18)$$

## 3. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПО СОБОЛЕВУ ПОЛИНОМЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПОЛИНОМАМИ ШАРЛЬЕ

При  $\alpha > 0$  рассмотрим на  $\Omega$  полиномы  $s_n^\alpha(x)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ). Эта система порождает на  $\Omega$  систему полиномов  $s_{r,k}^\alpha(x)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ), определенных равенствами

$$s_{r,k+r}^\alpha(x) = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} s_k^\alpha(t), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (19)$$



$$s_{r,k}^\alpha(x) = \frac{x^{[k]}}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, r - 1. \tag{20}$$

Равенство (19) определяет для целых  $x \geq r$  полином степени  $k + r$ , который мы можем продолжить на всю комплексную плоскость по принципу аналитического продолжения. Покажем, что продолженный полином, который согласно (19) удовлетворяет первому из равенств определения (4), удовлетворяет также и второму из равенств (4). Другими словами, покажем, что  $s_{r,k+r}^\alpha(x)$  обращается в нуль в точках  $x = 0, 1, \dots, r - 1$ . С этой целью мы рассмотрим следующий дискретный аналог формулы Тейлора ( $x \in \{r, r + 1, \dots\}$ ):

$$F(x) = Q_{r-1}(F, x) + \frac{1}{(r - 1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x - 1 - t)^{[r-1]} \Delta^r F(t), \tag{21}$$

где

$$Q_{r-1}(F, x) = F(0) + \frac{\Delta F(0)}{1!} x + \frac{\Delta^2 F(0)}{2!} x^{[2]} + \dots + \frac{\Delta^{r-1} F(0)}{(r - 1)!} x^{[r-1]}. \tag{22}$$

Так как для функции  $F(t) = t^{[l+r]}$ , где целое  $l \geq 0$ , имеем  $\Delta^r F(t) = (l + r)^{[r]} t^{[l]}$  и  $Q_{r-1}(F, t) \equiv 0$ , то из (21) следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(r - 1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x - 1 - t)^{[r-1]} t^{[l]} = \\ & = \frac{1}{(l + r)^{[r]} (r - 1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x - 1 - t)^{[r-1]} \Delta^r F(t) = \frac{x^{[l+r]}}{(l + r)^{[r]}}. \end{aligned} \tag{23}$$

В то же время для любого целого  $l \geq 0$  функция  $x^{[l+r]}$  обращается в нуль в узлах  $x \in \{0, 1, \dots, r - 1\}$ . Поэтому полином  $s_{r,k+r}^\alpha(x)$  также обращается в нуль при  $x = 0, 1, \dots, r - 1$ , так как в силу (19), (16) и (17) его можно представить в виде линейной комбинации функций вида  $x^{[l+r]}$ . Таким образом, для полинома  $s_{r,k}^\alpha(x)$ , заданного при  $k \geq r$  равенством (19), имеет место равенство (4), в котором вместо  $\psi_{r,k}$  фигурирует  $s_{r,k}^\alpha$ . Поэтому из теоремы 1 и равенств (19), (20) вытекает следующее соотношение ортогональности:

$$\langle s_{r,n}^\alpha, s_{r,m}^\alpha \rangle = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k s_{r,n}^\alpha(0) \Delta^k s_{r,m}^\alpha(0) + \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^r s_{r,n}^\alpha(j) \Delta^r s_{r,m}^\alpha(j) \rho(j) = \delta_{nm}.$$

Тем самым мы можем сформулировать следующий результат.

**Теорема 2.** Если  $\alpha > 0$ , то система полиномов  $s_{r,k}^\alpha(x)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ), порожденная полиномами Шарлье  $s_n^\alpha(x)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) посредством равенств (19) и (20), полна в  $W_{l_p}^r$  и ортонормирована относительно скалярного произведения (2).

#### 4. ДАЛЬНЕЙШИЕ СВОЙСТВА ПОЛИНОМОВ $s_{r,k}^\alpha(x)$

Перейдем к исследованию дальнейших свойств полиномов  $s_{r,k}^\alpha(x)$ . В первую очередь, мы установим явный вид этих полиномов, представляющий собой разложение  $s_{r,k}^\alpha(x)$  по обобщенным степеням  $x^{[l]}$  ( $l = r, r + 1, \dots, k$ ).



**Теорема 3.** Для  $\alpha > 0$  имеют место равенства

$$s_{r,k+r}^\alpha(x) = \frac{1}{(h_n(\alpha))^{1/2}} \sum_{l=0}^k \frac{k^{[l]} x^{[l+r]}}{l!(l+r)^{[r]}} (-\alpha)^{-l}, \quad k = 0, 1, \dots$$

**Доказательство.** В равенстве (19) подставим вместо  $s_k^\alpha(t)$  его выражение из (16):

$$s_{r,k+r}^\alpha(x) = \frac{(h_k(\alpha))^{-\frac{1}{2}}}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} S_k^\alpha(t).$$

Отсюда и из (17)

$$\begin{aligned} s_{r,k+r}^\alpha(x) &= \frac{(h_k(\alpha))^{-\frac{1}{2}}}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} \sum_{l=0}^k \frac{k^{[l]} t^{[l]}}{l!} (-\alpha)^{-l} = \\ &= \frac{1}{(h_k(\alpha))^{\frac{1}{2}}} \sum_{l=0}^k \frac{k^{[l]}}{l!} (-\alpha)^{-l} \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} t^{[l]}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись (23), мы получим требуемое.  $\square$

Теперь установим связь полиномов  $s_{r,k}^\alpha(x)$  с порождающими их полиномами Шарлье  $S_k^\alpha(x)$ , которая не содержит знаков суммирования с переменным верхним пределом типа (19). Имеет место следующая

**Теорема 4.** При  $k \geq 0$  имеют место равенства

$$s_{r,k+r}^\alpha(x) = \frac{(-\alpha)^r}{(k+r)^{[r]}} \left( \frac{\alpha^k}{k!} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ S_{k+r}^\alpha(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{(k+r)^{[\nu]} x^{[\nu]}}{(-\alpha)^\nu \nu!} \right], \quad (24)$$

$$s_{r,k+r}^\alpha(x) = (-1)^r \left( \frac{\alpha^r}{(k+r)^{[r]}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ S_{k+r}^\alpha(x) - \left( \frac{\alpha^{k+r}}{(k+r)!} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{(k+r)^{[\nu]} x^{[\nu]}}{(-\alpha)^\nu \nu!} \right]. \quad (25)$$

**Доказательство.** Применим формулу (21) к полиному  $F(x) = S_{k+r}^\alpha(x)$  и запишем

$$F(x) = Q_{r-1}(F, x) + \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} \Delta^r S_{k+r}^\alpha(t). \quad (26)$$

Вместо  $\Delta^r S_{k+r}^\alpha(t)$  подставим его значение, которое согласно формуле (18) равно  $\frac{(k+r)^{[r]}}{(-\alpha)^r} S_k^\alpha(t)$ , тогда из (26) получим:

$$F(x) - Q_{r-1}(F, x) = \frac{(k+r)^{[r]}}{(-\alpha)^r} \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} S_k^\alpha(t). \quad (27)$$

Из (19) и (27) с (16) находим

$$\frac{(k+r)^{[r]}}{(-\alpha)^r} \{h_k(\alpha)\}^{\frac{1}{2}} s_{r,k+r}^\alpha(x) = F(x) - Q_{r-1}(F, x). \quad (28)$$



Из (28) получаем:

$$s_{r,k+r}^\alpha(x) = \frac{(-\alpha)^r}{(k+r)^{[r]}} \{h_k(\alpha)\}^{-\frac{1}{2}} [F(x) - Q_{r-1}(F, x)]. \quad (29)$$

Далее, в силу (18)  $\Delta^\nu S_{k+r}^\alpha(x) = \frac{(k+r)^{[\nu]}}{(-\alpha)^\nu} S_{k+r-\nu}^\alpha(x)$ , поэтому из (17) находим

$$\Delta^\nu S_{k+r}^\alpha(0) = \frac{(k+r)^{[\nu]}}{(-\alpha)^\nu} = A_{r,k,\nu}. \quad (30)$$

Равенства (22) и (30), взятые вместе, дают

$$F(x) - Q_{r-1}(F, x) = S_{k+r}^\alpha(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{A_{r,k,\nu} x^{[\nu]}}{\nu!}. \quad (31)$$

Равенство (24) непосредственно вытекает из (29), (30) и (31), а равенство (25), в свою очередь, можно получить из (24) и (16).  $\square$

### 5. РАЗНОСТНЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЧНЫХ СУММ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ $\{s_{r,k}^\alpha(x)\}_{k=0}^\infty$

Основные разностные свойства сумм Фурье по полиномам  $s_{r,k}^\alpha(x)$ , которые согласно (8) имеют вид

$$\mathcal{Y}_{r,n}^\alpha(f, x) = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r}^n f_{r,k} s_{r,k}^\alpha(x),$$

где

$$f_{r,k} = \langle f, s_{r,k}^\alpha \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^r f(j) s_{k-r}^\alpha(j) \rho(j), \quad k = r, r+1, \dots,$$

выражены равенствами (9), (10) и (11). Для системы  $\{s_{r,k}^\alpha(x)\}_{k=0}^\infty$  они принимают вид ( $0 \leq \nu \leq r-1$ )

$$\begin{aligned} \Delta^\nu f(x) &= \sum_{k=0}^{r-\nu-1} \Delta^{k+\nu} f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r-\nu}^{\infty} f_{r,k+\nu} s_{r-\nu,k}^\alpha(x), \\ \Delta^\nu \mathcal{Y}_{r,n}^\alpha(f, x) &= \sum_{k=0}^{r-\nu-1} \Delta^{k+\nu} f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r-\nu}^{n-\nu} f_{r,k+\nu} s_{r-\nu,k}^\alpha(x), \\ \Delta^\nu \mathcal{Y}_{r,n}^\alpha(f, x) &= \mathcal{Y}_{r-\nu,n-\nu}^\alpha(\Delta^\nu f, x). \end{aligned}$$

Из (9) и (10) мы также можем записать для  $n \geq r > \nu \geq 0$

$$\Delta^\nu f(x) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{r,n}^\alpha(f, x) = \sum_{k=n-\nu+1}^{\infty} f_{r,k+\nu} s_{r-\nu,k}^\alpha(x). \quad (32)$$

Равенство (32) дает выражение для погрешности, возникающей в результате замены конечной разности  $\Delta^\nu f(x)$  ее приближенным значением  $\Delta^\nu \mathcal{Y}_{r,n}^\alpha(f, x)$ .



## Библиографический список

1. Iserles A., Koch P. E., Norsett S. P., Sanz-Serna J. M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory. 1991. Vol. 65, iss. 2. P. 151–175. DOI: 10.1016/0021-9045(91)90100-0
2. Marcellan F., Alfaro M., Rezola M. L. Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // J. Comput. Appl. Math. 1993. Vol. 48, iss. 1–2. P. 113–131. DOI: 10.1016/0377-0427(93)90318-6
3. Meijer H. G. Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory. 1993. Vol. 73, iss. 1. P. 1–16. DOI: 10.1006/jath.1993.1029
4. Kwon K. H., Littlejohn L. L. The orthogonality of the Laguerre polynomials  $\{L_n^{(-k)}(x)\}$  for positive integers  $k$  // Ann. Numer. Anal. 1995. Vol. 2. P. 289–303.
5. Kwon K. H., Littlejohn L. L. Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Rocky Mountain J. Math. 1998. Vol. 28. P. 547–594. DOI: 10.1216/rmj/1181071786
6. Marcellan F., Xu Y. On Sobolev orthogonal polynomials. arXiv:1403.6249v1 [math.CA]. 25 Mar 2014. 40 p.
7. Шарапудинов И. И., Гаджиева З. Д. Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 310–321. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-310-321
8. Шарапудинов И. И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Махачкала : Изд-во ДНЦ РАН, 2004. 176 с.
9. Шарапудинов И. И. Многочлены, ортогональные на сетках. Махачкала : Изд-во Даг. гос. пед. ун-та, 1997. 252 с.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции : в 3 т. Т. 2. М. : Наука, 1974. 296 с.
11. Ширяев А. Н. Вероятность-1. М. : Изд-во МЦНМО, 2007. 552 с.

---

### Образец для цитирования:

Шарапудинов И. И., Гусейнов И. Г. Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные полиномами Шарлье // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 2. С. 196–205. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-196-205

---

## Polynomials Orthogonal with Respect to Sobolev Type Inner Product Generated by Charlier Polynomials

I. I. Sharapudinov, I. G. Guseinov

Idris I. Sharapudinov, <https://orcid.org/0000-0002-2290-9878>, Dagestan Scientific Center of RAS, 45, M. Gadzhieva Str., Makhachkala, 367025, Russia, sharapud@mail.ru

Ibraghim G. Guseinov, <https://orcid.org/0000-0002-3888-6383>, Dagestan State University, 43-a, M. Gadzhieva Str., Makhachkala, 367000, Russia; Dagestan Scientific Center RAS, 45, M. Gadzhieva Str., Makhachkala, 367025, Russia, ibraa2g@gmail.ru

The problem of constructing of the Sobolev orthogonal polynomials  $s_{r,n}^\alpha(x)$  generated by Charlier polynomials  $s_n^\alpha(x)$  is considered. It is shown that the system of polynomials  $s_{r,n}^\alpha(x)$  generated by Charlier polynomials is complete in the space  $W_{l_p}^r$ , consisted of the discrete functions, given on the grid  $\Omega = \{0, 1, \dots\}$ .  $W_{l_p}^r$  is a Hilbert space with the inner product  $\langle f, g \rangle$ . An explicit formula in the form of  $s_{r,k+r}^\alpha(x) = \sum_{l=0}^k b_l^r x^{l+r}$ ,



where  $x^{[m]} = x(x-1)\dots(x-m+1)$ , is found. The connection between the polynomials  $s_{r,n}^\alpha(x)$  and the classical Charlier polynomials  $s_n^\alpha(x)$  in the form of  $s_{r,k+r}^\alpha(x) = U_k^r \left[ s_{k+r}^\alpha(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} V_{k,\nu}^r x^{[\nu]} \right]$ , where for the numbers  $U_k^r, V_{k,\nu}^r$  we found the explicit expressions, is established.

**Key words:** Sobolev orthogonal polynomials, Charlier polynomials, Sobolev-type inner product.

## References

1. Iserles A., Koch P. E., Norsett S. P., Sanz-Serna J. M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products. *J. Approx. Theory*, 1991, vol. 65, iss. 2, pp. 151–175. DOI: 10.1016/0021-9045(91)90100-0
2. Marcellan F., Alfaro M., Rezola M. L. Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions. *J. Comput. Appl. Math.*, 1993, vol. 48, iss. 1–2, pp. 113–131. DOI: 10.1016/0377-0427(93)90318-6
3. Meijer H. G. Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space. *J. Approx. Theory*, 1993, vol. 73, iss. 1, pp. 1–16. DOI: 10.1006/jath.1993.1029
4. Kwon K. H., Littlejohn L. L. The orthogonality of the Laguerre polynomials  $\{L_n^{(-k)}(x)\}$  for positive integers  $k$ . *Ann. Numer. Anal.*, 1995, vol. 2, pp. 289–303.
5. Kwon K. H., Littlejohn L. L. Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations. *Rocky Mountain J. Math.*, 1998, vol. 28, pp. 547–594. DOI: 10.1216/rmj/1181071786
6. Marcellan F., Xu Y. On Sobolev orthogonal polynomials. *arXiv:1403.6249v1* [math.CA]. 25 Mar 2014. 40 p.
7. Sharapudinov I. I., Gadzhieva Z. D. Sobolev orthogonal polynomials generated by Meixner polynomials. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 310–321 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-310-321
8. Sharapudinov I. I. *Smeshannyj rjady po ortogonal'nyh polinomam* [Mixed Series in Orthogonal Polynomials]. Makhachkala, Izd-vo DNC RAN, 2004. 176 p. (in Russian).
9. Sharapudinov I. I. *Mnogochleny, ortogonal'nye na setkah* [Polynomials Orthogonal on Grids]. Makhachkala, Izd-vo Dag. gos. ped. un-ta, 1997. 252 p. (in Russian).
10. Bateman H., Erdelyi A. *Higher Transcendental Functions*. Vol. 2. New York, McGraw-Hill Book Company, 1953. 396 p. (Rus. ed.: Moscow, Nauka, 1974. 296 p.)
11. Shirjaev A. N. *Verojatnost'-1* [Probability-1]. Moscow, MTsNMO, 2007. 552 p. (in Russian).

---

### Cite this article as:

Sharapudinov I. I., Guseinov I. G. Polynomials Orthogonal with Respect to Sobolev Type Inner Product Generated by Charlier Polynomials. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 2, pp. 196–205 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-196-205

---

## МЕХАНИКА

УДК 51.74

### ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ КВАДРАТУР К РЕШЕНИЮ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

М. А. Барулина

Барулина Марина Александровна, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт проблем точной механики и управления РАН, 410024, Россия, Саратов, Рабочая, 24, marina@ibarulina.ru

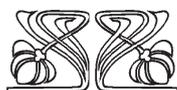
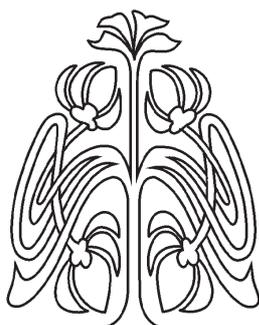
В статье описывается применение обобщенного метода дифференциальных квадратур к решению двумерных задач механики на примере изучения собственных колебаний прямоугольной пластины при различных видах граничных условий. Метод дифференциальных квадратур (МДК) является эффективным методом решения дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных. Основными задачами при использовании МДК, как и других квадратурных методов, являются задачи выбора распределения для построения сетки и нахождения весовых коэффициентов и задача включения граничных условий в разрешающую систему линейных алгебраических уравнений. В статье используется обобщенный подход к учету граничных условий и приводится универсальный алгоритм формирования разрешающей системы. Показано на примере частотного анализа прямоугольной пластины, что МДК позволяет решать двумерные задачи механики с приемлемой точностью с относительно малым количеством узлов на сетке на основе классического неравномерного распределения Чебышева – Гаусса – Лобатто и при использовании обобщенного подхода к учету граничных условий.

*Ключевые слова:* метод дифференциальных квадратур, численные методы, дифференциальные уравнения, собственные частоты, прямоугольная пластина.

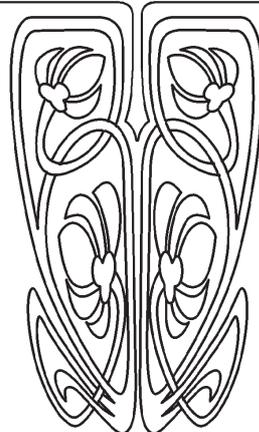
DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-206-216

#### ВВЕДЕНИЕ

Метод дифференциальных квадратур (МДК) является одним из численных методов решения дифференциальных уравнений и их систем, широко используемым за рубежом, но незначительно распространен в России. В то же время простота подхода, реализующегося в МДК, универсальность и точность получаемых результатов позволяют использовать МДК для широкого круга одно-



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





и многомерных задач механики, как стационарных, так и нестационарных. МДК впервые был предложен в начале 1970-х Р. Беллманом (Bellman) и его коллегами [1]. МДК, аналогично другим квадратурным методам [2], аппроксимирует производную функции в любой точке линейным суммированием всех значений этой функции вдоль линии сетки. Ключевой задачей в МДК является нахождение весовых коэффициентов для такой аппроксимации. Подход, который предлагал Беллман для нахождения весовых коэффициентов, приводил к плохо обусловленным матрицам, что ограничивало использование МДК. В конце 1980-х были разработаны новые подходы к вычислению весовых коэффициентов, что позволило МДК стать одним из универсальных и распространенных методов численного решения дифференциальных уравнений [3]. МДК позволяет получить решение с достаточной точностью на сетке с меньшим количеством узлов, чем метод конечных разностей и метод конечных элементов, что является несомненным его преимуществом. МДК продолжает развиваться в настоящее время [4–7]. Так, был предложен обобщенный метод дифференциальных квадратур, в котором реализован универсальный подход для учета различных граничных условий — однородных и неоднородных граничных условий 1, 2 и 3-го рода [3].

В работе описывается применение обобщенного метода дифференциальных квадратур к решению двумерных задач механики на примере изучения собственных колебаний прямоугольной пластины при различных видах граничных условий. Также в работе описан подробный алгоритм формирования разрешающей системы линейных алгебраических уравнений, соответствующей решаемому уравнению и рассматриваемым граничным условиям.

## 1. УРАВНЕНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрим тонкую прямоугольную пластину. Уравнения свободных колебаний такой пластины в безразмерной форме имеют вид [7]

$$\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} = \Omega^2 W, \quad (1)$$

где  $W$  — безразмерная функция прогибов;  $\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  — безразмерная собственная частота;  $X = x/a$ ,  $Y = y/b$ ,  $a$ ,  $b$  — геометрические размеры пластины;  $\lambda = a/b$  — соотношение сторон пластины;  $E$ ,  $h$ ,  $\nu$ ,  $\rho$  — модуль Юнга, толщина, коэффициент Пуассона и плотность пластины;  $\omega$  — круговая собственная частота;  $D = Eh^3 / [12(1 - \nu^2)]$  — изгибная жесткость. Граничные условия будут иметь вид [7]

- шарнир, или свободно опертый край (СО)

$X = 0$  или  $X = 1$ :

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = 0; \quad (2)$$

$Y = 0$  или  $Y = 1$ :

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = 0; \quad (3)$$

- жесткая заделка (Ж)

$X = 0$  или  $X = 1$ :

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial X} = 0; \quad (4)$$

$Y = 0$  или  $Y = 1$ :

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial Y} = 0; \quad (5)$$



- незакрепленный край (Н)

$X = 0$  или  $X = 1$ :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \nu \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 W}{\partial X^3} + (2 - \nu) \lambda^2 \frac{\partial^3 W}{\partial X \partial Y^2} = 0; \quad (6)$$

$Y = 0$  или  $Y = 1$ :

$$\nu \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = 0, \quad \lambda^2 \frac{\partial^3 W}{\partial Y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial X^2 \partial Y} = 0. \quad (7)$$

Если два соседних края пластины не закреплены, то дополнительно к перечисленным условиям в точках пересечения таких краев должно выполняться уравнение совместности в виде

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} = 0. \quad (8)$$

## 2. МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ КВАДРАТУР

Метод дифференциальных квадратур (МДК) является эффективным методом решения дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных. Для иллюстрации принципов МДК рассмотрим сначала одномерный случай. Для решения обыкновенного дифференциального уравнения область нахождения решения заменой переменной отображается на отрезок  $[0, 1]$  и затем дискретизируется



$N$  точками, искомая функция  $f(x)$  заменяется интерполяционным многочленом, например, Лагранжа (рис. 1) [3]:

Рис. 1. Одномерная сетка для МДК

Fig. 1. One-dimensional grid for the method of differential quadratures (MDQ)

$$f(x) = \sum_{i=1}^N f(x_i) l_i(x), \quad (9)$$

где  $x_i, i = \overline{1, N}$  — узловые точки сетки;  $l_i(x)$  — интерполяционный многочлен Лангранжа, описываемый формулой

$$l_i(x) = \frac{M(x)}{M^{(1)}(x_i)(x - x_i)}, \quad (10)$$

где  $M(x) = \prod_{i=1}^N (x - x_i)$ ,  $M^{(1)}(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^N (x_i - x_j)$ , Тогда производную порядка  $n$  функции  $f(x)$  в любой точке  $x_i$  можно представить как взвешенную линейную сумму значений функции во всех узловых точках сетки:

$$\frac{d^n f(x_i)}{dx^n} = \sum_{j=1}^N k_{i,j}^{(n)} f(x_j), \quad i = \overline{1, N}, \quad n = \overline{1, N-1}, \quad (11)$$

где  $k_{i,j}^{(n)}$  — весовые коэффициенты  $n$ -го порядка, которые находятся с помощью следующих рекуррентных формул:

$$\begin{aligned} k_{i,j}^{(1)} &= \frac{M^{(1)}(x_i)}{M^{(1)}(x_j)(x_i - x_j)}, & k_{i,i}^{(1)} &= - \sum_{j=1, j \neq i}^N k_{i,j}^{(1)}, \\ k_{i,j}^{(n)} &= n(k_{i,j}^{(1)} k_{i,i}^{(n-1)} - \frac{k_{i,j}^{(n-1)}}{x_i - x_j}), & k_{i,i}^{(n)} &= - \sum_{j=1, j \neq i}^N k_{i,j}^{(n)}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$i, j = \overline{1, N}, \quad n = \overline{1, N-1}.$$



Разложения (11) подставляются в дифференциальное уравнение, которое в результате преобразуется в систему алгебраических уравнений вида

$$DW = F, \tag{13}$$

где  $D$  — матрица, получаемая при подстановке в решаемое дифференциальное уравнение разложений вида (11);  $W = \{f(x_1) \ f(x_2) \ \dots \ f(x_N)\}^T$  — вектор-столбец неизвестных — значений функции  $f$  в узловых точках;  $F$  — вектор-столбец, независимый от  $W$ .

Формулы (10)–(12) могут быть достаточно просто распространены на двух- и многомерные дифференциальные уравнения [3]. Так, для двумерного случая область, в которой необходимо найти решение дифференциального уравнения, дискретизируется  $N$  точками по направлению  $x$ , и  $M$  точками по направлению  $y$  (рис. 2), искомая функция  $f(x, y)$  представляется в виде

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M f(x_i, y_j) r_i(x) s_j(y), \tag{14}$$

где  $r_i(x), s_j(y)$  — интерполяционные многочлены Лангранжа по  $x$  и  $y$  соответственно.

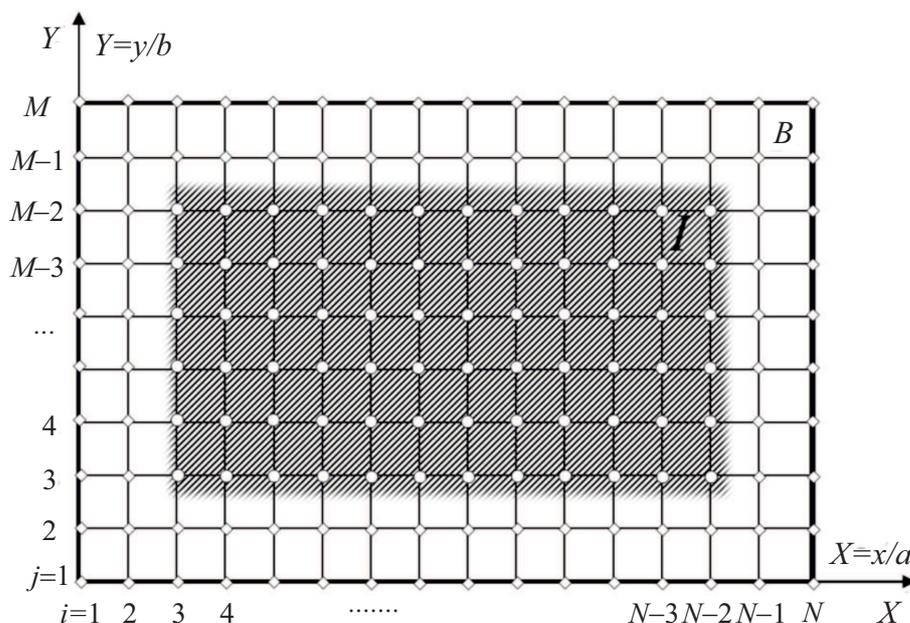


Рис. 2. Двумерная сетка для МДК:  $B$  — область граничных точек;  $I$  — внутренние точки

Fig. 2. Two-dimensional mesh for MDQ:  $B$  — boundary points region;  $I$  — interior points

Учитывая формулу (14), выражения для производных функции  $f(x, y)$  будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d^n f(x_i, y_j)}{dx^n} &= \sum_{k=1}^N a_{i,k}^{(n)} f(x_k, y_j), & \frac{d^m f(x_i, y_j)}{dy^m} &= \sum_{k=1}^M b_{j,k}^{(m)} f(x_i, y_k), \\ \frac{d^{n+m} f(x_i, y_j)}{dx^n dy^m} &= \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^M a_{i,k_1}^{(n)} b_{j,k_2}^{(m)} f(x_{k_1}, y_{k_2}), \end{aligned} \tag{15}$$



где  $i = \overline{1, N}$ ,  $n = \overline{1, N-1}$ ,  $j = \overline{1, M}$ ,  $m = \overline{1, M-1}$ ,  $a_{i,k}^{(n)}$  — весовые коэффициенты порядка  $n$  по  $x$ ;  $b_{j,k}^{(m)}$  — весовые коэффициенты порядка  $m$  по  $y$ . Весовые коэффициенты  $a_{i,k}^{(n)}$  и  $b_{j,k}^{(m)}$  определяются по рекуррентным формулам, аналогичным (12). Подстановка соотношений (15) в дифференциальное уравнение приводит к системе алгебраических уравнений, матричный вид которой совпадает с (13). Отметим, что матрица  $D$  в двумерном случае будет иметь размерность  $NM \times NM$ , вектор-столбец неизвестных будет иметь вид  $W = \{w_1 \dots w_N\}^T$ , где  $w_i = \{w_{i,1} \dots w_{i,M}\}^T$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

### 3. ДИСКРЕТИЗИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ

Для создания математической модели собственных колебаний пластины с использованием МДК используем усовершенствованный способ построения сетки [3]:

$$X_i = 3\xi_i^2 - 2\xi_i^3, \quad i = \overline{1, N}, \quad Y_j = 3\eta_j^2 - 2\eta_j^3, \quad j = \overline{1, M}, \quad (16)$$

где  $\xi_i, \eta_j$  определяются классическим неравномерным распределением Чебышева – Гаусса – Лобатто [3]:

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right], \quad \eta_j = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{j-1}{M-1} \pi \right) \right], \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}.$$

Тогда уравнение свободных поперечных колебаний пластины (1) согласно МДК переписывается в виде

$$\sum_{k=1}^N a_{i,k}^{(4)} w_{k,j} + 2\lambda^2 \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^M a_{i,k_1}^{(2)} b_{j,k_2}^{(2)} w_{k_1,k_2} + \lambda^4 \sum_{k=1}^M b_{j,k}^{(4)} w_{i,k} = \Omega^2 w_{i,j}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (17)$$

где  $a_{i,k}^{(n)}, b_{j,k}^{(n)}$  — определяемые соответствующими формулами (12) весовые коэффициенты разложения  $n$ -й производной от функции  $W$  по точкам разбиения в направлении осей  $X$  и  $Y$  соответственно;  $w_{i,j}$  — значение прогиба в точке  $(i, j)$  пластины (см. рис. 2).

Граничные условия (2)–(7) и условия совместности (8) после дискретизации примут вид ( $d = 1$  при  $X = 0$ ,  $d = N$  при  $X = 1$ ,  $n = 1$  при  $Y = 0$ ,  $n = M$  при  $Y = 1$ ):

- шарнир, или свободно опертый край (СО)  
 $X = 0$  или  $X = 1$ :

$$w_{d,j} = 0, \quad \sum_{k=1}^N a_{d,k}^{(2)} w_{k,j} = 0, \quad j = \overline{1, M}; \quad (18)$$

$Y = 0$  или  $Y = 1$ :

$$w_{i,n} = 0, \quad \sum_{k=1}^M b_{n,k}^{(2)} w_{i,k} = 0, \quad i = \overline{1, N}; \quad (19)$$

- жесткая заделка (Ж)  
 $X = 0$  или  $X = 1$ :

$$w_{d,j} = 0, \quad \sum_{k=1}^N a_{d,k}^{(1)} w_{k,j} = 0, \quad j = \overline{1, M}; \quad (20)$$



$Y = 0$  или  $Y = 1$ :

$$w_{i,n} = 0, \quad \sum_{k=1}^M b_{n,k}^{(1)} w_{i,k} = 0, \quad i = \overline{1, N}; \quad (21)$$

- незакрепленный край (H)

$X = 0$  или  $X = 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N a_{d,k}^{(2)} w_{k,j} + \nu \lambda^2 \sum_{k=1}^M b_{j,k}^{(2)} w_{d,k} &= 0, \\ \sum_{k=1}^N a_{d,k}^{(3)} w_{k,j} + (2 - \nu) \lambda^2 \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2}^M a_{d,k_1}^{(1)} b_{j,k_2}^{(2)} w_{k_1,k_2} &= 0, \quad j = \overline{1, M}; \end{aligned} \quad (22)$$

$Y = 0$  или  $Y = 1$ :

$$\begin{aligned} \nu \sum_{k=1}^N a_{i,k}^{(2)} w_{k,n} + \lambda^2 \sum_{k=1}^M b_{n,k}^{(2)} w_{i,k} &= 0, \\ \lambda^2 \sum_{k=1}^M b_{n,k}^{(3)} w_{i,k} + (2 - \nu) \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2}^M a_{i,k_1}^{(2)} b_{n,k_2}^{(1)} w_{k_1,k_2} &= 0, \quad i = \overline{1, N}; \end{aligned} \quad (23)$$

- условие совместности деформаций в углу  $(i, j)$  пластины

$$\sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2}^M a_{i,k_1}^{(2)} b_{j,k_2}^{(2)} w_{k_1,k_2} = 0. \quad (24)$$

Уравнение (19) может быть записано в матричном виде:

$$DW = \Omega^2 W, \quad (25)$$

где  $D = \tilde{A} + 2\lambda^2 \tilde{C} + \lambda^4 \tilde{B}$ ,  $W = \{w_1 \dots w_N\}^T$ ,  $w_i = \{w_{i,1} \dots w_{i,M}\}^T$ ,  $i = \overline{1, N}$  — вектор прогибов; матрицы  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  определяются из уравнений (19) по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,N} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \dots & A_{N,N} \end{bmatrix}, & \tilde{B} &= \begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B \end{bmatrix}, \\ \tilde{C} &= \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,N} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \dots & C_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{N,1} & C_{N,2} & \dots & C_{N,N} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (26)$$

где компоненты матриц  $A$ ,  $B_{k,l}$ ,  $C_{k,l}$  определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} [B]_{d,n} &= b_{d,n}^{(4)}, & [C_{k,l}]_{d,n} &= a_{k,l}^{(2)} b_{d,n}^{(2)}, & [A_{k,l}]_{d,n} &= \begin{cases} a_{k,l}^{(4)}, & d = n, \\ 0, & d \neq n, \end{cases} \\ d, n &= \overline{1, M}, & k, l &= \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (27)$$

Размер матриц  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  равен  $NM \times NM$ . Уравнение (28) представляет собой дискретизированное уравнение свободных колебаний пластины, записанное в матричном виде. Для нахождения собственных частот и форм колебаний уравнение (19) необходимо дополнить соответствующими граничными условиями (20)–(27).



#### 4. ОБОБЩЕННЫЙ ПОДХОД К УЧЕТУ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Одной из проблем при использовании МДК является проблема учета граничных условий при формировании основного матричного уравнения вида (13). Существует несколько подходов к решению этой проблемы. Так, можно по определенной методике непосредственно изменять весовые коэффициенты в зависимости от граничных условий или выражать часть перемещений из уравнений, описывающих граничные условия, и подставлять полученные выражения в уравнение (13) [3]. Основным недостатком этих подходов является сложность их реализации, в том числе и алгоритмической. Еще один подход, описанный в работе [3], предлагает учитывать граничные условия в матричном виде и объединять их с матричным уравнением вида. Этот подход позволяет учитывать как однородные, так и неоднородные граничные условия 1, 2 и 3-го рода. МДК, использующий этот подход к реализации граничных условий, будем называть обобщенным методом дифференциальных квадратур (ОМДК). При обобщенном методе все точки сетки делятся на внутренние, входящие в область  $I$ , и граничные в области  $B$  (см. рис. 2), формируются вектора  $W_I$ ,  $W_B$ , которые содержат только точки из областей  $I$  и  $B$  соответственно, компоненты которых связаны с компонентами вектора  $W$  следующими соотношениями:

$$\{W_I\}_k = W_{i,j}, \quad k = (M - 4)(i - 3) + (j - 2), \quad i \in [3, N - 2], \quad j \in [3, M - 2], \quad (28)$$

$$\{W_B\}_l = W_{i,j}, \quad (29)$$

$$l = \begin{cases} (i - 1)M + j, & i \in [1, 2], \quad j \in [1, M], \\ 2M + 4(i - 3) + j, & i \in [3, N - 2], \quad j \in [1, 2], \\ 2M + 4(i - 3) + 2 + j - M + 2, & i \in [3, N - 2], \quad j \in [M - 1, M], \\ 2M + 4(N - 4) + (i - N + 1)M + j, & i \in [N - 1, N], \quad j \in [1, M]. \end{cases}$$

Как следует из соотношений (28), (29), размерность векторов  $W_I$  и  $W_B$  будет равна  $(N - 4)(M - 4) \times 1$  и  $(4N + 4M - 16) \times 1$ . При ОМДК уравнение (19) записывается не для всех точек, а только для внутренней области  $I$  ( $i = \overline{3, N - 2}$ ,  $j = \overline{3, M - 2}$ ). При этом полученная система уравнений будет охватывать все точки сетки и может быть представлена в следующем матричном виде:

$$D_{IB}W_B + D_{II}W_I = \Omega^2W_I. \quad (30)$$

Для иллюстрации подхода к формированию матрицы, отражающей граничные условия, рассмотрим случай закрепления Ж-Н-Н-СО, при котором пластина жестко закреплена (Ж) при  $X = 0$ , не закреплена (Н) при  $Y = 0$  и  $X = 1$  и свободно оперта (СО) при  $Y = 1$ . Тогда система уравнений, описывающих граничные условия, будет формироваться следующим образом:

- условия (22) при  $i = 1$ ,  $d = 1$ ,  $j = \overline{2, M - 1}$ ;
- условия (26) при  $i = \overline{2, N - 1}$ ,  $n = 1$ ,  $j = 1$ ;
- условия (24) при  $i = N$ ,  $d = N$ ,  $j = \overline{2, M - 1}$ ;
- условия (21) при  $i = \overline{2, N - 1}$ ,  $n = N$ ,  $j = M$ .

Далее формируются четыре уравнения, отражающие условия в узлах  $(1, 1)$ ,  $(1, M)$ ,  $(N, 1)$ ,  $(N, M)$ :

$$W_{1,1} = 0, \quad W_{1,M} = 0, \quad W_{N,M} = 0, \quad \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2}^M a_{N,k_1}^{(2)} b_{1,k_2}^{(2)} w_{k_1,k_2} = 0.$$



В результате получается система линейных уравнений, полностью описывающих граничные условия. Эту систему также можно представить в следующем матричном виде:

$$D_{BB}W_B + D_{BI}W_I = 0. \tag{31}$$

Из (31) получаем выражение для нахождения  $W_B$  через  $W_I$ :

$$W_B = -D_{BB}^{-1}D_{BI}W_I. \tag{32}$$

Подставляя (32) в (31), получим окончательное матричное уравнение свободных колебаний прямоугольной пластины в соответствии с ОМДК:

$$(D_{II} - D_{IB}D_{BB}^{-1}D_{BI})W_I = \Omega^2W_I. \tag{33}$$

Размерность матриц  $D_{II}$ ,  $D_{IB}$ ,  $D_{BB}$ ,  $D_{BI}$  будет равна  $(N - 4)(M - 4) \times (N - 4)(M - 4)$ ,  $(N - 4)(M - 4) \times (4N + 4M - 16)$ ,  $(4N + 4M - 16) \times (4N + 4M - 16)$ ,  $(4N + 4M - 16) \times (N - 4)(M - 4)$  соответственно. Описанный подход к включению граничных условий носит универсальный характер и очевидным образом может быть распространен на однородные и неоднородные граничные условия различных видов.

### 5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Нахождение собственных частот и векторов матричного уравнения (33) является классической задачей, которая решается любым известным алгоритмом нахождения собственных значений матриц, например, QR-алгоритмом [8, 9]. Для нахождения собственных форм колебаний  $W$  пластины, значения собственных векторов  $W_I$ , найденных из уравнения (33), следует объединить с соответствующими значениями  $W_B$ , полученными на основе формулы (32). Собственные частоты  $\Omega$ , определенные из уравнения (33), будут соответствовать безразмерным собственным частотам прямоугольной пластины с рассматриваемым типом закрепления, собственные колебания которой описываются уравнением (1).

Значения первых пяти собственных частот для квадратной пластины, различным образом закрепленной, полученные с помощью МДК на сетке  $N \times M$  и соответствующие аналитические значения [10] частот, показаны в табл. 1. При расчетах здесь и далее полагалось  $\nu = 0.3$ .

Таблица 1 / Table 1

Собственные частоты квадратной пластины при разных граничных условиях  
The eigenfrequencies of a square plate with different boundary conditions

Закрепление / Boundary Conditions	Сетка / Grid	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
Ж-Ж-Ж-Ж / C-C-C-C	10 × 10	35.9378	73.3186	73.3186
	15 × 15	36.0018	73.3940	73.3940
	20 × 20	35.9848	73.4590	73.4590
	АНАЛИТ / ANALYT	35.9920	73.4130	73.4130
CO-CO-CO-CO / SS-SS-SS-SS	10 × 10	19.7393	49.3208	49.3208
	15 × 15	19.7392	49.3480	49.3480
	20 × 20	19.7332	49.3480	49.3480
	АНАЛИТ / ANALYT	19.7392	49.3480	49.3480
H-H-H-H / F-F-F-F	10 × 10	13.2810	19.6053	24.2585
	15 × 15	13.4670	19.5951	24.2581
	20 × 20	13.4601	19.5966	24.2654
	АНАЛИТ / ANALYT	13.4890	19.5960	24.4320



Окончание табл. 1 / End of the table 1

Закрепление / Boundary Conditions	Сетка / Grid	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
СО-Ж-СО-Ж / SS-C-SS-C	10 × 10	28.9490	54.6923	69.1478
	15 × 15	28.9509	54.7431	69.3271
	20 × 20	28.9509	54.7431	69.3270
	АНАЛИТ / ANALYT	28.9509	54.7431	69.3270

*Примечание.* Ж — жесткая заделка; СО — шарнир или свободно опертый край; Н — незакрепленный край; АНАЛИТ — аналитические значения.

*Note.* F — free edge; SS — simply supported edge; C — clamped edge; ANALYT — analytical values.

Как видно из табл. 1, отличие значений собственных частот, полученных с помощью ОМДК и аналитическими методами, не превышает долей единиц процента для сетки уже для сетки 15 × 15. На сетке 10 × 10 с хорошей точностью, не превышающей 1% от аналитических значений, рассчитываются первые три частоты, для более старших частот точность полученных значений ухудшается.

Значения первой частоты  $\Omega_1$  для прямоугольных пластин с различным соотношением сторон  $\lambda = a/b$  и при различном закреплении приведены в табл. 2. Значения получены на сетке 15 × 15.

Таблица 2 / Table 2

Значения первой частоты  $\Omega_1$  прямоугольной пластины при разных граничных условиях и различных соотношениях сторон  $\lambda$

The values of the first frequency  $\Omega_1$  of a rectangular plate with different boundary conditions and different aspect ratios  $\lambda$

Закрепление / Boundary Conditions	Решатель / Method	$\lambda = 2/5$	$\lambda = 2/3$	$\lambda = 1$	$\lambda = 3/2$	$\lambda = 5/2$
Ж-Ж-Ж-Ж / C-C-C-C	ОМДК / GDQM	23.644	27.099	36.0018	60.7723	147.775
	АНАЛИТ / ANALYT	23.648	27.010	35.9920	60.772	147.80
Ж-Ж-Ж-СО / C-C-C-SS	ОМДК / GDQM	23.4390	25.8607	31.8309	48.163	107.0433
	АНАЛИТ / ANALYT	23.440	25.861	31.829	48.167	107.07
Ж-Ж-СО-СО / C-C-SS-SS	ОМДК / GDQM	19.8475	19.9516	27.0555	44.8912	105.2972
	АНАЛИТ / ANALYT	16.849	19.952	27.056	44.893	105.31
Ж-Ж-СО-Н / C-C-SS-F	ОМДК / GDQM	15.5818	15.8680	16.7833	21.0635	32.6753
	АНАЛИТ / ANALYT	15.696	16.287	17.615	21.035	33.578
Ж-СО-СО-Н / C-SS-SS-F	ОМДК / GDQM	15.5424	15.6779	16.1528	18.9015	22.1081
	АНАЛИТ / ANALYT	15.649	16.067	16.865	18.540	23.067
Ж-Н-Н-Н / C-F-F-F	ОМДК / GDQM	3.5075	3.5109	3.5434	3.2364	3.5505
	АНАЛИТ / ANALYT	3.5107	3.5024	3.4917	3.4772	3.4562
СО-СО-СО-СО / SS-SS-SS-SS	ОМДК / GDQM	11.4487	14.2561	19.7392	32.0762	71.5546
	АНАЛИТ / ANALYT	11.4487	14.2561	19.7392	32.0762	71.5564
Н-Н-Н-Н / F-F-F-F	ОМДК / GDQM	3.4313	8.9317	13.4670	20.0924	21.4454
	АНАЛИТ / ANALYT	3.4629	8.9459	13.4890	20.128	21.643
СО-Ж-СО-Ж / SS-C-SS-C	ОМДК / GDQM	12.1347	17.3730	28.9509	56.3481	145.4839
	АНАЛИТ / ANALYT	12.1347	17.3730	28.9509	56.3481	145.4839

*Примечание.* Ж — жесткая заделка; СО — шарнир или свободно опертый край; Н — незакрепленный край; АНАЛИТ — аналитические значения; ОМДК — обобщенный метод дифференциальных квадратур.

*Note.* F — free edge; SS — simply supported edge; C — clamped edge; ANALYT — analytical values; GDQM — generalized differential quadrature method.

Как видно из табл. 2, наилучшие результаты с помощью ОМДК получаются, если все грани пластин закреплены. В этом случае полученные результаты в ряде



случаев совпадают с аналитическим решением с точностью до третьего знака. Если у пластины одна или несколько сторон не закреплены, то точность ОМДК ухудшается, но и в этом случае речь идет о непревышающем 1% расхождении получаемых результатов с аналитическим решением.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод дифференциальных квадратур с усовершенствованным способом построения сетки на основе классического неравномерного распределения Чебышева – Гаусса – Лобатто и при использовании обобщенного подхода к учету граничных условий является мощным, универсальным и эффективным методом численного решения дифференциальных уравнений. Как было показано на примере частотного анализа прямоугольной пластины, ОМДК позволяет решать двумерные задачи механики с приемлемой точностью на сетке с относительно малым количеством узлов. Использование описанного здесь обобщенного подхода к учету граничных условий позволяет решать задачи с различными типами однородных и неоднородных граничных условий.

## Библиографический список

1. *Bellman R. E., Kashef B. G., Casti J.* Differential quadrature: A technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations // *J. Comput. Phys.* 1972. Vol. 10, iss. 1. P. 40–52. DOI: 10.1016/0021-9991(72)90089-7
2. *Вержбицкий В. М.* Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения) : учеб. пособие для вузов. М. : Директ-Медиа, 2013. 400 с.
3. *Shu C.* Differential Quadrature and Its Application in Engineering. L. : Springer-Verlag, 2000. 340 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-0407-0
4. *Wu T. Y., Liu G. R.* Application of the generalized differential quadrature rule to eighth-order differential equations // *Communications in Numerical Methods in Engineering.* 2001. Vol 17, iss. 5. P. 355–364. DOI: 10.1002/cnm.412
5. *Golfam B., Rezaie F.* A new generalized approach for implementing any homogeneous and non-homogeneous boundary conditions in the generalized differential quadrature analysis of beams // *Scientia Iranica.* 2013. Vol. 20, iss. 4. P. 1114–1123.
6. *Mansell G., Merryfield W., Shizgal B., Weinert U.* A comparison of differential quadrature methods for the solution of partial-differential equations // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 1993. Vol. 104, iss. 3. P. 295–316. DOI: 10.1016/0045-7825(93)90028-V
7. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М. ; Л. : ОНТИ, 1935. 674 с.
8. *Парлетт Б.* Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М. : Мир, 1983. 384 с.
9. *Уилкинсон Дж. Х., Райниш С.* Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. М. : Машиностроение, 1976. 389 с.
10. *Leissa A. W.* The free vibration of rectangular plates // *J. Sound and Vibration.* 1973. Vol. 31, iss. 3. P. 257–293. DOI: 10.1016/S0022-460X(73)80371-2

---

### Образец для цитирования:

*Барулина М. А.* Применение обобщенного метода дифференциальных квадратур к решению двумерных задач механики // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2018. Т. 18, вып. 2. С. 206–216. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-206-216

---



## Application of Generalized Differential Quadrature Method to Two-dimensional Problems of Mechanics

M. A. Barulina

Marina A. Barulina, <https://orcid.org/0000-0003-3867-648X>, Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24, Rabochaya Str., Saratov, Russia, 410028, [marina@barulina.ru](mailto:marina@barulina.ru)

The application of the generalized differential quadrature method to the solution of two-dimensional problems of solid mechanics is discussed by an example of the sample analysis of vibrations of a rectangular plate under various types of boundary conditions. The differential quadrature method (DQM) is known as an effective method for resolving differential equations, both ordinary and partial. The main problems while using DQM, as well as other quadrature methods, are choosing the distribution for construction of the points grid and determination of the weight coefficients, and incorporating boundary conditions in the resolving system of linear algebraic equations. In the present study a generalized approach to accounting the boundary conditions is proposed and a universal algorithm for the composition of a resolving algebraic system is given. In the paper it is shown by an example of model analysis of a rectangular plate vibrations that the DQM allows us to effectively resolve two-dimensional problems of solid mechanics gaining an acceptable accuracy with a relatively small number of points on the grid. The latter is provided by the aid of the classical non-uniform Chebyshev – Gauss – Lobatto distribution and generalized approach to accounting of the boundary conditions.

**Key words:** differential quadrature method, numerical methods, differential equations, eigenfrequencies, rectangular plate.

### References

1. Bellman R. E., Kashef B. G., Casti J. Differential quadrature: A technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations. *J. Comput. Phys.*, 1972, vol. 10, iss. 1, pp. 40–52. DOI: 10.1016/0021-9991(72)90089-7
2. Verzhbitskii V. M. *Chislennyye metody (matematicheskiy analiz i obyknovennyye differentsialnyye uravneniya)* [Numerical Methods (Mathematical Analysis and Ordinary Differential Equations)]. Moscow, Direkt-Media, 2013. 400 p. (in Russian).
3. Shu C. *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*. London, Springer-Verlag, 2000. 340 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-0407-0
4. Wu T. Y., Liu G. R. Application of the generalized differential quadrature rule to eighth-order differential equations. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2001, no. 17, pp. 355–364. DOI: 10.1002/cnm.412
5. Golfam B., Rezaie F. A new generalized approach for implementing any homogeneous and non-homogeneous boundary conditions in the generalized differential quadrature analysis of beams. *Scientia Iranica*, 2013, vol. 20, iss. 4, pp. 1114–1123.
6. Mansell G., Merryfield W., Shizgal B., Weinert U. A comparison of differential quadrature methods for the solution of partial-differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1993, vol. 104, iss. 3, pp. 295–316. DOI: 10.1016/0045-7825(93)90028-V
7. Love A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge Univ. Press, 2013. 662 p. (Russ. ed: Moscow ; Leningrad, ONTI, 1935. 674 p.)
8. Parlett B. N. *The Symmetric Eigenvalue Problem (Classics in Applied Mathematics)*. Philadelphia, SIAM, 1987. 416 p. (Russ. ed: Moscow, Mir, 1983. 384 p.)
9. Wilkinson J. H., Reinsch C. *Handbook for Automatic Computation: Vol. II: Linear Algebra*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1971. 441 p. DOI: 10.1007/978-3-642-86940-2
10. Leissa A. W. The free vibration of rectangular plates. *J. Sound and Vibration*, 1973, vol. 31, iss. 3, pp. 257–293. DOI: 10.1016/S0022-460X(73)80371-2

### Cite this article as:

Barulina M. A. Application of Generalized Differential Quadrature Method to Two-dimensional Problems of Mechanics. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 2, pp. 206–216 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-206-216



УДК 501.1

## ДВИЖЕНИЕ ПРОППАНТА В РАСКРЫВАЮЩЕЙСЯ ТРЕЩИНЕ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА

А. В. Татосов, А. С. Шляпкин

Татосов Алексей Викторович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики и механики, Тюменский государственный университет, Россия, 625003, Тюмень, Семакова, 10, atatosov@utmn.ru

Шляпкин Алексей Сергеевич, аспирант, Тюменский государственный университет, Россия, 625003, Тюмень, Семакова, 10

Рассматривается процесс формирования трещины гидроразрыва при закачивании в скважину вязкой жидкости с примесью частиц. Предложена модель развития трещины с учетом потерь жидкости на просачивание в пористую среду и падения взвешенных частиц под действием силы тяжести. Проведен детальный анализ роста осадка, обусловленного просачиванием жидкости гидроразрыва в пористую среду. Показано, что наличие частиц существенно влияет на процесс раскрытия трещины. Рост трещины при наличии частиц ограничен, окончательная ее форма зависит от состава смеси и способа закачки — давления на входе, объемного содержания частиц, объема оторочки (чистой жидкости гидроразрыва без примеси). Все эти факторы учитываются в предложенной модели. Исследование выполнено для безразмерной формы уравнений движения. Результаты расчетов позволяют охарактеризовать остаточную форму трещины или подобрать технологические параметры для достижения желаемых результатов при разрыве пласта.

*Ключевые слова:* трещина гидроразрыва, пористая среда, вязкая жидкость.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-217-226

### ВВЕДЕНИЕ

Для повышения дебита нефтяных скважин иногда применяется технология гидроразрыва пласта. В основополагающих работах [1–3] обоснованы формы и построены математические теории развития трещины гидроразрыва. Качественный обзор проведен в [4]. С целью формирования остаточной трещины в скважину подается вязкая жидкость (жидкость гидроразрыва) с примесью твердых частиц (проппант). В зарубежной литературе тема о транспорте проппанта по трещине широко освещается [5, 6]. Наиболее полно изучен рост осадка, обусловленный движением вниз взвешенных частиц. В данной работе предложена модель подачи проппанта в раскрывающуюся трещину гидроразрыва пласта с учетом потерь жидкости на просачивание в пористую среду и падения взвешенных частиц под действием силы тяжести. Акцент сделан на изучении процесса осаждения частиц за счет протекания жидкости гидроразрыва в грунт. Несмотря на малую скорость фильтрации, жидкость просачивается в пористую среду через боковую поверхность полости, площадь которой значительно превосходит площадь сечения Христиановича. Закачиваемая вязкая смесь, надавливая на берега начальной трещины, расширяет ее. Ввиду просачивания жидкости гидроразрыва в пласт у берегов трещины скапливается дисперсная фаза и быстро стекает вниз. Цель данного исследования — определить влияние примеси частиц в смеси на динамику раскрытия трещины и ее конечную форму.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

**Допущения.** Движение жидкости с примесью частиц вдоль трещины опишем в односкоростном квазиодномерном приближении. Трещина гидроразрыва предполагается вертикальной (рис. 1, а, б).

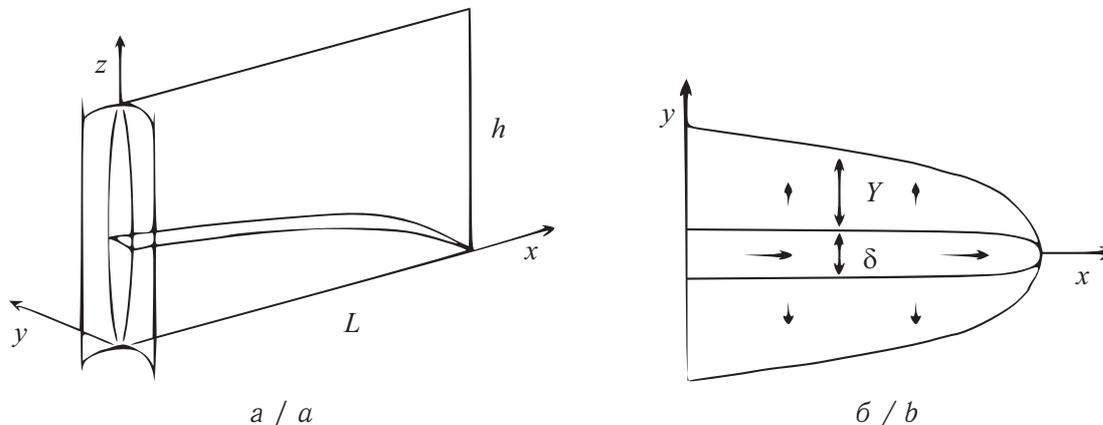


Рис. 1. Схематическое представление вертикальной трещины (а); сечение в горизонтальной плоскости (Христиановича) (б)

Fig. 1. Schematic representation of a vertical crack (a); cross-section in the horizontal plane (Khristianovicha) (b)

**Форма трещины.** На основании гипотезы Перкинса [1] с учетом формы плоских трещин в упругой среде введем связь избыточного давления  $p$  со средней шириной  $\delta$  трещины [7, 8]

$$p = b\delta, \quad b = \frac{4\mu_\sigma}{\pi(1 - \nu_\sigma)h}, \quad (1)$$

где  $\nu_\sigma$  — коэффициент Пуассона,  $\mu_\sigma$  — модуль сдвига материала. Геометрическая форма трещины такова, что

$$\delta \ll h \ll L.$$

Здесь  $h$ ,  $L$  — соответственно высота и длина трещины. На носике трещины, в приближении Перкинса, избыточное давление равно нулю

$$x = L(t) : \quad p = 0.$$

В процессе подачи проппанта происходит осаждение частиц. Площадь поперечного сечения полости  $S = \delta h$ . Выделим часть сечения свободной от осадка, пусть  $s = \varepsilon h$  площадь свободной области.

**Уравнения неразрывности.** Скорость движения жидкости и взвешенных частиц в продольном направлении будем считать одинаковой. В отличие от [8, 9] поступательный поток вещества происходит только по свободной от осадка области. Уравнение неразрывности, отражающее сохранение общего объема смеси, имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(su)}{\partial x} = -f, \quad (2)$$

где  $u$  — средняя скорость потока смеси,  $f$  — интенсивность потерь жидкости гидроразрыва через боковую поверхность трещины вследствие протекания в грунт. Пусть  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — объемные доли жидкости гидроразрыва и частиц в подаваемой смеси,



$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ;  $\alpha_*$  — объемное содержание дисперсной фазы в осевшем слое. Условие сохранения объема частиц есть

$$\frac{\partial(\alpha_*(S - s) + \alpha_2 s)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_2 s u)}{\partial x} = 0.$$

Введем обозначение  $\alpha = \alpha_2/\alpha_*$ , тогда

$$\frac{\partial(S - s + \alpha s)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha s u)}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

**Протекание в грунт.** Фильтрацию жидкости в грунт опишем, применяя гипотезу плоских сечений, согласно которой жидкость гидроразрыва просачивается в пористую среду только по нормали к трещине [7]. Вязкость жидкости, изначально насыщающей пласт, считаем малой в сравнении с вязкостью жидкости гидроразрыва. В среднем по сечению примем

$$v_n = v_n(x, t), \quad \frac{\partial p_r}{\partial y} = -\frac{\eta}{k} v_n,$$

где  $v_n$  — скорость фильтрации,  $p_r$  — избыточное давление жидкости гидроразрыва в грунте,  $\eta$  — вязкость жидкости гидроразрыва,  $k$  — проницаемость грунта. В силу граничных условий  $0 \leq y \leq Y$ ,  $p_r(0) = p$ ,  $p_r(Y) = 0$  найдем

$$v_n = \frac{k p}{\eta Y}. \quad (4)$$

Учитывая различие физической скорости  $v_r$  и скорости фильтрации, глубину зоны пропитки  $Y$  определим уравнением

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = v_r, \quad v_n = \beta v_r, \quad (5)$$

где  $\beta$  — объемное содержание жидкости гидроразрыва в пласте, близкое к величине пористости.

Ввиду потери жидкости через обе боковые поверхности трещины интенсивность утечки есть

$$f = 2h v_n. \quad (6)$$

**Динамика осаждения частиц.** Рост осадка обусловлен двумя процессами — падением взвешенных частиц под действием силы тяжести и их накоплением за счет просачивания жидкости гидроразрыва в пористую среду. Определим динамику роста объема осадка в каждом из этих процессов в отдельности.

Под скоростью падения частиц  $w_g$  будем понимать скорость приближения взвешенных частиц к частицам верхнего слоя осадка. В системе координат, связанной с контактной поверхностью  $\Pi$  отделяющей осадок, условие равенства потоков дисперсной фазы по обе стороны от поверхности дает

$$\alpha_2(w_g + w_s) = \alpha_* w_s.$$

Здесь  $w_s$  — скорость движения контактной поверхности  $\Pi$  относительно близлежащих к ней частиц осадка. Скорость роста объема осадка за счет падения взвешенных частиц, отнесенная к единице длины трещины, есть  $\delta w_s$ , или  $(\alpha/(1 - \alpha))\delta w_g$ .



Интенсивность потерь жидкости гидроразрыва за счет протекания в грунт определена как  $f = 2hv_n$ . Единице объема смеси соответствует  $\alpha$  объем осадка и  $(1 - \alpha)$  объем жидкости, просочившейся в грунт. Таким образом, скорость роста объема осадка (отнесенная к единице длины трещины) за счет просачивания жидкости гидроразрыва в пористую среду будет определяться выражением  $(\alpha/(1 - \alpha))f$ .

Учитывая влияние обоих процессов на динамику роста осадка, получим:

$$\frac{\partial(S - s)}{\partial t} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}(2hv_n + \delta w_g). \quad (7)$$

Существенным упрощением, соответствующим одномерной модели, является усреднение объемного содержания взвешенных частиц по поперечному сечению, что физически соответствует медленному перемешиванию смеси. Этому способствует стекание дисперсной фазы по берегам трещины.

**Уравнение импульсов.** В силу принятых ограничений на геометрические параметры трещины в уравнении движения смеси целесообразно пренебречь инерционным слагаемым. Согласно условию накопления осадка в нижней части трещины будем иметь

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\eta_\alpha}{\delta^2}u. \quad (8)$$

где  $\eta_\alpha$  — вязкость смеси.

**Основная система уравнений.** Все приведенные выше уравнения движения имеют место лишь при условии существования свободной от осадка области течения. Будем считать, что поток смеси вдоль трещины возможен только при  $s > 0$ . Если же в некотором сечении  $s = 0$ , а  $S > 0$ , то трещина перекрыта. В таком сечении движение смеси отсутствует, избыточное давление падает до нуля, просачивание приостанавливается. Раскрытая трещина при этом удерживается слоем частиц, находящимся в напряженном состоянии. Положим в дальнейшем  $h, b = \text{const}$ . Исключая часть переменных, систему уравнений (1)– (8) приведем к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial x} &= -2v, & \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial x} &= -\frac{2}{1 - \alpha}v - \frac{\alpha}{1 - \alpha}w, \\ \frac{\partial(\alpha \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha \varepsilon u)}{\partial x} &= -\frac{2\alpha}{1 - \alpha}v - \frac{\alpha}{1 - \alpha}w, & u &= -\frac{b}{12\eta_\alpha}\delta^2 \frac{\partial \delta}{\partial x}, & \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{v}{\beta}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$v = \begin{cases} v_n, & \varepsilon > 0, \\ 0, & \varepsilon = 0, \end{cases} \quad w = \begin{cases} (\delta/h)w_g, & \varepsilon > 0, \\ 0, & \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Величина  $v_n$  определена выражением

$$v_n = \frac{kb}{\eta} \frac{\delta}{Y}.$$

Аппроксимируем  $w_g$  согласно [5]

$$w_g = \frac{(1 - \alpha_*\alpha)\eta}{\eta_\alpha} w_{g0}, \quad w_{g0} = \frac{2}{9} \frac{(\rho_p - \rho_l)gr^2}{\eta}, \quad \eta_\alpha = \eta(1 - \alpha)^{-m},$$

где  $\rho_p, \rho_l$  — плотности частиц проппанта и жидкости гидроразрыва;  $g$  — ускорение свободного падения;  $r$  — радиус частиц;  $\alpha_* = 0.66, m = 1.82$ .



Система (9) дополняется граничным условием на носике трещины

$$x = L(t) : \quad \delta = 0 \tag{10}$$

и граничным условием на входе в трещину.

В сравнении с [10] предложенная модель дополнительно учитывает влияние силы тяжести и технологическую неоднородность подаваемой смеси.

## 2. ЗНАЧИТЕЛЬНОЕ ПРОТЕКАНИЕ В ГРУНТ

Рассмотрим менее изученный случай преобладания роста осадка за счет протекания жидкости гидроразрыва в пористую среду

$$\frac{w}{v} \ll 1, \tag{11}$$

считая, что для основного объема взвеси  $\alpha$  и  $(1 - \alpha)$  одного порядка. Введем безразмерные переменные:

$$\bar{x} = \frac{x}{L^*}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t^*}, \quad \bar{\delta} = \frac{\delta}{\delta^*}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^*}, \quad \bar{q} = \frac{\varepsilon u}{q^*}, \quad \bar{v} = \frac{v}{v^*}, \quad \bar{Y} = \frac{Y}{Y^*}. \tag{12}$$

Учитывая вид уравнений, примем в качестве характерных величин

$$\begin{aligned} L^* &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{6\beta k} \frac{p_0^2}{b^2}}, & t^* &= \frac{1}{4\beta} \frac{\eta p_0}{k b^2}, & \delta^* &= \varepsilon^* = \frac{p_0}{b}, \\ q^* &= 2 \sqrt{\frac{\beta k}{6} \frac{p_0^2}{\eta b}}, & Y^* &= \frac{1}{2\beta} \frac{p_0}{b}, & v^* &= 2\beta \frac{k b}{\eta}. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь  $p_0$  — параметр, в качестве которого удобно принять некоторое избыточное давление на входе в трещину, такой величине давления будет соответствовать  $\bar{\delta}(0, \bar{t}) = 1$ .

Выбранный масштаб соответствует тому, что в течение времени  $t^*$  в пористую среду просочилось порядка половины количества жидкости, закаченной в трещину  $2v^*t^* = 2\beta Y^* = \delta^*$ . Это приведет к заполнению осадком  $\alpha/(1 - \alpha)$  доли объема всей трещины. Следовательно, характерное время  $\tau_f$  заполнения всей трещины частицами за счет фильтрации можно оценить, как  $\tau_f \sim ((1 - \alpha)/\alpha)t^* \sim t^*$ , характерное же время падения взвешенных частиц  $\tau_g \sim h/w_g$ . При этом  $w \sim (\delta^*/h)w_g$ ,  $v \sim v^*$ , так что условие (11) есть  $\tau_f/\tau_g \ll 1$ .

Пренебрегая смещением взвешенных частиц, все же считаем в данном исследовании, что скопившаяся у берегов трещины дисперсная фаза стекает вниз. В противном случае, необходимо использовать уравнение импульсов в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\eta\alpha}{\varepsilon^2}u.$$

**Безразмерная форма уравнений движения.** Система уравнений движения в переменных (12), (13) с учетом условия (11) принимает следующую безразмерную форму (черта опущена):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial t} + 2 \frac{\partial q}{\partial x} &= -v, & \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + 2 \frac{\partial q}{\partial x} &= -\frac{1}{1 - \alpha}v, & \frac{\partial(\alpha\varepsilon)}{\partial t} + 2 \frac{\partial(\alpha q)}{\partial x} &= -\frac{\alpha}{1 - \alpha}v, \\ q &= -(1 - \alpha)^m \varepsilon \delta^2 \frac{\partial \delta}{\partial x}, & \frac{\partial Y}{\partial t} &= v, \end{aligned} \tag{14}$$

где  $q = \varepsilon u$ ,  $v = \delta/Y$  при  $\varepsilon > 0$ ,  $v = 0$  при  $\varepsilon = 0$ .



В дальнейшем, используются только безразмерные величины.

**Начальные и краевые условия.** Процесс гидроразрыва будем проводить при постоянном давлении на входе в трещину. Предварительно до момента  $\tau_1$  подается жидкость гидроразрыва без примеси частиц. Затем в течение времени  $\tau_2$  — проппант. Полное время закачки смеси  $\tau = \tau_1 + \tau_2$ , после чего подача смеси прекращается. Граничные условия имеют вид

$$\delta(0, t) = 1, \quad 0 < t \leq \tau; \quad q(0, t) = 0, \quad t > \tau; \quad \alpha(0, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq \tau_1, \\ A, & t > \tau_1. \end{cases} \quad (15)$$

Если полость трещины в начальном сечении целиком перекрывается слоем частиц до сброса давления, то подача смеси прекращается. Данный процесс реализуется при граничном условии

$$\delta(0, t) = 1, \quad \alpha(0, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq \tau_1, \\ A, & t > \tau_1. \end{cases} \quad (16)$$

В этом случае подача смеси поддерживается максимально продолжительное время. Время закачки  $\tau$  определится моментом остановки потока во входном сечении:  $q(0, t) = 0$ , при  $t > \tau$ .

Начальные условия соответствуют состоянию покоя

$$\delta(x, 0) = \varepsilon(x, 0) = q(x, 0) = Y(x, 0) = 0, \quad x > 0.$$

**Анализ расчетов.** Система уравнений в безразмерном виде (14) исследовалась численно. Использовалась явная разностная схема по аналогии с [11]. Схема тестировалась для случая подачи в пласт жидкости гидроразрыва без примеси частиц. При выбранном граничном условии постоянного давления на входе в трещину решение задачи автомодельно и приведено в [8]. В обратном предельном случае отсутствия оторочки воспроизводится решение из [10].

На рис. 2 приведен пример развития трещины в виде распределения величин  $\delta$  и  $\varepsilon$  по ее длине в моменты времени  $t = 1, 2, 6, 10$  — соответственно кривые 1–4.

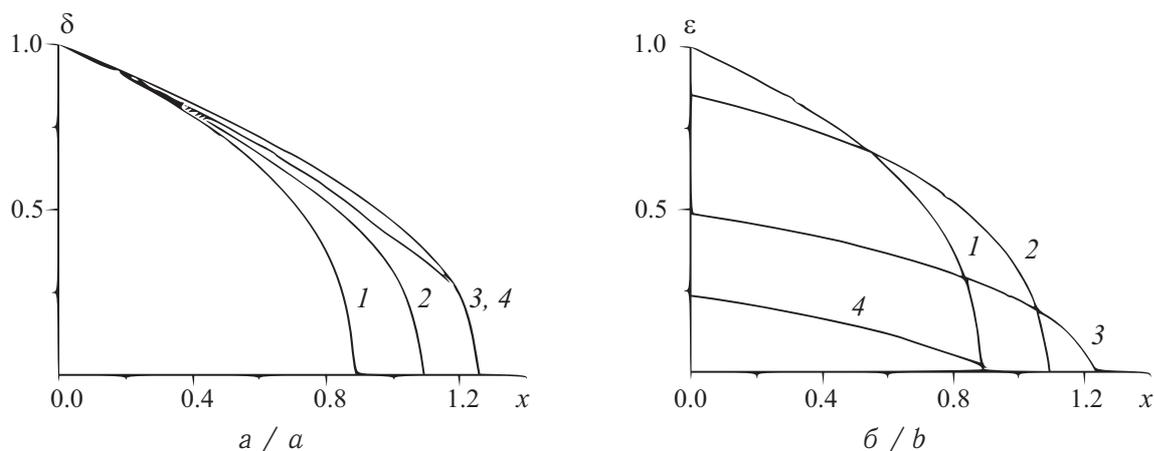


Рис. 2. Распределение безразмерных величин  $\delta$  (а) и  $\varepsilon$  (б) по длине трещины в моменты времени  $t = 1, 2, 6, 10$  — соответственно кривые 1–4;  $A = 0.2, \tau_1 = 1$

Fig. 2. The distribution of the dimensionless quantities  $\delta$  (a) and  $\varepsilon$  (b) along the length of the crack at the instants  $t = 1, 2, 6, 10$  are, respectively, curves 1–4;  $A = 0.2, \tau_1 = 1$



Граничные условия соответствуют случаю (16) при  $A = 0.2$ ,  $\tau_1 = 1$ . До момента  $t = \tau_1$  функции  $\delta$  и  $\varepsilon$  совпадают (кривые 1). В дальнейшем при подаче проппанта полость трещины заполняется частицами (кривые 2). Уменьшение свободного пространства особенно заметно в начальном сечении. Здесь  $\varepsilon$  меньше единицы. Контактный разрыв, отделяющий слой частиц от первоначальной оторочки, приближается к носику трещины. В дальнейшем наличие примеси частиц в жидкости гидроразрыва играет существенную роль в судьбе трещины. Начинается более интенсивное выпадение осадка в раскрывающейся ее части. В некоторый момент происходит закупоривание носика трещины и ее дальнейший рост прекращается. Ввиду продолжающегося просачивания жидкости гидроразрыва в грунт свободное пространство сокращается (кривые 3–4) и за конечный промежуток времени полностью исчезает. По мере сужения свободного пространства происходит незначительное уменьшение средней ширины трещины.

При постановке граничного условия (16) длина трещины не может превысить некоторой максимальной величины. Для различных значений параметров  $A$  и  $\tau_1$  наблюдается остановка роста трещины, которая происходит раньше прекращения закачки смеси. Обозначим предельную длину трещины и момент ее достижения как  $L_m$  и  $t_m$  соответственно.

Исследуем влияние продолжительности предварительной подачи в скважину жидкости гидроразрыва без примеси частиц (оторочки) на процесс формирования трещины. Поставив граничное условие (16) с постоянным значением  $A = 0.2$ , варьируем параметр  $\tau_1$ . На рис. 3 приведены зависимости предельной длины трещины, времени подачи смеси и момента остановки роста от длительности предварительной закачки. Подача оторочки увеличивает предельную длину трещины и снижает среднюю скорость ее роста до предельной длины. Отношение времени заполнения всей полости трещины частицами  $\tau$  к моменту достижения предельной длины  $t_m$  изменяется незначительно.

Ограничим время закачки, поставив граничное условие (15). Положим  $A = 0.2$ ,  $\tau = \text{const} = 10$  или  $\tau_2 = \text{const} = 10$ ; параметр  $\tau_1$  — варьируем. В первом случае — постоянно полное время подачи смеси, во втором — время подачи проппанта. В обоих случаях меняем время закачивания оторочки. На рис. 4 представлена окончательная форма трещины; значениям  $\tau_1 = 0, 2, 5$  соответствуют кривые 1–3.

При  $\tau_1 = 0$  к моменту сброса давления  $\tau$  трещина почти целиком заполнена частицами. Для двух других значений  $\tau_1$  изменения более значительны. После принудительного прекращения закачки поток смеси в начальном сечении останавливается. Из полости трещины жидкость гидроразрыва протекает в грунт. Присутствующие в ней частицы пополняют осадок. С течением времени трещина сужается по длине

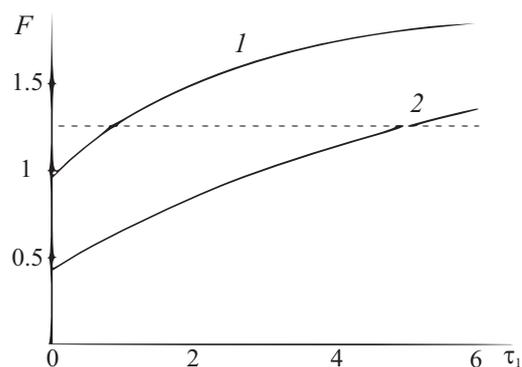


Рис. 3. Зависимость предельной длины трещины, времени подачи смеси и момента остановки роста от длительности закачивания оторочки: 1 —  $L_m$ , 2 —  $0.05\tau$ , пунктир —  $0.5\tau/t_m$ ,  $A = 0.2$   
 Fig. 3. Dependence of the limiting length of the crack, the time of the mixture feeding and the stopping time of growth from the duration of pumping of the rim: 1 —  $L_m$ , 2 —  $0.05\tau$ , dotted line —  $0.5\tau/t_m$ ,  $A = 0.2$

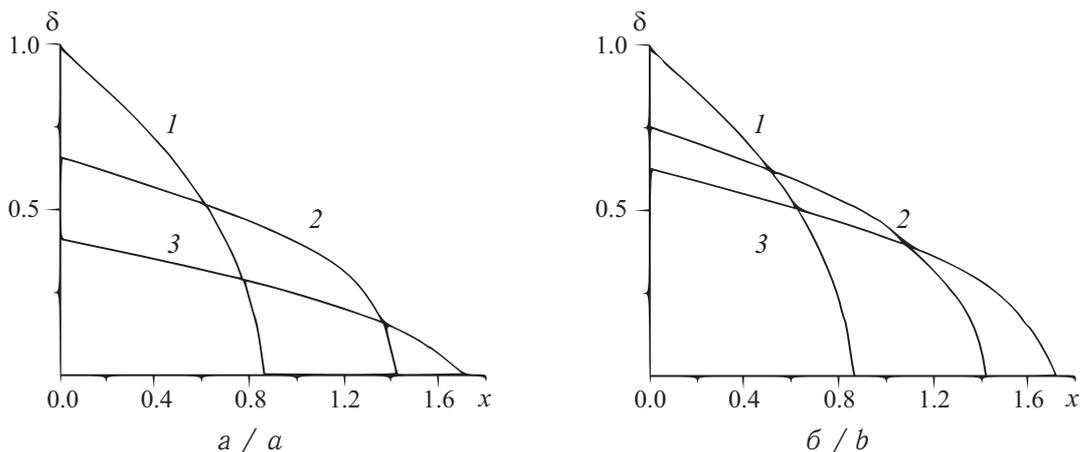


Рис. 4. Окончательная форма трещины с остановкой подачи проппанта; значениям  $\tau_1 = 0, 2, 5$  соответствуют кривые 1-3,  $A = 0.2, \tau = \text{const} = 10$  (а),  $\tau_2 = \text{const} = 10$  (б)  
 Fig. 4. The final shape of the crack with stopping proppant flow; The values  $\tau_1 = 0, 2, 5$  correspond to the curves 1-3,  $A = 0.2, \tau = \text{const} = 10$  (a),  $\tau_2 = \text{const} = 10$  (b)

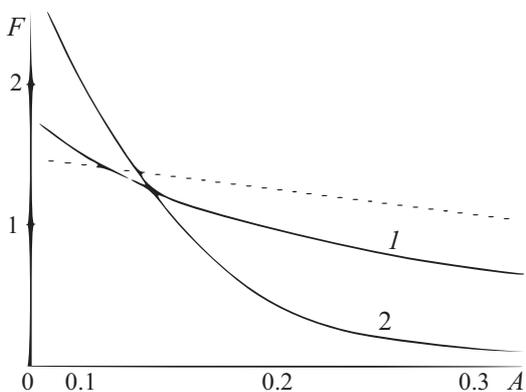


Рис. 5. Зависимость предельной длины трещины, времени подачи смеси и момента остановки роста от объемного содержания частиц: 1 —  $L_m$ , 2 —  $0.05\tau$ , пунктир —  $0.5\tau/t_m, \tau_1 = 0$

Fig. 5. Dependence of the limiting length of the crack, the time of the mixture feeding and the stopping time of growth on the volume content of the particles: 1 —  $L_m$ , 2 —  $0.05\tau$ , dotted line —  $0.5\tau/t_m, \tau_1 = 0$

и принимает окончательную форму. При сравнении соответствующих кривых для первого и второго расчетов замечаем равенство длин трещин. Это означает, что в обоих случаях достигнута максимальная длина. Сокращение времени подачи проппанта приводит лишь к уменьшению средней ширины  $\delta$ .

Исследуем влияние объемного содержания частиц в смеси на процесс формирования трещины. Подадим однородную смесь проппанта без оторочки при различных значениях  $\alpha$ . Поставив граничное условие (16), положим  $\tau_1 = 0$ . На рис. 5 представлены зависимости предельной длины трещины, времени подачи смеси и момента остановки роста от доли дисперсной фазы. Уменьшение объемного содержания частиц в смеси приводит к замедлению выпадения осадка и более длительному росту трещины. В результате достигается большая длина  $L_m$ . Время закачки существенно возрастает вследствие непрерывного уменьшения потока подаваемой смеси.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена математическая модель и рассмотрены особенности процесса течения вязкой жидкости с примесью частиц по раскрывающейся трещине в пористой среде. Изучено влияние протекания жидкости в грунт. Установлено, что присутствие частиц в жидкости гидроразрыва существенно влияет на характер процесса в целом. Рост трещины в длину может прекратиться вследствие закупоривания ее носика. Уменьшение объемного содержания частиц в закачиваемой смеси приводит к



замедлению выпадения осадка и более длительному росту трещины. Предварительная подача жидкости гидроразрыва без примеси частиц увеличивает максимальную длину трещины и снижает среднюю скорость ее роста до предельной длины. Отношение времени заполнения всей полости трещины частицами к моменту достижения предельной длины изменяется незначительно.

### Библиографический список

1. Perkins T. K., Kern L. R. Widths of hydraulic fractures // Journal of Petroleum Technology. 1961. Vol. 13, iss. 09. Paper SPE 89. P. 937–949. DOI: 10.2118/89-PA
2. Nordgren R. P. Propagation of a vertical hydraulic fracture // Society of Petroleum Engineers. 1972. Vol. 12, iss. 04. Paper 7834. P. 306–314. DOI: 10.2118/3009-PA
3. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1955. № 5. С. 3–41.
4. Есинов Д. В., Куранаков Д. С., Лапин В. Н., Черный С. Г. Математические модели гидроразрыва пласта // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19, № 2. С. 33–61.
5. Mobbs A. T., Hammond P. S. Computer Simulations of Proppant Transport in a Hydraulic Fracture // SPE Production and Facilities. 2001. Vol. 16, № 2. P. 112–121. DOI: 10.2118/69212-PA
6. Dontsov E. V., Peirce A. P. Slurry flow, gravitational settling and a proppant transport model for hydraulic fractures // Journal of Fluid Mechanics. 2014. Vol. 760. P. 567–590. DOI: 10.1017/jfm.2014.606
7. Новацкий В. Теория упругости. М. : Мир, 1975. 256 с.
8. Ивашинов О. Е., Смирнов Н. Н. Формирование трещины гидроразрыва в пористой среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2003. № 6. С. 28–36.
9. Смирнов Н. Н., Тагирова В. П. Анализ степенных автомодельных решений задачи о формировании трещины гидроразрыва // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. 2007. № 1. С. 48–54.
10. Татосов А. В. Модель закачки проппанта в трещину гидроразрыва // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10, № 6. С. 91–101.
11. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М. : Наука, 1987.

---

### Образец для цитирования:

Татосов А. В., Шляпкин А. С. Движение проппанта в раскрывающейся трещине гидроразрыва пласта // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 2. С. 217–226. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-217-226

---

## The Motion of Propping Agent in an Opening Crack in Hydraulic Fracturing Plast

A. V. Tatosov, A. S. Shlyapkin

Alexey V. Tatosov, <https://orcid.org/0000-0002-4229-3812>, Tyumen State University, 10, Semakova, Tyumen, 625003, Russia, [atatosov@utmn.ru](mailto:atatosov@utmn.ru)

Alexey S. Shlyapkin, Tyumen State University, 10, Semakova, Tyumen, 625003, Russia

In the present study the process of hydraulic fracture formation when pumping a viscous fluid with an admixture of particles into a well is considered. A model of a crack propagation taking account of the loss of liquid on seepage into a porous medium and the sedimentation of suspended particles under the action of gravity is developed. Detailed analysis of the sedimentation growth caused by leakage of hydraulic fracturing fluid into a porous medium is carried out. It is shown that the presence of particles has a significant effect on the pro-



cess of crack opening. The crack growth in the presence of particles is limited, its final state depends on the composition of the mixture, injection method, inlet pressure, the volume content of the particles, the volume of the rim (pure fracturing fluid without admixture). All these factors are taken into consideration in the proposed model based on special dimensionless forms of the equations of motion. The results make it possible to estimate the crack residual and choose the technological parameters to provide the desired state of the ruptured formation.

*Key words:* hydraulic fracture, porous medium, viscous liquid.

## References

1. Perkins T. K., Kern L. R. Widths of Hydraulic Fractures. *Journal of Petroleum Technology*, 1961, vol. 13, iss. 09, paper SPE 89, pp. 937–949. DOI: 10.2118/89-PA
2. Nordgren R. P. Propagation of a Vertical Hydraulic Fracture. *Society of Petroleum Engineers*, 1972, vol. 12, iss. 04, paper 7834, pp. 306–314. DOI: 10.2118/3009-PA
3. Zheltov Yu. P., Khristianovich S. A. O gidravlicheskom razryve neftenosnogo plasta [On hydraulic fracturing of oil reservoirs]. *Izv. AN SSSR, Otd-nie tekhn. nauk* [Proc. USSR Acad. Sci. Sect. Tech. Sci.], 1955, no. 5, pp. 3–41 (in Russian).
4. Esipov D. V., Kuranakov D. S., Lapin V. N., Chernyi S. G. Mathematical models of hydraulic fracturing. *Computational technologies*, 2014, vol. 19, no. 2, pp. 33–61 (in Russian).
5. Mobbs A. T., Hammond P. S. Computer Simulations of Proppant Transport in a Hydraulic Fracture. *SPE Production & Facilities*, 2001, vol. 16, no. 2, pp. 112–121. DOI: 10.2118/69212-PA
6. Dontsov E. V., Peirce A. P. Slurry flow, gravitational settling and a proppant transport model for hydraulic fractures. *Journal of Fluid Mechanics*, 2014, vol. 760, pp. 567–590. DOI: 10.1017/jfm.2014.606
7. Novatsky B. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Mir, 1975. 256 p. (in Russian).
8. Ivashnev O. E., Smirnov N. N. Formirovanie treshhiny gidrorazryva v poristoy srede [Formation of a hydraulic fracture in a porous medium]. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 1, Matematika. Mekhanika*, 2003, no. 6, pp. 28–36 (in Russian).
9. Smirnov N. N., Tagirova V. P. Analiz stepennykh avtomodel'nykh reshenij zadachi o formirovanii treshhiny gidrorazryva [Analysis of power-law self-similar solutions of the problem of fracture formation]. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 1, Matematika. Mekhanika*, 2007, no. 1, pp. 48–54 (in Russian).
10. Tatosov A. V. Model of crack filling in hydraulic fracturing. *Computational technologies*, 2005, vol. 10, no. 6, pp. 91–101 (in Russian).
11. Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurdyumov S. P., Mikhailov A. P. *Rezhimy s obostreniem v zadachah dlja kvazilinejnykh parabolicheskikh uravnenij* [Regimes with peaking in problems for quasilinear parabolic equations]. Moscow, Nauka, 1987. 480 p. (in Russian).

---

### Cite this article as:

Tatosov A. V., Shlyapkin A. S. The Motion of Propping Agent in an Opening Crack in Hydraulic Fracturing Plast. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 2, pp. 217–226 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-217-226

---



# ИНФОРМАТИКА

УДК 517.9

## О ПОСТРОЕНИИ $(n, k)$ -СХЕМЫ ВИЗУАЛЬНОЙ КРИПТОГРАФИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ХЭШ-ФУНКЦИЙ НАД БИНАРНЫМ ПОЛЕМ

Ю. В. Косолапов

Косолапов Юрий Владимирович, кандидат технических наук, доцент кафедры алгебры и дискретной математики, Южный федеральный университет, Россия, 344006, Ростов-на-Дону, Большая Садовая, 105/42, itaim@mail.ru

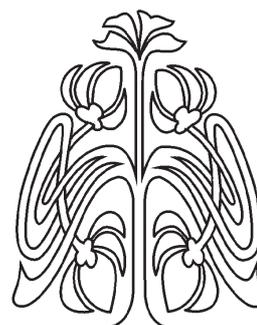
В статье исследуется вопрос построения  $(n, k)$ -схемы визуальной криптографии, в которой черно-белое секретное изображение распределяется среди  $n$  участников и только коалиции мощности  $k$  и более участников могут восстановить секретное изображение. Именно исследуется вопрос применения набора  $\mathcal{F}$  хэш-функций для построения  $(n, k)$ -схемы на основе  $(k, k)$ -схемы визуальной криптографии М. Наора и А. Шамира. Получены условия на  $\mathcal{F}$ , при выполнении которых возможно построение  $(n, k)$ -схемы. В работе, в частности, исследуется применение класса линейных хэш-функций, который в общем случае не позволяет построить  $(n, k)$ -схему, однако с помощью него возможно построение  $(n, K, k)$ -схемы, для которой любые  $k - 1$  и менее участников восстановить секрет не могут, а любые  $K$  и более могут. Для класса линейных хэш-функций получены достаточные условия на  $K$ , при выполнении которых коалиция мощности  $K$  и более может восстановить секрет. В частном случае исследована схема разделения секрета среди восьми участников, построенная на основе  $(4, 4)$ -схемы Наора – Шамира с применением класса линейных хэш-функций. Показано, что такая схема является  $(8, 4)$ -схемой и характеризуется меньшей длиной долей секретов и большей контрастностью, чем  $(8, 4)$ -схема, построенная с помощью класса хэш-функций, предложенного М. Наором и А. Шамиром.

*Ключевые слова:* визуальная криптография, линейные хэш-функции.

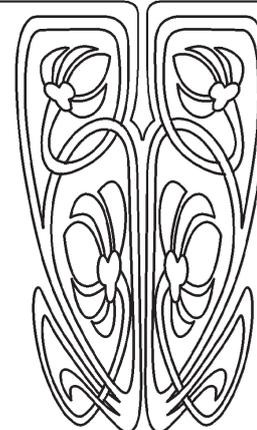
DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-227-239

### ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В [1,2] предложена схема разделения секрета (СРС), в которой некоторый секрет  $s$  разделяется среди конечного множества участников  $\underline{n} = \{0, \dots, n-1\}$ , занумерованных числами от 0 до  $n-1$ , и только подмножество участников с мощностью не менее определенного заранее числа  $k$  может восстановить исходный секрет.



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





Схемы разделения секрета, в которых любые  $k$  и более участников образуют *правомочную коалицию*, то есть могут восстановить секрет, а меньшее число участников секрет восстановить не может, называются *пороговыми*  $(n, k)$ -схемами [3]. В настоящее время СРС применяются как самостоятельно, так и в качестве примитива при синтезе других криптографических протоколов, например, протоколов многосторонних конфиденциальных вычислений [4]. Здесь и далее под СРС будем понимать следующую схему. Пусть секретом является вектор  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_M)$  длины  $M (\geq 1)$  из множества  $\{0, 1\}^M$  ( $M \geq 1$ ),  $\underline{n}$  — упорядоченное множество из  $n$  участников, среди которых *дилер* разделяет секрет. Для  $l$ -го бита  $s_l = b (\in \{0, 1\})$  секрета  $\mathbf{s}$  независимо от других битов этого секрета дилером применяется *протокол разделения одного бита*. Именно для бита  $b$  протокол разделения бита состоит в нахождении дилером для каждого  $i \in \underline{n}$  значения соответствующего (несекретного) отображения

$$f_i : \{0, 1\} \times \mathcal{R} \rightarrow \{0, 1\}^m, \quad (1)$$

где  $\mathcal{R}$  — подходящее для конкретной СРС множество, значения из которого принимает случайный аргумент,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m > 1$ . Таким образом, по биту  $s_l = b$  формируется набор из  $n$  *долей*, который представим в виде набора  $n$  векторов, каждый из которых принадлежит  $\{0, 1\}^m$ :

$$s_l \rightarrow (s_0^l, s_1^l, \dots, s_{n-1}^l), \quad s_i^l = f_i(s_l, r_l), i = 0, \dots, n-1, \quad (2)$$

где  $r_l$  — значение случайного аргумента, выбранное дилером из  $\mathcal{R}$  случайно и равновероятно для  $l$ -го бита. Для секрета  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_M)$  *протокол разделения секрета* состоит в нахождении для каждого участника  $i \in \underline{n}$  соответствующей доли  $\mathbf{s}_i$  длины  $M \cdot m$  и вида  $\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i^1 \parallel \dots \parallel \mathbf{s}_i^M$ , где  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$  — конкатенация векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

Пусть  $\underline{n}(K) = \{i_1, \dots, i_K\}$  — подмножество участников мощности  $K$ ,  $\underline{n}(K) \subseteq \underline{n}$ , а  $S_K = [s_{i_1}, \dots, s_{i_K}]$  — набор долей секрета  $\mathbf{s}$ . Символом  $g^{\underline{n}(K)}$  обозначим такое отображение вида

$$g^{\underline{n}(K)} : \underbrace{\{0, 1\}^m \times \dots \times \{0, 1\}^m}_K \rightarrow \{0, 1\}, \quad (3)$$

что  $g^{\underline{n}(K)}(s_{i_1}^l, \dots, s_{i_K}^l) = s_l$  для  $K \geq k$ , а при  $K < k$  вероятность события  $g^{\underline{n}(K)}(s_{i_1}^l, \dots, s_{i_K}^l) = 1$  равна  $1/2$ . Другими словами, отображение  $g^{\underline{n}(K)}$  однозначно восстанавливает каждый бит секрета  $\mathbf{s}$  при  $K \geq k$ , а при  $K < k$  вероятность восстановления каждого бита равна вероятности угадывания значения соответствующего бита. *Протокол восстановления  $l$ -го бита* коалицией  $\underline{n}(K)$  состоит в нахождении значения  $g^{\underline{n}(K)}(s_{i_1}^l, \dots, s_{i_K}^l)$ , а *протокол восстановления секрета* коалицией  $\underline{n}(K)$  по совокупности долей  $S_K$  состоит в нахождении вектора вида

$$g^{\underline{n}(K)}(s_{i_1}^1, \dots, s_{i_K}^1) \parallel g^{\underline{n}(K)}(s_{i_1}^2, \dots, s_{i_K}^2) \parallel \dots \parallel g^{\underline{n}(K)}(s_{i_1}^M, \dots, s_{i_K}^M).$$

Отметим, что любое черно-белое изображение может быть представлено в виде вектора из нулей и единиц, где «0» соответствует, например, белому пикселю изображения, а «1» — черному. В [5] М. Наором (Naor) и А. Шамиром (Shamir) предложена  $(n, k)$ -схема разделения секрета, представляющего собой черно-белое изображение. В основе этой схемы лежит построение на основе исходного изображения  $n$  таких черно-белых изображений («теневых» изображений), что при совмещении любых  $k$  из них (и более) можно восстановить исходное секретное изображение. При этом «совмещение» теневых изображений следует представлять как наложение этих изображений, нанесенных на прозрачную пленку, а «восстановление» —



как просмотр совмещенных теневых изображений на свет. Свою схему М. Наор и А. Шамир назвали схемой визуальной криптографии, так как при совмещении  $k$  и более «теневых» изображений имеется возможность визуально отличить области, соответствующие черным пикселям, от областей, соответствующих белым пикселям. Другими словами, имеется ненулевая относительная контрастность (различие) между черными и белыми областями. Заметим, что порог контрастной чувствительности глаза человека составляет порядка 0.01 [6], поэтому представляют интерес  $(n, k)$ -схемы с относительной контрастностью не менее 0.01. В [5] сначала строятся  $(k, k)$ -схемы, а затем на основе этих схем строится  $(n, k)$ -схема ( $n > k$ ), в частности, с использованием  $k$ -универсальных хэш-функций.

В настоящей работе ставится задача исследования  $(n, k)$ -схемы, построенной на основе класса линейных хэш-функций [7], который, с одной стороны, не является  $k$ -универсальным классом хэш-функций при  $k > 2$ , а с другой стороны, для рассматриваемой  $(n, k)$ -схемы содержит меньше функций, чем класс, предложенный в [5], что позволяет уменьшить размеры (длины) долей участников.

Работа имеет следующую структуру. В парагр. 1 приводятся необходимые сведения о схемах визуальной криптографии из [5] и предварительные результаты относительно применения хэш-функций для построения  $(n, k)$ -схем. В парагр. 2 исследуется схема визуальной криптографии на основе класса линейных хэш-функций и доказывается утверждение о контрастности восстанавливаемого секретного изображения. Там же приводятся результаты анализа  $(8, 4)$ -схемы. Доказательство основного результата для  $(8, 4)$ -схемы вынесено в приложение.

## 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_M) \in \{0, 1\}^M$  — секрет, соответствующий черно-белому изображению. Опишем протокол восстановления  $l$ -го бита  $s_l$  секрета  $\mathbf{s}$  в соответствии с [5]. Секретному биту  $s_l$  соответствует набор долей секретов (2). Для двух векторов  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) \in \{0, 1\}^m$  и  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m) \in \{0, 1\}^m$  определим операцию  $\vee$  покоординатного логического «или»:  $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = (a_1 \vee b_1, \dots, a_m \vee b_m)$ , где операция « $a \vee b$ » — это логическое «или» двоичных величин  $a$  и  $b$ . Для восстановления значения бита  $s_l = b$  коалицией участников  $\underline{n}(K) = \{i_1, \dots, i_K\}$  необходимо найти вектор

$$\mathbf{p}_l^{s_l} = \mathbf{s}_{i_1}^l \vee \mathbf{s}_{i_2}^l \vee \dots \vee \mathbf{s}_{i_K}^l \quad (4)$$

и вычислить для этого вектора вес Хэмминга  $w(\mathbf{p}_l^{s_l})$  — количество ненулевых координат вектора. Согласно [5] при  $K \geq k$  отображение (3) должно иметь вид

$$g^{\underline{n}(K)}(\mathbf{s}_{i_1}^l, \mathbf{s}_{i_2}^l, \dots, \mathbf{s}_{i_K}^l) = \begin{cases} 1, & \text{если } w(\mathbf{p}_l^{s_l}) \geq d(\underline{n}(K)), \\ 0, & \text{если } w(\mathbf{p}_l^{s_l}) \leq d(\underline{n}(K)) - \alpha(\underline{n}(K)) \cdot m, \end{cases}$$

где  $d(\underline{n}(K)) (\leq m)$  — пороговое значение для веса Хэмминга, при котором вектор  $\mathbf{p}_l^{s_l}$  соответствует биту  $s_l = 1$ , а величина  $\alpha(\underline{n}(K)) (0 < \alpha(\underline{n}(K)) < 1)$  характеризует *относительную контрастность* между вектором вида (4), соответствующим  $s_l = 1$ , и вектором того же вида, соответствующим  $s_l = 0$ :

$$\alpha(\underline{n}(K)) = \frac{w(\mathbf{p}_l^1) - w(\mathbf{p}_l^0)}{m}. \quad (5)$$

Заметим, что пороговое значение  $d(\underline{n}(K))$  и относительная контрастность  $\alpha(\underline{n}(K))$  в общем случае могут зависеть также и от  $l$  (так как значение  $r_l$  при выполнении



протокола разделения секрета (2) выбирается случайно и равномерно), однако здесь рассматриваются только  $(n, k)$ -схемы, где эти величины не зависят от значения случайного аргумента. При  $K < k$  в  $(n, k)$ -схеме веса «черного» и «белого» пикселей должны быть неразличимы, т.е.  $\alpha(\underline{n}(K)) = 0$ .

В [5] построена  $(k, k)$ -схема (далее — схема Наора–Шамира), для которой  $m = 2^{k-1}$  и величины  $d(\underline{n}(K))$  и  $\alpha(\underline{n}(K))$  зависят только от мощности  $K$  коалиции  $\underline{n}(K)$ . В удобном виде приведем описание  $(k, k)$ -схемы из [5].

Рассмотрим множество  $W = \{e_0; e_1; \dots; e_{k-1}\}$ . Пусть  $\Sigma^0 = \{\sigma_1^0, \sigma_2^0, \dots, \sigma_{2^{k-1}}^0\}$  и  $\Sigma^1 = \{\sigma_1^1, \sigma_2^1, \dots, \sigma_{2^{k-1}}^1\}$  — наборы подмножеств множества  $W$  четной и нечетной мощности соответственно. Набору  $\Sigma^b$  сопоставляется  $(k \times m)$ -матрица  $S^b = (\mathbf{S}_i^b)_{i=0}^{k-1}$ ,  $\mathbf{S}_i^b = (S_{i,1}^b, \dots, S_{i,m}^b)$ ,  $b \in \{0, 1\}$ , где

$$S_{i,j}^b = \begin{cases} 1, & \text{если } e_i \in \sigma_j^b, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad b \in \{0, 1\}. \quad (6)$$

При  $k = 4$  имеем:

$$\begin{aligned} \Sigma^0 &= \{\{e_0, e_1\}, \{e_0, e_2\}, \{e_0, e_3\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_2, e_3\}, \emptyset, \{e_0, e_1, e_2, e_3\}\}, \\ \Sigma^1 &= \{\{e_0\}, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_0, e_1, e_2\}, \{e_0, e_1, e_3\}, \{e_0, e_2, e_3\}, \{e_1, e_2, e_3\}\}, \end{aligned}$$

а соответствующие матрицы имеют вид

$$S^0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Согласно [5] далее по матрицам (6) строятся соответствующие им коллекции матриц  $\mathcal{C}_0$  и  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_b = \{\gamma(S^b) : \gamma \in \mathcal{S}_{2^{k-1}}\}$ ,  $b \in \{0, 1\}$ , где  $\mathcal{S}_{2^{k-1}}$  симметрическая группа перестановок множества  $\{1, \dots, 2^{k-1}\}$ ,  $|\mathcal{S}_{2^{k-1}}| = 2^{k-1}!$ ,  $\gamma(S^b)$  — перестановка столбцов матрицы  $S^b$  в соответствии с перестановкой  $\gamma$ . Для построения  $k$  долей, соответствующих одному биту  $b \in \{0; 1\}$  секретного вектора  $\mathbf{s}$ , случайным образом выбирается матрица  $\tilde{S}^b$  из  $\mathcal{C}_b$ ; доля участника  $i$  представляет собой  $i$ -ю строку матрицы  $\tilde{S}^b$ ,  $i \in \{0, \dots, k-1\}$  (нумерация с нуля). Поэтому отображение (1) в данном случае — это выбор  $i$ -й строки в случайно выбранной из коллекции  $\mathcal{C}_b$  матрице  $\tilde{S}^b = \gamma(S^b)$ ,  $\gamma \in \mathcal{R} = \mathcal{S}_{2^{k-1}}$ .

Пусть  $\tau \subset \{0, \dots, k-1\}$ ,  $1 \leq |\tau| \leq k-1$ ,  $\gamma(S^b)_\tau$  — матрица, полученная из матрицы  $\gamma(S^b)$  выбрасыванием строк с номерами из множества  $\{0, \dots, k-1\} \setminus \tau$ ,  $w_b^\tau$  — вес вектора, получающегося выполнением операции  $\vee$  над строками матрицы  $S^b$  с номерами из множества  $\tau$ ,  $b \in \{0, 1\}$ . Матрицы  $S^0$  и  $S^1$  обладают следующими свойствами [5]:

1) матрица  $S^0$  имеет один нулевой столбец, а в матрице  $S^1$  таких столбцов нет;

2) наборы  $(\gamma(S^1)_\tau)_{\gamma \in \mathcal{S}_{2^{k-1}}}$  и  $(\gamma(S^0)_\tau)_{\gamma \in \mathcal{S}_{2^{k-1}}}$  совпадают с точностью до перестановки матриц внутри наборов;

3)  $w_0^{\tau_1} = w_1^{\tau_2}$  и  $w_b^{\tau_1} = w_b^{\tau_2}$  для любых таких  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , что  $|\tau_1| = |\tau_2| < k$ , где  $b \in \{0, 1\}$ .

Из свойства 3) следует, что  $w_b^{\tau_1}$  зависит только от мощности  $K$  множества  $\tau$ , поэтому положим  $w_b^{\tau_1} = w_K$ . В силу свойства 3) и способа построения коллекций  $\mathcal{C}_0$



и  $\mathcal{C}_1$  для  $(k, k)$ -схемы Наора – Шамира величины  $d(\underline{n}(K))$  и  $\alpha(\underline{n}(K))$  зависят только от мощности  $K$  коалиции  $\underline{n}(K)$ . Соответствующие величины обозначим  $d(K)$  и  $\alpha(K)$ . В частности, из свойств 2) и 1) следует, что для  $(k, k)$ -схемы Наора – Шамира

$$\alpha(K) = \begin{cases} 0, & \text{если } K < k, \\ \frac{1}{2^{k-1}}, & \text{если } K = k, \end{cases} \quad d(K) = \begin{cases} w_K, & \text{если } K < k, \\ 2^{k-1}, & \text{если } K = k. \end{cases} \quad (8)$$

В [5] предложен способ построения  $(n, k)$ -схемы на основе  $(k, k)$ -схемы. При построении коллекций матриц  $\mathcal{C}_0$  и  $\mathcal{C}_1$  для  $(n, k)$ -схемы М. Наором и А. Шамиром предлагается использовать класс  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^L$  хэш-функции вида  $f_i : \{0, \dots, n-1\} \rightarrow \{0, \dots, k-1\}$ . Здесь представляется удобным описать формирование случайной матрицы  $\hat{S}^b (\in \hat{\mathcal{C}}_b)$  для бита  $b$ , а не вводить громоздкое определение коллекции  $\mathcal{C}_b$ . Для построения матрицы  $\hat{S}^b$  случайным образом выбираются (возможно, с повторениями)  $L$  матриц  $T^{b,1}, \dots, T^{b,L}$  ( $T^{b,i} \in \mathcal{C}_b$ ) из коллекции  $\mathcal{C}_b$ , построенной для  $(k, k)$ -схемы Наора – Шамира. Элемент на пересечении  $i$ -й строки ( $0 \leq i \leq n-1$ ) и  $(j + (l-1) \cdot (2^{k-1}))$ -го столбца ( $1 \leq j \leq 2^{k-1}, 1 \leq l \leq L$ ) матрицы  $\hat{S}^b = (\hat{S}_i^b)_{i=0}^{n-1}$  определяется следующим образом:

$$\hat{S}_{i, j+(l-1) \cdot (2^{k-1})}^b = T_{f_l(i), j}^{b,l}, f_l \in \mathcal{F}. \quad (9)$$

Построенная таким образом матрица  $\hat{S}^b$  состоит из  $n$  строк и  $2^{k-1} \cdot L$  столбцов и представима в виде конкатенации  $L$  матриц размера  $(n \times n)$ :  $\hat{S}^b = [\tilde{T}^{b,1} \parallel \dots \parallel \tilde{T}^{b,L}]$ , где  $(n \times n)$ -матрица  $\tilde{T}^{b,l}$  имеет вид  $\tilde{T}^{b,l} = [\mathbf{T}_{f_l(i)}^{b,l}]_{i=0}^{n-1}$ , где  $\mathbf{T}_j^{b,l}$  —  $j$ -я строка матрицы  $T^{b,l} (\in \mathcal{C}_b)$ .

**Утверждение 1.** Пусть  $\underline{n}(K) = \{i_1, \dots, i_K\}$  — коалиция,  $B = \{i_1, \dots, i_K\}$ ,  $\hat{\mathbf{p}}^b = \bigvee_{j=1}^K \hat{S}_{i_j}^b$ , Пусть  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ ,

$$C(B, f) = |\{f(b) : b \in B\}|, f \in \mathcal{A}, \quad (10)$$

$\mathcal{C}_B^{\mathcal{A}}(l) = |\{f \in \mathcal{A} : C(B, f) = l\}|$ . Тогда относительная контрастность  $\alpha(\underline{n}(K))$  для  $(k, n)$ -схемы, построенной с применением хэш-функций из  $\mathcal{A}$ , вычисляется по формуле

$$\alpha(\underline{n}(K)) = \frac{\mathcal{C}_B^{\mathcal{A}}(k)}{|\mathcal{A}| \cdot (2^{k-1})}. \quad (11)$$

**Доказательство.** Несложно проверить, что величина  $w(\hat{\mathbf{p}}^b)$  может быть представлена в виде  $w(\hat{\mathbf{p}}^1) = \mathcal{C}_B^{\mathcal{A}}(k) \cdot d(k) + \sum_{l=1}^{k-1} \mathcal{C}_B^{\mathcal{A}}(l) \cdot w_l$  и  $w(\hat{\mathbf{p}}^0) = w(\hat{\mathbf{p}}^1) - \mathcal{C}_B^{\mathcal{A}}(k) \cdot (\alpha(k) \cdot 2^{k-1})$ , где  $\alpha(K)$  — относительная контрастность для  $(k, k)$ -схемы Наора – Шамира. Подставляя в (5) значения  $w(\hat{\mathbf{p}}^b)$  вместо  $w(\mathbf{p}^b)$ ,  $b \in \{0, 1\}$ , и учитывая равенство  $\alpha(k) = \frac{1}{2^{k-1}}$  (см. (8)), получим (11), так как в этом случае  $m = |\mathcal{A}| \cdot (2^{k-1})$ .  $\square$

Учитывая, что  $\mathcal{C}_B^{\mathcal{A}}(k) = 0$  при  $K < k$  для любого  $B$  мощности  $K$  и менее, то любая коалиция мощности менее  $k$  не сможет восстановить секрет (черные и белые пиксели неразличимы). Следующее утверждение устанавливает ограничение на класс функций  $\mathcal{F}$ , который может применяться для построения  $(n, k)$ -схемы по  $(k, k)$ -схеме.



**Утверждение 2.** Пусть  $\mathcal{B}$  — набор всех подмножеств множества  $\{0, \dots, n-1\}$  мощности  $k$ . Для того чтобы  $(n, k)$ -схема, построенная на основе  $(k, k)$ -схемы и набора хэш-функций  $\mathcal{A} (\subseteq \mathcal{F})$ , обеспечивала ненулевую относительную контрастность, необходимо и достаточно, чтобы для всех  $B \in \mathcal{B}$  выполнялось неравенство  $\mathcal{C}_B^{\mathcal{A}}(k) > 0$ .

**Доказательство.** Достаточность условия следует из (11).

Докажем необходимость. Предположим, что  $(n, k)$ -схема обеспечивает ненулевую контрастность, но существует такое  $B'$ ,  $|B'| = k$ , что  $\mathcal{C}_{B'}^{\mathcal{A}}(k) = 0$ . Отсюда получаем, что коалиция участников с номерами из  $B'$  не сможет восстановить секретное изображение, так как контрастность нулевая (следует из (11)). Но это противоречит тому, что контрастность ненулевая.  $\square$

В общем случае для заданного подмножества  $\mathcal{A} (\subseteq \mathcal{F})$  набор  $\mathcal{B}$  можно представить в виде объединения непересекающихся подмножеств:  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0^{\mathcal{A}} \cup \mathcal{B}_1^{\mathcal{A}} \cup \dots \cup \mathcal{B}_{L_A}^{\mathcal{A}}$ ,  $L_A = |\mathcal{A}|$ , где  $\mathcal{B}_i^{\mathcal{A}} = \{B \in \mathcal{B} : \mathcal{C}_B^{\mathcal{A}}(k) = i\}$ . Если  $\mathcal{B}_0^{\mathcal{A}} = \emptyset$ , то набор  $\mathcal{A}$  удовлетворяет условиям утверждения 2, при этом если в разбиении множества  $\mathcal{B}$  имеется более одного непустого подмножества, то для каждого из этих подмножеств обеспечивается своя относительная контрастность. Таким образом, наборы функций  $\mathcal{A}$  (в частности,  $\mathcal{A} = \mathcal{F}$ ), удовлетворяющие условиям утверждения 2, в общем случае позволяют строить схемы визуальной криптографии, названные в [8] *несбалансированными*. В [5] ко множеству  $\mathcal{A}$  (в частном случае, к классу  $\mathcal{F}$ ) предъявляются более строгие требования, чем в утверждении 2, для обеспечения одинаковой (сбалансированной) контрастности: для всех  $B \in \mathcal{B}$  и всех  $1 \leq q \leq k$  вероятность того, что случайно выбранная функция  $f \in \mathcal{A}$  имеет  $q$  различных значений на множестве  $B$ , должна быть одной и той же. В частности, как указано в [5], этому условию удовлетворяет класс  $\mathcal{F}'$ , являющийся классом  $k$ -универсальных ( $k$ -независимых) хэш-функций [9], так как для любых разных  $x_1, \dots, x_k$  из  $\{0, \dots, n-1\}$  случайные величины  $F(x_1), \dots, F(x_k)$  полностью независимы, если  $F$  — случайно и равномерно выбранная функция из  $\mathcal{F}'$ . Согласно теореме 5.2 из [5] относительная контрастность в этом случае равна  $\frac{(2e)^{-k}}{\sqrt{2\pi k}}$ , а длина каждой доли, соответствующей одному секретному биту, равна  $n^k 2^{k-1}$ . Например, при построении  $(8, 4)$ -схемы на основе  $(4, 4)$ -схемы с использованием предложенного в [5] класса 4-универсальных хэш-функций каждый бит будет представлен 32768-ю битами в «теневом» изображении, при этом контрастность будет приблизительно 0.00024. Далее будет показано, что существует такой класс хэш-функций, для которого  $(8, 4)$ -схема обеспечивает контрастность не менее 0.011, при этом каждый бит кодируется не более чем 512-ю битами.

## 2. $(n, k)$ -СХЕМА НА ОСНОВЕ КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ХЭШ-ФУНКЦИЙ

Рассмотрим множество  $\mathcal{H}^{p,t}$  всех  $(0, 1)$ -матриц размера  $(p \times t)$ ,  $t \leq p$ . Пусть

$$b_l : \{0, 1\}^l \rightarrow \{0, 1, \dots, 2^l - 1\} \tag{12}$$

— функция, ставящая однозначно в соответствие вектору из  $\{0, 1\}^l$  число из множества  $\{0, \dots, 2^l - 1\}$ , а  $b_l^{-1} : \{0, \dots, 2^l - 1\} \rightarrow \{0, 1\}^l$  — обратная к  $b_l$  функция. (Удобным представляется полагать, что  $b_l^{-1}(i)$  — двоичная запись числа  $i$ .) Зафиксируем отображение

$$h : \mathcal{H}^{p,t} \rightarrow \{1, \dots, 2^{p-t}\}, \tag{13}$$



однозначно ставящее матрицам из  $\mathcal{H}^{p,t}$  десятичное число из диапазона  $\{1, \dots, 2^{p \cdot t}\}$ . Для  $H \in \mathcal{H}^{p,t}$  определим функцию  $f_{h(H)} : \{0, \dots, 2^p - 1\} \rightarrow \{0, \dots, 2^t - 1\}$ , действующую на элемент  $x \in \{0, \dots, 2^p - 1\}$  по правилу:  $f_{h(H)}(x) = b_t(b_p^{-1}(x) \cdot H)$ . Класс функций  $\mathcal{F}_{\mathcal{H}^{p,t}} = \{f_{h(H)} : H \in \mathcal{H}^{p,t}\}$  называется классом линейных хэш-функций [7],  $|\mathcal{F}_{\mathcal{H}^{p,t}}| = 2^{p \cdot t}$ .

Пусть  $k = 2^t$ ,  $n = 2^p$ . Применим правило (9) для построения СРС, где  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{H}^{p,t}}$ . Отметим, что такая СРС в общем случае может не являться  $(n, k)$ -схемой в том смысле, что не для любой коалиции мощности  $k$  относительная контрастность будет ненулевой. Однако она при определенных условиях на  $K$  является  $(n, K, k)$ -схемой, где менее  $k$  участников секрет восстановить не могут, а не менее  $K$  могут (гамр-схема [4]).

**Утверждение 3.** Пусть СРС с  $n$  участниками построена на основе  $(k, k)$ -схемы Наора – Шамира с применением правила (9) и класса  $\mathcal{F}_{\mathcal{H}^{p,t}}$ . Тогда для любой коалиции  $\underline{n}(K)$  мощности  $K$  не менее  $2^p - (2^{p-t} - 1)$  выполняются равенства:

$$\alpha(\underline{n}(K)) = \frac{\prod_{j=0}^{t-1} (2^p - 2^j)}{2^{p \cdot t} \cdot (2^{k-1})}, \quad m = 2^{p \cdot t} \cdot (2^{k-1}). \quad (14)$$

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{B}_{K,p}$  — множество двоичных  $(K \times p)$ -матриц, состоящих из попарно различных строк, причем двум двоичным матрицам  $B_1$  и  $B_2$ , в каждой из которых нет повторяющихся строк и отличающихся только порядком строк, соответствует одна матрица из  $\mathcal{B}_{K,p}$ . Отметим, что каждая матрица  $B = (\mathbf{b}_i)_{i=1}^K$ ,  $\mathbf{b}_i \in \{0, 1\}^p$ , принадлежащая  $\mathcal{B}_{K,p}$ , однозначно соответствует коалиции  $\{b_p(\mathbf{b}_1), \dots, b_p(\mathbf{b}_K)\}$  из  $K$  участников набора  $\underline{n}$ . Пусть  $H$  —  $(p \times t)$ -матрица из множества  $\mathcal{H}^{p,t}$ ,  $\text{rank}(H) = t$ , тогда матрица  $H$  может быть рассмотрена как проверочная матрица некоторого бинарного  $[p, p-t]$ -кода  $\mathcal{D}$  длины  $p$  и размерности  $p-t$ . Для заданного  $\mathbf{y} \in \mathbb{F}_2^t$  множеством решений уравнения  $\mathbf{y} = \mathbf{x}H$  относительно вектора неизвестных  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$  является некоторый смежный класс кода  $\mathcal{D}$ . Так как мощность смежного класса равна  $|\mathcal{D}| = 2^{p-t}$ , то для того, чтобы при умножении на матрицу  $H$  бинарных векторов длины  $p$ , представляющих собой строки матрицы  $B$ , получалось  $2^t$  различных значений, достаточно, чтобы в матрице  $B$  было не менее  $2^{p-t} \cdot (2^t - 1) + 1$  различных строк. Таким образом, для каждой матрицы  $H$  ранга  $t$  в матрице  $B \cdot H$  найдутся  $2^t$  различных строк. Так как над полем  $\mathbb{F}_2$  имеется  $\prod_{j=0}^{t-1} (2^p - 2^j)$  матриц размера  $p \times t$  и ранга  $t$ , то для  $B \in \mathcal{B}_{K,p}$  имеем:  $|\mathcal{F}_{B,k}| \geq \prod_{j=0}^{t-1} (2^p - 2^j)$ . Имеется  $2^{\text{rank}(H)}$  возможных значений линейных комбинаций строк матрицы  $H$ , поэтому при  $\text{rank}(H) < t$  любая линейная комбинация строк этой матрицы дает менее  $k$  значений. Поэтому на основании (11) получаем (14).  $\square$

Таким образом, при  $K \geq 2^p - (2^{p-t} - 1)$  построенная схема является  $(n, K, k)$ -схемой. Из доказательства утверждения 3 получаем

**Следствие 1.** Пусть  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{H}_t^{p,t}} = \{f_{h(H)} \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}^{p,t}} : \text{rank}(H) = t\}$ ,  $k = 2^t$ ,  $n = 2^p$ . Тогда для  $(n, K, k)$ -схемы при  $K \geq 2^p - (2^{p-t} - 1)$  имеем:  $\alpha(\underline{n}(K)) = \frac{1}{2^{k-1}}$ ,  $m = \prod_{j=0}^{t-1} (2^p - 2^j) \cdot (2^{k-1})$ .

Далее рассматривается случай, когда  $k = 4$  и  $n = 8$  ( $p = 3$ ,  $t = 2$ ), для которого показано, что построенная СРС является  $(8, 4)$ -схемой. Напомним, что для  $(4, 4)$ -схемы Наора – Шамира матрицы  $S^0$  и  $S^1$  имеют вид (7),  $d(4) = 8$ ,  $\alpha = \frac{1}{8}$ . Пусть  $\underline{\delta} = \{0, \dots, 7\}$  — участники схемы. Участнику с номером  $i$  сопоставим в соответствие



вектор  $b_3^{-1}(i)$  длины три. Рассмотрим множества  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{3,2}$  и  $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_{4,3}$ ,  $|\mathcal{H}| = 64$ ,  $|\tilde{\mathcal{B}}| = 70$ . Для  $(4 \times 3)$ -матрицы  $B = (b_i)_{i=1}^4$  символом  $b_3(B)$  обозначим множество  $\{b_3(b_1), \dots, b_3(b_4)\}$  (см. (12)).

**Утверждение 4.** Для множества  $\tilde{\mathcal{B}}$  имеет место разбиение  $\tilde{\mathcal{B}} = \tilde{\mathcal{B}}'_1 \cup \tilde{\mathcal{B}}'_2$ ,  $|\tilde{\mathcal{B}}'_1| = 56$ ,  $|\tilde{\mathcal{B}}'_2| = 14$ , причем  $\tilde{\mathcal{B}}'_1 \cap \tilde{\mathcal{B}}'_2 = \emptyset$  и для любых  $B \in \tilde{\mathcal{B}}'_1$  справедливы равенства  $\mathcal{C}_{b_3(B)}^{\mathcal{F}_\mathcal{H}}(1) = 1$ ,  $\mathcal{C}_{b_3(B)}^{\mathcal{F}_\mathcal{H}}(2) = 21$ ,  $\mathcal{C}_{b_3(B)}^{\mathcal{F}_\mathcal{H}}(3) = 36$ ,  $\mathcal{C}_{b_3(B)}^{\mathcal{F}_\mathcal{H}}(4) = 6$ , для любых  $B \in \tilde{\mathcal{B}}'_2$  — равенства  $\mathcal{C}_{b_3(B)}^{\mathcal{F}_\mathcal{H}}(1) = 4$ ,  $\mathcal{C}_{b_3(B)}^{\mathcal{F}_\mathcal{H}}(2) = 36$ ,  $\mathcal{C}_{b_3(B)}^{\mathcal{F}_\mathcal{H}}(3) = 0$ ,  $\mathcal{C}_{b_3(B)}^{\mathcal{F}_\mathcal{H}}(4) = 24$ .

Доказательство утверждения 4 приведено в приложении. Пусть  $\chi$  — отображение, ставящее в соответствие любой коалиции  $\underline{g}(4) = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$  матрицу из  $\tilde{\mathcal{B}}$  по правилу:  $\chi(\underline{g}(4)) = (b_3^{-1}(i_j))_{j=1}^4$ , где  $b_3^{-1}(i_j)$  —  $j$ -я строка матрицы  $\chi(\underline{g}(4))$ .

**Утверждение 5.** Схема, построенная с применением класса  $\mathcal{F}_\mathcal{H}$  по правилу (9) на основе  $(4, 4)$ -схемы Наора — Шамира, является  $(8, 4)$ -схемой, при этом  $m = 512$  и множество  $\tilde{\mathcal{B}}$  распадается на два множества  $\tilde{\mathcal{B}}'_1$ ,  $|\tilde{\mathcal{B}}'_1| = 56$  и  $\tilde{\mathcal{B}}'_2$ ,  $|\tilde{\mathcal{B}}'_2| = 14$ , так, что

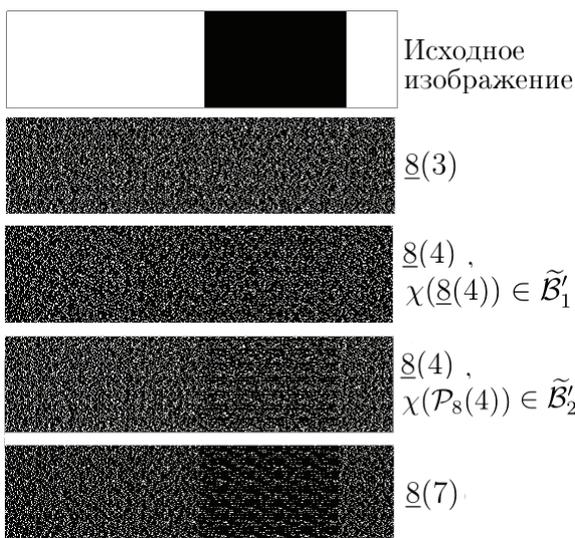
$$\alpha(\underline{g}(4)) = \begin{cases} 6/512 \approx 0.0117 & \text{для } \chi(\underline{g}(4)) \in \tilde{\mathcal{B}}'_1, \\ 24/512 \approx 0.0468 & \text{для } \chi(\underline{g}(4)) \in \tilde{\mathcal{B}}'_2. \end{cases} \quad (15)$$

**Доказательство.** Доказательство вытекает из утверждений 1, 2 и 4. □

Из утверждения 4 получаем, что если некоторой коалиции мощности 4 соответствует матрица из  $\tilde{\mathcal{B}}'_1$ , то  $w(\mathbf{p}^1) = 430$  и  $w(\mathbf{p}^0) = 424$ , где  $\mathbf{p}^b$  — вектор вида (4) при  $K = 4$ . В случае, когда такой коалиции соответствует матрица из  $\tilde{\mathcal{B}}'_2$ , то  $w(\mathbf{p}^1) = 424$  и  $w(\mathbf{p}^0) = 400$ . Вычисления в соответствии с (14) показывают, что для семи и восьми долей относительная контрастность равна  $42/512 \approx 0.082$ . Из результатов работы [10] и утверждения 5 следует, что построенная  $(8, 4)$ -схема обеспечивает приемлемую для схем визуальной криптографии относительную контрастность восстанавливаемых изображений. Также отметим, что построенная схема лучше (как по контрастности, так и по длине долей секрета) соответствующей  $(8, 4)$ -схемы, построенной с применением класса  $k$ -универсальных хэш-функций ( $k = 4$ ), предложенного в [5].

Пример применения  $(8, 4)$ -схемы показан на рисунке.

Из утверждения 2 и доказательства утверждения 4 следует, что построенная  $(8, 4)$ -схема может быть модифицирована путем рассмотрения класса  $\mathcal{F}_{\mathcal{H}_2} = \{f_{h(H)} : H \in \mathcal{H}, \text{rank}(H) = 2\}$ , так как для каждой матрицы из  $\tilde{\mathcal{B}}$  в  $\mathcal{F}_{\mathcal{H}_2}$  найдется хотя бы одна функция, для которой выполняется условие из утверждения 2. В этом случае длина доли каждого участника равна 336 (а не 512), при этом  $\alpha(\underline{g}(4)) = 6/336 \approx 0.0178$  для  $\chi(\underline{g}(4))$  из  $\tilde{\mathcal{B}}'_1$  и  $\alpha(\underline{g}(4)) = 24/336 \approx 0.0714$  для  $\chi(\underline{g}(4))$  из  $\tilde{\mathcal{B}}'_2$  (сравните с (15)). Из следствия 1 получаем, что при использовании класса  $\mathcal{F}_{\mathcal{H}_2}$  для семи и восьми долей относительная контрастность равна 0.125.



Применения  $(8, 4)$ -схемы  
Applications of  $(8, 4)$ -scheme



Заметим, что в [10] построена  $(n, k)$ -схема, для которой при  $n = 8$  и  $k = 4$  относительная контрастность равна  $0.0208(3)$ , а каждый пиксель кодируется 48-ю битами. Таким образом, построенная в настоящей работе с применением  $\mathcal{F}_{\mathcal{H}_2}(8, 4)$ -схема лучше по контрастности  $(8, 4)$ -схемы из [10], когда  $\chi(\underline{8}(4)) \in \tilde{\mathcal{B}}'_2$ , и незначительно хуже, когда  $\chi(\underline{8}(4)) \in \tilde{\mathcal{B}}'_1$ , однако при этом длина пикселя в построенной схеме больше в 7 раз.

### Библиографический список

1. Shamir A. How to share a secret // Communications of the ACM. 1979. Vol. 22, № 11. P. 612–613.
2. Blakley G. R. Safeguarding cryptographic keys // Proc. of the National Computer Conference. 1979. Vol. 48. P. 313–317.
3. Погорелов Б. А., Сачков В. Н. Словарь криптографических терминов. М. : МЦНМО, 2006. 91 с.
4. Chen H., Cramer R., Goldwasser S., Haan R., Vaikuntanathan V. Secure Computation from Random Error Correcting Codes // Advances in Cryptology – EUROCRYPT 2007. EUROCRYPT 2007. Lecture Notes in Computer Science. Berlin ; Heidelberg : Springer, 2007. Vol. 4515. P. 291–310. DOI: 10.1007/978-3-540-72540-4\_17
5. Naor M., Shamir A. Visual cryptography // Advances in Cryptology – EUROCRYPT'94. EUROCRYPT 1994. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg : Springer, 1994. Vol. 950. P. 1–12. DOI: 10.1007/BFb0053419
6. Pelli D.G., Bex P. Measuring contrast sensitivity // Vision Res. 2013. Vol. 90. P. 10–14. DOI: 10.1016/j.visres.2013.04.015
7. Carter J. L., Wegman M. N. Universal classes of hash functions // Journal of Computer and System Sciences. 1979. Vol. 18, iss. 2. P. 143–154. DOI: 10.1016/0022-0000(79)90044-8
8. Bose M., Mukerjee R. Optimal  $(k, n)$  visual cryptographic schemes for general  $k$  // Des. Codes Cryptogr. 2010. Vol. 55, iss. 1. P. 19–35. DOI: 10.1007/s10623-009-9327-6
9. Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., Stein C. Introduction to Algorithms. Cambridge, Massachusetts; London, England : MIT Press, 2009. 1312 p.
10. Lakshmanan R., Arumugam S. Construction of a  $(k, n)$ -visual cryptography scheme // Des. Codes Cryptogr. 2017. Vol. 82, iss. 3. P. 629–645. DOI: 10.1007/s10623-016-0181-z

### ПРИЛОЖЕНИЕ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 4

Рассмотрим разбиение  $\tilde{\mathcal{B}} = \tilde{\mathcal{B}}_0 \cup \tilde{\mathcal{B}}_1 \cup \tilde{\mathcal{B}}_2 \cup \tilde{\mathcal{B}}_3$ , где  $\tilde{\mathcal{B}}_i = \{B \in \tilde{\mathcal{B}} : \text{rank}(B) = i\}$ . Очевидно, что  $\tilde{\mathcal{B}}_0 = \tilde{\mathcal{B}}_1 = \emptyset$ ,  $|\tilde{\mathcal{B}}_2| = 7$ ,  $|\tilde{\mathcal{B}}_3| = 63$ , поэтому  $\tilde{\mathcal{B}} = \tilde{\mathcal{B}}_2 \cup \tilde{\mathcal{B}}_3$ . Выпишем все матрицы множества  $\tilde{\mathcal{B}}_2$ :

$$\hat{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{B}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{B}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B}_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество  $\tilde{\mathcal{B}}_3$  представим в виде  $\tilde{\mathcal{B}}_3 = \tilde{\mathcal{B}}_{3,1} \cup \tilde{\mathcal{B}}_{3,2} \cup \tilde{\mathcal{B}}_{3,3}$ , где  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,1}$  — матрицы из  $\tilde{\mathcal{B}}_3$ , у которых первая строка нулевая (напомним, строки не упорядочены, поэтому можем полагать, что нулевой является первая строка),  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,2}$  — матрицы из  $\tilde{\mathcal{B}}_3$ , содержащие четыре



ненулевые строки, каждая из которых равна сумме трех других строк,  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,3}$  — матрицы из  $\tilde{\mathcal{B}}_3$ , содержащие ненулевые строки и одна из строк является суммой двух каких-либо других строк. Покажем, что  $|\tilde{\mathcal{B}}_{3,1}| = 28$ ,  $|\tilde{\mathcal{B}}_{3,2}| = 7$ ,  $|\tilde{\mathcal{B}}_{3,3}| = 28$ . Заметим, что имеется  $(2^3 - 1)(2^3 - 2)(2^3 - 2^2) = 168$  матриц над  $\mathbb{F}_2$  размера  $(3 \times 3)$  и ранга 3. При этом множество всех этих матриц разбивается на классы, где в каждом классе матрицы отличаются только перестановкой строк. Так как в каждом таком классе 6 матриц, то  $|\tilde{\mathcal{B}}_{3,1}| = 168/6 = 28$ . Отсюда также следует  $|\tilde{\mathcal{B}}_{3,2}| = |\tilde{\mathcal{B}}_{3,1}|/4 = 7$  и  $|\tilde{\mathcal{B}}_{3,3}| = |\tilde{\mathcal{B}}_3| - (28 + 7)$ . Выпишем все матрицы множества  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,2}$ :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Множество матриц  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{3,2}$  также представим в виде разбиения  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \cup \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ , где  $\mathcal{H}_i = \{H \in \mathcal{H} : \text{rank}(H) = i\}$ . Легко проверить, что  $|\mathcal{H}_0| = 1$ ,  $|\mathcal{H}_2| = C_7^2 \cdot 2 = 42$  и  $|\mathcal{H}_1| = 64 - (42 + 1) = 21$ . Из (10) следует, что  $C(b_3(B), f_{h(H)}) = 1$  для всех  $B \in \tilde{\mathcal{B}}$  и всех  $H \in \mathcal{H}_0$ , где  $h(\cdot)$  — отображение вида (13). Для удобства множество  $\mathcal{H}_2$  представим в виде:  $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_{2,1} \cup \mathcal{H}_{2,2} \cup \mathcal{H}_{2,3}$ , где  $\mathcal{H}_{2,1}$  — множество матриц из  $\mathcal{H}_2$ , содержащих одну нулевую строку,  $\mathcal{H}_{2,2}$  — множество матриц из  $\mathcal{H}_2$ , не содержащих нулевых строк, но при этом какие-либо две строки совпадают,  $\mathcal{H}_{2,3}$  — множество матриц из  $\mathcal{H}_2$ , в которых нет нулевых строк, а сумма всех строк над  $\mathbb{F}_2$  равна нулевой строке. Непосредственно проверяется, что  $|\mathcal{H}_{2,1}| = |\mathcal{H}_{2,2}| = 18$ ,  $|\mathcal{H}_{2,3}| = 6$ .

Вычислим  $C(b_3(B), f_{h(H)})$  для случая  $B \in \tilde{\mathcal{B}}_3$  и  $H \in \mathcal{H}_2$ . Пусть  $B \in \tilde{\mathcal{B}}_{3,1}$ , тогда имеет место представление:  $B = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ B' \end{pmatrix}$ , где  $\mathbf{0} = (0, 0, 0) \in \mathbb{F}_2^3$ ,  $B'$  —  $(3 \times 3)$ -матрица ранга 3. Отметим, что  $B' \cdot \mathcal{H}_2 := \{B' \times H : H \in \mathcal{H}_2\} = \mathcal{H}_2$ . Отсюда получаем количество значений, которое принимает функция  $f_{h(H)}$  на строках матриц из множества  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,1}$ , когда  $H \in \mathcal{H}_2$ . Так как матрицы из  $\mathcal{H}_2$  имеют ранг 2, то  $C(b_3(B), f_{h(H)})$  равно либо трем, либо четырем. На каких функциях  $C(b_3(B), f_{h(H)}) = 3$ , а на каких  $C(b_3(B), f_{h(H)}) = 4$ , показано в табл. 1. В частности, все функции  $f_{h(H)}$  для  $H \in \mathcal{H}_{2,1} \cup \mathcal{H}_{2,2}$  принимают три значения, а для  $H \in \mathcal{H}_{2,3}$  — четыре значения.

Таблица 1 / Table 1

Распределение  $C(b_3(B), f_{h(H)})$  для  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,1}$  и  $\mathcal{H}_2$

The distribution of  $C(b_3(B), f_{h(H)})$  for  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,1}$  and  $\mathcal{H}_2$

Матрица / Matrix	$\mathcal{H}_{2,1}$		$\mathcal{H}_{2,2}$		$\mathcal{H}_{2,3}$	
$C(b_3(B), f_{h(H)})$	3	4	3	4	3	4
$B \in \tilde{\mathcal{B}}_{3,1}$	18	0	18	0	0	6

Отметим, что так как  $\text{rank}(H) = 2$  для всех  $H \in \mathcal{H}_2$ , то  $\mathcal{C}_B^{h(\mathcal{H}_2)}(1) = 0$  для всех  $B \in \tilde{\mathcal{B}}$ , где  $h(\mathcal{H}_2) = \{f_{h(H)} : H \in \mathcal{H}_2\}$ . Действительно,  $H$  можно рассматривать как проверочную матрицу некоторого бинарного  $[3, 1]$ -кода длины 3 и размерности 2, мощность которого равна 2. Так как в матрице  $B$  четыре разные строки, то в этом случае  $C(b_3(B), f_{h(H)}) > 1$ . Отметим, что вектор  $\mathbf{a} = \mathbf{b}H$  в теории кодирования называется синдромом вектора  $\mathbf{b}$ .

Рассмотрим случай, когда  $B \in \tilde{\mathcal{B}}_{3,2}$ . Если  $\mathbf{b}$  — строка матрицы  $B$  такая, что  $\mathbf{b}H = \mathbf{0}$ , то  $C(b_3(B), f_{h(H)}) = 4$ . Действительно, предположим, что имеются две разные строки  $\mathbf{b}'$  и  $\mathbf{b}''$  такие, что  $\mathbf{b}'H = \mathbf{b}''H$ . Отсюда следует, что  $(\mathbf{b}' \oplus \mathbf{b}'')H = \mathbf{0}$ . Так как в матрице  $B$  нет нулевых



строк, то  $\mathbf{b}' \oplus \mathbf{b}'' = \mathbf{b}$ . Но это противоречит тому, что в матрице нет строк, которые бы являлись суммой *двух* других строк этой матрицы (следует из определения множества  $B \in \mathcal{B}_{3,2}$ ). Если в матрице  $B$  нет таких строк  $\mathbf{b}$ , что  $\mathbf{b}H = \mathbf{0}$ , то  $C(b_3(B), f_{h(H)}) = 2$ . Покажем это. Заметим, что  $C(b_3(B), f_{h(H)}) < 4$ , так как всего для матрицы  $H$  может быть 4 разных синдрома, а по предположению нулевого синдрома при умножении строк матрицы  $B$  на матрицу  $H$  нет. Выше также отмечалось, что  $C(b_3(B), f_{h(H)}) > 1$ . Покажем, что  $C(b_3(B), f_{h(H)}) \neq 3$ . Предположим, что первым строкам  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  и  $\mathbf{b}_3$  матрицы  $B$  соответствуют три разных синдрома:  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  и  $\mathbf{s}_3$  соответственно. Но так как четвертая строка  $\mathbf{b}_4$  матрицы  $B$  является суммой первых трех строк, то  $\mathbf{s}_4 = \mathbf{s}_1 \oplus \mathbf{s}_2 \oplus \mathbf{s}_3$ . В силу того что  $C(b_3(B), f_{h(H)}) < 4$ , получаем, что какие-то два вектора из набора  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$  совпадают, что противоречит предположению. Отсюда  $C(b_3(B), f_{h(H)}) = 2$ .

Для каждого вектора  $\mathbf{b}$  из  $\mathbb{F}_2^3$  четного веса во множестве  $\mathcal{H}_{2,2}$  найдется набор из 6 матриц, при умножении вектора  $\mathbf{b}$  на которые получается нулевой синдром. Причем для двух разных ненулевых векторов четного веса такие наборы матриц не пересекаются (иначе получили бы, что эти векторы линейно зависимы). Для векторов нечетного веса синдромы на матрицах из  $\mathcal{H}_{2,2}$  ненулевые. Заметим, что в наборе  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,2}$  только одна матрица содержит все векторы нечетного веса — матрица  $B_1$ , а остальные содержат по два вектора четного веса. Следовательно, в  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,2}$  имеется одна матрица (матрица  $B_1$ ), при умножении которой на любую матрицу из  $\mathcal{H}_{2,2}$  получаются два различных вектора (для разных матриц из  $\mathcal{H}_{2,2}$  векторы могут быть разными). И имеется 6 матриц в  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,2}$ , которые на 12 матрицах из  $\mathcal{H}_{2,2}$  принимают четыре разных значения, а на 6 матрицах — два значения. Для матриц из  $\mathcal{H}_{2,1}$  только векторы единичного веса могут давать нулевой синдром. Поэтому в  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,2}$  имеется одна матрица, которая на всех матрицах из  $\mathcal{H}_{2,1}$  дает четыре разных значения; три матрицы, которые на 12 матрицах из  $\mathcal{H}_{2,1}$  дают четыре значения и на 6 матрицах дают два значения; три матрицы, которые на 12 матрицах из  $\mathcal{H}_{2,1}$  дают два значения и на 6 матрицах дают четыре значения.

Для матриц из  $\mathcal{H}_{2,3}$  только векторы веса три могут давать нулевой синдром, так как все столбцы матриц из  $\mathcal{H}_{2,3}$  имеют четный вес. Следовательно, четыре матрицы из  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,2}$  на всех матрицах  $\mathcal{H}_{2,3}$  дают четыре разных значения и три матрицы из  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,2}$  на всех матрицах из  $\mathcal{H}_{2,3}$  дают два разных значения (табл. 2).

Таблица 2 / Table 2

Распределение  $C(b_3(B), f_{h(H)})$  для  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,2}$  и  $\mathcal{H}_2$   
The distribution of  $C(b_3(B), f_{h(H)})$  for  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,2}$  and  $\mathcal{H}_2$

Матрица / Matrix	$\mathcal{H}_{2,1}$		$\mathcal{H}_{2,2}$		$\mathcal{H}_{2,3}$	
$C(b_3(B), f_{h(H)})$	2	4	2	4	2	4
$B_2, B_3, B_4$	6	12	6	12	6	0
$B_5, B_6, B_7$	12	6			0	6
$B_1$	0	18	18	0		

Таблица 3 / Table 3

Распределение  $C(b_3(B), f_{h(H)})$  для  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,3}$  и  $\mathcal{H}_2$   
The distribution of  $C(b_3(B), f_{h(H)})$  for  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,3}$  and  $\mathcal{H}_2$

Матрица / Matrix	$\mathcal{H}_{2,1}$		$\mathcal{H}_{2,2}$		$\mathcal{H}_{2,3}$	
$C(b_3(B), f_{h(H)})$	3	4	3	4	3	4
$B \in \tilde{\mathcal{B}}_{3,3}$	12	6	18	0	6	0

Рассмотрим множество  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,3}$ . Без нарушения общности можно полагать, что для каждой матрицы  $B = (\mathbf{b}_i)_{i=1}^4$  из  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,3}$  выполняется условие:  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 \oplus \mathbf{b}_3$  и  $\text{rank}(B)' = 3$ , где  $B' = (\mathbf{b}_i)_{i=2}^4$ . Рассмотрим множество  $B \cdot \mathcal{H}_2 = \{BH : H \in \mathcal{H}_2\}$ . Из вида матриц множества  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,3}$  следует, что  $B \cdot \mathcal{H}_2 = \{((\mathbf{h}_1 \oplus \mathbf{h}_2)^\top \parallel H^\top)^\top : H = (\mathbf{h}_i)_{i=1}^3 \in \mathcal{H}_2\}$ . Отсюда следует распределение для  $C(b_3(B), f_{h(H)})$ , показанное в табл. 3.

Теперь рассмотрим множество  $\mathcal{H}_1$ . Представим его в виде  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_{1,1} \cup \mathcal{H}_{1,2} \cup \mathcal{H}_{1,3}$ , где  $\mathcal{H}_{1,1}$  — матрицы, состоящие из трех одинаковых ненулевых строк,  $\mathcal{H}_{1,2}$  — множество матриц, состоящих из двух одинаковых ненулевых строк и одной нулевой строки,  $\mathcal{H}_{1,3}$  — множество матриц, состоящих из одной ненулевой и двух нулевых строк;  $|\mathcal{H}_{1,1}| = 3, |\mathcal{H}_{1,2}| = 9, |\mathcal{H}_{1,3}| = 9$ .

Матрицы множества  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,1}$  при умножении на любую матрицу  $H$  из  $\mathcal{H}_1$  не дадут нулевую



матрицу (иначе бы получили, что матрицы из множества  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,1}$  имеют ранг 2). Поэтому  $C(b_3(B), f_{h(H)}) = 2$  для всех  $H \in \mathcal{H}_1$  и всех  $B \in \tilde{\mathcal{B}}_{3,1}$ .

Рассмотрим множество  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,2}$ . Отметим, что в  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,2}$  только матрица  $B_1$  не имеет строк четного веса, поэтому только матрица  $B_1$  на множестве  $\mathcal{H}_{1,1}$  даст одно значение, а все остальные матрицы из  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,2}$  на матрицах из  $\mathcal{H}_{1,1}$  будут давать два значения. В общем случае, для любой матрицы  $H$  из  $\mathcal{H}_1$  найдется матрица  $B$  (только одна), строки которой представляют собой смежный класс кода с проверочной матрицей  $H$ . При этом для матрицы  $B$  имеется ровно три матрицы из  $\mathcal{H}_1$ , дающие одинаковый синдром (если учитывать линейные комбинации столбцов матриц  $H$ ). На остальных матрицах из  $\mathcal{H}_1$  матрица  $B$  дает два значения. Поэтому  $\mathcal{C}_B^{h(\mathcal{H}_1)}(1) = 3$  и  $\mathcal{C}_B^{h(\mathcal{H}_1)}(2) = 18$  для всех  $B \in \tilde{\mathcal{B}}_{3,2}$ .

Все матрицы из  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,3}$  на матрицах из  $\mathcal{H}_1$  дают два значения, так как произведение таких матриц не может дать нулевую матрицу, и в матрицах из  $\tilde{\mathcal{B}}_{3,3}$  первая строка является суммой каких-то двух других строк. Поэтому синдром, соответствующий первой строке, равен сумме синдромов и  $\mathcal{C}_B^{h(\mathcal{H}_1)}(2) = 21$  для всех  $B \in \tilde{\mathcal{B}}_{3,3}$ .

Рассмотрим теперь множество  $\mathcal{B}_2$ . Так как  $\text{rank}(B) = 2$  для любой  $B \in \mathcal{B}_2$ , то  $B$  может быть представлена в виде:  $B = (\mathbf{0}^\top \parallel \mathbf{b}_1^\top \parallel \mathbf{b}_2^\top \parallel (\mathbf{b}_1 \oplus \mathbf{b}_2)^\top)^\top$ , где  $\mathbf{a}^\top$  — транспонированный вектор  $\mathbf{a}$ . Тогда во множестве  $\mathcal{H}_2$  найдутся 18 матриц (по 6 штук на каждую ненулевую строку матрицы  $B$ ), что при умножении на них матрица  $B$  будет давать два разных значения (так как любую ненулевую строку матрицы  $B$  вместе с нулевой строкой можно рассматривать как одномерный код, а оставшиеся две ненулевые строки — как смежный класс этого кода; для кода размерности один также существует 6 различных проверочных матриц). Также отметим, что если для двух ненулевых строк матрицы синдромы одинаковые, то для других двух строк синдромы будут нулевые. Если же для двух ненулевых строк матрицы  $B$  синдромы ненулевые и разные, то синдром для третьей ненулевой строки будет отличен от этих двух. Таким образом, для оставшихся 24 матриц из  $\mathcal{H}_2$  при умножении на  $B$  будет четыре разных значения.

Рассмотрим множество  $\mathcal{H}_1$ . Непосредственно проверяется, что матрица  $\hat{B}_4$  принимает на всех матрицах набора  $\mathcal{H}_{1,1}$  одно (нулевое) значение, так как все строки матрицы  $\hat{B}_4$  имеют четный вес. Все остальные матрицы на всех матрицах набора  $\mathcal{H}_{1,1}$  принимают 2 значения. Также любая из матриц  $\hat{B}_1, \hat{B}_2, \hat{B}_3$  дает на матрицах из  $\mathcal{H}_{1,2}$  два разных значения (так как есть две разные строки единичного веса). На матрицах из  $\mathcal{H}_{1,3}$  эти матрицы ( $\hat{B}_1, \hat{B}_2, \hat{B}_3$ ) дают одно значение на трех матрицах и два значения на 6 матрицах. Матрица  $\hat{B}_4$  дает два значения на всех матрицах наборов  $\mathcal{H}_{1,2}$  и  $\mathcal{H}_{1,3}$ . Для каждой матрицы  $\hat{B}_5, \hat{B}_6, \hat{B}_7$  в  $\mathcal{H}_{1,2}$  найдутся три матрицы, на которых будет приниматься одно значение, а для остальных 6 матриц — два значения. На всех матрицах из  $\mathcal{H}_{1,3}$  матрицы  $\hat{B}_5, \hat{B}_6, \hat{B}_7$  принимают два разных значения

Таблица 4 / Table 4 (так как в матрицах  $\hat{B}_5, \hat{B}_6, \hat{B}_7$  имеется строка из единиц и в матрицах из  $\mathcal{H}_{1,3}$  вес каждого столбца не выше 1).

Распределение  $C(b_3(B), f_{h(H)})$  для  $\mathcal{B}_2$  и  $\mathcal{H}_1$

The distribution of  $C(b_3(B), f_{h(H)})$  for  $\mathcal{B}_2$  and  $\mathcal{H}_1$

Матрица / Matrix	$\mathcal{H}_{1,1}$		$\mathcal{H}_{1,2}$		$\mathcal{H}_{1,3}$	
$C(b_3(B), f_{h(H)})$	1	2	1	2	1	2
$\hat{B}_4$	3	0	0	9	0	9
$\hat{B}_1, \hat{B}_2, \hat{B}_3$	0	3	0	9	3	6
$\hat{B}_5, \hat{B}_6, \hat{B}_7$	0	3	3	6	0	9

Результаты для этого случая обобщены в табл. 4. Полагая  $\tilde{\mathcal{B}}'_1 = \tilde{\mathcal{B}}_{3,1} \cup \tilde{\mathcal{B}}_{3,3}$  и  $\tilde{\mathcal{B}}'_2 = \tilde{\mathcal{B}}_{3,2} \cup \tilde{\mathcal{B}}_2$  и учитывая, что нулевая матрица из  $\mathcal{H}$  дает одно значение, получим доказываемое утверждение.

**Образец для цитирования:**

Косолапов Ю. В. О построении  $(k, n)$ -схемы визуальной криптографии с применением класса линейных хэш-функций над бинарным полем // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 2. С. 227–239. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-227-239



## On the Construction of $(n, k)$ -schemes of Visual Cryptography Using a Class of Linear Hash Functions Over a Binary Field

Yu. V. Kosolapov

Yury V. Kosolapov, <https://orcid.org/0000-0002-1491-524X>, Southern Federal University, 105/42, Bol'shaya Sadovaya Str., Rostov-on-Don, 344006, Russia, itaim@mail.ru

The paper explores the use of a set of hash functions for constructing a secret sharing scheme among  $n$  participants based on the  $(k, k)$ -scheme M. Naor and A. Shamir. Conditions are obtained for a set of hash functions, in which it is possible to construct  $(k, n)$ -schemes where any coalition of power  $k$  or more can restore a secret, and a coalition of lower power cannot restore the secret. In particular, the application of the class of linear hash functions is investigated. In general, this class does not allow us to construct a  $(k, n)$ -scheme, but it is possible to construct a  $(k, K, n)$ -scheme for which any  $k - 1$  and less participants cannot restore the secret, and any  $K$  and more can. For a class of linear hash functions, sufficient conditions are obtained for  $K$ , in which the coalition of power  $K$  and more can restore the secret. In a particular case, a secret sharing scheme for eight participants was developed, based on the  $(4, 4)$ -scheme of M. Naor and A. Shamir using a class of linear hash functions. It is shown that for any 4-power coalition the secret can be restored, that is, the constructed scheme is a  $(8, 4)$ -scheme. The  $(8, 4)$ -scheme constructed in particular is characterized by a shorter length of shares than the  $(8, 4)$ -scheme constructed in accordance with the algorithm proposed by M. Naor and A. Shamir.

**Key words:** secret sharing scheme, visual cryptography, linear hash functions.

### References

1. Shamir A. How to share a secret. *Communications of the ACM*, 1979, vol. 22, № 11, pp. 612–613.
2. Blakley G. R. Safeguarding cryptographic keys. *Proc. of the National Computer Conference*, 1979, vol. 48, pp. 313–317.
3. Pogorelov B. A., Sachkov V. N. *Slovar' kriptograficheskikh terminov* [Dictionary of cryptographic terms]. Moscow, MTsNMO, 2006. 91 p.(in Russian).
4. Chen H., Cramer R., Goldwasser S., Haan R., Vaikuntanathan V. Secure Computation from Random Error Correcting Codes. *Advances in Cryptology – EUROCRYPT 2007. EUROCRYPT 2007. Lecture Notes in Computer Science*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2007, vol. 4515, pp. 291–310. DOI: 10.1007/978-3-540-72540-4\_17
5. Naor M., Shamir A. Visual cryptography. *Advances in Cryptology – EUROCRYPT'94. EUROCRYPT 1994. Lecture Notes in Computer Science*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1994, vol. 950, pp. 1–12. DOI: 10.1007/BFb0053419
6. Pelli D.G., Bex P. Measuring contrast sensitivity. *Vision Res.*, 2013, vol. 90, pp. 10–14. DOI: 10.1016/j.visres.2013.04.015
7. Carter J. L., Wegman M. N. Universal classes of hash functions. *Journal of Computer and System Sciences*, 1979, vol. 18, iss. 2, pp. 143–154. DOI: 10.1016/0022-0000(79)90044-8
8. Bose M., Mukerjee R. Optimal  $(k, n)$  visual cryptographic schemes for general  $k$ . *Des. Codes Cryptogr.*, 2010, vol. 55, iss. 1, pp. 19–35. DOI: 10.1007/s10623-009-9327-6
9. Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C. *Introduction to Algorithms*. Cambridge, Massachusetts; London, England, MIT Press, 2009. 1312 p.
10. Lakshmanan R., Arumugam S. Construction of a  $(k, n)$ -visual cryptography scheme. *Des. Codes Cryptogr.*, 2017, vol. 82, iss. 3, pp. 629–645. DOI: 10.1007/s10623-016-0181-z

---

### Cite this article as:

Kosolapov Yu. V. On the Construction of  $(k, n)$ -Schemes of Visual Cryptography Using a Class of Linear Hash Functions Over a Binary Field. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 2, pp. 227–239 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-227-239

---



УДК 510.67,519.673

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ БЕЗОПАСНОСТИ ДОРОЖНО-ТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМЫ РЕГИОНА РОССИИ

В. А. Кушников, А. С. Богомолов, К. Ю. Адамович

Кушников Вадим Алексеевич, доктор технических наук, профессор кафедры математической кибернетики и компьютерных наук, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83; Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, Саратов, Политехническая, 77; Институт проблем точной механики и управления Российской академии наук, Россия, 410028, Саратов, Рабочая, 24, kushnikoff@yandex.ru

Богомолов Алексей Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики и компьютерных наук, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83; Институт проблем точной механики и управления Российской академии наук, Россия, 410028, Саратов, Рабочая, 24, alexbogomolov@ya.ru

Адамович Ксения Юрьевна, аспирант, Институт проблем точной механики и управления Российской академии наук, Россия, 410028, Саратов, Рабочая, 24, adamovich.ks@gmail.com

Разработан комплекс моделей для моделирования динамики ключевых показателей безопасности дорожно-транспортных систем регионов России. Показатели взяты из руководящих документов государственной инспекции безопасности дорожного движения. Комплекс моделей основан на системной динамике и включает граф причинно-следственных связей между показателями безопасности и систему нелинейных дифференциальных уравнений, построенную по этому графу. Решение этой системы позволяет осуществить анализ влияния внешних факторов на переменные модели и моделирование динамики этих переменных в зависимости от значений внешних факторов. Адекватность разработанного комплекса моделей была обоснована с использованием официальной статистики государственной инспекции безопасности дорожного движения. В соответствии с полученным решением осуществлено моделирование динамики количества дорожно-транспортных происшествий.

*Ключевые слова:* дорожно-транспортное происшествие, автомобиль, безопасность дорожного движения, авария, причинно-следственный подход, модель системной динамики, модель Форрестера, модель Медоуза.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-240-248

### ВВЕДЕНИЕ

Для обеспечения безопасности функционирования и развития техногенных систем различного масштаба необходим учет комплекса их ресурсов [1–7]. Это позволяет анализировать, предупреждать сложные ситуации [8] и успешно применять современные вычислительные средства для решения возникающих проблем [9]. Одной из таких проблем является повышение безопасности транспортных систем. Научно-техническое обеспечение транспортной безопасности согласно ФЗ-16 «О транспортной безопасности» [10] является одной из целей обеспечения транспортной безопасности страны. Автомобили — самый популярный вид транспорта, и их количество в стране постоянно растет. Проблемой функционирования автотранспортной системы является большое количество аварий на дорогах.



Цель работы заключается в построении комплекса математических моделей и осуществлении математического моделирования динамики показателей безопасности региональной дорожно-транспортной системы России на различных интервалах времени.

Для достижения поставленной цели предлагается использовать математическую модель на основе системной динамики, позволяющую осуществлять прогноз показателей безопасности системы с учетом сложных взаимосвязей между этими показателями [11]. Суть метода системной динамики заключается в построении системы дифференциальных уравнений в зависимости от причинно-следственных связей, присутствующих в объекте прогнозирования. Решение полученной системы позволяет моделировать динамику переменных системы и анализировать влияние внешних факторов на эти переменные. Данный подход использовался при моделировании динамики показателей системы образования [12–16], национальной безопасности [17–23], авиационной транспортной системы [24], при прогнозировании последствий наводнений [25].

План решения задачи состоит в следующем.

1. Выбор переменных, характеризующих безопасность функционирования дорожно-транспортной системы, и внешних факторов, которые влияют на эти переменные; обоснование выбора.
2. Разработка схемы причинно-следственных связей переменных и внешних факторов.
3. Построение системы дифференциальных уравнений на основании разработанной схемы.
4. Решение системы дифференциальных уравнений, проверка адекватности и коррекция модели на данных статистики.
5. Математическое моделирование, численные эксперименты, анализ результатов, выводы.

## 1. ВЫБОР ПЕРЕМЕННЫХ СИСТЕМЫ

Необходимо определить переменные, влияющие на безопасность дорожно-транспортной системы региона страны, и разделить их на два вида: переменные системы и внешние факторы. Переменные системы влияют друг на друга, а факторы считаются независимыми от переменных системы, но сами влияют на них. Выбор переменных основывался на списке показателей безопасности дорожного движения из постановления Правительства РФ № 894 «Об утверждении Правил государственного учета показателей состояния безопасности дорожного движения органами внутренних дел Российской Федерации». Исходя из этого списка, были выделены переменные, обозначающие количество (в год):  $X_1$  — ДТП в городах до 100 000 чел.;  $X_2$  — ДТП в городах 100 000–500 000 чел.;  $X_3$  — ДТП в городах 500 000–1000 000 чел.;  $X_4$  — ДТП в городах от 1000 000 чел.;  $X_5$  — ДТП на федеральных дорогах;  $X_6$  — ДТП на региональных дорогах;  $X_7$  — ДТП на местных дорогах;  $X_8$  — пешеходов-нарушителей;  $X_9$  — водителей-нарушителей;  $X_{10}$  — пассажиров-нарушителей;  $X_{11}$  — должностных лиц транспортных, дорожных, железнодорожных и иных организаций;  $X_{12}$  — административных правонарушений; а также  $X_{13}$  — преступлений. Кроме того, были выделены следующие внешние факторы (количество в регионе):  $F_1$  — автомобилей (легковых, грузовых, автобусов);  $F_2$  — моторных средств;  $F_3$  — прицепов и полуприцепов;  $F_4$  — населения;  $F_5$  — минимальный штраф за нарушения ПДД;  $F_6$  — экипажей ДПС на дорогах региона;  $F_7$  — машин для уборки снега;  $F_8$  — протяженность изношенных дорог;  $F_9$  — работающих эвакуаторов;  $F_{10}$  — протяженность

участков дорог с фото-, видеонаблюдением;  $F_{11}$  — водителей со стажем до 2 лет;  $F_{12}$  — водителей со стажем 2–5 лет;  $F_{13}$  — водителей со стажем от 10 лет. Далее строился граф причинно-следственных связей.

## 2. РАЗРАБОТКА ГРАФА ПРИЧИННО-СЛЕДСТВЕННЫХ СВЯЗЕЙ

Причинно-следственные связи устанавливались на основании регрессионного анализа статистики и экспертных заключений. Разработанная схема этих связей (причинно-следственный граф) приведена на рис. 1. Вершины графа имеют два входа: со знаком «+», в которые входят все дуги от вершин, вызывающих рост соответствующей переменной (сплошные линии), и со знаком «−» для дуг от вершин, уменьшающих этот рост (пунктирные линии). Жирной линией выделены группы переменных с аналогичными причинно-следственными связями.

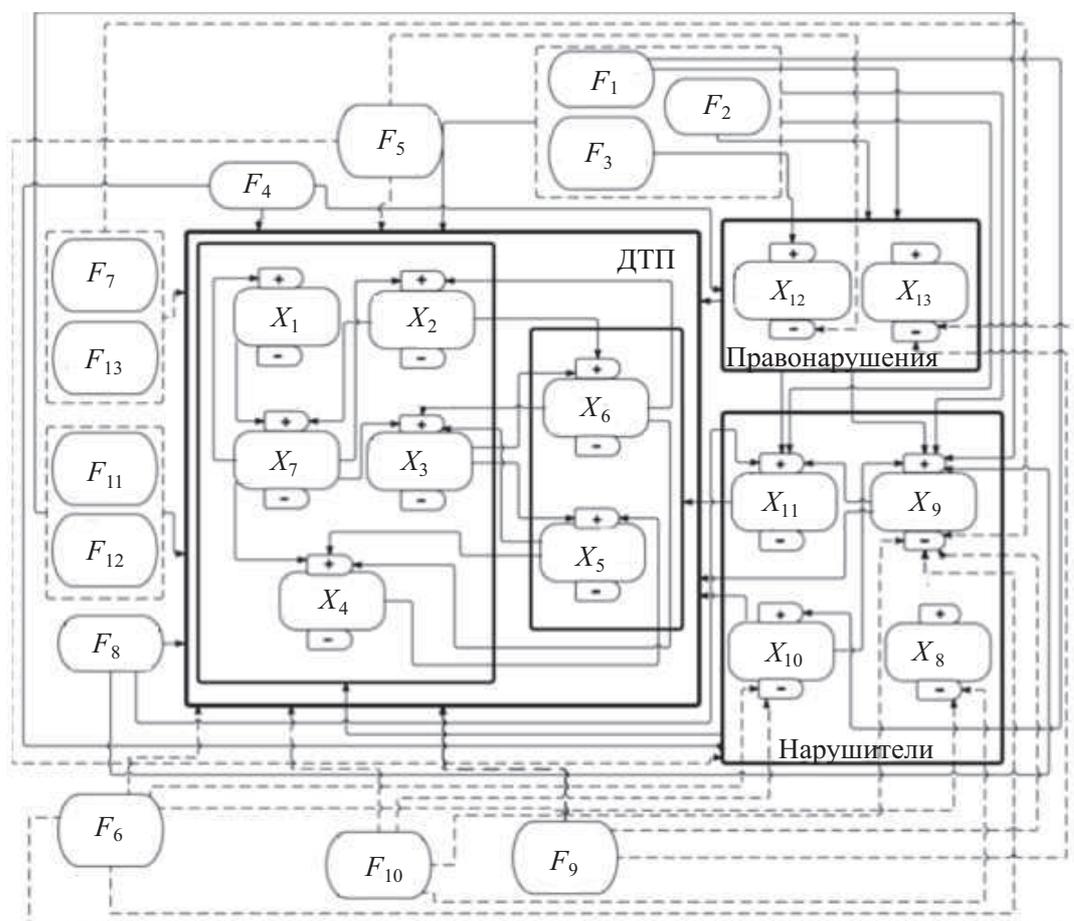


Рис. 1. Причинно-следственный граф показателей безопасности функционирования дорожно-транспортных систем

Fig. 1. Cause-effect graph of road safety performance indicators

На основе разработанного графа причинно-следственных связей строится система дифференциальных уравнений системной динамики.

## 3. ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

На основе разработанного графа для каждой переменной модели составляется дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dX_i}{dt} = S_i^+ P_i^+ + S_i^- P_i^-,$$



где  $S_i^+$  и  $P_i^+$  – сумма внешних факторов и произведение переменных, положительно влияющих на рост, а  $S_i^-$  и  $P_i^-$  – такие же выражения для отрицательно влияющих факторов и переменных. По данному принципу построена система дифференциальных уравнений, имеющая общий вид

$$\begin{aligned}
 dX_1/dt &= B_{1-7}(X_7) \dots B_{1-13}(X_{13})(F_1 + \dots + F_4 + F_8 + F_{11} + F_{12}) - \\
 &\quad - (F_5 + F_6 + F_7 + F_9 + F_{10} + F_{13}), \\
 dX_2/dt &= B_{2-6}(X_6) \dots B_{2-13}(X_{13})(F_1 + \dots + F_4 + F_8 + F_{11} + F_{12}) - \\
 &\quad - (F_5 + F_6 + F_7 + F_9 + F_{10} + F_{13}), \\
 dX_3/dt &= B_{3-5}(X_5) \dots B_{3-13}(X_{13})(F_1 + \dots + F_4 + F_8 + F_{11} + F_{12}) - \\
 &\quad - (F_5 + F_6 + F_7 + F_9 + F_{10} + F_{13}), \\
 dX_4/dt &= B_{4-5}(X_5) \dots B_{4-13}(X_{13})(F_1 + \dots + F_4 + F_8 + F_{11} + F_{12}) - \\
 &\quad - (F_5 + F_6 + F_7 + F_9 + F_{10} + F_{13}), \\
 dX_5/dt &= B_{5-3}(X_3)B_{5-4}(X_4)B_{5-9}(X_9) \dots B_{5-13}(X_{13})(F_1 + \dots + F_4 + F_8 + F_{11} + F_{12}) - \\
 &\quad - (F_5 + F_6 + F_7 + F_9 + F_{10} + F_{13}), \\
 dX_6/dt &= B_{6-2}(X_2)B_{6-3}(X_3)B_{6-9}(X_9) \dots B_{6-13}(X_{13})(F_1 + \dots + F_4 + F_8 + F_{11} + F_{12}) - \\
 &\quad - (F_5 + F_6 + F_7 + F_9 + F_{10} + F_{13}), \\
 dX_7/dt &= B_{7-1}(X_1)B_{7-2}(X_2)B_{7-9}(X_9) \dots B_{7-13}(X_{13})(F_1 + \dots + F_4 + F_8 + F_{11} + F_{12}) - \\
 &\quad - (F_5 + F_6 + F_7 + F_9 + F_{10} + F_{13}), \\
 dX_8/dt &= F_4 - F_5 - F_6 - F_{10}, \\
 dX_9/dt &= B_{9-10}(X_{10}) \dots B_{9-13}(X_{13})(F_1 + \dots + F_4 + F_8 + F_{11} + F_{12}) - \\
 &\quad - (F_5 + F_6 + F_7 + F_9 + F_{10} + F_{13}), \\
 dX_{10}/dt &= (F_1 + F_4) - (F_5 + F_6 + F_{10}), \\
 dX_{11}/dt &= (F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_8) - F_5, \\
 dX_{12}/dt &= (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) - F_5, \\
 dX_{13}/dt &= (F_1 + F_2 + F_4 + F_{11}) - (F_6 + F_9),
 \end{aligned}$$

где  $B_{a-b}(X_a)$  означает выражение зависимости переменной  $X_b$  от  $X_a$ . Значения коэффициентов в этих выражениях были подобраны на основании регрессионного анализа статистических данных. Внешние факторы были выражены как функции времени на основании интерполяции временных рядов их значений. При проведении расчетов и решении дифференциальных уравнений применяются статистические данные ГИБДД МВД РФ [26], нормированные относительно значений 2009 года. После определения конкретного числового вида выражений  $B_{i-j}(X_j)$  и выражений для внешних факторов получаем систему нелинейных дифференциальных уравнений.

#### 4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РЕШЕНИЯ

Решая построенную систему дифференциальных уравнений численным методом Рунге – Кутты 4-го порядка точности, получаем кривую «Количество ДТП в городах от 1 000 000 человек». Полученная кривая с графиком той же величины по статистическим данным приведена на рис. 2.

Можно отметить, что количество происшествий, определенное по разработанным моделям, по тенденции совпадает с данными статистики. Как видно из рис. 2, количество происшествий, рассчитанное в результате применения разработанной модели системной динамики, по тенденции совпадает с данными статистики о реальном ко-

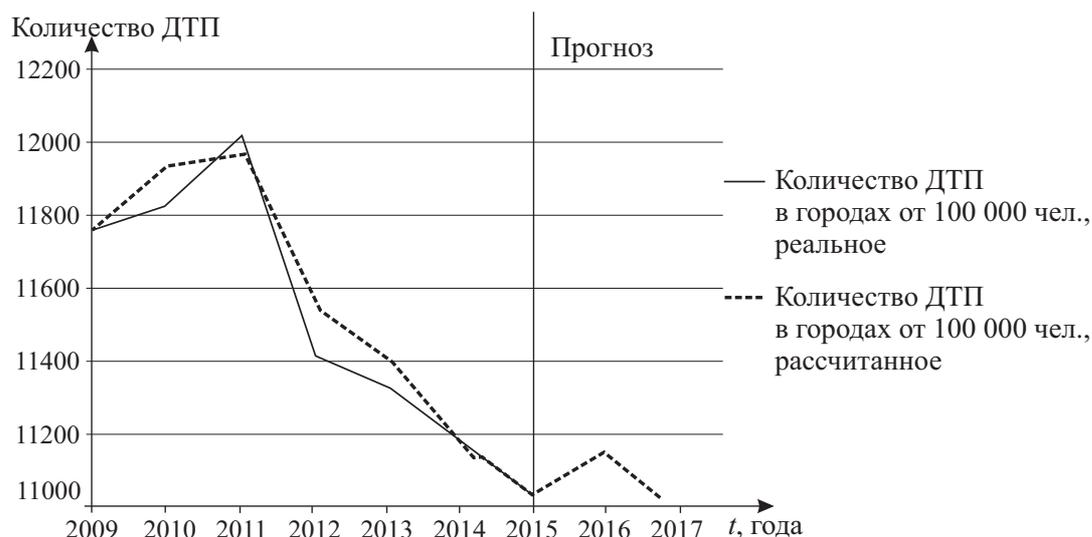


Рис. 2. Модельное и фактическое количество ДТП в городах России

Fig. 2. Model and actual number of accidents in Russian cities

личестве дорожно-транспортных происшествий. Проверим адекватность модели с использованием коэффициента детерминации. Для этого найдем остаточную и полную дисперсии и значение показателя коэффициента детерминации  $D$ . Если полученное значение больше заданного уровня значимости, то модель считается адекватной экспериментальным данным, в противном случае модель отвергается. Для разработанной модели  $D = 0.954$ , что говорит о возможности её применения, если уровень значимости составляет 95%.

Делая допущение, что зависимость между системными переменными и факторами остается постоянной и не меняется значительно с течением времени в исследуемый период, можно смоделировать динамику количество ДТП на ближайшие несколько лет. Опираясь на полученные результаты, можно предсказать незначительное увеличение количества ДТП относительно предыдущих лет. Предполагаемый рост ДТП можно объяснить увеличением количества автомобилей и пешеходов-нарушителей. Последующий спад количества происшествий вызван улучшением качества дорог, увеличением минимального штрафа за нарушения ПДД и в связи с этим уменьшением количества водителей-нарушителей.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлен разработанный комплекс математических моделей, позволяющий моделировать динамику и анализировать ключевые показатели безопасности дорожно-транспортных систем регионов России. В рамках разработки комплекса был построен причинно-следственный граф и система нелинейных дифференциальных уравнений системной динамики. Численное решение этой системы дало возможность смоделировать динамику количества дорожно-транспортных происшествий. Проверка адекватности показала соответствие полученных данных статистике ГИБДД.

## Библиографический список

1. Клюев В. В., Резчиков А. Ф., Богомолов А. С., Уков Д. А., Филимонюк Л. Ю. Системный подход к задаче оценки остаточного ресурса человеко-машинных систем // Контроль. Диагностика. 2011. № 8. С. 9–13.
2. Богомолов А. С. Комплексный контроль ресурсов сложных человеко-машинных систем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 3. С. 83–87.



3. Клюев В. В., Новожилов Г. В., Резчиков А. Ф., Богомолов А. С. Ресурсный подход к обеспечению безопасности систем «ЧЕЛОВЕК–ОБЪЕКТ–СРЕДА». М. : Издат. дом «Спектр», 2014. 158 с.
4. Новожилов Г. В., Резчиков А. Ф., Неймарк М. С., Богомолов А. С., Цесарский Л. Г., Филимонюк Л. Ю. Человеческий фактор в авиационно-транспортных системах // Полет. 2013. № 5. С. 3–10.
5. Клюев В. В., Резчиков А. Ф., Богомолов А. С., Кошечкина Е. М., Уков Д. А. Причинно-следственный подход к управлению ресурсом печи обжига при производстве цемента // Контроль. Диагностика. 2012. № 7. С. 30–36.
6. Клюев В. В., Резчиков А. Ф., Богомолов А. С., Филимонюк Л. Ю. Концепция комплексного ресурса для исследования безопасности систем человек–объект–среда // Контроль. Диагностика. 2013. № 8. С. 44–55.
7. Клюев В. В., Резчиков А. Ф., Богомолов А. С., Филимонюк Л. Ю. Взаимодействие ресурсов сложных человеко-машинных систем в критических ситуациях // Контроль. Диагностика. 2013. № 4. С. 41–45.
8. Клюев В. В., Резчиков А. Ф., Кушников В. А., Твердохлебов В. А., Иващенко В. А., Богомолов А. С., Филимонюк Л. Ю. Анализ критических ситуаций, вызванных неблагоприятным стечением обстоятельств // Контроль. Диагностика. 2014. № 7. С. 12–16. DOI: 10.14489/td.2014.07.pp.012-016
9. Богомолов А. С., Гапченко А. Ю., Васильев К. А. Параллельный подход к задачам моделирования человеко-машинных систем // Вектор науки Тольяттинского государственного университета. 2012. № 4 (22). С. 26–28.
10. О транспортной безопасности : федеральный закон от 09.02.2007 № 16-ФЗ // Рос. газ. 2016. 28 июня. Федеральный выпуск № 7007 (139).
11. Форрестер Д. Мировая динамика / пер. с англ. М. : АСТ, 2003. 379 с.
12. Яндыбаева Н. В., Кушников В. А. Математическая модель для прогнозирования показателей аккредитации вуза // Управление большими системами. М. : ИПУ РАН, 2013. Вып. 41. С. 314–343.
13. Яндыбаева Н. В. Принцип системной динамики в управлении качеством образовательного процесса вуза // В мире научных открытий. 2010. № 2, ч. 3. С. 46–48.
14. Кушников В. А., Яндыбаева Н. В. Модель Форрестера в управлении качеством образовательного процесса вуза // Прикладная информатика. 2011. № 3 (33). С. 65–73.
15. Яндыбаева Н. В., Кушников В. А. Оценка качества образовательного процесса в вузе на основе модели Форрестера // Вестн. Саратов. техн. ун-та. 2011. Т. 2, № 1 (55). С. 176–181.
16. Яндыбаева Н. В., Кожанова Е. Р., Кушников В. А. Разработка программного продукта для определения эффективности деятельности высшего учебного заведения // Вестн. Саратов. техн. ун-та. 2014. № 2 (75). С. 214–219.
17. Клюев В. В., Резчиков А. Ф., Кушников В. А., Иващенко В. А., Богомолов А. С., Филимонюк Л. Ю., Яндыбаева Н. В. Математические модели для контроля, диагностики и прогнозирования состояния национальной безопасности России // Контроль. Диагностика. 2016. № 3. С. 43–51. DOI: 10.14489/td.2016.03.pp.043-051
18. Яндыбаева Н. В., Кушников В. А. Математическая модель для прогнозирования показателей экономической безопасности Российской Федерации // Вестн. Астрах. гос. техн. ун-та. Сер. управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 3. С. 93–101.
19. Яндыбаева Н. В., Кушников В. А. Математическая модель для прогнозирования изменений показателей национальной безопасности России // Научное обозрение. 2015. № 10–1. С. 115–121.
20. Резчиков А. Ф., Цвиркун А. Д., Кушников В. А., Яндыбаева Н. В., Иващенко В. А. Методы прогнозной оценки социально-экономических показателей национальной безопасности // Проблемы управления. 2015. № 5. С. 37–44.
21. Яндыбаева Н. В. Модель системной динамики для прогнозирования показателей национальной безопасности // Математические методы в технике и технологиях. ММТТ-27 :



- XXVII Междунар. науч. конф. : сб. тр. : в 12 т. Т. 7. Саратов : Изд-во Сарат. гос. техн. ун-та, 2014. С. 76–78
22. Цвиркун А. Д., Резчиков А. Ф., Яндыбаева Н. В., Кушников В. А. Имитационное моделирование показателей национальной безопасности РФ // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2014) : сб. науч. тр. М. : ИПУ РАН, 2014. С. 155–163.
  23. Яндыбаева Н. В., Кушников В. А. Модель Форрестера для прогнозирования показателей национальной безопасности России // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2015) : материалы Восьмой Междунар. конф. : в 2 т. Т. 1. М. : ИПУ РАН, 2015. С. 342–348.
  24. Адамович К. Ю. Математическая модель для прогнозирования значений показателей безопасности транспортной системы // Математические методы в технике и технологиях. ММТТ-28 : XXVIII Междунар. науч. конф. : сб. тр. : в 12 т. Т. 6. Саратов : Изд-во Сарат. гос. техн. ун-та, 2015. С. 146–150.
  25. Хамутова М. В., Кушников В. А. Модель для прогнозирования основных характеристик последствий наводнений // Математические методы в технике и технологиях. ММТТ-28 : XXVIII Междунар. науч. конф. : сб. тр. : в 12 т. Т. 6. Саратов : Изд-во Сарат. гос. техн. ун-та, 2015. С. 119–122.
  26. Динамика основных показателей аварийности за 7 лет // Госавтоинспекция МВД России : [сайт]. URL: <https://www.gibdd.ru/stat/charts/> (дата обращения 11.04.2016).

---

**Образец для цитирования:**

Кушников В. А., Богомолов А. С., Адамович К. Ю. Математическое моделирование динамики показателей безопасности дорожно-транспортной системы региона России // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 2. С. 240–248. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-240-248

---

## Mathematical Model for Predicting the Safety Parameters of Regional Road Transport System

V. A. Kushnikov, A. S. Bogomolov, K. Yu. Adamovich

Vadim A. Kushnikov, <https://orcid.org/0000-0002-9195-2546>, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia; Yuri Gagarin State Technical University of Saratov; 77, Politechnicheskaya Str., Saratov, 410054, Russia; Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24, Rabochaya Str., Saratov, 410028, Russia, [kushnikoff@yandex.ru](mailto:kushnikoff@yandex.ru)

Aleksey S. Bogomolov, <https://orcid.org/0000-0002-6972-3181>, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia; Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24, Rabochaya Str., Saratov, Russia, 410028, [alexbogomolov@ya.ru](mailto:alexbogomolov@ya.ru)

Kseniya Yu. Adamovich, <https://orcid.org/0000-0003-3867-1160>, Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24, Rabochaya Str., Saratov, 410028, Russia, [adamovich.ks@gmail.com](mailto:adamovich.ks@gmail.com)

The set of models for prediction the main safety metrics of Russian regional road transport system is developed. The main metrics are taken from the documents the state inspection of traffic safety. This set of models is based on system dynamics and includes the graph of cause-effect relations between variables of the system and the system of nonlinear differential equations. Solving this system allows to analyze the impact of external factors to the variables of models. The adequacy of models was verified using the official statistics of the State Traffic Safety Inspectorate. In this paper presented the forecast of the traffic accidents count. According to the obtained solution the modeling of the traffic accidents dynamics was implemented.



**Key words:** traffic accident, car, traffic safety, accidents, cause-effect approach, system dynamics models, Forrester's model, Meadows model.

## References

1. Klyuev V. V., Rezchikov A. F., Bogomolov A. S., Ukov D. A., Filimonyuk L. Yu. System Approach to a Problem of Appraisal of Man-Machine Systems' Remaining Life. *Kontrol'. Diagnostika* [Testing. Diagnostics], 2011, no. 8, pp. 9–13 (in Russian).
2. Bogomolov A. S. Integrated Resource Control of Complex Man-Machine Systems. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 3, pp. 83–87 (in Russian).
3. Klyuev V. V., Novozhilov G. V., Rezchikov A. F., Bogomolov A. S. *Resource Approach for Security of Systems „Man–Object–Environment“*. Moscow, Izdat. Dom „Spektr“, 2014, 158 p. (in Russian).
4. Novozhilov G. V., Rezchikov A. F., Neymark M. S., Bogomolov A. S., Tsesarskiy L.G., Filimonyuk L. Yu. Human Factor In Aviation Transport Systems. *Polyot* [Flight], 2013, no. 5, pp. 3–10 (in Russian).
5. Kluev V. V., Rezchikov A. F., Bogomolov A. S., Koshevaya E. M., Ukov D. A. Cause-Conditional Approach to Resource Management of Furnace in Cement Production. *Kontrol'. Diagnostika* [Testing. Diagnostics], 2012, no. 7, pp. 30–36 (in Russian).
6. Kluev V. V., Rezchikov A. F., Bogomolov A. S., Filimonyuk L. Yu. The Conception of Complex Resource for Research of „Man–Object–Environment“ Systems' Safety. *Kontrol'. Diagnostika* [Testing. Diagnostics], 2013, no. 8, pp. 44–55 (in Russian).
7. Kluev V. V., Rezchikov A. F., Bogomolov A. S., Filimonyuk L. Yu. Resources' Interaction of Complex Man-Machine Systems in Critical Situations. *Kontrol'. Diagnostika* [Testing. Diagnostics], 2013, no. 4, pp. 41–45 (in Russian).
8. Kluev V. V., Rezchikov A. F., Kushnikov V. A., Tverdokhlebov V. A., Ivashenko V. A., Bogomolov A. S., Filimonyuk L. Yu. An Analysis of Critical Situations Caused by Unfavorable Concurrence of Circumstances. *Kontrol'. Diagnostika* [Testing. Diagnostics], 2014, no. 7, pp. 12–16 (in Russian). DOI: 10.14489/td.2014.07.pp.012-016
9. Bogomolov A. S., Gapchenko A. Yu., Vasylev K. A. Concurrent Approach to the Problem of Modeling Man-Machine Systems. *Vector of sciences. Togliatti State University*, 2012, no. 4 (22), pp. 26–28 (in Russian).
10. On Transport Security : Federal Law of 09 February 2007 no. 16-FZ. *Rossiyskaya Gazeta* [Russian newspaper], 2016, 28 June, Federal issue no. 7007 (139) (in Russian).
11. Forrester J. W. *World Dynamics*. MIT Press, 1979. 142 p. (Russ. ed.: Moscow, AST, 2003. 379 p.).
12. Yandybaeva N. V., Kushnikov V. A. Mathematical model to predict higher school accreditation rates. *Large-scale Systems Control*. Moscow, ICS RAS, 2013, iss. 41, pp. 314–343 (in Russian).
13. Yandybaeva N. V. The Principle of System Dynamics for Higher School Educational Process Quality Control. *V Mire Nauchnykh Otkrytiy* [Siberian Journal of Life Sciences and Agriculture], 2010, no. 2, pt. 3, pp. 46–48 (in Russian).
14. Kushnikov V. A., Yandybaeva N. V. Applying Forrester model for higher school educational process quality control. *Applied Informatics*, 2011, no. 3(33), pp. 65–73 (in Russian).
15. Yandybaeva N. V., Kushnikov V. A. Evaluation of the Quality of the Educational Process in High School on J. Forrester Model Base. *Vestnik Saratov State Technical University*, 2011, vol. 2, no. 1(55), pp. 176–181 (in Russian).
16. Yandybaeva N. V., Kozhanova E. R., Kushnikov V. A. Developing Software to Determine Effectiveness of a Higher School. *Vestnik Saratov State Technical University*, 2014, no. 2(75), pp. 214–219 (in Russian).



17. Kluev V. V., Rezchikov A. F., Kushnikov V. A., Ivaschenko V. A., Bogomolov A. S., Filimonyuk L. Yu., Yandybaeva N. V. The mathematical models for control, diagnostics and forecasting the national security of the Russian Federation. *Kontrol'. Diagnostika* [Testing. Diagnostics], 2016, no. 3, pp. 43–51 (in Russian). DOI: 10.14489/td.2016.03.pp.043-051
18. Yandybaeva N. V., Kushnikov V. A. Mathematical Model for Forecasting of Indicators of Economic Safety of the Russian Federation. *Vestnik of Astrakhan State Technical University. Ser.: Management, Computer Science and Informatics*, 2014, no. 3, pp. 93–101 (in Russian).
19. Yandybaeva N. V., Kushnikov V. A. Mathematical model for predicting changes in indicators of national security of Russia. *Nauchnoe Obozrenie* [Scientific Review], 2015, no. 10–1, pp. 115–121 (in Russian).
20. Rezchikov A. F., Tsvirkun A. D., Kushnikov V. A., Yandybaeva N. V., Ivaschenko V. A. Methods of predictive assessment of socio-economic indicators of national security. *Control Sciences*, 2015, no. 5, pp. 37–44 (in Russian).
21. Yandybaeva N. V. Model of system dynamics for predicting changes in indicators of national security. *Mathematical Methods in Technics and Technologies. MMTT–27*. Saratov, Izd-vo Sarat. gos. tekhn. un-ta, 2014, vol. 7, pp. 76–78 (in Russian).
22. Tsvirkun A. D., Rezchikov A. F., Yandybaeva N. V., Kushnikov V. A. Imitating modeling the parameters of Russian National Security. *Upravlenie razvitiem krupnomasshtabnih sistem (MLSD'2014)*. Moscow, Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 2014, pp. 155–163 (in Russian).
23. Yandybaeva N. V., Kushnikov V. A. Forrester model for predicting changes in indicators of national security of Russia. *Upravlenie razvitiem krupnomasshtabnih sistem (MLSD'2015)*. Moscow, Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 2015, vol. 1, pp. 342–348 (in Russian).
24. Adamovich K. Yu. Mathematical Model for Forecasting of Transport Systems' Safety Characteristics. *Mathematical Methods in Technics and Technologies. MMTT–28*. Saratov, Izd-vo Sarat. gos. tekhn. un-ta, 2015, vol. 6, pp. 146–150.
25. Khamutova M. V., Kushnikov V. A. Model for Forecasting of Flood Effects. *Mathematical Methods in Technics and Technologies. MMTT–28*. Saratov, Izd-vo Sarat. gos. tekhn. un-ta, 2015, vol. 6, pp. 119–122 (in Russian).
26. Dinamika osnovnykh pokazatelei avariinosti za 7 let (Dynamics of the main accident rates for 7 years). *Gosavtoinspekttsiia MVD Rossii* (Russian Interior Ministry Traffic Police. Site). Available at: <https://www.gibdd.ru/stat/charts/> (Accessed 11 July 2016) (in Russian).

---

**Cite this article as:**

Kushnikov V. A., Bogomolov A. S., Adamovich K. Yu. Mathematical Model for Predicting the Safety Parameters of Regional Road Transport System. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 2, pp. 240–248 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-240-248

---