



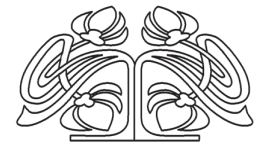
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

# ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 3

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,  
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал  
2018 Том 18

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

Издается с 2005 года

## СОДЕРЖАНИЕ

### Научный отдел

#### Математика

**Бу Нгуен Шон Тунг.** Специальные примеры суперустойчивых полугрупп и их применение в теории обратных задач 252

**Галаев С. В.** Классификация продолженных би-метрических структур на распределениях ненулевой кривизны субримановых многообразий 263

**Zherdev A. V.** An Asymptotic Relation for Conformal Radii of Two Nonoverlapping Domains [**Жердев А. В.** Асимптотическое соотношение для конформных радиусов двух неналегающих областей] 274

**Можей Н. П.** Нередуцируемые однородные пространства, не допускающие нормальных связностей 284

**Мокроусов И. С.** Критерий принадлежности классу  $W_p^1$  обобщенного из класса  $L_p$  решения волнового уравнения 297

**Невский М. В., Ухалов А. Ю.** Некоторые свойства 0/1-симплексов 305

**Хасянов Р. Ш.** Эрмитова интерполяция на симплексе 316

**Yurko V. A.** On Inverse Problem for Differential Operators with Deviating Argument [**Юрко В. А.** Об обратной задаче для дифференциальных операторов с отклоняющимся аргументом] 328

#### Механика

**Авраменко А. А., Асланов В. С.** Исследование равновесных конфигураций космической тросовой системы при буксировке пассивного аппарата с остатками топлива 334

#### Информатика

**Абросимов М. Б.** О достаточном условии Гудмана–Хедетниemi гамильтоновости графа 347

**Андрейченко Д. К., Жадаев Ф. М.** Обучение нейросетевых регуляторов для стабилизации комбинированных динамических систем 354

### Приложения

#### Хроника научной жизни

**Голубов Б. И., Кашин Б. С., Коссович Л. Ю., Сидоров С. П., Хромов А. П., Чумаченко А. Н.** 19-я международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» 361

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (группы научных специальностей: 01.01.00 – математика; 01.02.00 – механика; 05.13.00 – информатика, вычислительная техника и управление).

Журнал входит в международные базы данных Emerging Sources Citation Index, MathSciNet, zbMATH

Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-56162 от 15 ноября 2013 года

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год

#### Директор издательства

Бучко Ирина Юрьевна

#### Редактор

Крылова Елена Борисовна

#### Художник

Соколов Дмитрий Валерьевич

#### Редактор-стилист

Кочкаева Инна Анатольевна

#### Верстка

Степанова Наталия Ивановна

#### Технический редактор

Каргин Игорь Анатольевич

#### Корректор

Кочкаева Инна Анатольевна

#### Адрес учредителя, издателя и издательства:

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83

Тел.: +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89

E-mail: izvestiya@sgu.ru

Подписано в печать 28.08.18.

Формат 60x84 1/8.

Усл. печ. л. 13,71(14,75).

Тираж 500 экз. Заказ 105-Т.

Отпечатано в типографии

Саратовского университета.

#### Адрес типографии:

410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2018



## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <http://mmi.sgu.ru/ru/dlya-avtogo>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования в журнале. В случае положительного решения об опубликовании статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <http://mmi.sgu.ru>.

---

### Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,  
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,  
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: [mmi@sgu.ru](mailto:mmi@sgu.ru)

Website: <http://mmi.sgu.ru/>

### Ответственный секретарь серии:

Халова Виктория Анатольевна

## CONTENTS

### Scientific Part

#### Mathematics

**Vu Nguyen Son Tung.** Special Examples of Superstable Semigroups and Their Application in the Inverse Problems Theory 252

**Galaev S. V.** Classification of Prolonged Bi-metric Structures on Distributions of Non-zero Curvature of Sub-Riemannian Manifolds 263

**Zherdev A. V.** An Asymptotic Relation for Conformal Radii of Two Nonoverlapping Domain 274

**Mozhey N. P.** Non-reductive Homogeneous Spaces Not Admitting Normal Connections 284

**Mokrousov I. S.** Criterion for a Generalized Solution in the Class  $L_p$  for the Wave Equation to Be in the Class  $W_p^1$  297

**Nevskii M. V., Ukhlov A. Yu.** Some Properties of 0/1-Simplices 305

**Khasyanov R. Sh.** Hermite Interpolation on a Simplex 316

**Yurko V. A.** On Inverse Problem for Differential Operators with Deviating Argument 328

#### Mechanics

**Avramenko A. A., Aslanov V. S.** Equilibrium Analysis of the Tethered Tug Debris System with Fuel Residuals 334

#### Computer Sciences

**Abrosimov M. B.** On a Goodman–Hedetniemi Sufficient Condition for the Graph Hamiltonicity 347

**Andreichenko D. K., Zhadaev F. M.** Learning Neural Network Controllers for Stabilizing Hybrid Dynamic Systems 354

### Appendices

#### Scientific Life Chronicles

**Golubov B. I., Kashin B. S., Kossovich L. Yu., Sidorov S. P., Khromov A. P., Chumachenko A. N.** 19<sup>th</sup> International Saratov Winter School «Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications» 361



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА  
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.  
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

**Главный редактор**

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Заместитель главного редактора**

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Ответственный секретарь**

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

**Члены редакционной коллегии:**

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)  
Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)  
Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Омск, Россия)  
Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)  
Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)  
Индейцев Дмитрий Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Санкт-Петербург, Россия)  
Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)  
Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)  
Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Республика Беларусь)  
Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)  
Манжиров Александр Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)  
Матвеенко Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)  
Морозов Никита Фёдорович, доктор физ.-мат. наук, акад. РАН (Санкт-Петербург, Россия)  
Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)  
Пархоменко Павел Павлович, доктор техн. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)  
Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук (Долгопрудный, Московская обл., Россия)  
Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)  
Рацев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ульяновск, Россия)  
Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)  
Роджерсон Грэм, Ph.D., профессор (Киль, Великобритания)  
Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Саратов, Россия)  
Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)  
Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Республика Беларусь)  
Субботин Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Екатеринбург, Россия)  
Харченко Вячеслав Сергеевич, доктор техн. наук, профессор (Харьков, Украина)  
Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)  
Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)  
Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)  
Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)  
Янг Чуань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL  
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES.  
SERIES: MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»**

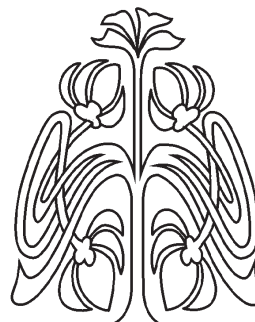
**Editor-in-Chief** – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

**Deputy Editor-in-Chief** – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

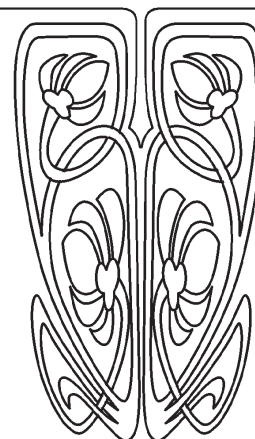
**Executive Secretary** – Victoriya A. Khalova (Saratov, Russia)

**Members of the Editorial Board:**

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)	Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)
Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)	Alexander F. Rezchikov (Saratov, Russia)
Dmitry A. Indeitsev (St. Petersburg, Russia)	Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)
Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)	Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)
Vyacheslav S. Kharchenko (Kharkiv, Ukraine)	Shoji IMATANI (Kyoto, Japan)
August P. Khromov (Saratov, Russia)	Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny, Moscow region, Russia)
Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)	Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)
Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)	Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)
Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)	Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)
Alexander V. Manzhirov (Moscow, Russia)	Yurii N. Subbotin (Ekaterinburg, Russia)
Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)	Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)
Nikita F. Morozov (St. Petersburg, Russia)	Vyacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)
Semen R. NasYROV (Kazan', Russia)	Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)
Pavel P. Parkhomenko (Moscow, Russia)	Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)
Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)	



**РЕДАКЦИОННАЯ  
КОЛЛЕГИЯ**



# МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

## СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ СУПЕРУСТОЙЧИВЫХ ПОЛУГРУПП И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

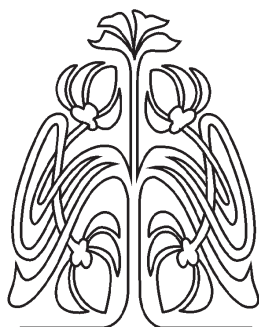
Бу Нгуен Шон Тунг

Бу Нгуен Шон Тунг, аспирант кафедры математического анализа, Московский педагогический государственный университет, Россия, 107140, Москва, Краснопрудная, 14, vnsontung@mail.ru

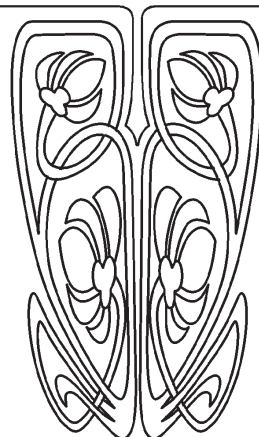
В работе изучаются специальные примеры суперустойчивых (квазинильпотентных) полугрупп, применяемых в теории линейных обратных задач для эволюционных уравнений. Термин «полугруппа» означает здесь полугруппу линейных ограниченных операторов класса  $C_0$ . Используется стандартная схема исследования. В банаховом пространстве для эволюционного уравнения рассматривается линейная обратная задача с финальным переопределением. Вводится специальное предположение, связанное с суперустойчивостью основной эволюционной полугруппы, тогда для обратной задачи справедлива теорема существования и единственности решения. Отмечено, что решение задачи представимо сходящимся рядом Неймана. Для иллюстрации к общей теории рассмотрены специальные примеры суперустойчивых полугрупп, порождаемых одномерным оператором переноса с поглощением в весовом банаховом пространстве функций на полуоси. Показано, что существует широкий спектр возможностей для выбора коэффициента поглощения и веса пространства, при которых гарантирована суперустойчивость полугруппы. Установленные результаты допускают применение к конкретной обратной задаче для уравнения переноса с поглощением на полуоси. Предложенный подход можно распространить на многомерное уравнение переноса в неограниченной области без интеграла столкновений.

*Ключевые слова:* обратная задача, эволюционное уравнение, теорема существования и единственности решения, суперустойчивая полугруппа, уравнение переноса.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-252-262>



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ







## ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья написана в связи с одним вопросом, возникшим при изучении линейных обратных задач для эволюционных уравнений в банаховом пространстве. Общая теория обратных задач интересующего нас типа изложена в [1–3]. В недавнем исследовании, выполненном по данной теме [4], было использовано специальное предположение о *суперустойчивости* (квазинильпотентности) основной эволюционной полугруппы линейных операторов. Этот вырожденный класс особых полугрупп привлек внимание специалистов в последние десятилетия [5–9]. Для обратных задач упомянутое требование «суперустойчивости» является достаточно жестким, но в то же время оно позволяет избежать почти всех других ограничений. Естественно, что такой экстремальный случай полезно рассмотреть с должной подробностью.

Итак, используем стандартный полугрупповой подход [10–12]. Пусть  $t \geq 0$ . Напомним, что полугруппа  $U(t)$  класса  $C_0$  называется *суперустойчивой* (квазинильпотентной) в банаховом пространстве  $E$ , если ее *экспоненциальный тип*

$$\omega_0 \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|U(t)\|}{t} \quad (1)$$

оказывается равным  $(-\infty)$ . В таком случае при любом выборе сколь угодно большого числа  $\alpha > 0$  найдется константа  $M = M_\alpha \geq 1$ , для которой

$$\|U(t)\| \leq M e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Как известно (см. [10, с. 59]), при использовании эквивалентной нормы

$$\|f\|_\alpha = \sup_{\tau \geq 0} \|e^{\alpha\tau} U(\tau)f\|, \quad f \in E, \quad (3)$$

с тем же значением  $\alpha > 0$ , что и в формуле (2), получим упрощенную оценку

$$\|U(t)\|_\alpha \leq e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Выделим также специальный класс *нильпотентных* полугрупп, когда

$$U(t) = 0, \quad \forall t \geq t_0 > 0, \quad (5)$$

с некоторым фиксированным значением  $t_0 > 0$ . Каждая нильпотентная полугруппа очевидно является квазинильпотентной (суперустойчивой).

В работе [4] (см. также [3]) в предположении о суперустойчивости эволюционной полугруппы была установлена корректная разрешимость общей линейной обратной задачи с переопределением в виде интеграла Римана–Стилтьеса. Для применения «абстрактных» результатов полезно располагать достаточным запасом суперустойчивых полугрупп. Отчасти такие примеры известны (см., например, [5, 8]). Сейчас мы придадим конструкции расширенную форму и покажем, что она дает применительно к теории обратных задач.



## 1. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С ФИНАЛЬНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ

Для простоты изложения ограничимся случаем обратной задачи с финальным переопределением. Ее активное изучение началось с работ [13–15].

В банаховом пространстве  $E$  на отрезке  $[0, T]$  рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + \varphi(t)g, & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = u_0, & u(T) = u_1, \end{cases} \quad (6)$$

с заданной скалярной функцией  $\varphi(t) \neq 0$ , принадлежащей классу  $C^1[0, T]$ , и неизвестным элементом  $g \in E$ . Считаем, что  $A$  — линейный замкнутый оператор в пространстве  $E$  с плотной областью определения  $D(A) \subset E$ . Предполагаем также, что  $A$  порождает в  $E$  полугруппу  $U(t)$  класса  $C_0$ . Элементы  $u_0, u_1$  заданы в  $D(A)$ .

Решением задачи (6) назовем пару  $(u(t), g)$ , где  $u \in C^1([0, T]; E)$ ,  $u(t) \in D(A)$  при любом  $t \in [0, T]$  и  $g \in E$ . Все соотношения в системе (6) должны быть выполнены. Общая теория подобных обратных задач представлена в [1–3].

Как известно (см. [3, 16]), удобный технический инструмент при исследовании обратной задачи (6) дает операторное уравнение

$$\beta g - Bg = f \quad (7)$$

относительно неизвестного элемента  $g \in E$ . Здесь  $\beta \equiv \varphi(T)$ . Правая часть

$$f = A(U(T)u_0 - u_1) \quad (8)$$

определяется данными из задачи (6). Линейный ограниченный оператор  $B$  имеет вид

$$B = U(T)\varphi(0) + \int_0^T U(T-s)\varphi'(s) ds. \quad (9)$$

Интеграл в формуле (9) понимается в сильной операторной топологии.

Предполагаем сейчас, что полугруппа  $U(t)$  является суперустойчивой в банаховом пространстве  $E$ . В таком случае число  $\lambda = 0$  не может быть собственным значением оператора  $A$ . Соответственно (см. [3]) операторное уравнение (7) оказывается эквивалентным исходной обратной задаче (6). Сформулируем следующий результат, основанный на принципах работы [4, теорема 2].

**Теорема 1.** Пусть оператор  $A$  порождает в  $E$  суперустойчивую полугруппу  $U(t)$  класса  $C_0$ . Предположим, что  $\varphi \in C^1[0, T]$ , причем  $\beta \equiv \varphi(T) \neq 0$ . Тогда при любом выборе элементов  $u_0, u_1 \in D(A)$  обратная задача (6) имеет и притом единственное решение  $(u(t), g)$ . Нужный элемент  $g \in E$  представим рядом Неймана

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{k+1}} B^k f, \quad (10)$$

сходящимся по норме пространства  $E$ , а первый компонент решения находится по формуле

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t-s)\varphi(s)g ds, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (11)$$



В конструкции ряда (10) используются оператор  $B$  из формулы (9) и элемент  $f$  из формулы (8). Для элемента  $g \in E$ , найденного по формуле (10), справедлива оценка устойчивости

$$\|g\| \leq C (\|Au_0\| + \|Au_1\|) \tag{12}$$

с некоторой константой  $C > 0$ .

**Доказательство.** Коротко напомним схему рассуждений (подробности см. в [4]). При заданном  $g \in E$  прямая задача для дифференциального уравнения

$$u'(t) = Au(t) + \varphi(t)g, \quad 0 \leq t \leq T,$$

с начальным условием  $u(0) = u_0$  имеет классическое решение  $u(t)$  вида (11) (см. [11]). Сейчас требуется подобрать элемент  $g \in E$  так, чтобы выполнялось предписанное финальное условие  $u(T) = u_1$ . Для нахождения нужного  $g$  вводим эквивалентное операторное уравнение (7) с оператором  $B$  из формулы (9) и правой частью  $f$  из формулы (8) (см. [3, 16]). Оценивая оператор  $B$  по норме (3) с учетом соотношения (4), имеем

$$\|B\|_\alpha \leq e^{-\alpha T} |\varphi(0)| + \int_0^T e^{-\alpha(T-s)} |\varphi'(s)| ds \leq C_\varphi \left( e^{-\alpha T} + \frac{1}{\alpha} \right),$$

где  $C_\varphi > 0$  — числовая мажоранта для  $|\varphi(0)|$  и  $|\varphi'(s)|$  при  $0 \leq s \leq T$ . Выбирая  $\alpha > 0$  достаточно большим (что возможно в силу суперустойчивости полугруппы  $U(t)$ ), добиваемся соотношения

$$\|B\|_\alpha < |\beta| \equiv |\varphi(T)|. \tag{13}$$

При получении (13) учтено предположение  $\beta \equiv \varphi(T) \neq 0$ . Из (13) следует однозначная разрешимость уравнения (7) и то, что его решение представимо рядом Неймана (10). Используя представление (8) для правой части  $f \in E$  в корректно разрешимом операторном уравнении (7), устанавливаем оценку устойчивости (12). Теорема доказана.  $\square$

Несложный дополнительный анализ показывает (см. [4]), что в условиях теоремы 1 оператор  $B$  из формулы (9) сам является квазинильпотентным.

В случае, когда  $\varphi(t) \equiv 1$  на  $[0, T]$ , формула для нахождения решения уравнения (7) сильно упрощается. Действительно, заметим, что тогда  $\beta \equiv \varphi(T) = 1$  и  $B = U(T)$  по формуле (9). Поэтому после несложных преобразований ряд (10) сводится к виду

$$g = -Au_1 + \sum_{k=1}^{\infty} U(kT) A(u_0 - u_1), \tag{14}$$

особенно удобному на практике. Если дополнительно полугруппа  $U(t)$  является нильпотентной, удовлетворяющей условию (5) с некоторым фиксированным  $t_0 > 0$ , то формула (14) становится «конечной» в том смысле, что

$$g = \begin{cases} -Au_1, & t_0 \leq T, \\ -Au_1 + \sum_{k=1}^{N_0} U(kT) A(u_0 - u_1), & t_0 > T, \end{cases} \tag{15}$$



со значением  $N_0 \equiv \lceil t_0/T \rceil - 1$ . Здесь  $\lceil t_0/T \rceil$  означает потолок числа  $t_0/T$ , т.е. наименьшее целое число, большее или равное  $t_0/T$ . Подобное представление (15) указано также в статье [4].

Рассмотрим типичные примеры суперустойчивых полугрупп, раскрывающие возможности теоремы 1.

## 2. ПРИМЕРЫ СУПЕРУСТОЙЧИВЫХ ПОЛУГРУПП

Зафиксируем значение  $p \in [1, +\infty)$  и возьмем неотрицательную, монотонно неубывающую функцию  $\gamma(x)$ , заданную при  $x \geq 0$ . На полуоси  $\mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty)$  введем весовое банахово пространство

$$E \equiv L^p(\mathbb{R}_+; e^{-\gamma(x)} dx) \tag{16}$$

с нормой

$$\|h\| = \|h\|_{p,\gamma} \equiv \left( \int_0^{+\infty} |h(x)|^p e^{-\gamma(x)} dx \right)^{1/p}, \quad h \in E. \tag{17}$$

Рассмотрим оператор

$$A \equiv -\frac{d}{dx} - \sigma(x), \quad x \geq 0, \tag{18}$$

где  $\sigma(x)$  — измеримая, неотрицательная и локально ограниченная функция на  $\mathbb{R}_+$ . Оператор  $A$  в пространстве  $E$  имеет область определения

$$D(A) = \{ h \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+) : h \in E, Ah \in E, h(0) = 0 \}. \tag{19}$$

Здесь  $AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$  означает локально абсолютно непрерывные функции на  $\mathbb{R}_+$ . Так введенный оператор (18) порождает в пространстве (16) полугруппу сдвигов  $U(t)$  (а точнее, сдвигов с поглощением), действующую при  $t \geq 0$  на элемент  $h \in E$ , по правилу

$$U(t)h(x) = \begin{cases} h(x-t) \exp\left(-\int_0^t \sigma(x-s) ds\right), & x > t, \\ 0, & x \leq t. \end{cases} \tag{20}$$

Стандартным способом — сначала на непрерывных функциях с компактным носителем в  $\mathbb{R}_+$ , а затем предельным переходом на все пространство (16) — показывается, что формула (20) определяет в  $E$  полугруппу  $U(t)$  класса  $C_0$ .

При оценке нормы полугруппы  $U(t)$  используем выражение

$$F(\tau, t) = p \int_{\tau}^{\tau+t} \sigma(s) ds + \gamma(\tau+t) - \gamma(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad t \geq 0, \tag{21}$$

связывающее две заданные функции  $\gamma(x)$  и  $\sigma(x)$ . Справедлив следующий результат.

**Лемма 1.** Пусть полугруппа  $U(t)$  определена в пространстве (16) по формуле (20). Пусть функция  $F(\tau, t)$ , заданная по формуле (21), удовлетворяет оценке

$$F(\tau, t) \geq at^q, \quad \tau \geq 0, \quad t \geq 0, \tag{22}$$

с некоторыми константами  $a > 0$  и  $q > 1$ . Тогда полугруппа  $U(t)$  будет суперустойчивой в пространстве (16).





**Доказательство.** Оценим полугруппу (20) по норме (17) на элементе  $h \in E$ . При фиксированном  $t \geq 0$  имеем

$$\|U(t)h\|^p = \int_0^{+\infty} |U(t)h(x)|^p e^{-\gamma(x)} dx = \int_t^{+\infty} |h(x-t)|^p e^{-p\eta(x,t)} e^{-\gamma(x)} dx, \quad (23)$$

где

$$\eta(x,t) \equiv \int_0^t \sigma(x-s) ds = \int_{x-t}^x \sigma(s) ds = \int_{x-t}^{(x-t)+t} \sigma(s) ds.$$

После замены  $\tau = x - t$  в интеграле (23) получим, что

$$\|U(t)h\|^p = \int_0^{+\infty} |h(\tau)|^p \exp\left(-p \int_{\tau}^{\tau+t} \sigma(s) ds - \gamma(\tau+t)\right) d\tau.$$

Используя обозначение (21), приходим к выражению

$$\|U(t)h\|^p = \int_0^{+\infty} |h(\tau)|^p e^{-F(\tau,t)} e^{-\gamma(\tau)} d\tau,$$

верному при всех  $t \geq 0$ . Теперь, применяя оценку (22), заключаем, что

$$\|U(t)h\|^p \leq \exp(-at^q) \int_0^{+\infty} |h(\tau)|^p e^{-\gamma(\tau)} d\tau = \exp(-at^q) \|h\|^p, \quad t \geq 0.$$

Поскольку выбор элемента  $h$  в пространстве (16) был произвольным, то

$$\|U(t)\| \leq \exp(-ct^q), \quad t \geq 0, \quad (24)$$

с константой  $c = a/p$ . По условию  $q > 1$ . Вычисляя экспоненциальный тип (1) с учетом полученной оценки (24), устанавливаем, что  $\omega_0 = -\infty$ , т. е. полугруппа (20) действительно является суперустойчивой в пространстве  $E$ . Лемма доказана.  $\square$

При проверке оценки (22) может пригодиться следующее элементарное утверждение о супераддитивности степенной функции.

**Лемма 2.** При любом выборе числа  $q > 1$  справедливо неравенство

$$(\tau + t)^q \geq \tau^q + t^q, \quad \tau \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (25)$$

**Доказательство.** Учитывая ограничения леммы, имеем

$$(\tau + t)^q = \tau(\tau + t)^{q-1} + t(\tau + t)^{q-1} \geq \tau\tau^{q-1} + tt^{q-1} = \tau^q + t^q,$$

что и означает справедливость (25).  $\square$

Сохраняя исходные ограничения на функции  $\gamma(x)$  и  $\sigma(x)$ , отметим два специальных случая, когда полугруппа (20) является суперустойчивой в пространстве (16).



**Теорема 2.** Пусть  $\gamma(x) = ax^q$  при  $x \geq 0$  с константами  $a > 0$  и  $q > 1$ . Тогда при любом выборе измеримой, неотрицательной, локально ограниченной функции  $\sigma(x)$  полугруппа (20) является суперустойчивой в пространстве (16).

**Доказательство.** Пусть выполнены условия теоремы 2. Для функции (21) с учетом неотрицательности  $\sigma(x)$  и леммы 2 имеем

$$F(\tau, t) \geq \gamma(\tau + t) - \gamma(\tau) = a(\tau + t)^q - a\tau^q \geq at^q, \quad \tau \geq 0, \quad t \geq 0,$$

что соответствует оценке (22). Поскольку по условию  $q > 1$ , то на основании леммы 1 полугруппа (20) будет суперустойчивой в пространстве (16). Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 3.** Пусть  $\sigma(x) \geq bx^r$  при  $x \geq 0$  с константами  $b > 0$  и  $r > 0$ . Тогда при любом выборе неотрицательной и неубывающей функции  $\gamma(x)$  полугруппа (20) является суперустойчивой в пространстве (16). В частности, годится случай  $\gamma(x) \equiv 0$ .

**Доказательство.** Пусть выполнены условия теоремы 3. Для функции (21) с учетом монотонности  $\gamma(x)$  и леммы 2 имеем

$$F(\tau, t) \geq p \int_{\tau}^{\tau+t} \sigma(s) ds \geq p \int_{\tau}^{\tau+t} bs^r ds = a(\tau + t)^q - a\tau^q \geq at^q, \quad \tau \geq 0, \quad t \geq 0,$$

с константами  $a = pb/(r + 1) > 0$  и  $q = r + 1 > 1$ . Но тогда на основании леммы 1 полугруппа (20) будет суперустойчивой в пространстве (16). Теорема доказана.  $\square$

Применим полученные результаты к обратной задаче типа (6) для уравнения переноса на полуоси.

### 3. ОДНОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА С ПОГЛОЩЕНИЕМ

Итак, рассмотрим обратную задачу с финальным переопределением для одномерного уравнения переноса с поглощением на полуоси

$$\begin{cases} u_t + u_x + \sigma(x)u = \varphi(t)g(x), & 0 \leq x < +\infty, & 0 \leq t \leq T, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & u(x, T) = u_1(x). \end{cases} \quad (26)$$

Пусть  $T > 0$ ,  $\sigma(x)$ ,  $\varphi(t)$  известны. Функции  $u_0(x)$  и  $u_1(x)$  считаем заданными. Требуется восстановить неизвестную пару  $(u(x, t), g(x))$ .

Отметим, что теоремы 2, 3 дают широкий спектр возможностей для выбора коэффициента  $\sigma(x) \geq 0$  и банахова пространства (16), при которых гарантирована корректность задачи (26). За счет квазинильпотентности возникающей полугруппы ограничения на функцию  $\varphi(t)$  будут минимальными. Установим для примера только один результат.

При фиксированном значении  $p \in [1, +\infty)$  рассматриваем задачу (26) в банаховом пространстве  $E = L^p(\mathbb{R}_+)$  с оператором  $A$  из формулы (18), заданным на области определения (19). Решение обратной задачи (26) понимаем так же, как при постановке абстрактной задачи (6) в парагр. 1. Тогда для корректности поставленной обратной задачи достаточно потребовать определенного роста по  $x$  коэффициента  $\sigma(x) \geq 0$ .



**Теорема 4.** Пусть  $\varphi \in C^1[0, T]$ , причем  $\varphi(T) \neq 0$ . Пусть  $\sigma(x)$  — измеримая, неотрицательная и локально ограниченная на  $\mathbb{R}_+$  функция, причем

$$\sigma(x) \geq bx^r, \quad x \geq 0, \quad (27)$$

с константами  $b > 0$  и  $r > 0$ . Тогда при любом выборе функций  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$  в области (19) обратная задача (26) имеет и притом единственное решение  $(u(x, t), g(x))$ , согласованное с выбором пространства  $E = L^p(\mathbb{R}_+)$ .

**Доказательство.** По теореме 3 при требовании (27) полугруппа, порожденная оператором (18), будет суперустойчивой в пространстве  $E = L^p(\mathbb{R}_+)$ . Но тогда в силу теоремы 1 при любом выборе функций  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$  в области (19) обратная задача (26) имеет и притом единственное решение  $(u(x, t), g(x))$ , согласованное с выбором пространства  $L^p(\mathbb{R}_+)$ . Теорема доказана.  $\square$

В условиях теоремы 4 решение представимо конструктивным методом на основе ряда Неймана (10) с оператором  $B$  вида (9) и элементом  $f$  вида (8). Для найденной правой части  $g(x)$  справедлива оценка устойчивости вида (12) относительно стандартной нормы пространства  $L^p(\mathbb{R}_+)$ .

Отметим еще, что при рассмотрении уравнения переноса не на полуоси, а на конечном отрезке  $[0, l]$  возникает обратная задача

$$\begin{cases} u_t + u_x + \sigma(x)u = \varphi(t)g(x), & 0 \leq x \leq l, & 0 \leq t \leq T, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & u(x, T) = u_1(x). \end{cases} \quad (28)$$

Здесь оператор  $A$  и полугруппа  $U(t)$  задаются прежними формулами (18) и (20) с ограничением  $0 \leq x \leq l$ , а не  $x \geq 0$ , как было ранее. При этом полугруппа  $U(t)$  оказывается нильпотентной, удовлетворяющей условию (5) со значением  $t_0 = l$ .

Выберем теперь  $\varphi(t) \equiv 1$  на  $[0, T]$ . Тогда функция  $g(x)$  в задаче (28) выражается в «конечном» виде на основе формулы (15). Предлагаемый подход можно распространить на многомерное уравнение переноса, взятое в неограниченной области без интеграла столкновений (см. также [17], где подробно разобрана аналогичная нелокальная задача для многомерного уравнения переноса).

**Благодарности.** Автор искренне благодарен И. В. Тихонову за постановку задачи и поддержку в исследовании, а также А. В. Подорога и Д. Г. Цветкович за помощь при оформлении статьи.

### Библиографический список

1. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*. N. Y. ; Basel : Marcel Dekker, 2000. 723 p.
2. Прилепко А. И., Тихонов И. В. Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58, № 2. С. 167–188. DOI: <http://dx.doi.org/10.1070/IM1995v044n02ABEH001602>
3. Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Вопросы корректности прямых и обратных задач для эволюционного уравнения специального вида // Матем. заметки. 1994. Т. 56, вып. 2. С. 99–113. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02110743>



4. Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг. Разрешимость линейной обратной задачи для эволюционного уравнения с суперустойчивой полугруппой // Вестн. РУДН. Сер. МИФ. 2018. Т. 26, № 2. С. 103–118. DOI: <http://dx.doi.org/10.22363/2312-9735-2018-26-2-103-118>
5. Balakrishnan A. V. On superstability of semigroups // Systems Modelling and Optimization : Proceedings of the 18th IFIP Conference. Ser. Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics. CRC Press, 1999. P. 12–19.
6. Balakrishnan A. V. Superstability of systems // Appl. Math. and Comput. 2005. Vol. 164, iss. 2. P. 321–326. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.06.052>
7. Jian-Hua Chen, Wen-Ying Lu. Perturbation of nilpotent semigroups and application to heat exchanger equations // Appl. Math. Letters. 2011. Vol. 24. P. 1698–1701. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.04.023>
8. Creutz D., Mazo M., Preda C. Superstability and finite time extinction for  $C_0$ -Semigroups. arXiv:0907.4812v4 [math.FA]. 12 p. URL: <https://arxiv.org/pdf/0907.4812.pdf> (дата обращения: 24.12.2013).
9. Kmit I., Lyul'ko N. Perturbations of superstable linear hyperbolic systems // Online journal. arXiv:1605.04703v3 [math.AP]. 29 p. URL: <https://arxiv.org/pdf/1605.04703.pdf> (дата обращения: 09.01.2018).
10. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М : Наука, 1967. 464 с.
11. Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. N. Y. : Springer, 1983. 279 p.
12. Engel K.-J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. N. Y. : Springer, 2000. 586 p.
13. Искендеров А. Д., Тагиев Р. Г. Обратная задача об определении правых частей эволюционных уравнений в банаховом пространстве // Вопросы прикл. матем. и киберн. Науч. тр. Азерб. ун-та. 1979. № 1. С. 51–56.
14. Rundell W. Determination of an unknown non-homogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary data // Appl. Anal. 1980. Vol. 10, iss. 3. P. 231–242. DOI: <https://doi.org/10.1080/00036818008839304>
15. Эйдельман Ю. С. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с параметрами : автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 1984. 16 с.
16. Орловский Д. Г. К задаче определения параметра эволюционного уравнения // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 9. С. 1614–1621.
17. Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг. Формулы явного решения в модельной нелокальной задаче для уравнения простого переноса // Матем. заметки СВФУ. 2017. Т. 24, № 1. С. 57–73. DOI: <https://doi.org/10.25587/SVFU.2017.1.8437>

---

**Образец для цитирования:**

Ву Нгуен Шон Тунг. Специальные примеры суперустойчивых полугрупп и их применение в теории обратных задач // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 3. С. 252–262. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-252-262>

---



## Special Examples of Superstable Semigroups and Their Application in the Inverse Problems Theory

Vu Nguyen Son Tung

Vu Nguyen Son Tung, <https://orcid.org/0000-0002-8494-7669>, Moscow State University of Education, 14, Krasnoprudnaya Str., Moscow, 107140, Russia, vnsontung@mail.ru

Special examples of superstable (quasinilpotent) semigroups and their application in the theory of linear inverse problems for evolutionary equations are studied. The term “semigroup” means here the semigroup of bounded linear operators of class  $C_0$ . The standard research scheme is used. The linear inverse problem with the final overdetermination in a Banach space for the evolution equation is considered. A special assumption is introduced, related to the superstability of the main evolutionary semigroup. For the inverse problem we establish the existence and uniqueness theorem of the solution. It is noted that the solution of the problem can be represented by the convergent Neumann series. To illustrate the general theory, we consider special examples of superstable semigroups that are generated by a one-dimensional streaming operator with absorption in the weighted Banach space of functions on the ray. It is shown that there are many possibilities for choosing the absorption coefficient and the weight function, under which the superstability of the corresponding semigroup is guaranteed. The established results allow applying to a particular inverse problem for the transport equation with absorption on the ray. The applied approach can be extended to the multidimensional transport equation in an unbounded domain without the collision integral.

*Key words:* inverse problem, evolution equation, existence and uniqueness theorem of the solution, superstable semigroup, transport equation.

**Acknowledgements:** The author is sincerely grateful to I. V. Tikhonov for posing the problems and support during research, and also A. V. Podoroga and D. G. Cvetkovic for help with the preparation of the article.

### References

1. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*. New York ; Basel, Marcel Dekker, 2000. 723 p.
2. Prilepko A. I., Tikhonov I. V. Recovery of the nonhomogeneous term in an abstract evolution equation. *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, 1995, vol. 44, iss. 2, pp. 373–394. DOI: <http://dx.doi.org/10.1070/IM1995v044n02ABEH001602>
3. Tikhonov I. V., Eidelman Yu. S. Problems on correctness of ordinary and inverse problems for evolutionary equations of a special form. *Math. Notes*, 1994, vol. 56, iss. 2, pp. 830–839. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02110743>
4. Tikhonov I. V., Vu Nguyen Son Tung. The solvability of the inverse problem for the evolution equation with a superstable semigroup. *RUDN Journal of MIPh*, 2018, vol. 26, iss. 2, pp. 103–118 (in Russian). DOI: <http://dx.doi.org/10.22363/2312-9735-2018-26-2-103-118>
5. Balakrishnan A. V. On superstability of semigroups. *Systems modelling and optimization: Proceedings of the 18th IFIP Conference on System Modelling and Optimization. Ser. Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics*, CRC Press, 1999, pp. 12–19.
6. Balakrishnan A. V. Superstability of systems. *Appl. Math. and Comput.*, 2005, vol. 164, iss. 2, pp. 321–326. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.06.052>





7. Jian-Hua Chen, Wen-Ying Lu. Perturbation of nilpotent semigroups and application to heat exchanger equations. *Appl. Math. Letters*, 2011, vol. 24, pp. 1698–1701. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.04.023>
8. Creutz D., Mazo M., Preda C. *Superstability and finite time extinction for  $C_0$ -Semigroups*. arXiv:0907.4812v4 [math.FA], 12 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/0907.4812.pdf> (accessed 24 December 2013).
9. Kmit I., Lyul'ko N. *Perturbations of superstable linear hyperbolic systems*. arXiv:1605.04703v3 [math.AP], 29 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1605.04703.pdf> (accessed 9 January 2018).
10. Krein S. G. *Lineinye differentsial'nye uravneniia v banakhovom prostranstve* [Linear differential equations in Banach space]. Moscow, Nauka, 1967, 464 p. (in Russian).
11. Pazy A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. New York, Springer, 1983. 279 p.
12. Engel K.-J., Nagel R. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. New York, Springer, 2000. 586 p.
13. Iskenderov A. D., Tagiev R. G. The inverse problem on the determination of right sides of evolution equations in Banach space. *Nauchn. Tr., Azerb. Gos. Univ.*, 1979, iss 1, pp. 51–56 (in Russian).
14. Rundell W. Determination of an unknown non-homogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary data. *Appl. Anal.*, 1980, vol. 10, iss. 3, pp. 231–242. DOI: <https://doi.org/10.1080/00036818008839304>
15. Eidelman. Yu. S. *Krayevyye zadachi dlya differentsial'nykh uravneniy s parametrami*. Avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk [Boundary value problems for differential equations with parameters : Thesis Diss. Cand. Sci. (Phys. and Math.)]. Voronez, 1984. 16 p. (in Russian).
16. Orlovsky D. G. On a problem of determining the parameter of an evolution equation. *Differ. Equ.*, 1990, vol. 26, iss. 9, pp. 1201–1207.
17. Tikhonov I. V., Vu Nguyen Son Tung. Formulas for an explicit solution of the model nonlocal problem associated with the ordinary transport equation. *Yakutian Math. J.*, 2017, vol. 24, no. 1, pp. 57–73. DOI: <https://doi.org/10.25587/SVFU.2017.1.8437>

---

**Cite this article as:**

Vu Nguyen Son Tung. Special Examples of Superstable Semigroups and Their Application in the Inverse Problems Theory. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 252–262 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-252-262>

---



УДК 514.76

## КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОДОЛЖЕННЫХ БИ-МЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР НА РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ НЕНУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ СУБРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

С. В. Галаев

Галаев Сергей Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, sgalaev@mail.ru

Вводится понятие внутренней геометрии субриманова многообразия  $M$ , под которой понимается совокупность тех свойств многообразия, которые зависят только от оснащения  $D^\perp$  распределения  $D$  субриманова многообразия, а также от параллельного перенесения векторов, принадлежащих распределению  $D$ , вдоль кривых, касающихся этого распределения. Инвариантами внутренней геометрии субриманова многообразия  $M$  являются: тензор кривизны Схоутена; 1-форма  $\eta$ , порождающая распределение  $D$ ; производная Ли  $L_{\xi}g$  метрического тензора  $g$  вдоль векторного поля  $\xi$ ; тензорное поле  $P$ , компоненты которого в адаптированных координатах выражаются с помощью равенств  $P_{ad}^c = \partial_n \Gamma_{ad}^c$ . В зависимости от свойств перечисленных выше инвариантов выделяются 12 классов субримановых многообразий. С помощью внутренней связности, заданной на субримановом многообразии  $M$ , на распределении  $D$  многообразия  $M$  определяется почти контактная структура с би-метрикой, названная в работе продолженной структурой. Проводится сравнительный анализ двух классификаций продолженных структур. В соответствии с первой классификацией выделяется 12 классов продолженных структур, соответствующих 12 классам исходных субримановых многообразий. Вторая классификация основана на свойствах фундаментального, ассоциированного с би-метрической структурой, тензора  $F$  типа  $(0, 3)$ . В соответствии со второй классификацией существуют  $2^{11}$  классов би-метрических структур, среди которых 11 базисных классов  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, 11$ . В статье рассматривается случай субриманова многообразия с ненулевым тензором кривизны Схоутена и равной нулю производной Ли  $L_{\xi}g$ . Доказывается, что продолженные почти контактные би-метрические структуры, соответствующие субримановым структурам, с равным нулю инвариантом  $\omega = d\eta$  принадлежат классу  $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ , а с отличным от нуля инвариантом  $\omega = d\eta$  — классу  $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \oplus F_7 \oplus \dots \oplus F_{10}$ .

*Ключевые слова:* субриманово многообразие контактного типа, внутренняя геометрия субриманова многообразия, продолженная почти контактная структура с би-метрикой, распределение ненулевой кривизны.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-263-273>

### ВВЕДЕНИЕ

Исследование почти контактных би-метрических структур начинается с основополагающей работы [1], в которой дано определение би-метрических многообразий и предложена классификация таких многообразий, основанная на выделении инвариантных подпространств в пространстве тензоров специального вида. В соответствии с указанной классификацией выделяются  $2^{11}$  классов би-метрических многообразий



и в том числе 11 базисных классов. В последующих работах [2, 3] приводятся примеры би-метрических многообразий различных классов. В настоящей работе исследуются почти контактные би-метрические структуры, заданные на распределениях субримановых многообразий контактного типа. Под субримановым многообразием контактного типа понимается гладкое многообразие  $M$  размерности  $n$  с заданной на нем субримановой структурой  $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$ , где:  $\eta$  — 1-форма, порождающая распределение  $D: D = \ker(\eta)$ ;  $\vec{\xi}$  — векторное поле, порождающее оснащение  $D^\perp$  распределения  $D: D^\perp = \text{span}(\vec{\xi})$ ;  $g$  — риманова метрика на многообразии  $M$ , относительно которой распределения  $D$  и  $D^\perp$  взаимно ортогональны. При этом выполняются равенства  $\eta(\vec{\xi}) = 1$  и  $g(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = 1$ . На основе конструкции продолжения [4–11] почти контактных метрических структур в работе [7] на тотальном пространстве  $D$  векторного расслоения  $(D, \pi, M)$  была определена почти контактная структура с би-метрикой, названная продолженной структурой. В работе [7] рассматривался случай субриманова многообразия с нулевым тензором Схоутена. В предлагаемой работе исследуется случай субриманова многообразия с ненулевым тензором Схоутена. Распределение  $D$  такого многообразия называется распределением ненулевой кривизны. Дополнительно мы полагаем, что векторное поле  $\vec{\xi}$  — киллингово. Значения ассоциированного с продолженной би-метрической структурой тензорного поля  $F$  [1] совпадают с комитантами инвариантов внутренней геометрии [8] субримановых многообразий. Таких инвариантов четыре: тензор кривизны Схоутена  $R$ ; дифференциальная 2-форма  $\omega = d\eta$ ; производная Ли  $L_{\vec{\xi}}g$  метрического тензора  $g$  вдоль векторного поля  $\vec{\xi}$ ; тензорное поле  $P$ , компоненты которого в адаптированных координатах [8] выражаются с помощью равенств  $P_{ad}^c = \partial_n \Gamma_{ad}^c$ . В настоящей работе выделяется 12 классов субримановых многообразий, которым соответствуют 12 классов продолженных би-метрических структур. Целью работы является изучение классов, состоящих из многообразий с нулевым инвариантом  $C = \frac{1}{2}L_{\vec{\xi}}g$ , но с ненулевым инвариантом  $R$ . Исследование продолженных структур мотивируется приложениями в механике со связями [12, 13] и в теоретической физике [14]. Идея продолжения почти контактных структур тесно связана с развитием аппарата связностей над распределением и продолженных связностей [4, 8–10]. Продолженные структуры являются аналогом лифта геометрических структур на касательное расслоение [15–17].

В первом параграфе работы приводятся необходимые сведения о геометрии субримановых многообразий. Определяются внутренняя связность и внутренние инварианты субримановых многообразий. Второй параграф содержит основные результаты работы, где определяется продолженная почти контактная би-метрическая структура и обсуждаются вопросы ее классификации.

## 1. ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ СУБРИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ КОНТАКТНОГО ТИПА

Пусть  $M$  — гладкое многообразие размерности  $n$  с заданной на нем субримановой структурой  $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$ , где  $\eta$  и  $\vec{\xi}$  — 1-форма и единичное векторное поле, порождающие соответственно ортогональные между собой распределения  $D$  и  $D^\perp$ . Внутренней линейной связностью  $\nabla$  [8] на субримановом многообразии называется отображение

$$\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D),$$



удовлетворяющее следующим условиям:

1)  $\nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}}$ ; 2)  $\nabla_{\vec{x}}f\vec{y} = (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y}$ ; 3)  $\nabla_{\vec{x}}(\vec{y} + \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z}$ , где  $\Gamma(D)$  — модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению  $D$ ).

Внутренняя связность определяет дифференцирование допустимых тензорных полей [8]. Вот так, например, определяется ковариантная производная эндоморфизма  $\varphi$ :  $(\nabla_{\vec{x}}\varphi)\vec{y} = \nabla_{\vec{x}}(\varphi\vec{y}) - \varphi(\nabla_{\vec{x}}\vec{y})$ ,  $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$ .

На протяжении всей работы мы используем адаптированные координаты. Карту  $k(x^\alpha)$  ( $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$ ;  $a, b, c = 1, \dots, n-1$ ;  $i, j, k = 2n-1$ ) многообразия  $M$  будем называть адаптированной к распределению  $D$ , если  $\partial_n = \vec{\xi}$  [8]. Пусть  $P : TM \rightarrow D$  — проектор, определяемый разложением  $TM = D \oplus D^\perp$ , и  $k(x^\alpha)$  — адаптированная карта. Векторные поля  $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$  линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение  $D$ :  $D = span(\vec{e}_a)$ .

Коэффициенты внутренней линейной связности определяются из соотношения  $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma_{ab}^c\vec{e}_c$ . Из равенств  $\vec{e}_a = A_a^{a'}\vec{e}_{a'}$ , где  $A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$ , обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов внутренней связности:

$$\Gamma_{ab}^c = A_a^{a'}A_b^{b'}A_c^{c'}\Gamma_{a'b'}^{c'} + A_c^{c'}\vec{e}_a A_b^{c'}.$$

Кручением и кривизной внутренней связности назовем соответственно допустимые тензорные поля:

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}],$$

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]}\vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}],$$

где  $Q = I - P$ ,  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$ . Тензор  $R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$  носит название тензора кривизны субриманова многообразия. Имеет место

**Предложение 1.** *На субримановом многообразии существует единственная связность  $\nabla$  с нулевым кручением такая, что*

$$\nabla_{\vec{x}}g(\vec{x}, \vec{y}) = 0.$$

Назовем связность  $\nabla$  внутренней метрической связностью. Коэффициенты внутренней метрической связности находятся по формуле

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}).$$

Наиболее просто устроены субримановы многообразия с нулевым тензором кривизны Схоутена. Многообразия с нулевым тензором кривизны Схоутена подробно изучались в случае контактного метрического многообразия в работах [7, 11].

Следуя В. В. Вагнеру [18], под внутренней геометрией субриманова многообразия  $M$  будем понимать геометрические свойства  $M$ , которые зависят только от параллельного перенесения, определяемого внутренней связностью, и от оснащения  $D^\perp$ . К основным инвариантам внутренней геометрии субриманова многообразия мы относим тензор кривизны Схоутена  $R$ , дифференциальную форму  $\omega = d\eta$ , производную Ли  $S = \frac{1}{2}L_{\vec{\xi}}g$  метрического тензора  $g$  вдоль векторного поля  $\vec{\xi}$ , и тензорное поле  $P$ , компоненты которого в адаптированных координатах [8] представлены в виде  $P_{ad}^c = \partial_n \Gamma_{ad}^c$ .



## 2. ПРОДОЛЖЕННЫЕ ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ БИ-МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Пусть  $M$  — гладкое многообразие нечетной размерности  $n = 2m + 1$ ,  $m \geq 1$ , с заданной на нем почти контактной структурой  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$ , где  $\varphi$  — тензор типа  $(1, 1)$ , называемый структурным эндоморфизмом,  $\vec{\xi}$  и  $\eta$  — вектор и ковектор, называемые соответственно структурным вектором и контактной формой такие, что:

$$\varphi \vec{\xi} = \vec{0}, \quad \varphi^2 = -I + \eta \otimes \vec{\xi}, \quad \eta \circ \varphi = 0, \quad \eta(\vec{\xi}) = 1.$$

Если почти контактная структура  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$  согласована с псевдоримановой метрикой  $g$  таким образом, что

$$g(\varphi \vec{x}, \varphi \vec{y}) = -g(\vec{x}, \vec{y}) + \eta(\vec{x})\eta(\vec{y}),$$

где  $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(TM)$ ,  $\Gamma(TM)$  — модуль векторных полей на многообразии  $M$ , то структура  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$  называется почти контактной структурой с би-метрикой, а многообразие  $M$  — почти контактными многообразием с би-метрикой или, би-метрическим многообразием. Распределение  $D = \ker(\eta)$  будем называть распределением би-метрического многообразия, а распределение  $D^\perp = \text{span}(\vec{\xi})$  — оснащением распределения  $D$ .

Тензорное поле  $F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = g((\nabla_{\vec{x}}\varphi)\vec{y}, \vec{z})$ , где  $\nabla$  — связность Леви – Чивита, введено и названо в работе [1] фундаментальным тензорным полем, ассоциированным со структурой би-метрического многообразия. В зависимости от строения поля  $F$  выделяют [1] 11 базисных классов почти контактных структур с би-метрикой:

$$\begin{aligned} F_1 : \quad F^1(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) &= \frac{1}{2n} \{g(\vec{x} \cdot \varphi \vec{y}) \Theta(\varphi \vec{z}) + g(\varphi \vec{x} \cdot \varphi \vec{y}) \Theta(\varphi^2 \vec{z}) + g(\vec{x} \cdot \varphi \vec{z}) \Theta(\varphi \vec{y}) + \\ &\quad + g(\varphi \vec{x} \cdot \varphi \vec{z}) \Theta(\varphi^2 \vec{y})\}, \\ F_2 : \quad F^2(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) &= -\frac{1}{4} F(\varphi^2 \vec{x}, \varphi^2 \vec{y}, \varphi^2 \vec{z}) + F(\varphi^2 \vec{y}, \varphi^2 \vec{z}, \varphi^2 \vec{x}) - F(\varphi \vec{y}, \varphi^2 \vec{z}, \varphi \vec{x}) + \\ &\quad + F(\varphi^2 \vec{x}, \varphi^2 \vec{z}, \varphi^2 \vec{y}) + F(\varphi^2 \vec{z}, \varphi^2 \vec{y}, \varphi^2 \vec{x}) - F(\varphi \vec{z}, \varphi^2 \vec{y}, \varphi \vec{x}) - \\ &\quad - \frac{1}{2n} \{g(\vec{x} \cdot \varphi \vec{y}) \Theta(\varphi \vec{z}) + g(\varphi \vec{x} \cdot \varphi \vec{y}) \Theta(\varphi^2 \vec{z}) + g(\vec{x} \cdot \varphi \vec{z}) \Theta(\varphi \vec{y}) + g(\varphi \vec{x} \cdot \varphi \vec{z}) \Theta(\varphi^2 \vec{y})\}, \\ F_3 : \quad F^3(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) &= -\frac{1}{4} F(\varphi^2 \vec{x}, \varphi^2 \vec{y}, \varphi^2 \vec{z}) - F(\varphi^2 \vec{y}, \varphi^2 \vec{z}, \varphi^2 \vec{x}) + \\ &\quad + F(\varphi \vec{y}, \varphi^2 \vec{z}, \varphi \vec{x}) + F(\varphi^2 \vec{x}, \varphi^2 \vec{z}, \varphi^2 \vec{y}) - F(\varphi^2 \vec{z}, \varphi^2 \vec{y}, \varphi^2 \vec{x}) + F(\varphi \vec{z}, \varphi^2 \vec{y}, \varphi \vec{x}), \\ F_4 : \quad F^4(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) &= -\frac{\Theta(\vec{\xi})}{2n} \{g(\varphi \vec{x} \cdot \varphi \vec{y}) \eta(\vec{z}) + g(\varphi \vec{x} \cdot \varphi \vec{z}) \eta(\vec{y})\}, \\ F_5 : \quad F^5(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) &= -\frac{\Theta^*(\vec{\xi})}{2n} \{g(\vec{x} \cdot \varphi \vec{y}) \eta(\vec{z}) + g(\vec{x} \cdot \varphi \vec{z}) \eta(\vec{y})\}, \\ F_6 : \quad F^6(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) &= \frac{\Theta(\vec{\xi})}{2n} g(\varphi \vec{x} \cdot \varphi \vec{y}) \eta(\vec{z}) + g(\varphi \vec{x} \cdot \varphi \vec{z}) \eta(\vec{y}) + \\ &\quad + \frac{\Theta^*(\vec{\xi})}{2n} g(\vec{x} \cdot \varphi \vec{y}) \eta(\vec{z}) + g(\vec{x} \cdot \varphi \vec{z}) \eta(\vec{y}) + \frac{1}{4} F(\varphi^2 \vec{x}, \varphi^2 \vec{y}, \vec{\xi}) + F(\varphi^2 \vec{y}, \varphi^2 \vec{x}, \vec{\xi}) - \\ &\quad - F(\varphi \vec{x}, \varphi \vec{y}, \vec{\xi}) - F(\varphi \vec{y}, \varphi \vec{x}, \vec{\xi}) \eta(\vec{z}) + \frac{1}{4} F(\varphi^2 \vec{x}, \varphi^2 \vec{z}, \vec{\xi}) + F(\varphi^2 \vec{z}, \varphi^2 \vec{x}, \vec{\xi}) - \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
& -F(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{z}, \vec{\xi}) - F(\varphi\vec{z}, \varphi\vec{x}, \vec{\xi})\eta(\vec{y}), \\
F_7: \quad F^7(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) &= \frac{1}{4}F(\varphi^2\vec{x}, \varphi^2\vec{y}, \vec{\xi}) - F(\varphi^2\vec{y}, \varphi^2\vec{x}, \vec{\xi}) - F(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}, \vec{\xi}) + \\
& + F(\varphi\vec{y}, \varphi\vec{x}, \vec{\xi})\eta(\vec{z}) + \frac{1}{4}F(\varphi^2\vec{x}, \varphi^2\vec{z}, \vec{\xi}) - F(\varphi^2\vec{z}, \varphi^2\vec{x}, \vec{\xi}) - \\
& - F(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{z}, \vec{\xi}) - F(\varphi\vec{z}, \varphi\vec{x}, \vec{\xi})\eta(\vec{y}), \\
F_8: \quad F^8(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) &= \frac{1}{4}F(\varphi^2\vec{x}, \varphi^2\vec{y}, \vec{\xi}) + F(\varphi^2\vec{y}, \varphi^2\vec{x}, \vec{\xi}) + F(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}, \vec{\xi}) + \\
& + F(\varphi\vec{y}, \varphi\vec{x}, \vec{\xi})\eta(\vec{z}) + \frac{1}{4}F(\varphi^2\vec{x}, \varphi^2\vec{z}, \vec{\xi}) + F(\varphi^2\vec{z}, \varphi^2\vec{x}, \vec{\xi}) + F(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{z}, \vec{\xi}) + \\
& + F(\varphi\vec{z}, \varphi\vec{x}, \vec{\xi})\eta(\vec{y}), \\
F_9: \quad F^9(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) &= \frac{1}{4}F(\varphi^2\vec{x}, \varphi^2\vec{y}, \vec{\xi}) - F(\varphi^2\vec{y}, \varphi^2\vec{x}, \vec{\xi}) + F(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}, \vec{\xi}) - \\
& - F(\varphi\vec{y}, \varphi\vec{x}, \vec{\xi})\eta(\vec{z}) + \frac{1}{4}F(\varphi^2\vec{x}, \varphi^2\vec{z}, \vec{\xi}) - F(\varphi^2\vec{z}, \varphi^2\vec{x}, \vec{\xi}) + F(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{z}, \vec{\xi}) - \\
& - F(\varphi\vec{z}, \varphi\vec{x}, \vec{\xi})\eta(\vec{y}), \\
F_{10}: \quad F^{10}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) &= F(\vec{\xi}, \varphi^2\vec{y}, \varphi^2\vec{z})\eta(\vec{x}), \\
F_{11}: \quad F^{11}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) &= -\eta(\vec{x})\{\eta(\vec{y})F(\vec{\xi}, \vec{\xi}, \varphi^2\vec{z}) + \eta(\vec{z})F(\vec{\xi}, \varphi^2\vec{y}, \vec{\xi})\}.
\end{aligned}$$

Здесь  $\Theta(\vec{z}) = g^{ab}F(\vec{e}_a, \vec{e}_b, \vec{z})$ ,  $\Theta^*(\vec{z}) = g^{ab}F(\vec{e}_a, \varphi\vec{e}_b, \vec{z})$ ,  $\omega(\vec{z}) = F(\vec{\xi}, \vec{\xi}, \vec{z})$ .

Пусть теперь  $D$  — распределение субриманова многообразия контактного типа. Векторные поля  $(\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \partial_n, \partial_{n+a}) = (A_i)$  определяют [8] на распределении  $D$  как на гладком многообразии неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы  $(dx^a, \Theta^n = dx^a + \Gamma_a^n dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+c} dx^b)$  — соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n + x^{n+d}R_{bad}^c\partial_{n+c}, \quad [\vec{e}_a, \partial_n] = x^{n+d}\partial_n\Gamma_{ad}^c\partial_{n+c}, \quad [\vec{e}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma_{ab}^c\partial_{n+c},$$

где  $R_{bad}^c$  — компоненты тензора Схоутена в адаптированных координатах [8]:

$$R_{abc}^d = 2\vec{e}_{[a}\Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a||e||}^d\Gamma_{b]c}^e.$$

Имеет место

**Предложение 2 (см. [8]).** Пусть  $\nabla$  — внутренняя связность с тензором кривизны Схоутена  $R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$ . Тогда для всех  $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$  и  $\vec{p} \in D$  имеют место следующие равенства:

$$[\vec{x}^h, \vec{y}^h]_{\vec{p}} = [\vec{x}, \vec{y}]^h - \{R(\vec{x}, \vec{y})\vec{p}\}^v, \quad (1)$$

$$[\vec{x}^h, \vec{\xi}^h]_{\vec{p}} = [\vec{x}, \vec{\xi}]^h + \{P(\vec{x}, \vec{p})\}^v, \quad (2)$$

$$[\vec{x}^h, \vec{y}^v] = (\nabla_{\vec{x}}\vec{y})^v, \quad (3)$$

$$[\vec{x}^v, \vec{\xi}^h] = [\vec{x}, \vec{\xi}]^v. \quad (4)$$



Определим на многообразии  $D$  почти контактную структуру  $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$ , полагая  $J\vec{x}^h = \vec{x}^v, J\vec{x}^v = -\vec{x}^h$ . Здесь  $\pi : D \rightarrow M$  — естественная проекция. Определим далее на многообразии  $M$  метрику  $\tilde{g}$ , подчиняющуюся равенствам:

$$\tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^h) = -\tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{y}^v) = g(\vec{x}, \vec{y}), \quad \tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^v) = \tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{u}) = \tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{u}) = 0.$$

Имеют место следующие предложения.

**Предложение 3 (см. [7]).** Структура  $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$  является почти контактной структурой с би-метрикой.

**Предложение 4.** Пусть  $\tilde{\nabla}$  — связность Леви – Чивита на би-метрическом многообразии  $D$ , тогда ее коэффициенты  $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$  в адаптированных координатах принимают следующее представление:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ab}^c &= \Gamma_{ab}^c, & 2\tilde{\Gamma}_{ab}^{n+c} &= R_{bad}^c x^{n+d}, & 2\tilde{\Gamma}_{ab}^n &= 2\omega_{ba} - \partial_n g_{ab}, & 2\tilde{\Gamma}_{a,n+b}^c &= R_{bda}^c x^{n+d}, \\ 2\tilde{\Gamma}_{n+a,b}^c &= R_{adb}^c x^{n+d}, & \tilde{\Gamma}_{a,n+b}^{n+c} &= \Gamma_{ab}^c, & 2\tilde{\Gamma}_{a,n+b}^n &= 2\tilde{\Gamma}_{n+b,a}^n = \partial_n \Gamma_{ac}^e x^{n+c} g_{eb}, \\ 2\tilde{\Gamma}_{n+a,n+b}^n &= \partial_n g_{ab}, & 2\tilde{\Gamma}_{an}^c &= 2\tilde{\Gamma}_{na}^c = g^{cd}(2\omega_{ad} + \partial_n g_{ad}), & 2\tilde{\Gamma}_{an}^{n+c} &= \partial_n \Gamma_{ad}^c x^{n+d} = -2\tilde{\Gamma}_{na}^{n+c}, \\ 2\tilde{\Gamma}_{n+a,n}^c &= 2\tilde{\Gamma}_{n,n+a}^c = -g^{cd} \partial_n \Gamma_{db}^e x^{n+b} g_{ae}, & 2\tilde{\Gamma}_{n+a,n}^{n+c} &= 2\tilde{\Gamma}_{n,n+a}^{n+c} = g^{cd} \partial_n g_{ad}. \end{aligned}$$

Доказательство предложения 4 основано на использовании равенств (1)–(4), а также выражения для коэффициентов связности:

$$2\Gamma_{ij}^m = g^{km} (A_i g_{jk} + A_j g_{ik} - A_k g_{ij} + \Omega_{kj}^l g_{li} + \Omega_{ki}^l g_{lj}) + \Omega_{ij}^m,$$

где  $\Omega_{ab}^n = 2\omega_{ba}, \Omega_{ab}^{n+c} = R_{bad}^c x^{n+d}, \Omega_{a,n+b}^{n+c} = \Gamma_{ab}^c, \Omega_{an}^{n+c} = \partial_n \Gamma_{ab}^c x^{n+b}$ .

Пусть  $F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  — фундаментальное тензорное поле, ассоциированное с продолженной би-метрической структурой. Проводя необходимые вычисления, основанные на использовании предложения 4, получаем следующие значения  $F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  для базисных векторов:

$$\begin{aligned} F(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b, \vec{\varepsilon}_c) &= F(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}, \partial_{n+c}) = \frac{1}{2}(R_{baoc} - R_{obac}), \\ F(\partial_{n+a}, \vec{\varepsilon}_b, \partial_{n+c}) &= F(\partial_{n+a}, \partial_{n+c}, \vec{\varepsilon}_b) = \frac{1}{2}R_{aobc}, \\ F(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b, \partial_n) &= F(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \vec{\varepsilon}_b) = \frac{1}{2}\partial_n \Gamma_{ao}^e g_{eb}, \\ F(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}, \partial_n) &= F(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+b}) = C_{ab} + \omega_{ab}, \\ F(\partial_{n+a}, \vec{\varepsilon}_b, \partial_n) &= F(\partial_{n+a}, \partial_n, \vec{\varepsilon}_b) = C_{ab}, \\ F(\partial_{n+a}, \partial_{n+c}, \partial_n) &= F(\partial_{n+a}, \partial_n, \partial_{n+c}) = -\frac{1}{2}\partial_n \Gamma_{bo}^e g_{ea}, \\ F(\partial_n, \vec{\varepsilon}_b, \vec{\varepsilon}_c) &= F(\partial_n, \partial_{n+b}, \partial_{n+c}) = -\frac{1}{2}(\partial_n \Gamma_{co}^e g_{eb} + \partial_n \Gamma_{bo}^e g_{ec}), \\ F(\partial_n, \vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) &= F(\partial_n, \partial_{n+b}, \vec{\varepsilon}_a) = \omega_{ab}. \end{aligned}$$

Здесь использованы следующие обозначения:  $R_{aob}^e = R_{adb}^e x^{n+d}, \Gamma_{ao}^e = \Gamma_{ad}^e x^{n+d}, R_{badc} = R_{bad}^e g_{ec}$ .

В зависимости от значений внутренних инвариантов выделим 12 классов субримановых многообразий, как это показано в таблице.



Классификация субримановых многообразий контактного типа  
 Classification of sub-Riemannian manifolds of contact type

$R$	$\omega$	$C$	$P$	$\Phi$
0	0	0	0	$\Phi_0$
1	0	0	0	$\Phi_1$
0	1	0	0	$\Phi_2$
1	1	0	0	$\Phi_3$
0	0	1	0	$\Phi_4$
0	1	1	0	$\Phi_5$
1	0	1	0	$\Phi_6$
1	1	1	0	$\Phi_7$
0	0	1	1	$\Phi_8$
1	0	1	1	$\Phi_9$
0	1	1	1	$\Phi_{10}$
1	1	1	1	$\Phi_{11}$

*Примечание.* Символы «0» и «1» обозначают обращение и необращение в нуль соответствующего инварианта.

*Note.* The symbols “0” and “1” mean that a corresponding invariant either vanishes or does not vanish, respectively.

Значения фундаментального тензора продолженной структуры  $F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  зависят от класса исходного субриманова многообразия. Тем самым каждому классу субримановых многообразий соответствует некоторый класс би-метрических многообразий с продолженной структурой. Таким образом, в соответствии с предложенной нами классификацией многообразий с продолженной структурой получаем 12 классов  $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{11}$  би-метрических многообразий.

Пусть теперь  $M$  — субриманово многообразие, принадлежащее классу  $\Phi_1$ . Такое многообразие характеризуется наличием единственного ненулевого внутреннего инварианта — тензора кривизны Схоутена.

Следующая теорема указывает на связи между описанными выше классификациями би-метрических многообразий.

**Теорема 1.** Пусть  $M$  — субриманово многообразие. Тогда всякая продолженная би-метрическая структура, принадлежащая классу  $\Phi_1$ , принадлежит классу  $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ .

**Доказательство.** Пусть исходное субриманово многообразие  $M$  принадлежит классу  $\Phi_1$ . В этом случае отличными от нуля значениями фундаментального тензора  $F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  соответствующей продолженной структуры являются:

$$F(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b, \vec{\varepsilon}_c) = F(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}, \partial_{n+c}) = \frac{1}{2}(R_{baoc} - R_{obac}),$$

$$F(\partial_{n+a}, \vec{\varepsilon}_b, \partial_{n+c}) = F(\partial_{n+a}, \partial_{n+c}, \vec{\varepsilon}_b) = \frac{1}{2}R_{aobc}.$$

Проводя непосредственные вычисления, получаем:

$$F^1(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) + F^2(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) + F^3(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = -\frac{1}{4}(2F(\varphi^2\vec{x}, \varphi^2\vec{y}, \varphi^2\vec{z}) + 2F(\varphi^2\vec{x}, \varphi^2\vec{z}, \varphi^2\vec{y})) =$$



$$= -F(\varphi^2 \vec{x}, \varphi^2 \vec{y}, \varphi^2 \vec{z}).$$

Если  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$ , то последнее равенство примет вид

$$F^1(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) + F^2(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) + F^3(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}),$$

что и доказывает теорему. □

При доказательстве теоремы мы воспользовались свойствами тензора кривизны Схоутена [11]:

**Предложение 5.** Тезор  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{u})$  кривизны Схоутена субриманова многообразия контактного типа удовлетворяет следующим условиям:

$$R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{u}) + R(\vec{y}, \vec{x}, \vec{z}, \vec{u}) = 0, \quad \int_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \{R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{u})\} = 0,$$

где  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{u} \in \Gamma(D)$ .

Несмотря на то что последнее утверждение доказывалось в работе [11] для случая почти контактного метрического многообразия [19], оно оказывается верным и в случае субриманова многообразия.

**Теорема 2.** Пусть  $M$  — субриманово многообразие. Тогда всякая продолженная би-метрическая структура из класса  $\Phi_3$  принадлежит классу  $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \oplus \oplus F_7 \oplus \dots \oplus F_{10}$ .

**Доказательство.** Пусть исходное субриманово многообразие  $M$  принадлежит классу  $\Phi_3$ . В этом случае отличными от нуля значениями фундаментального тензора  $F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  соответствующей продолженной структуры являются:

$$\begin{aligned} F(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b, \vec{\varepsilon}_c) &= F(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}, \partial_{n+c}) = \frac{1}{2}(R_{baoc} - R_{obac}), \\ F(\partial_{n+a}, \vec{\varepsilon}_b, \partial_{n+c}) &= F(\partial_{n+a}, \partial_{n+c}, \vec{\varepsilon}_b) = \frac{1}{2}R_{aobc}, \\ F(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}, \partial_n) &= F(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+b}) = F(\partial_n, \vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) = F(\partial_n, \partial_{n+b}, \vec{\varepsilon}_a) = \omega_{ab}. \end{aligned}$$

Проводя необходимые вычисления, получаем:

$$\begin{aligned} F^7(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}, \partial_n) &= F^8(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}, \partial_n) = \frac{1}{2}\omega_{ab}, & F^9(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}, \partial_n) &= F^{10}(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}, \partial_n) = 0, \\ F^7(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+b}) &= F^8(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+b}) = \frac{1}{2}\omega_{ab}, & F^9(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+b}) &= F^{10}(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+b}) = 0, \\ F^7(\partial_n, \vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) &= F^8(\partial_n, \vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) = F^9(\partial_n, \vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) = 0, & F^{10}(\partial_n, \vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) &= \omega_{ab}, \\ F^7(\partial_n, \partial_{n+b}, \vec{\varepsilon}_a) &= F^8(\partial_n, \partial_{n+b}, \vec{\varepsilon}_a) = F^9(\partial_n, \partial_{n+b}, \vec{\varepsilon}_a) = 0, & F^{10}(\partial_n, \partial_{n+b}, \vec{\varepsilon}_a) &= \omega_{ab}, \end{aligned}$$

что и доказывает теорему. □

**Библиографический список**

1. *Ganchev G., Mihova V., Gribachev K.* Almost contact manifolds with  $B$ -metric // *Math. Balkanica (N. S.)*. 1993. Vol. 7, fasc. 3–4. P. 261–276.
2. *Manev M.* Tangent bundles with Sasaki metric and almost hypercomplex pseudo-Hermitian structure // *Topics in Almost Hermitian Geometry and Related Fields*. 2005. P. 170–185. DOI: [https://doi.org/10.1142/9789812701701\\_0013](https://doi.org/10.1142/9789812701701_0013)
3. *Manev M.* Tangent bundles with complete lift of the base metric and almost hypercomplex Hermitian-Norden structure // *Compt. rend. Acad. bulg. Sci.* 2014. Vol. 67, № 3. P. 313–322. arXiv:1309.0977v1 [math.DG].
4. *Букушева А. В.* О геометрии контактных метрических пространств с  $\varphi$ -связностью // *Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Математика. Физика*. 2015. № 17(214), вып. 40. С. 20–24.
5. *Букушева А. В., Галаев С. В.* Связности над распределением и геодезические пульверизации // *Изв. вузов. Матем.* 2013. № 4. С. 10–18.
6. *Букушева А. В., Галаев С. В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 17–22.
7. *Галаев С. В.* О классификации продолженных Би-метрических структур на субримановых многообразиях с нулевым тензором кривизны Схоутена // *Вестн. Башкир. ун-та*. 2017. Т. 22, № 4. С. 936–939.
8. *Bukusheva A. V., Galaev S. V.* Almost contact metric structures defined by connection over distribution // *Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics*. 2011. Vol. 4 (53), № 2. P. 13–22.
9. *Галаев С. В.* Гладкие распределения с допустимой гиперкомплексной псевдо-эрмитовой структурой // *Вестн. Башкир. ун-та*. 2016. Т. 21, № 3. С. 551–555.
10. *Букушева А. В.* Слоения на распределениях с финслеровой метрикой // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2014. Т. 14, вып. 3. С. 247–251.
11. *Галаев С. В.* О распределениях со специальной квази-сасакиевой структурой // *Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1, Мат. Физ.* 2017, № 2 (39). С. 6–17. DOI: <https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.2.1>
12. *Вершик А. М., Гершкович В. Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // *Динамические системы–7. Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления*. М. : ВИНТИ, 1987. Т. 16. С. 5–85.
13. *Вершик А. М., Фаддеев Л. Д.* Лагранжева механика в инвариантном изложении // *Проблемы теоретической физики. Т. 2. Теория ядра. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистической физике. Математическая физика*. Л. : Изд-во ЛГУ, 1975. С. 129–141.
14. *Гладуш В. Д.* Пятимерная общая теория относительности и теория Калуцы – Клейна // *ТМФ*. 2003. Т. 136, № 3. С. 480–495. DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf231>
15. *Манин Ю. И.* Калибровочные поля и комплексная геометрия. М. : Наука, 1984. 336 с.
16. *Sasaki S.* On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds II // *Tohoku Math. J.* 1962. № 14. P. 146–155.
17. *Yano K., Ishihara S.* Tangent and cotangent bundles: differential geometry. N. Y. : Marcel Dekker, Inc., 1973. 423 p.
18. *Вагнер В. В.* Геометрия  $(n - 1)$ -мерного неголономного многообразия в  $n$ -мерном пространстве // *Тр. семинара по векторному и тензорному анализу*. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.





19. Blair D. E. Contact manifolds in Riemannian geometry. Berlin ; N. Y. : Springer-Verlag, 1976. 146 p.

---

**Образец для цитирования:**

Галаев С. В. Классификация продолженных би-метрических структур на распределениях ненулевой кривизны субримановых многообразий // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 3. С. 263–273. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-263-273>

---

## Classification of Prolonged Bi-metric Structures on Distributions of Non-zero Curvature of Sub-Riemannian Manifolds

S. V. Galaev

Sergei V. Galaev, <https://orcid.org/0000-0002-1129-7159>, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, [sgalaev@mail.ru](mailto:sgalaev@mail.ru)

The notion of the interior geometry of a sub-Riemannian manifold  $M$  is introduced, that is the aggregate of those manifold properties that depend only on the framing  $D^\perp$  of the distribution  $D$  of the sub-Riemannian manifold as well as on the parallel transport of the vectors tangent to the distribution  $D$  along the curves tangent to this distribution. The main invariants of the interior geometry of a sub-Riemannian manifold  $M$  are the following: the Schouten curvature tensor; the 1-form  $\eta$  defining the distribution  $D$ ; the Lie derivative  $L_{\vec{\xi}}g$  of the metric tensor  $g$  along a vector field  $\vec{\xi}$ ; the tensor field  $P$  that with respect to adaptive coordinates has the components  $P_{ad}^c = \partial_n \Gamma_{ad}^c$ . Depending on the properties of these invariants, 12 classes of sub-Riemannian manifolds are defined. Using the interior connection on the sub-Riemannian manifold  $M$ , an almost contact structure with a bi-metric is defined on the distribution  $D$ , which is called the prolonged structure in the paper. The comparison of two classifications of the prolonged structures is given. Accordance with the first classification, there are 12 classes of the prolonged structures corresponding to the 12 classes of the initial sub-Riemannian manifolds. The second classification is grounded on the properties of the fundamental  $F$  of type  $(0, 3)$  associated with the bi-metrical structure. According to the second classification, there exist  $2^{11}$  classes of bi-metrical structures, among that 11 are basis classes  $F_i, i = 1, \dots, 11$ . The paper considers the case of a sub-Riemannian manifold with non-zero Schouten curvature tensor and with zero Lie derivative  $L_{\vec{\xi}}g$ . It is proved that the prolonged almost contact bi-metrical structures corresponding to sub-Riemannian structures with the invariant  $\omega = d\eta$  equal to zero, belong to the class  $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ , and the ones with non-zero invariant  $\omega = d\eta$  belong to the class  $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \oplus F_7 \oplus \dots \oplus F_{10}$ .

*Key words:* sub-Riemannian manifold of contact type; interior geometry of sub-Riemannian manifold; prolonged almost contact structure with bi-metric; distribution of non-zero curvature.

### References

1. Ganchev G., Mihova V., Gribachev K. Almost contact manifolds with  $B$ -metric. *Math. Balkanica (N. S.)*, 1993, vol. 7, fasc. 3–4, pp. 261–276.
2. Manev M. Tangent bundles with Sasaki metric and almost hypercomplex pseudo-Hermitian structure. *Topics in Almost Hermitian Geometry and Related Fields*, 2005, pp. 170–185. DOI: [https://doi.org/10.1142/9789812701701\\_0013](https://doi.org/10.1142/9789812701701_0013)
3. Manev M. Tangent bundles with complete lift of the base metric and almost hypercomplex Hermitian – Norden structure. *Compt. rend. Acad. bulg. Sci.*, 2014, vol. 67, no. 3, pp. 313–322. arXiv:1309.0977v1 [math.DG].



4. Bukusheva A. V. The geometry of the contact metric spaces  $\varphi$ -connection. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics*, 2015, no. 17(214), iss. 40, pp. 20–24 (in Russian).
5. Bukusheva A. V., Galaev S. V. Connections on distributions and geodesic sprays. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2013, vol. 57, iss. 4, pp. 7–13. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X13040026>
6. Bukusheva A. V., Galaev S. V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution with admissible Finslerian metric. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 3, pp. 17–22 (in Russian).
7. Galaev S. V. On classification of continuous B-metric structures on sub-Riemannian manifolds with zero Schouten tensor. *Vestnik Bashkirskogo universiteta*, 2017, vol. 22, no. 4, pp. 936–939 (in Russian).
8. Bukusheva A. V., Galaev S. V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution. *Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics*, 2011, vol. 4 (53), no. 2, pp. 13–22.
9. Galaev S. V. Smooth distributions with admissible hypercomplex pseudo-hermitian structure. *Vestnik Bashkirskogo Universiteta*, 2016, vol. 21, no. 3, pp. 551–555 (in Russian).
10. Bukusheva A. V. Foliation on distribution with Finslerian metric. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 3, pp. 247–251 (in Russian).
11. Galaev S. V. On Distributions with Special Quasi-Sasakian Structure. *Science Journal of VolSU. Mathematics. Physics*, 2017, no. 2(39), pp. 6–17 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.2.1>
12. Vershik A. M., Gershkovich V. Ya. Nonholonomic dynamical systems. Geometry of distributions and variational problems. *Dynamical systems–7, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr.* Moscow, VINITI, 1987. Vol. 16, pp. 5–85 (in Russian).
13. Vershik A. M., Faddeev L. D. Lagrangian mechanics in invariant formulation. *Selecta Math. Soviet*, 1981, vol. 1, no. 4, pp. 339–350. Reprinted in: L. D. Faddeev, 40 years in mathematical physics.
14. Gladush V. D. Five-Dimensional General Relativity and Kaluza – Klein Theory. *Theoret. and Math. Phys.*, 2003, vol. 136, no. 3, pp. 1312–1324. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1025655400605>
15. Manin Yu. I. *Kalibrovochnye polia i kompleksnaia geometriia* [Calibration fields and complex geometry]. Moscow, Nauka, 1984. 336 p. (in Russian).
16. Sasaki S. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds II. *Tohoku Math. J.*, 1962, no. 14, pp. 146–155.
17. Yano K., Ishihara S. *Tangent and cotangent bundles: differential geometry*. New York, Marcel Dekker, Inc., 1973. 423 p.
18. Vagner V. V. Geometriia  $(n - 1)$ -mernogo negolonomnogo mnogoobraziia v  $n$ -mernom prostranstve [The geometry of an  $(n - 1)$ -dimensional non-holonomic manifold in an  $n$ -dimensional space]. *Tr. seminara po vektornomu i tenzornomu analizu* [Proceedings of the seminar on vector and tensor analysis]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1941, iss. 5, pp. 173–255 (in Russian).
19. Blair D. E. *Contact manifolds in Riemannian geometry*. Berlin, New York, Springer-Verlag, 1976. 146 p.

---

**Cite this article as:**

Galaev S. V. Classification of Prolonged Bi-metric Structures on Distributions of Non-zero Curvature of Sub-Riemannian Manifolds. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 263–273 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-263-273>

---



## An Asymptotic Relation for Conformal Radii of Two Nonoverlapping Domains

A. V. Zherdev

Andrey V. Zherdev, <https://orcid.org/0000-0003-2282-4169>, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia; Petrozavodsk State University, 33, Lenin Str., Petrozavodsk, Republic of Karelia, 185910, Russia, [jerdevandrey@gmail.com](mailto:jerdevandrey@gmail.com)

We consider a family of continuously varying closed Jordan curves given by a polar equation, such that the interiors of the curves form an increasing or decreasing chain of domains. Such chains can be described by the Löwner – Kufarev differential equation. We deduce an integral representation of a driving function in the equation. Using this representation we obtain an asymptotic formula, which establishes a connection between conformal radii of bounded and unbounded components of the complement of the Jordan curve when the bounded component is close to the unit disk.

*Key words:* Löwner – Kufarev equation, conformal radius, asymptotic expansion, nonoverlapping domains.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-274-283>

### INTRODUCTION

We denote by  $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$  the open disk of the radius  $r > 0$  and centered at the origin,  $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1$ . Let  $\Omega$  be a simply connected domain which is a proper subset of the complex plane and  $w_0 \in \Omega$ . According to the Riemann mapping theorem there are a unique number  $r > 0$  and a unique function  $g$  conformally mapping  $\Omega$  onto the disk  $\mathbb{D}_r$  and such that  $g(w_0) = 0$ ,  $g'(w_0) = 1$ . This  $r$  is called a conformal radius of the domain  $\Omega$  with respect to the point  $w_0$ . Let now  $\Omega$  be a domain in the extended complex plane with at least two boundary points and  $w_0 = \infty \in \Omega$ . There are a unique  $r > 0$  and a unique function  $g$ , which is analytic in  $\Omega$  except  $\infty$ , where it has the expansion  $g(w) = w + c_0 + c_1 w^{-1} + \dots$ , and maps  $\Omega$  one-to-one onto  $\{|z| > \frac{1}{r}\}$ . This  $r$  is called a conformal radius of the domain  $\Omega$  with respect to  $\infty$ . In both cases we denote the conformal radius of  $\Omega$  with respect to the point  $w_0$  by  $r(\Omega, w_0)$ . Note that if  $f$  maps conformally the unit disk  $\mathbb{D}$  onto  $\Omega \subset \mathbb{C}$  and  $f(0) = w_0$ ,  $f'(0) > 0$ , then  $r(\Omega, w_0) = f'(0)$ .

Let  $\Omega_1, \Omega_2$  be disjoint simply connected domains in the extended complex plane,  $0 \in \Omega_1$ ,  $\infty \in \Omega_2$ . Then  $r(\Omega_1, 0)r(\Omega_2, \infty) \leq 1$ , where the equality sign holds if and only if  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$  are the bounded and unbounded components of the complement of a circle with the center at the origin. This results in a corollary of the theorem about nonoverlapping domains obtained by N. A. Lebedev using the area principle [1]. We will consider the case when  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$  are the bounded and unbounded components of a closed Jordan curve, respectively. Let  $f : \mathbb{D} \rightarrow \Omega_1$  and  $F : \{|z| > 1\} \rightarrow \Omega_2$  be conformal maps. The composition  $F^{-1} \circ f$  determines a homeomorphism of the unit circle which is called a conformal welding. We refer the reader to the works [2–7].

In the article, we use the Löwner – Kufarev parametric method to establish an asymptotic relation for conformal radii of two nonoverlapping domains. The Löwner equation



is a differential equation describing a continuously increasing sequence of simply connected domains of a special type, i.e. the so called slit domains [8]. Kufarev [9] and Pommerenke [10] generalized the Löwner equation to a wider class of domains.

Given a chain of simply connected domains  $\Omega(t)$ ,  $t \in [0, T)$ , such that  $0 \in \Omega(t_1) \subset \subset \Omega(t_2)$ ,  $0 \leq t_1 < t_2 < T$ , the function  $f(z, t) = e^t z + \dots$ , conformally mapping  $\mathbb{D}$  onto  $\Omega(t)$  for each fixed  $t \in [0, T)$ , a.e. satisfies the (Löwner – Kufarev) equation [9, 11]

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = z \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} p(z, t), \quad z \in \mathbb{D}, \quad t \in [0, T), \tag{1}$$

where, for all  $t \in [0, T)$ ,  $p(z, t)$  is analytic in  $\mathbb{D}$  with respect to  $z$ ,  $p(0, t) = 1$ ,  $\operatorname{Re} p(z, t) > 0$  and  $p(z, t)$  is measurable with respect to  $t$  for any  $z \in \mathbb{D}$ . A similar statement can be formulated for a decreasing chain of domains.

We consider a chain of bounded domains  $\Omega(t)$ ,  $0 \in \Omega(t)$ ,  $\Omega(0) = \mathbb{D}$  with a boundary  $\Gamma(t)$  and a chain  $\Omega^*(t)$ ,  $\infty \in \Omega^*(t)$ , of unbounded domains with the same boundary  $\Gamma(t)$ . The method of Löwner-Kufarev evolution can be used to establish a connection between conformal radii of these domains. In [6], it is shown that if  $\Omega(t)$  is decreasing,  $p(\cdot, t) \in C^2(\overline{\mathbb{D}})$  for  $t \in [0, T)$ ,  $p(z, \cdot)$  is continuous in  $[0, T)$  for  $z \in \overline{\mathbb{D}}$  and  $p(z, t)$ ,  $p'(z, t)$  and  $p''(z, t)$  are bounded in  $\overline{\mathbb{D}} \times [0, T)$ , then  $\ln(r(\Omega^*(0), \infty)) = t + o(t)$ ,  $t \rightarrow +0$ .

We suppose now, that  $\Gamma(t)$  is given by the polar equation  $r = \gamma(\psi, t)$ . Let  $G(t)$ ,  $0 \in G(t)$  be a chain of domains bounded by a curve with the polar equation  $r = \gamma^{-1}(\psi, t)$ . Let  $f(z, t) = a(t)z + \dots$  and  $g(z, t) = b(t)z + \dots$  conformally map  $\mathbb{D}$  onto  $\Omega(t)$  and  $G(t)$ , respectively, where  $a(t) = r(\Omega(t), 0)$ ,  $b(t) = r(G(t), 0)$  are positive, strictly monotone and continuous functions,  $a(0) = b(0) = 1$ . We can always choose the parameter  $t$  so that  $a(t) = e^t$  ( $a(t) = e^{-t}$  in the case of a decreasing chain of domains). The following theorem gives the asymptotic expansion for  $b(t)$  in a neighbourhood of  $t = 0$ .

**Theorem 1.** *Let  $\Omega(t)$ ,  $t \in [0, T)$ , be a chain of domains (increasing or decreasing),  $0 \in \Omega(t)$ ,  $r(\Omega(t), 0) = e^{\pm t}$  for each  $t \in [0, T)$ ,  $\Omega(0) = \mathbb{D}$ , and the boundary  $\Gamma(t)$  for each  $t \in [0, T)$  given by the polar equation  $r = \gamma(\psi, t)$ ,  $\psi \in [0, 2\pi]$ , where  $\gamma \in C^{3+\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Let  $G(t)$  be a chain of domains bounded by the family of curves with the polar equation  $r = \gamma_1(\psi, t) = (\gamma(\psi, t))^{-1}$ . Then*

$$\log r(G(t), 0) = \mp t + \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dot{\gamma}(\varphi, 0))^2 - \ddot{\gamma}(\varphi, 0) d\varphi \right) t^2 + o(t^2), \quad t \rightarrow +0. \tag{2}$$

By  $\dot{\gamma}$ ,  $\ddot{\gamma}$  we denote the first and second derivatives with respect to the parameter  $t$ , respectively. In general, we use the following convention. If  $f$  is a function of a real or complex variable and  $t$  is a parameter, then  $\dot{f}$  denotes the derivative with respect to  $t$ , while  $f'$  denotes the derivative with respect to another variable.

It is not difficult to see that  $r(\Omega^*(t), \infty) = r(G(t), 0)$  for  $t \in [0, T)$ . So, we have the following corollary of Theorem 1, which is the main result of the article.

**Corollary 1.** *Let a chain of domains  $\Omega(t)$  and their boundaries  $\Gamma(t)$  be the same as in Theorem 1, and  $\Omega^*(t)$  be a chain of the unbounded components of the complement*



of  $\Gamma(t)$ . Then

$$\log r(\Omega^*(t), \infty) = \mp t + \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dot{\gamma}(\varphi, 0))^2 - \ddot{\gamma}(\varphi, 0) d\varphi \right) t^2 + o(t^2), \quad t \rightarrow +0. \quad (3)$$

In Sect. 1 we deduce the integral representation for a driving function in the Löwner – Kufarev equation. We use it in Sect. 2, where Theorem 1 is proved.

### 1. LÖWNER – KUFAREV EQUATION

The following theorem gives the integral representation for the driving function  $p(z, t)$  in the Löwner – Kufarev equation (1). Note that we do not suppose that  $f'(0, t) = e^{\pm t}$ , as it is usually done.

**Theorem 2.** *Let  $\Omega(t)$ ,  $t \in [0, T)$  be a chain of domains (increasing or decreasing),  $\Omega(0) = \mathbb{D}$ ,  $0 \in \Omega(t)$ , with a boundary  $\partial\Omega(t)$  given by the polar equation  $r = \gamma(\psi, t) = 1 + \delta(\psi, t)$ ,  $\psi \in [0, 2\pi]$ , where  $\delta \in C^{3+\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Let  $f(z, t) = a(t)z + \dots$  conformally map  $\mathbb{D}$  onto  $\Omega(t)$ ,  $a(t) > 0$ . Then  $f$  is differentiable with respect to  $t$  for  $t \in [0, T)$ ,  $z \in \mathbb{D}$ , and satisfies the equation (1) where*

$$p(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|f'(e^{i\varphi}, t)|} \dot{\delta}(\psi(\varphi, t), t) \cos(\beta(\psi(\varphi, t), t)) \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} d\varphi, \quad (4)$$

with  $\psi(\varphi, t) = \arg f(e^{i\varphi}, t)$  and  $\beta(\psi, t) = -\arctan\left(\frac{\gamma'(\psi, t)}{\gamma(\psi, t)}\right)$ .

**Remark 1.** Note that  $\beta(\psi, t)$  is an angle between a normal to the boundary  $\partial\Omega(t)$  at the point  $\gamma(\psi, t)e^{i\psi}$  and a radius vector of this point.

**Remark 2.** Here, the function  $p(z, t)$  is analytic in  $\mathbb{D}$  with respect to  $z$ ,  $\operatorname{Re} p(z, t) > 0$  if  $\Omega(t)$  is increasing and  $\operatorname{Re} p(z, t) < 0$  if  $\Omega(t)$  is decreasing,  $p(0, t) = \pm 1$  if  $a(t) = e^{\pm t}$ .

**Remark 3.** Differentiating (1) with respect to  $z$  and putting  $z = 0$ , we obtain an equation for the conformal radius  $r(\Omega(t), 0) = a(t)$

$$\frac{d}{dt} \log a(t) = p(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|f'(e^{i\varphi}, t)|} \dot{\delta}(\psi(\varphi, t), t) \cos(\beta(\psi(\varphi, t), t)) d\varphi.$$

First, we prove the following lemma.

**Lemma 1.** *Let  $\Omega_1 \subset \Omega$  be domains bounded by simple closed curves  $\Gamma, \Gamma_1$  given by the polar equations  $r = \gamma(\psi)$ ,  $r = \gamma_1(\psi)$ ,  $\psi \in [0, 2\pi]$ ,  $\gamma, \gamma_1 \in C^{3+\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Let  $f$  and  $f_1$  conformally map  $\mathbb{D}$  onto  $\Omega$  and  $\Omega_1$ , respectively,  $f(0) = f_1(0) = 0$ ,  $f'(0) > 0$ ,  $f_1'(0) > 0$ . Let  $\delta(\psi) = \gamma(\psi) - \gamma_1(\psi)$  satisfy  $|\delta(\psi)| < \varepsilon$ ,  $|\delta'(\psi)| < \varepsilon$ ,  $|\delta''(\psi)| < \varepsilon$ . Then*

$$f_1(z) = f \left( z \left( 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|f'(e^{i\varphi})|} \delta(\psi(\varphi)) \cos \beta(\psi(\varphi)) \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} d\varphi \right) \right) + O(\varepsilon^2), \quad z \in \mathbb{D}, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (5)$$

with  $\psi(\varphi) = \arg f(e^{i\varphi})$  and  $\beta(\psi) = -\arctan\left(\frac{\gamma'(\psi)}{\gamma(\psi)}\right)$ .





We need the following theorem obtained by Siryk [12] (see also [13, p. 371]). It provides the asymptotic representation for functions conformally mapping  $\mathbb{D}$  onto domains close to  $\mathbb{D}$ .

**Theorem 3.** [12] *Let  $\Omega$  be a domain that contains 0 and is bounded by a curve given by the polar equation  $r = 1 - \delta(\psi)$ ,  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ , where  $\psi$  is twice differentiable and satisfies the conditions*

$$|\delta(\psi)| < \varepsilon, \quad |\delta'(\psi)| < \varepsilon, \quad |\delta''(\psi)| < \varepsilon.$$

*Then a function  $f : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) > 0$ , mapping  $\mathbb{D}$  conformally onto  $\Omega$  has the asymptotic representation*

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(\psi) \frac{e^{i\psi} + z}{e^{i\psi} - z} d\psi \right) + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (6)$$

**Proof of Lemma 1.** We denote the inverse function by  $g = f^{-1}$ . Since  $\gamma \in C^{3+\alpha}$ ,  $f, f', f'', f^{(3)}$  can be continuously extended to  $\overline{\mathbb{D}}$  [14, p. 49] and  $f'$  does not vanish there [14, p. 48]. Hence  $g, g', g'', g^{(3)}$  can be continuously extended to  $\overline{\mathbb{D}}$ .

The function  $g$  maps the curve  $\Gamma_1$  onto a simple closed curve in  $\mathbb{D}$ , which has the following equation

$$\omega(\varphi) = g(\gamma_1(\psi(\varphi))e^{i\psi(\varphi)}) = g(f(e^{i\varphi}) - \delta(\psi(\varphi))e^{i\psi(\varphi)}), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (7)$$

We have

$$\begin{aligned} \omega(\varphi) - e^{i\varphi} &= g(f(e^{i\varphi}) - \delta(\psi(\varphi))e^{i\psi(\varphi)}) - g(f(e^{i\varphi})) = \\ &= -g'(f(e^{i\varphi}))\delta(\psi(\varphi))e^{i\psi(\varphi)} + O(\varepsilon^2) = -\frac{1}{f'(e^{i\varphi})}\delta(\psi(\varphi))e^{i\psi(\varphi)} + O(\varepsilon^2) = \\ &= -\frac{1}{|f'(e^{i\varphi})|}\delta(\psi(\varphi))e^{i(\varphi - \beta(\psi(\varphi)))} + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow +0, \end{aligned} \quad (8)$$

where  $\beta(\psi(\varphi)) = \arg \frac{f'(e^{i\varphi})e^{i\varphi}}{f'(e^{i\psi(\varphi)})} = -\arctan \frac{\gamma'(\psi(\varphi))}{\gamma(\psi(\varphi))}$ . Differentiating (7), we obtain

$$\begin{aligned} \omega'(\varphi) &= g'(f(e^{i\varphi}) - \delta(\psi(\varphi))e^{i\psi(\varphi)})[f'(e^{i\varphi})ie^{i\varphi} - \psi'(\varphi)e^{i\psi(\varphi)}(\delta'(\psi(\varphi)) + i\delta(\psi(\varphi)))], \\ \omega''(\varphi) &= g''(f(e^{i\varphi}) - \delta(\psi(\varphi))e^{i\psi(\varphi)})[f'(e^{i\varphi})ie^{i\varphi} - \psi'(\varphi)e^{i\psi(\varphi)}(\delta'(\psi(\varphi)) + i\delta(\psi(\varphi)))]^2 + \\ &\quad + g'(f(e^{i\varphi}) - \delta(\psi(\varphi))e^{i\psi(\varphi)})[-f''(e^{i\varphi})e^{2i\varphi} - f'(e^{i\varphi})e^{i\varphi} - \\ &\quad - \psi''(\varphi)e^{i\psi(\varphi)}(\delta'(\psi(\varphi)) + i\delta(\psi(\varphi))) - (\psi'(\varphi))^2e^{i\psi(\varphi)}(\delta''(\psi(\varphi)) + 2i\delta'(\psi(\varphi)) - \delta(\psi(\varphi)))]. \end{aligned}$$

Since,  $g'', g^{(3)}$  can be continuously extended to  $\overline{\mathbb{D}}$  and  $|\delta(\psi)| < \varepsilon$ ,  $|\delta'(\psi)| < \varepsilon$ ,  $|\delta''(\psi)| < \varepsilon$  we obtain the following estimates

$$\omega'(\varphi) = [g'(f(e^{i\varphi})) + O(\varepsilon)][f'(e^{i\varphi})ie^{i\varphi} + O(\varepsilon)] = ie^{i\varphi} + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (9)$$

$$\omega''(\varphi) = [g''(f(e^{i\varphi})) + O(\varepsilon)][f'(e^{i\varphi})ie^{i\varphi} + O(\varepsilon)]^2 + [g'(f(e^{i\varphi})) + O(\varepsilon)][-f''(e^{i\varphi})e^{2i\varphi} -$$





$$\begin{aligned}
 -f'(e^{i\varphi})e^{i\varphi} + O(\varepsilon) &= \left[ -\frac{f''(e^{i\varphi})}{(f'(e^{i\varphi}))^3} + O(\varepsilon) \right] [-(f'(e^{i\varphi}))^2 e^{2i\varphi} + O(\varepsilon)] + \\
 &+ \left[ \frac{1}{f'(e^{i\varphi})} + O(\varepsilon) \right] [-f''(e^{i\varphi})e^{2i\varphi} - f'(e^{i\varphi})e^{i\varphi} + O(\varepsilon)] = \\
 &= \frac{f''(e^{i\varphi})}{f'(e^{i\varphi})} e^{2i\varphi} - \frac{f''(e^{i\varphi})}{f'(e^{i\varphi})} e^{2i\varphi} - e^{i\varphi} + O(\varepsilon) = -e^{i\varphi} + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Dividing (9) by  $\omega(\varphi)$  gives

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \log \omega(\varphi) = \frac{ie^{i\varphi} + O(\varepsilon)}{e^{i\varphi} + O(\varepsilon)} = i + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (11)$$

therefore

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \arg \omega(\varphi) = 1 + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (12)$$

Hence, the curve  $g(\Gamma_1)$  can be given by a polar equation for  $\varepsilon$  small enough. Denote  $\mu(\varphi) = \arg \omega(\varphi) - \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Using (8) we obtain

$$\begin{aligned}
 \mu(\varphi) &= \arg \frac{g(f(e^{i\varphi}) - \delta(\psi(\varphi))e^{i\psi(\varphi)})}{e^{i\varphi}} = \arg \left( 1 + \frac{g(f(e^{i\varphi}) - \delta(\psi(\varphi))e^{i\psi(\varphi)}) - e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}} \right) = \\
 &= \arg \left( 1 - \frac{1}{|f'(e^{i\varphi})|} \delta(\psi(\varphi))e^{-i\beta(\psi(\varphi))} + O(\varepsilon^2) \right), \quad \varepsilon \rightarrow +0,
 \end{aligned}$$

Therefore, it is not difficult to see that  $\mu(\varphi) = O(\varepsilon^2)$ . From (12) we conclude that  $\mu'(\varphi) = O(\varepsilon)$ . Let  $r = 1 - \Delta(\varphi)$  be the polar equation of  $g(\Gamma_1)$ . Then  $\Delta(\varphi) = 1 - |\omega(\varphi_1)|$ , where  $\varphi_1$  is a unique solution of  $\arg \omega(\varphi_1) = \varphi$ . Hence  $\mu(\varphi_1) + \varphi_1 = \varphi$  and  $\varphi_1 = \varphi + O(\varepsilon^2)$ . Applying (8) gives

$$\begin{aligned}
 \Delta(\varphi) &= 1 - |\omega(\varphi_1)| = 1 - |\omega(\varphi + O(\varepsilon^2))| = 1 - |\omega(\varphi) + O(\varepsilon^2)| = \\
 &= 1 - |e^{i\varphi} + (\omega(\varphi) - e^{i\varphi}) + O(\varepsilon^2)| = 1 - |e^{i\varphi} - \frac{1}{|f'(e^{i\varphi})|} \delta(\psi(\varphi))e^{i(\varphi - \beta(\psi(\varphi)))} + O(\varepsilon^2)| = \\
 &= 1 - |1 - \frac{\delta(\psi(\varphi))}{|f'(e^{i\varphi})|} e^{-i\beta(\psi(\varphi))} + O(\varepsilon^2)| = \\
 &= \frac{\delta(\psi(\varphi))}{|f'(e^{i\varphi})|} \cos \beta(\psi(\varphi)) + O(\varepsilon^2), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (13)
 \end{aligned}$$

From (13) it easily follows that  $|\Delta(\varphi)| = O(\varepsilon)$ . Now we want to deduce similar estimates for  $|\Delta'(\varphi)|$ ,  $|\Delta''(\varphi)|$ . It follows from (8)–(10) that  $|\omega(\varphi)'| = O(\varepsilon)$ ,  $|\omega(\varphi)''| = O(\varepsilon)$ . Differentiating the equation  $\Delta(\varphi + \mu(\varphi)) = 1 - |\omega(\varphi)|$  we obtain

$$\Delta'(\varphi + \mu(\varphi))(1 + \mu'(\varphi)) = -|\omega(\varphi)'|,$$

$$\Delta''(\varphi + \mu(\varphi))(1 + \mu'(\varphi))^2 + \Delta'(\varphi + \mu(\varphi))\mu''(\varphi) = -|\omega(\varphi)''|$$

Hence  $|\Delta'(\varphi)| = O(\varepsilon)$ ,  $|\Delta''(\varphi)| = O(\varepsilon)$ .

Thus, the curve  $g(\Gamma_1)$  has the polar equation  $r = 1 - \Delta(\varphi)$  where  $|\Delta(\varphi)| = O(\varepsilon)$ ,  $|\Delta'(\varphi)| = O(\varepsilon)$ ,  $|\Delta''(\varphi)| = O(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Therefore, we can apply Theorem 3 for



$h = g \circ f_1$ ,  $h(0) = 0$ ,  $h'(0) > 0$ , conformally mapping  $\mathbb{D}$  onto the domain bounded by  $g(\Gamma_1)$ . Hence, (6) gives

$$h(z) = z \left( 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\delta(\psi(\varphi))}{|f'(e^{i\varphi})|} \cos \beta(\psi(\varphi)) \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} d\varphi \right) + O(\varepsilon^2), \quad z \in \mathbb{D}, \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Since  $f_1 = f \circ h$ , we obtain (5). □

**Proof of Theorem 2.** Let  $\Omega(t)$  be an increasing chain. Fix  $t \in [0, T)$ ,  $h$  such that  $t + h \in [0, T)$ . First, let  $h$  be negative, so  $\Omega(t + h) \in \Omega(t)$ . Denote  $\lambda(\psi, h) = \gamma(\psi, t) - \gamma(\psi, t + h)$ . Since  $\gamma \in C^{3+\alpha}$ , we conclude that  $|\lambda(\psi, h)| = O(h)$ ,  $|\lambda'(\psi, h)| = O(h)$ ,  $|\lambda''(\psi, h)| = O(h)$ . So we can apply Lemma 1. By (5), we obtain

$$\begin{aligned} f(z, t + h) &= f \left( z \left( 1 - \int_0^{2\pi} s(\varphi, z, t) \lambda(\psi(\varphi, t), h) d\varphi \right), t \right) + o(h) = \\ &= f \left( z \left( 1 + h \int_0^{2\pi} s(\varphi, z, t) \dot{\delta}(\psi(\varphi, t), t) d\varphi \right), t \right) + o(h), \end{aligned}$$

where

$$s(\varphi, z, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|f'(e^{i\varphi}, t)|} \cos(\beta(\psi(\varphi, t), t)) \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z}.$$

Therefore,

$$\begin{aligned} f(z, t + h) - f(z, t) &= f(z + zh \int_0^{2\pi} s(\varphi, z, t) \dot{\delta}(\psi(\varphi, t), t) d\varphi, t) - f(z, t) + o(h) = \\ &= f'(z, t) zh \int_0^{2\pi} s(\varphi, z, t) \dot{\delta}(\psi(\varphi, t), t) d\varphi + o(h), \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Let now  $h$  be positive. Then  $\Omega(t) \in \Omega(t + h)$ , and  $\lambda(\psi, h) = \gamma(\psi, t + h) - \gamma(\psi, t)$  satisfies all the conditions of Lemma 1. So we have

$$\begin{aligned} f(z, t) &= f \left( z \left( 1 - \int_0^{2\pi} s(\varphi, z, t + h) \lambda(\psi(\varphi, t + h), h) d\varphi \right), t + h \right) + o(h) = \\ &= f \left( z \left( 1 - h \int_0^{2\pi} s(\varphi, z, t + h) \dot{\delta}(\psi(\varphi, t + h), t) d\varphi \right), t + h \right) + o(h), \end{aligned}$$

So we obtain

$$\begin{aligned} f(z, t + h) - f(z, t) &= f(z, t + h) - \\ &- f(z - zh \int_0^{2\pi} s(\varphi, z, t + h) \dot{\delta}(\psi(\varphi, t + h), t) d\varphi, t + h) + o(h) = \end{aligned}$$



$$= f'(z, t+h)zh \int_0^{2\pi} s(\varphi, z, t+h)\dot{\delta}(\psi(\varphi, t+h), t)d\varphi + o(h), \quad h \rightarrow 0,$$

Thus, we have shown that  $f$  is differentiable with respect to  $t$  and satisfies (1). One can similarly repeat the proof for a decreasing chain of domains.  $\square$

## 2. PROOF OF THEOREM 1

Let, for each  $t \in [0, T)$ ,  $f(\cdot, t)$  and  $g(\cdot, t)$  conformally map  $\mathbb{D}$  onto  $\Omega(t)$  and  $G(t)$ , respectively,  $f(0, t) = g(0, t) = 0$ ,  $f'(0, t) > 0$ ,  $g'(0, t) > 0$ . Denote  $\delta(\psi, t) = \gamma(\psi, t) - 1$ ,  $\delta_1(\psi, t) = \gamma_1(\psi, t) - 1$ . By Theorem 2 and Remark 3, conformal radii satisfy the equations

$$\frac{d}{dt} \log r(\Omega(t), 0) = p(0, t), \quad \frac{d}{dt} \log r(G(t), 0) = q(0, t), \quad (14)$$

where  $p(z, t)$ ,  $q(z, t)$  are given by

$$p(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|f'(e^{i\varphi}, t)|} \dot{\delta}(\psi(\varphi, t), t) \cos(\beta(\psi(\varphi, t), t)) \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} d\varphi, \quad (15)$$

$$q(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|g'(e^{i\varphi}, t)|} \dot{\delta}_1(\psi_1(\varphi, t), t) \cos(\beta_1(\psi_1(\varphi, t), t)) \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} d\varphi, \quad (16)$$

with  $\psi(\varphi, t) = \arg f(e^{i\varphi}, t)$ ,  $\beta(\psi, t) = -\arctan(\frac{\gamma'(\psi, t)}{\gamma(\psi, t)})$ ,  $\psi_1(\varphi, t) = \arg g(e^{i\varphi}, t)$ ,  $\beta_1(\psi, t) = -\arctan(\frac{\gamma_1'(\psi, t)}{\gamma_1(\psi, t)})$ . First, we want to prove the following equalities

$$p(z, 0) = -q(z, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{\delta}(\varphi, 0) \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} d\varphi, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial q(z, 0)}{\partial t} - \frac{\partial p(z, 0)}{\partial t} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\dot{\delta}(\varphi, 0))^2 - \ddot{\delta}(\varphi, 0) \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} d\varphi, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (18)$$

Elementary calculations lead us to the formulas

$$\dot{\delta}_1(\psi, 0) = -\dot{\delta}(\psi, 0), \quad (19)$$

$$\dot{\delta}'_1(\psi, 0) = -\dot{\delta}'(\psi, 0), \quad (20)$$

$$\ddot{\delta}_1(\psi, 0) = -\ddot{\delta}(\psi, 0) + 2(\dot{\delta}(\psi, 0))^2. \quad (21)$$

Since  $f'(e^{i\varphi}, 0) = 1$ ,  $\psi(\varphi, 0) = \varphi$ ,  $\beta(\psi, 0) = 0$ , representation (15) gives

$$p(z, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{\delta}(\varphi, 0) \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} d\varphi, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Similarly we obtain

$$q(z, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{\delta}_1(\varphi, 0) \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} d\varphi, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Thus, (19) gives (17).



Denote by  $P(t)$  the expression under the integral in (15). Elementary calculations yield the following result

$$\dot{P}(0) = -\frac{\partial}{\partial t}(|f'(e^{i\varphi}, t)|) \Big|_{t=0} \delta(\varphi, 0) + \dot{\delta}'(\varphi, 0)\dot{\psi}(\varphi, 0) + \ddot{\delta}(\varphi, 0). \tag{22}$$

Similarly, we denote by  $Q(t)$  the expression under the integral in (16) and obtain

$$\dot{Q}(0) = -\frac{\partial}{\partial t}(|g'(e^{i\varphi}, t)|) \Big|_{t=0} \delta_1(\varphi, 0) + \dot{\delta}'_1(\varphi, 0)\dot{\psi}_1(\varphi, 0) + \ddot{\delta}_1(\varphi, 0). \tag{23}$$

It easily follows from (1) that  $\dot{\psi}(\varphi, 0) = \text{Im } p(e^{i\varphi}, 0)$ ,  $\dot{\psi}_1(\varphi, 0) = \text{Im } q(e^{i\varphi}, 0)$ . Therefore, (17) gives

$$\dot{\psi}_1(\varphi, 0) = -\dot{\psi}(\varphi, 0), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \tag{24}$$

Differentiating (1) with respect to  $z$  and putting  $t = 0$  we conclude that  $\frac{\partial^2 f(z, t)}{\partial z \partial t} \Big|_{t=0} = p(z, 0) + zp'(z, 0)$ . Hence

$$f'(e^{i\varphi}, 0) = \frac{\partial}{\partial t} f'(e^{i\varphi}, t) \Big|_{t=0} = p(e^{i\varphi}, 0) + e^{i\varphi} p'(e^{i\varphi}, 0).$$

Since

$$f'(e^{i\varphi}, t) = f'(e^{i\varphi}, 0) + \dot{f}'(e^{i\varphi}, 0)t + o(t), \quad t \rightarrow +0,$$

we see that

$$\begin{aligned} |f'(e^{i\varphi}, t)| &= |e^{i\varphi} + \dot{f}'(e^{i\varphi}, 0)t + o(t)| = \\ &= 1 + |\dot{f}'(e^{i\varphi}, 0)| \cos(\arg(\dot{f}'(e^{i\varphi}, 0)) - \varphi)t + o(t), \quad t \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Thus,

$$\frac{\partial}{\partial t} |f'(e^{i\varphi}, t)| \Big|_{t=0} = |\dot{f}'(e^{i\varphi}, 0)| \cos(\arg(\dot{f}'(e^{i\varphi}, 0)) - \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \tag{25}$$

From (25) and (17) we deduce

$$\frac{\partial}{\partial t} |g'(e^{i\varphi}, t)| \Big|_{t=0} = -\frac{\partial}{\partial t} |f'(e^{i\varphi}, t)| \Big|_{t=0}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \tag{26}$$

Formulas (19)–(24) and (26) show that  $\dot{Q}(0) - \dot{P}(0) = -2\ddot{\delta}(\psi, 0) + 2(\dot{\delta}(\psi, 0))^2$ , which leads to (18). One can deduce (2) from (14) and (17), (18). Indeed, let, for example,  $\Omega(t)$  be an increasing chain of domains. Using (14) and (17) we obtain

$$\frac{d}{dt} \log r(G(t), 0) \Big|_{t=0} = q(0, 0) = -p(0, 0) = -1,$$

Similarly, using (18) we obtain

$$\frac{d^2}{dt^2} \log r(G(t), 0) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} q(0, t) \Big|_{t=0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\dot{\delta}(\varphi, 0))^2 - \ddot{\delta}(\varphi, 0) d\varphi.$$

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 17-11-01229).



## References

1. Lebedev N. A. *Printsip ploshchadei v teorii odnolistnykh funktsii* [The area principle in the theory of univalent functions]. Moscow, Nauka, 1975. 336 p. (in Russian).
2. Hamilton D. H. *Conformal welding. Handbook of complex analysis: geometric function theory*. Ed. R. Kühnau. Amsterdam, North Holland, 2002. 548 p.
3. Grong E., Gumenyuk P., Vasil'ev A. Matching univalent functions and conformal welding. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2009, vol. 34, pp. 303–314.
4. Bishop C. J. Conformal welding and Koebe's theorem. *Ann. Math.*, 2007, vol. 166, pp. 613–656. DOI: <https://doi.org/10.4007/annals.2007.166.613>
5. Prokhorov D. V. Conformal welding for domains close to a disk. *Anal. Math. Phys.*, 2011, vol. 1, pp. 101–114. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13324-011-0007-0>
6. Prokhorov D. V. Asymptotic conformal welding via Löwner – Kufarev evolution. *Comput. Methods Funct. Theory*, 2013, vol. 13, no. 1, pp. 37–46. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40315-012-0002-y>
7. Marshall D. E. Conformal Welding for Finitely Connected Regions. *Comput. Methods Funct. Theory*, 2012, vol. 11, pp. 655–669. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF03321879>
8. Löwner K. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I. *Math. Ann.*, 1923, vol. 89, pp. 103–121.
9. Kufarev P. P. Ob odnoparametricheskikh semeistvakh analiticheskikh funktsii [On one-parametric families of analytic functions]. *Mat. Sbornik*, 1943, vol. 13(55), no. 1, pp. 87–118 (in Russian).
10. Pommerenke Ch. Über die Subordination analytischer Funktionen. *J. Reine Angew. Math.*, 1965, vol. 218, pp. 159–173. DOI: <https://doi.org/10.1515/crll.1965.218.159>
11. Pommerenke Ch. *Univalent functions*. Gottingen, Vandenhoeck and Ruprecht, 1975. 376 p.
12. Siryk G. V. O konformnom otobrazhenii blizkikh oblastei [On a conformal mapping of near domains]. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1956, vol. 11, no. 5(71), pp. 57–60 (in Russian).
13. Lavrentyev M. A., Shabat B. V. *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* [Methods of Function Theory of a Complex Variable]. Moscow, Nauka, 1965. 716 p. (in Russian).
14. Pommerenke Ch. *Boundary Behaviour of Conformal Maps*. Berlin, Springer-Verlag, 1992. 300 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-02770-7>

---

### Cite this article as:

Zherdev A. V. An Asymptotic Relation for Conformal Radii of Two Nonoverlapping Domains. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 274–283. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-274-283>

---

УДК 517.54

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ КОНФОРМНЫХ РАДИУСОВ ДВУХ НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ

А. В. Жердев

Жердев Андрей Владимирович, аспирант кафедры математического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83; Петрозаводский государственный университет, Россия, 185910, Республика Карелия, Петрозаводск, просп. Ленина, 33, [jerdevandrey@gmail.com](mailto:jerdevandrey@gmail.com)



В статье рассматривается семейство замкнутых жордановых кривых, заданных в полярной системе координат и непрерывно зависящих от параметра, и такое, что области, ограниченные этими кривыми, образуют возрастающее или убывающее семейство. Такое семейство областей описывается дифференциальным уравнением Левнера – Куфарева. Для рассмотренного случая получено интегральное представление для управляющей функции в этом уравнении. Используя это представление, получено асимптотическое соотношение, связывающее конформные радиусы ограниченной и неограниченной компоненты дополнения к жордановой кривой, когда ограниченная компонента близка к единичному кругу.

*Ключевые слова:* уравнение Левнера – Куфарева, конформный радиус, асимптотическое разложение, неналегающие области.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01229).

---

**Образец для цитирования:**

*Zherdev A. V. An Asymptotic Relation for Conformal Radii of Two Nonoverlapping Domains [Жердев А. В. Асимптотическое соотношение для конформных радиусов двух неналегающих областей] // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 3. С. 274–283. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-274-283>*

---





УДК 514.765.1

## НЕРЕДУКТИВНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, НЕ ДОПУСКАЮЩИЕ НОРМАЛЬНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ

Н. П. Можей

Можей Наталья Павловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Беларусь, 220013, Минск, П. Бровки, 6, mozheynatalya@mail.ru

Целью данной работы является классификация трехмерных нередуктивных однородных пространств, не допускающих нормальных связностей, самих связностей, их тензоров кривизны, кручения и алгебр голономии. Объектом исследования являются нередуктивные пространства и связности на них. Определены основные понятия: изотропно-точная пара, редуктивное пространство, аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, алгебра голономии, нормальная связность. Локальное изучение однородных пространств равносильно исследованию пар, состоящих из алгебры Ли и ее подалгебры. Приведена локальная классификация трехмерных нередуктивных однородных пространств с неразрешимой группой преобразований, не допускающих нормальных связностей. Описаны в явном виде инвариантные аффинные связности на таких пространствах, найдены их тензоры кривизны и кручения; исследованы алгебры голономии и определено, что инвариантная связность не является нормальной. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят, в основном, локальный характер. Особенностью методики, представленной в работе, является использование чисто алгебраического подхода к описанию однородных пространств и связностей на них, а также сочетание различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также иметь приложения в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах.

*Ключевые слова:* редуктивное пространство, группа преобразований, нормальная связность, алгебра голономии.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-284-296>

### ВВЕДЕНИЕ

Нетривиальные геометрические структуры, в частности, речь идет о нетривиальной связности, часто возникают при решении физических уравнений, например, нетривиальная связность на главном расслоении возникает в нерелятивистской квантовой механике, причем предсказанные теоретические эффекты подтверждаются экспериментально. В данной работе обсуждаются существование и свойства инвариантных аффинных связностей на однородных пространствах (особенно на нередуктивных однородных пространствах). Трактовка понятия связности, использующая конструкцию расслоенного пространства, берет свое начало в работах В. В. Вагнера [1] и Ш. Эрсмана (Elie Cartan) [2], развитие этих результатов с привлечением методов Э. Картана дал Г. Ф. Лаптев [3]. Метод Г. Ф. Лаптева был применен М. А. Акивисом с соавторами [4] к построению основ инвариантной теории поверхностей, также этот



метод был использован А. В. Столяровым [5] для построения основ двойственной теории пространств с линейной связностью. обстоятельный обзор работ по теории связностей сделал Ю. Г. Лумисте [6], см. также обзор [7].

Если существует инвариантная связность, то однородное пространство является изотропно-точным, но обратное неверно, любое же редуцируемое пространство всегда допускает инвариантную связность (см., например, [8]). Связность является нормальной, если каждый элемент группы преобразований отображает расслоение голономии в себя. Целью данной работы являются классификация трехмерных нередуцируемых однородных пространств, на которых существуют связности, но которые не допускают нормальных связностей, описание всех связностей на этих пространствах, их тензоров кривизны, кручения и алгебр голономии. Для достижения поставленной цели необходимо: получить классификацию трехмерных изотропно-точных однородных пространств, не являющихся редуцируемыми; определить, существуют ли на этих пространствах нормальные связности, и выделить пространства, не допускающие нормальных связностей; описать все инвариантные аффинные связности на каждом найденном однородном пространстве; найти тензоры кривизны, кручения, алгебры голономии указанных связностей. Трехмерные нередуцируемые однородные пространства описывались в работах автора [9, 10], в которых приведен более подробный тематический обзор, а также обоснование применяемых методов; при изложении сохранены обозначения, введенные ранее. В данной работе также изучаются нередуцируемые пространства, но внимание сосредоточено на пространствах, не допускающих нормальных связностей. Для описания многообразий и связностей на них применяется чисто алгебраический подход, используются методы дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств.

## 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть  $M$  – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа  $\bar{G}$ ,  $G = \bar{G}_x$  – стабилизатор произвольной точки  $x \in M$ . Пусть  $\bar{\mathfrak{g}}$  – алгебра Ли группы Ли  $\bar{G}$ , а  $\mathfrak{g}$  – подалгебра, соответствующая подгруппе  $G$ . Пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление  $\mathfrak{g}$ . Пусть  $G$  связна; однородное пространство *редуцируемо*, если алгебра Ли  $\bar{\mathfrak{g}}$  может быть разложена в прямую сумму векторных пространств  $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ ,  $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$ , причем  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ , в противном случае пространство не является редуцируемым (там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к  $\mathfrak{g}$  в  $\bar{\mathfrak{g}}$ , и факторпространство  $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ ). *Аффинной связностью* на паре  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  называется отображение  $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$  такое, что его ограничение на  $\mathfrak{g}$  есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является  $\mathfrak{g}$ -инвариантным. *Тензоры кручения*  $T \in \text{Inv}T_2^1(\mathfrak{m})$  и *кривизны*  $R \in \text{Inv}T_3^1(\mathfrak{m})$  для всех  $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$  имеют вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}, \quad R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]).$$

Алгебра Ли  $\mathfrak{h}^*$  группы голономии инвариантной связности  $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$  на паре  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  – это подалгебра алгебры Ли  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$  вида  $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \dots$ , где  $V$  – подпространство, порожденное множеством  $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) | x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$ . Пусть  $\mathfrak{a}$  – подалгебра в  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ , порожденная  $\{\Lambda(x) | x \in \bar{\mathfrak{g}}\}$ , связность *нормальная*, если  $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{a}$  (см., например, [8]), в противном случае связность не является нормальной.



## 2. КЛАССИФИКАЦИЯ НЕРЕДУКТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ, НЕ ДОПУСКАЮЩИХ НОРМАЛЬНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ

Будем описывать пару  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  при помощи таблицы умножения алгебры  $\bar{\mathfrak{g}}$ , через  $\{e_1, \dots, e_n\}$  обозначим ее базис ( $n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$ ),  $\{e_1, \dots, e_{n-3}\}$  — базис подалгебры  $\mathfrak{g}$ , а  $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$  — базис  $\mathfrak{m}$ . Для нумерации подалгебр используем запись  $d.n$ , а для нумерации пар — запись  $d.n.m$ , здесь  $d$  — размерность подалгебры,  $n$  — номер подалгебры в  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ , а  $m$  — номер пары  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ . Если на параметры, появляющиеся в процессе классификации, накладываются дополнительные условия, будем записывать их после таблицы умножения. В противном случае предполагается, что параметры пробегает  $\mathbb{R}$ .

**Теорема 1.** Любое трехмерное нередуктивное однородное пространство, не допускающее нормальных связностей, такое, что  $\bar{\mathfrak{g}}$  и  $\mathfrak{g}$  неразрешимы, локально имеет вид

6.3.2.	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$2e_2$	$-2e_3$	0	$-e_5$	$e_6$	0	$u_2$	$-u_3$
$e_2$	$-2e_2$	0	$e_1$	0	$-e_6$	0	0	0	$u_2$
$e_3$	$2e_3$	$-e_1$	0	0	0	$-e_5$	0	$u_3$	0
$e_4$	0	0	0	0	$-e_5$	$-e_6$	0	$u_2$	$u_3$
$e_5$	$e_5$	$e_6$	0	$e_5$	0	0	0	$e_1+3e_4+u_1$	$2e_3$
$e_6$	$-e_6$	0	$e_5$	$e_6$	0	0	0	$2e_2$	$-e_1+3e_4+u_1$
$u_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_2$	$-u_2$	0	$-u_3$	$-u_2 - e_1 - 3e_4 - u_1$	$-2e_2$	0	0	0	0
$u_3$	$u_3$	$-u_2$	0	$-u_3$	$-2e_3$	$e_1 - 3e_4 - u_1$	0	0	0

Для получения указанного результата сначала найдены трехмерные изотропно-точные пары; далее выбраны нередуктивные пары, т. е. те, для которых не существует разложения  $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ ,  $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$ , так как не выполняется условие  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ ; определены пары с неразрешимыми алгеброй  $\bar{\mathfrak{g}}$  и подалгеброй  $\mathfrak{g}$  (с более подробным описанием можно ознакомиться в [9]). Для полученных пар найдены аффинные связности и алгебры голономии, соответственно, определены пары, не допускающие нормальных связностей.

Действительно, пусть  $\mathfrak{g}$  имеет вид 6.3, т. е.  $\mathfrak{g}$  сопряжена следующей подалгебре в  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ :

$$6.3. \begin{bmatrix} 0 & v & w \\ 0 & x & z \\ 0 & y & u \end{bmatrix}$$

Переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат  $\mathbb{R}$ . Базис подалгебры выберем, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным — 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту. Пусть  $\mathfrak{h}$  — нильпотентная подалгебра, порожденная векторами  $e_1$  и  $e_4$ . Имеем:  $\mathfrak{g}^{(0,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_4$ ,  $\mathfrak{g}^{(2,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_2$ ,  $\mathfrak{g}^{(-2,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3$ ,  $U^{(0,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_1$ ,  $\mathfrak{g}^{(-1,-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_5$ ,  $U^{(1,1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_2$ ,  $\mathfrak{g}^{(1,-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_6$ ,  $U^{(-1,1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_3$ . Отсюда следует, что  $[u_1, u_2] = \alpha_2 u_2$ ,  $[u_1, u_3] = \beta_3 u_3$ ,  $[u_2, u_3] = 0$ . Из тождества Якоби получим, что  $[e_5, u_2] = \rho e_1 + A$ ,  $[e_5, u_3] = 2\rho e_3$ ,  $[e_6, u_2] = 2\rho e_2$ ,



$[e_6, u_3] = -pe_1 + A$ ,  $[u_1, u_2] = 0$ ,  $[u_1, u_3] = 0$ ,  $[u_2, u_3] = 0$ , где  $A = 3pe_4 + u_1$ . При  $p = 0$  пара  $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g})$  является редуцируемой и не входит в рассматриваемый в работе класс, при  $p \neq 0$  пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  эквивалентна паре 6.3.2 при помощи  $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$ ,  $\pi(e_i) = e_i$ ,  $i = \overline{1, 6}$ ,  $\pi(u_j) = (1/p)u_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ . Поскольку  $\bar{\mathfrak{g}}_1$  редуцируема, а  $\bar{\mathfrak{g}}_2$  не редуцируема, пары не эквивалентны.

Пусть здесь и далее

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{pmatrix}$$

для некоторых  $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j} \in \mathbb{R}$  (при  $i, j = \overline{1, 3}$ ). Для пары 6.3.2 однозначно определены  $\Lambda(e_i)$ ,  $i = \overline{1, 6}$ , так как ограничение отображения  $\Lambda$  на  $\mathfrak{g}$  есть изотропное представление подалгебры; отображение  $\Lambda$  является  $\mathfrak{g}$ -инвариантным, тогда  $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = 0$ , имеем:  $p_{3,1} = p_{3,2} = p_{1,2} = 0$ ,  $p_{3,3} = p_{2,2}$ . Поскольку  $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_1, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = 0$ , получаем, что  $p_{1,3} = p_{2,1} = p_{2,3} = 0$ . Так как  $[\Lambda(e_5), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_5, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_5), \Lambda(u_1)] = 0$ ,  $p_{2,2} = p_{1,1}$ . Если  $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = 0$ , то  $q_{3,1} = q_{3,2} = q_{1,2} = 0$ ,  $q_{3,3} = q_{2,2}$ . Поскольку  $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_2)$ ,  $q_{1,1} = q_{2,2} = q_{2,3} = 0$ . Так как  $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_3)$ ,  $r_{1,1} = r_{1,3} = r_{2,1} = r_{2,2} = r_{2,3} = r_{3,2} = r_{3,3} = 0$ ,  $r_{3,1} = q_{2,1}$ ,  $r_{1,2} = -q_{1,3}$ . Если  $[\Lambda(e_4), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_2)$ , то  $r_{1,2} = 0$ . Поскольку  $[\Lambda(e_5), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_1) + \Lambda(e_1) + 3\Lambda(e_4)$ , имеем:  $p_{1,1} = r_{3,1} = -2$ . Получим, что аффинная связность следующая:

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(для остальных базисных векторов условия выполняются). Тензоры кривизны и кручения, алгебра голономии получаются нулевыми, следовательно, связность не является нормальной, так как  $\mathfrak{h}^* \neq \mathfrak{a}$ . Аналогичными вычислениями для других неразрешимых подалгебр в  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$  получаем, что трехмерных нередуцируемых неразрешимых пар, не допускающих нормальных связностей, кроме представленной в теореме 1, не существует.

**Теорема 2.** *Все трехмерные нередуцируемые однородные пространства, не допускающие нормальных связностей, такие, что  $\bar{\mathfrak{g}}$  не разрешима, а  $\mathfrak{g}$  разрешима, локально имеют следующий вид:*

2.7.2.	$e_1$	$e_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	2.8.7 ( $\lambda \neq 0$ ).	$e_1$	$e_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$e_1$	0	0	$u_1 + e_2$	$e_1$	0	$\lambda e_1$	$e_1$	0	$u_1$
$e_2$	$-e_1$	0	0	0	$u_3$	$e_2$	$-\lambda e_1$	0	0	$u_2$	$\lambda u_3$
$u_1$	0	0	0	0	0	$u_1$	$-e_1$	0	0	0	$u_3$
$u_2$	0	0	0	0	0	$u_2$	0	$-u_2$	0	0	0
$u_3$	$-u_1 - e_2$	$-u_3$	0	0	0	$u_3$	$-u_1$	$-\lambda u_3$	$-u_3$	0	0



2.18.3.	$e_1$	$e_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	3.6.2.	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$e_1$	0	0	$e_2 + u_1$	$e_1$	0	0	$e_1$	$e_1$	0	$u_1$
$e_2$	$-e_1$	0	0	$u_1$	$u_3$	$e_2$	0	0	0	0	$u_2$	0
$u_1$	0	0	0	$-u_1$	0	$e_3$	$-e_1$	0	0	0	0	$u_3$
$u_2$	0	$-u_1$	$u_1$	0	0	$u_1$	$-e_1$	0	0	0	0	$u_3$
$u_3$	$-e_2 - u_1$	$-u_3$	0	0	0	$u_2$	0	$-u_2$	0	0	0	0
						$u_3$	$-u_1$	0	$-u_3$	$-u_3$	0	0

3.12.2.	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	3.28.2.	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$-e_2$	$-e_3$	0	0	$u_3$	$e_1$	0	$e_3 - e_2$	$-e_3$	0	$u_1$	$u_3$
$e_2$	$e_2$	0	0	$e_3$	$2e_2$	$u_2$	$e_2$	$e_2 - e_3$	0	0	$e_3$	$2e_3$	$2e_1 + u_2$
$e_3$	$e_3$	0	0	0	$e_3$	$u_1$	$e_3$	$e_3$	0	0	0	$-e_3$	$u_1$
$u_1$	0	$-e_3$	0	0	$-u_1$	0	$u_1$	0	$-e_3$	0	0	$-u_1$	0
$u_2$	0	$-2e_2$	$-e_3$	$u_1$	0	$2u_3$	$u_2$	$-u_1$	$-2e_3$	$e_3$	$u_1$	0	0
$u_3$	$-u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-2u_3$	0	$u_3$	$-u_3$	$-2e_1 - u_2$	$-u_1$	0	0	0

3.13.6 ( $\mu \neq 0, -1$ ).	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$-\mu e_2$	$(1 - \mu)e_3$	$u_1$	0	$\mu u_3$
$e_2$	$\mu e_2$	0	0	$e_3$	$2e_2$	$u_2$
$e_3$	$(\mu - 1)e_3$	0	0	0	$e_3$	$u_1$
$u_1$	$-u_1$	$-e_3$	0	0	$-u_1$	0
$u_2$	0	$-2e_2$	$-e_3$	$u_1$	0	$2u_3$
$u_3$	$-\mu u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-2u_3$	0

4.19.2.	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	0	$-e_3$	$-e_4$	0	0	$u_3$
$e_2$	0	0	$e_4$	0	0	$u_1$	0
$e_3$	$e_3$	$-e_4$	0	0	$-e_4$	$-2e_3$	$u_2$
$e_4$	$e_4$	0	0	0	0	$-e_4$	$u_1$
$u_1$	0	0	$e_4$	0	0	$u_1$	0
$u_2$	0	$-u_1$	$2e_3$	$e_4$	$-u_1$	0	$-2u_3$
$u_3$	$-u_3$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	$2u_3$	0

4.21.11 ( $\mu \neq 0$ ).	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$e_2$	$-\mu e_3$	$(1 - \mu)e_4$	$u_1$	0	$\mu u_3$
$e_2$	$-e_2$	0	$e_4$	0	0	$e_2 + u_1$	0
$e_3$	$\mu e_3$	$-e_4$	0	0	0	$-2e_3$	$u_2$
$e_4$	$(\mu - 1)e_4$	0	0	0	0	$-e_4$	$e_2 + u_1$
$u_1$	$-u_1$	0	0	0	0	0	0
$u_2$	0	$-e_2 - u_1$	$2e_3$	$e_4$	0	0	$-2u_3$
$u_3$	$-\mu u_3$	0	$-u_2$	$-e_2 - u_1$	0	$2u_3$	0



5.9.2 ( $\lambda = 0$ ).	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	0	$e_3$	0	$e_5$	$u_1$	0	0
$e_2$	0	0	0	$-e_4$	$-e_5$	0	0	$u_3$
$e_3$	$-e_3$	0	0	$e_5$	0	0	$u_1$	0
$e_4$	0	$e_4$	$-e_5$	0	0	$e_5$	$2e_4$	$u_2$
$e_5$	$-e_5$	$e_5$	0	0	0	0	$e_5$	$u_1$
$u_1$	$-u_1$	0	0	$-e_5$	0	0	$-u_1$	0
$u_2$	0	0	$-u_1$	$-2e_4$	$-e_5$	$u_1$	0	$2u_3$
$u_3$	0	$-u_3$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	$-2u_3$	0

Для получения указанного результата найдены трехмерные изотропно-точные пары, выбраны нередуцируемые пары с неразрешимой алгеброй  $\bar{\mathfrak{g}}$  и разрешимой подалгеброй  $\mathfrak{g}$  (с более подробным описанием можно ознакомиться в [10]), найдены аффинные связности и определены пары, не допускающие нормальных связностей.

Действительно, пусть  $\mathfrak{g}$  имеет вид 5.9, т. е.

$$\begin{matrix} x & z & v \\ 0 & \lambda x & u \\ 0 & 0 & y \end{matrix},$$

а  $\mathfrak{h}$  — нильпотентная подалгебра, порожденная  $e_1$  и  $e_2$ , тогда  $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$ ,  $\bar{\mathfrak{g}}^{(1-\lambda,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3$ ,  $\bar{\mathfrak{g}}^{(1,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_1$ ,  $\bar{\mathfrak{g}}^{(\lambda,-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_4$ ,  $\bar{\mathfrak{g}}^{(\lambda,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_2$ ,  $\bar{\mathfrak{g}}^{(1,-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_5$ ,  $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}u_3$ , а  $[u_1, u_2] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(1+\lambda,0)}(\mathfrak{h})$ ,  $[u_1, u_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(1,1)}(\mathfrak{h})$ ,  $[u_2, u_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(\lambda,1)}(\mathfrak{h})$ . Если  $\lambda = 0$ , то  $[e_4, u_1] = pe_5$ ,  $[e_4, u_2] = 2pe_4$ ,  $[e_5, u_2] = pe_5$ ,  $[u_1, u_3] = 0$ ,  $[u_1, u_2] = a_3e_3 + \alpha_1u_1$ ,  $[u_2, u_3] = \gamma_3u_3$ . В силу тождества Якоби  $a_3 = 0$ ,  $\alpha_1 = -p$ ,  $\gamma_3 = 2p$ . При  $p = 0$  пара  $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g})$  тривиальна (пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  называется *тривиальной*, если существует коммутативный идеал  $\mathfrak{m}$  в  $\bar{\mathfrak{g}}$  такой, что  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}$ , такая пара всегда является редуцируемой и не входит в рассматриваемый в работе класс), при  $p \neq 0$  эквивалентность пар  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  и 5.9.2 доказывается при помощи  $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$ ,  $\pi(e_i) = e_i$ ,  $i = \overline{1, 5}$ ,  $\pi(u_j) = pu_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ . Если же  $\lambda \neq 0$ , то пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  всегда тривиальна. Поскольку  $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_1 = 3$ ,  $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_2 = 6$ , пары не эквивалентны.

Для пары 5.9.2 однозначно определены  $\Lambda(e_i)$ ,  $i = \overline{1, 5}$ , так как ограничение отображения  $\Lambda$  на  $\mathfrak{g}$  есть изотропное представление подалгебры, отображение является  $\mathfrak{g}$ -инвариантным, следовательно,  $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_1, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1)$ , имеем  $p_{1,1} = p_{2,1} = p_{2,2} = p_{2,3} = p_{3,1} = p_{3,2} = p_{3,3} = 0$ . Поскольку  $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = 0$ ,  $p_{1,3} = 0$ . Так как  $[\Lambda(e_4), \Lambda(u_1)] = \Lambda(e_5)$ ,  $p_{1,2} = -1$ . Если  $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = 0$ , то  $q_{3,1} = q_{3,2} = q_{1,3} = q_{2,3} = 0$ . Поскольку  $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_1)$ ,  $q_{2,1} = 0$ ,  $q_{2,2} = q_{1,1} - 1$ . Так как  $[\Lambda(e_4), \Lambda(u_2)] = 2\Lambda(e_4)$ ,  $q_{1,2} = 0$ ,  $q_{3,3} = q_{1,1} + 1$ . Если  $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_3)$ , то  $r_{1,1} = r_{1,2} = r_{1,3} = r_{2,1} = r_{2,2} = r_{2,3} = r_{3,3} = 0$ . Поскольку  $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = 0$ , имеем  $r_{3,1} = 0$ . Так как  $[\Lambda(e_4), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_2)$ ,  $q_{1,1} = 0$ ,  $r_{3,2} = -1$ . Получим, что связность имеет вид, указанный в табл. 1 (для остальных базисных векторов условия выполняются). Тензоры кривизны и кручения получаются нулевыми, алгебра голономии также нулевая, т. е. связность не является нормальной.

Для пары 3.13.6 при  $\mu = 1$  из  $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_3, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = 0$  получаем  $p_{3,1} = p_{3,2} = 0$ ,  $p_{3,3} = p_{1,1}$ ,  $p_{2,1} = 0$ . Поскольку  $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda(e_3)$ ,  $p_{1,2} = -1$ ,  $p_{1,1} = p_{2,2}$ . Так как  $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1)$ ,  $p_{1,1} = p_{2,3} = p_{1,3} = 0$ . Если  $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_2)] = \Lambda(e_3)$ , то  $q_{3,1} = q_{3,2} = 0$ ,  $q_{3,3} = q_{1,1} + 1$ ,  $q_{2,1} = 0$ . Поскольку  $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = 2\Lambda(e_2)$ ,  $q_{1,2} = 0$ ,





$q_{1,1} = q_{2,2} + 1$ . Так как  $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = 0$ ,  $q_{2,3} = 0$ . Если  $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_1)$ , то  $r_{3,1} = 0$ ,  $r_{3,2} = -1$ ,  $r_{3,3} = r_{1,1}$ ,  $r_{2,1} = 0$ . Поскольку  $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_2)$ ,  $q_{1,1} = 0$ ,  $r_{1,2} = -q_{1,3}$ ,  $r_{1,1} = r_{2,2}$ . Так как  $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_3)$ ,  $r_{1,1} = r_{1,3} = r_{2,3} = 0$ . Получим, что связность имеет вид, указанный в табл. 1. Тензор кривизны — нулевой, а тензор кручения  $T(u_1, u_2) = T(u_1, u_3) = 0$ ,  $T(u_2, u_3) = \Lambda(u_2)(u_3)_m - \Lambda(u_3)(u_2)_m - [u_2, u_3]_m = (2q_{1,3}, 0, 0)$ , алгебра голономии нулевая, т. е.  $\mathfrak{h}^* \neq \mathfrak{a}_{\bar{3}}$ , и связность не является нормальной.

Для пары 3.13.6 при  $\mu = 1/2$  из  $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_3, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_3), \Lambda(u_1)] = 0$  получаем  $p_{3,1} = p_{3,2} = 0$ ,  $p_{3,3} = p_{1,1}$ ,  $p_{2,1} = 0$ . Поскольку  $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2, u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_2), \Lambda(u_1)] = \Lambda(e_3)$ ,  $p_{1,2} = -1$ ,  $p_{1,1} = p_{2,2}$ . Так как  $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1)$ ,  $p_{1,1} = p_{2,3} = p_{1,3} = 0$ . Если  $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_2)] = \Lambda(e_3)$ , то  $q_{3,1} = q_{3,2} = 0$ ,  $q_{3,3} = q_{1,1} + 1$ ,  $q_{2,1} = 0$ . Поскольку  $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_2)] = 2\Lambda(e_2)$ ,  $q_{1,2} = 0$ ,  $q_{1,1} = q_{2,2} + 1$ . Так как  $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = 0$ , имеем  $q_{1,3} = q_{2,3} = 0$ . Если  $[\Lambda(e_3), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_1)$ , то  $r_{3,1} = 0$ ,  $r_{3,2} = -1$ ,  $r_{3,3} = r_{1,1}$ ,  $r_{2,1} = 0$ . Поскольку  $[\Lambda(e_2), \Lambda(u_3)] = \Lambda(u_2)$ ,  $q_{1,1} = r_{1,2} = 0$ ,  $r_{1,1} = r_{2,2}$ . Так как  $[\Lambda(e_1), \Lambda(u_3)] = (1/2)\Lambda(u_3)$ ,  $r_{1,1} = 0$ ,  $r_{2,3} = 0$ .

Будем выписывать аффинную связность через  $\Lambda(u_1)$ ,  $\Lambda(u_2)$ ,  $\Lambda(u_3)$ , тензор кривизны  $R$  — через  $R(u_1, u_2)$ ,  $R(u_1, u_3)$ ,  $R(u_2, u_3)$ , а тензор кручения  $T$  — через  $T(u_1, u_2)$ ,  $T(u_1, u_3)$ ,  $T(u_2, u_3)$ . Тогда связность и тензор кривизны имеют вид, указанный в табл. 1 и 2 соответственно.

Таблица 1 / Table 1

Аффинная связность / Affine connection

Пара / Pair	Аффинная связность / Affine connection
5.9.2, 3.12.2	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
4.19.2.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4.21.11, $\mu \neq 0, 1, 1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4.21.11, $\mu = 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -q_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4.21.11, $\mu = 1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3.6.2	$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



Окончание табл. 1 / End of Table 1

Пара / Pair	Аффинная связность / Affine connection
3.13.6, $\mu \neq 0, 1, -1, 1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu = 1$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -q_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu = 1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
3.28.2	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
2.7.2	$\begin{pmatrix} -1/2 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & 0 \\ 0 & q_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{1,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
2.8.7, $\lambda \neq 0, 1, -1, 1/2$	$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.8.7, $\lambda = 1$	$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.8.7, $\lambda = -1$	$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.8.7, $\lambda = 1/2$	$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{2,3} \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.18.3	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & 0 \\ 0 & q_{1,1} + p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{1,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} + 1 & 0 \end{pmatrix}$



Таблица 2 / Table 2

Тензор кривизны (тензор кручения нулевой)  
Curvature tensor (torsion tensor is zero)

Пара / Pair	Тензор кривизны / Curvature tensor
4.21.11, $\mu = 1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu = 1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.8.7, $\lambda = 1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3r_{2,3}/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Тензор кручения получился нулевым. Алгебра голономии при  $r_{1,3} \neq 0$  не совпадает с алгеброй, порожденной множеством  $V = \{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) | x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$  (т. е.

алгебра голономии не является совершенной),  $\mathfrak{h}^* = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ . Связность

не является нормальной, так как  $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}) \supset \Lambda(\mathfrak{g})$ , т. е.  $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$  по крайней мере трехмерна, и  $\mathfrak{h}^* \neq \mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ . При  $r_{1,3} \neq 0$  алгебра голономии нулевая.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Прямыми вычислениями получаем, что аффинные связности имеют вид, приведенный в табл. 1.

В случае 2.7.2  $\bar{\mathfrak{g}}$  не является полупростой, ее радикал коммутативен, в случаях 2.8.7 ( $\lambda = -1$ ), 2.18.3  $\bar{\mathfrak{g}}$  не является полупростой, ее радикал некоммутативен, в этих случаях тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии имеют вид, приведенный в табл. 3–5.

Таблица 3 / Table 3

Тензор кривизны (тензор кручения ненулевой)  
Curvature tensor (torsion tensor is not zero)

Пара / Pair	Тензор кривизны / Curvature tensor
2.7.2	$\begin{pmatrix} 0 & -q_{1,2}/2 + p_{1,2}q_{2,2} - q_{1,1}p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}p_{1,2} + q_{1,2}/2 - p_{1,2}q_{2,2} & 0 \end{pmatrix}$



Окончание табл. 3 / End of Table 3

Пара / Pair	Тензор кривизны / Curvature tensor
2.8.7, $\lambda = -1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3r_{1,2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -q_{1,3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{1,3}/2 \end{pmatrix}$
2.18.3	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2 + p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2}^2 - p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$

Таблица 4 / Table 4

Тензор кручения (тензор кривизны ненулевой)  
Torsion tensor (curvature tensor is not zero)

Пара / Pair	Тензор кручения / Torsion tensor
2.7.2	$(p_{1,2} - q_{1,1}, 0, 0), (0, 0, 0), (0, 0, q_{1,1} - p_{1,2})$
2.8.7, $\lambda = -1$	$(0, 0, 0), (0, 0, 0), (q_{1,3} - r_{1,2}, 0, 0)$
2.18.3	$(p_{1,2} - q_{1,1} + 1, 0, 0), (0, 0, 0), (0, 0, q_{1,1} - p_{1,2} - 1)$

Таблица 5 / Table 5

Алгебра голономии (тензор кручения ненулевой)  
Holonomy algebra (torsion tensor is not zero)

Пара / Pair	Алгебра голономии $\mathfrak{h}^*$ / Holonomy algebra $\mathfrak{h}^*$
2.7.2	$2p_{1,2}(q_{2,2} - q_{1,1}) \neq q_{1,2} \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix}$ $2p_{1,2}(q_{2,2} - q_{1,1}) = q_{1,2}$ нулевая
2.18.3	$p_{1,2} \neq 0, -1 \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix}$ $p_{1,2} = 0, -1$ нулевая
2.8.7, $\lambda = -1$	$q_{1,3} \neq 0, r_{1,2} \neq 0 \begin{pmatrix} p_2 & p_3 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_4 & p_5 & -p_2 \end{pmatrix}$ $q_{1,3} \neq 0, r_{1,2} = 0 \begin{pmatrix} p_2 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & -p_2 \end{pmatrix}$ $q_{1,3} = 0, r_{1,2} \neq 0 \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix}$ иначе нулевая



Связность в указанных случаях не является нормальной, так как  $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}} \supset \Lambda(\bar{\mathfrak{g}}) \supset \supset \Lambda(\mathfrak{g})$ , т. е.  $\mathfrak{h}^* \neq \mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ .

В случаях 5.9.2, 4.19.2, 4.21.11 ( $\mu \neq 0, 1, 1/2$ ), 3.6.2, 3.12.2, 3.13.6 ( $\mu \neq 0, 1, -1, 1/2$ ), 3.28.2, 2.8.7 ( $\lambda \neq 0, 1, -1, 1/2$ ) тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии всегда нулевые. В случаях 4.21.11 ( $\mu = 1$ ), 3.13.6 ( $\mu = 1$ ), 2.8.7 ( $\lambda = 1$ ) тензор кривизны и алгебра голономии всегда нулевые, а тензор кручения имеет вид, указанный в табл. 6.

Таблица 6 / Table 6

Тензор кручения (тензор кривизны нулевой)  
Torsion tensor (curvature tensor is zero)

Пара / Pair	Тензор кручения / Torsion tensor
4.21.11, $\mu = 1$	$(0, 0, 0), (0, 0, 0), (2q_{1,3}, 0, 0)$
3.13.6, $\mu = 1$	$(0, 0, 0), (0, 0, 0), (2q_{1,3}, 0, 0)$
2.8.7, $\lambda = 1$	$(0, 0, 0), (0, 2p_{2,3}, 0), (0, 0, 0)$

В случаях 4.21.11 ( $\mu = 1/2$ ), 3.13.6 ( $\mu = 1/2$ ), 2.8.7 ( $\lambda = 1/2$ ) тензор кручения нулевой, а тензоры кривизны и алгебры голономии имеют вид, указанный в табл. 2 и 7.

Таблица 7 / Table 7

Алгебра голономии (тензор кручения нулевой)  
Holonomy algebra (torsion tensor is zero)

Пара / Pair	Алгебра голономии / Holonomy algebra
4.21.11, $\mu = 1/2$ 3.13.6, $\mu = 1/2$	$r_{1,3} \neq 0 \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r_{1,3} = 0$ нулевая
2.8.7, $\lambda = 1/2$	$r_{2,3} \neq 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_1 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r_{2,3} = 0$ нулевая

Очевидно, что во всех указанных выше случаях связность также не является нормальной.

Прямыми вычислениями получаем, что других трехмерных нередутивных пар с неразрешимой  $\bar{\mathfrak{g}}$  и разрешимой  $\mathfrak{g}$ , не допускающих нормальных связностей, кроме представленных в теореме 2, не существует.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведено локальное описание трехмерных нередутивных однородных пространств с неразрешимой группой преобразований, не допускающих нормальных связностей (отдельно рассмотрены случаи, когда стабилизатор неразрешим и когда стабилизатор разрешим). Описаны в явном виде все инвариантные аффинные



связности на таких пространствах, найдены тензоры кривизны, кручения, алгебры голономии указанных связностей. Полученные результаты могут быть использованы при решении математических и физических задач, требующих изучения инвариантных объектов на однородных пространствах.

### Библиографический список

1. Вагнер В. В. Теория составного многообразия // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1950. Вып. 8. С. 11–72.
2. Elirsmatin C. Les connections infinitesimales dans un espace fibre differentiable // Colloque de Topologie. Bruxelles, 1950. P. 29–55.
3. Лантев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. 1953. Т. 2. С. 275–382.
4. Акивис М. А., Гольдберг В. В., Чакмазян А. В. Индуцированные связности на многообразиях в пространствах с фундаментальными группами // Изв. вузов. Матем. 2004. № 10. С. 3–19.
5. Столяров А. В. Двойственная теория оснащённых многообразий. Чебоксары : Чувашский гос. пед. ун-т, 1994. 290 с.
6. Лумисте Ю. Г. Теория связностей в расслоенных пространствах // Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. М. : ВИНТИ, 1971. С. 123–168.
7. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. М. : ВИНТИ, 1979. Т. 9. С. 5–247.
8. Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of differential geometry. N. Y. : John Wiley and Sons, 1963. Vol. 1; 1969. Vol. 2.
9. Можей Н. П. Трёхмерные нередуцируемые однородные пространства неразрешимых групп Ли // Докл. НАН Беларуси. 2017. Т. 61, № 4. С. 20–26.
10. Можей Н. П. Связности на нередуцируемых однородных пространствах с неразрешимой группой преобразований // Докл. НАН Беларуси. 2017. Т. 61, № 5. С. 7–16.

---

### Образец для цитирования:

Можей Н. П. Нередуцируемые однородные пространства, не допускающие нормальных связностей // Изв. Саратовского университета. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 3. С. 284–296. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-284-296>

---

## Non-reductive Homogeneous Spaces Not Admitting Normal Connections

N. P. Mozhey

Natalya P. Mozhey, [orcid.org/0000-0001-9237-7208](https://orcid.org/0000-0001-9237-7208), Belarussian State University of Informatics and Radio-electronics, 6, P. Brovki Str., Minsk, 220013, Belarus, [mozheynatalya@mail.ru](mailto:mozheynatalya@mail.ru)

The purpose of the work is the classification of three-dimensional non-reductive homogeneous spaces not admitting normal connections, affine connections, their torsion tensors, curvature and holonomy algebras. The object of investigation are pointed non-reductive spaces and connections on them. The basic notions, such as the isotropically-faithful pair, reductive space, affine connection, curvature tensor and torsion tensor, holonomy algebra and normal connection are defined. The local study of homogeneous spaces is equivalent to the investigation of pairs consisting of the Lie algebra and its subalgebra. The local classification of three-dimensional non-reductive homogeneous spaces with the unsolvable Lie group of transformations not admitting normal connections is given. All invariant affine connections on those spaces are described,





curvature and torsion tensors are found; the holonomy algebras are investigated and it has been determined that the invariant connection is not normal. Studies are based on the use of properties of the Lie algebras, Lie groups and homogeneous spaces and they mainly have local character. The characteristic of the method presented in the work is the application of a purely algebraic approach to the description of homogeneous spaces and connections on them, as well as the combination of methods of differential geometry, the theory of Lie groups and algebras and the theory of homogeneous spaces. The obtained results can be used in the study of manifolds and can find application in various areas of mathematics and physics, since many fundamental problems in these areas relate to the investigation of invariant objects on homogeneous spaces.

*Key words:* reductive space, transformation group, normal connection, holonomy algebra.

## References

1. Vagner V. V. Teoriya sostavnogo mnogoobraziya [The theory of composite manifold]. *Trudy seminara po vektornomu i tenzornomu analizu* [Proc. of the seminar on vector and tensor analysis]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1950, iss. 8, pp. 11–72 (in Russian).
2. Elirsmatin C. Les connections infinitesimales dans un espace fibre differentiable. *Colloque de Topologie*. Bruxelles, 1950, pp. 29–55.
3. Laptev G. F. Differentsial'naya geometriya pogruchennykh mnogoobrazij [Differential geometry of immersed manifolds]. *Trudy Mosk. matem. o-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1953, vol. 2, pp. 275–382 (in Russian).
4. Akivis M. A., Gol'dberg V. V., Chakmazjan A. V. Induced Connections on Manifolds in Spaces with Fundamental Groups. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2004, vol. 48, no. 10, pp. 1–15.
5. Stoljarov A. V. *Dvojtvoennaya teoriya osnashchjonnykh mnogoobrazij* [Dual theory of framed manifolds]. Cheboksary, Chuvashskij State Ped. Univ., 1994. 290 p. (in Russian).
6. Lumiste U. G. Connection theory in bundle spaces. *J. Soviet Math.*, 1973, vol. 1, iss. 3, pp. 363–390.
7. Evtushik L. E., Lumiste Yu. G., Ostianu N. M., Shirokov A. P. Differential-geometric structures on manifolds. *J. Soviet Math.*, 1980, vol. 14, iss. 6, pp. 1573–1719.
8. Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of differential geometry*. New York, John Wiley and Sons, 1963, vol. 1; 1969, vol. 2.
9. Mozhej N. P. Trekhmernye nereduktivnyje odnorodnyje prostranstva nerazreshimykh grupp Li [Three-dimensional non-reductive homogeneous spaces of unsolvable Lie groups]. *Doklady NAN Belarusi* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 4, pp. 20–26 (in Russian).
10. Mozhej N. P. Svjaznosti na nereduktivnykh odnorodnykh prostranstvakh s nerazreshimoy gruppoj preobrazovanij [Connections on the non-reductive homogeneous spaces with the unsolvable group of transformations]. *Doklady NAN Belarusi* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 5, pp. 7–16 (in Russian).

---

### Cite this article as:

Mozhej N. P. Non-Reductive Homogeneous Spaces Not Admitting Normal Connections. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 284–296 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-284-296>

---



УДК 517.956.32

## КРИТЕРИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ КЛАССУ $W_p^l$ ОБОБЩЕННОГО ИЗ КЛАССА $L_p$ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

И. С. Мокроусов

Мокроусов Илья Сергеевич, аспирант кафедры общей математики, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1, mokrousov.ilya@cs.msu.su

В статье исследуется вопрос принадлежности обобщенного решения волнового уравнения различным функциональным пространствам. Рассмотрение классических решений накладывает существенные ограничения на исходные данные задачи. Но если исходить не из дифференциальных, а из интегральных уравнений, то класс решений, а значит, и класс исходных краевых задач, можно существенно расширить. Для решения краевой задачи для волнового уравнения, полученного методом учета волн, легко получить достаточное условие принадлежности тому или иному классу. Гораздо более тонкий вопрос представляет нахождение необходимого и достаточного условия. В статье устанавливается критерий принадлежности классу  $W_p^l$  обобщенного из класса  $L_p$  решения волнового уравнения. Критерий связывает между собой условие на граничную функцию  $\mu(t)$  и условие на решение задачи  $u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0$ . Таким образом, данный критерий может быть применим к оценкам задач управления, в частности по финальному условию задачи можно установить принадлежность функции управления. Данный критерий также применим к оценкам задач наблюдения для волнового уравнения, когда по свойствам граничной функции можно предугадывать свойства решения. Эта статья состоит из постановки задачи, рассмотрения ранее полученных результатов, формулировки и доказательства основной теоремы. Доказательство основной теоремы существенно опирается на представление решения указанной задачи в явном аналитическом виде. Этот результат обобщает ранее полученный критерий принадлежности для  $W_p^1$ . Стоит отметить, что хотя доказательство критерия для класса  $W_p^l$  структурно повторяет доказательство для класса  $W_p^1$ , оно существенно осложнено более тонкими оценками норм функций, входящих в решение задачи.

*Ключевые слова:* волновое уравнение, обобщенное решение, класс Лебега, класс Соболева.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-297-304>

Как и в работах [1–6] будем рассматривать в прямоугольнике  $Q_T = [0 \leq x \leq X] \times [0 \leq t \leq T]$  обобщенное из класса  $L_p(Q_T)$  решение  $u(x, t)$  смешанной задачи для волнового уравнения:

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad (1)$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (2)$$

и граничными условиями первого рода

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(X, t) = 0, \quad (3)$$

второе из которых мы, не ограничивая общности, будем считать однородным.



Мы установим необходимые и достаточные условия на граничную функцию  $\mu(t)$ , обеспечивающие принадлежность рассматриваемого обобщенного из класса  $L_p(Q_T)$  решения  $u(x, t)$  классу  $W_p^l(Q_T)$ .

Решение задачи для волнового уравнения со слабыми ограничениями на начальные условия рассматривались в работах А. П. Хромова с соавторами [7, 8].

Ранее в [9] был установлен критерий принадлежности классу  $W_p^1$  обобщенного из класса  $L_p$  решения волнового уравнения.

В работе [10] сформулирована и доказана теорема, определяющая решение задачи для волнового уравнения в широком классе функций.

**Теорема 1 (Ильина – Кулешова).** Для любых фиксированных  $T > 0$  и  $p \geq 1$  единственное обобщенное из класса  $L_p(Q_t)$  решение смешанной задачи (1)–(3) определяется равенством

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \underline{\mu}(t - x - 2lk) - \sum_{k=1}^n \underline{\mu}(t + x - 2lk), \quad (4)$$

в котором  $n$  — наименьший из номеров, удовлетворяющих условию  $n \geq \frac{T}{2l}$ , а символ  $\underline{\mu}(t)$  обозначает функцию, совпадающую с  $\mu(t)$  при  $t \geq 0$  и равную нулю при  $t < 0$ .

Сформулируем обобщение теоремы 2 работы [10].

**Теорема 2.** Для того чтобы обобщенное из класса  $L_p(Q_T)$  решение смешанной задачи (1)–(3) принадлежало классу  $W_p^l(Q_T)$  при целых  $l \geq 1$ ,  $p \geq 1$ , необходимо, чтобы принадлежащая классу  $L_p[0, T]$  граничная функция  $\mu(t)$  для любого достаточно малого  $\varepsilon > 0$  принадлежала классу  $W_p^l[0, T - \varepsilon]$ .

**Доказательство.** Доказательство этой теоремы полностью повторяет схему теоремы 2 работы [10]. В данном случае требуется доказать, что из принадлежности обобщенного решения классу  $W_p^l(Q_t)$  следует существование и принадлежность классу  $L_p$  обобщенной производной  $\mu^{(l)}(t)$  на сегменте  $[0, T - \varepsilon]$  при любом достаточно малом  $\varepsilon > 0$ . Доказательство работы [10] с легкостью обобщается для этого случая, стоит только потребовать существования  $\frac{\partial^{(l)}}{\partial t^{(l)}} u(x, t)$ .  $\square$

Далее сформулируем основную теорему данной работы.

**Теорема 3.** Если при фиксированных  $T > 0$  и  $p \geq 1$  граничная функция  $\mu(t)$  принадлежит классу  $L_1[0, T - \varepsilon]$  при любом  $\varepsilon$  из интервала  $0 < \varepsilon < T$ , то для принадлежности обобщенного из класса  $L_p(Q_T)$  решения  $u(x, t)$  смешанной задачи (1)–(3) к классу  $W_p^l(Q_T)$  при  $l \in \mathbb{N}$  необходимо и достаточно, чтобы граничная функция  $\mu(t)$  имела на полусегменте  $0 \leq t < T$  обобщенную производную  $\mu^{(l)}(t)$  и существовал интеграл

$$\int_0^T (T - t) |\mu^{(l)}(t)|^p dt. \quad (5)$$

**Доказательство.** Необходимость напрямую вытекает из теоремы 2. Остается доказать достаточность данного критерия. Приведем схему доказательства основной теоремы, которая опирается на статью [9]. Так как любое  $T > 0$  представимо при



некотором натуральном  $n$  либо в виде  $T = 2Xn - \Delta$  при  $0 \leq \Delta < X$ , либо в виде  $T = 2Xn + X - \Delta$  при  $0 \leq \Delta < X$ , то следует, как в [9], рассмотреть отдельно два случая: а)  $T = 2Xn - \Delta$  при  $0 \leq \Delta < X$ , б)  $T = 2Xn + X - \Delta$  при  $0 \leq \Delta < X$ .

Рассмотрим сначала случай а): в этом случае при всех  $\Delta$  из полусегмента  $0 \leq \Delta < X$  обобщенное решение  $u(x, t)$  смешанной задачи (1)–(3) определяется равенством (4).

Из существования обобщенных, в смысле Соболева, производных  $\mu^{(l)}(t)$  на полусегменте  $[0, T)$  вытекает, что функции  $\mu^{(i)}(t)$  для любого  $i = 1, 2, \dots, l-1$  по теореме вложения можно считать определенными и непрерывными в каждой точке этого полусегмента. Особую роль для дальнейших рассуждений играет значение функции  $\mu(t)$  в точке  $2Xn - X$ .

Отдельно рассмотрим два подслучая а): 1)  $\mu(2Xn - X) = 0$ ; 2)  $\mu(2Xn - X) \neq 0$ .

Сначала рассмотрим первый подслучай  $\mu(2Xn - X) = 0$ . В этом подслучае мы, как и в [9], представим  $\mu(t)$  в виде суммы  $\mu(t) = \mu_1(t) + \mu_2(t)$  со слагаемыми

$$\mu_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 2Xn - X, \\ \mu(t) & \text{при } 2Xn - X < t < T, \end{cases} \quad \mu_2(t) = \begin{cases} \mu(t) & \text{при } 0 \leq t \leq 2Xn - X, \\ 0 & \text{при } 2Xn - X < t < T. \end{cases}$$

При таком представлении в силу равенства  $\mu(2Xn - X) = 0$  каждая из функций  $\mu_1(t)$  и  $\mu_2(t)$  имеет обобщенную производную порядка  $l$  всюду на полусегменте  $[0, T)$ . В соответствии с таким представлением  $\mu(t)$  и работами [11–17] решение  $u(x, t)$ , определяемое равенством (4) и линейно зависящее от граничной функции, разбивается на сумму  $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$  со слагаемыми, определяемыми равенствами

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t - x \leq 2Xn - X, \\ \mu_1(t - x) = \mu(t - x) & \text{при } 2Xn - X < t - x < T, \end{cases} \quad (6)$$

$$u_2(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \underline{\mu}_2(t - x - 2Xk) - \sum_{k=1}^n \underline{\mu}_2(t + x - 2Xk), \quad (7)$$

во втором из которых символ  $\underline{\mu}_2(\tau)$  обозначает функцию, совпадающую с  $\mu_2(\tau)$  при  $0 \leq \tau \leq 2Xn - X$  и равную нулю при  $\tau < 0$  и  $\tau > 2Xn - X$ .

Нетрудно убедиться в том, что для функции  $\mu_2(\tau)$  существуют интегралы  $\int_0^T (T-t) \left| \mu_2^{(k)}(t) \right|^p dt$ , где  $k = \overline{1, l}$ , а функция  $u_2(x, t)$  принадлежит классу  $W_p^l(Q_T)$ . Это вытекает из того, что в силу условия теоремы существуют интегралы  $\int_0^{2Xn-X} \left| \mu_2^{(k)}(t) \right|^p dt$ , из цепочки соотношений

$$\int_0^T (T-t) \left| \mu_2^{(k)}(t) \right|^p dt = \int_0^{2Xn-X} (T-t) \left| \mu_2^{(k)}(t) \right|^p dt \leq T \int_0^{2Xn-X} \left| \mu_2^{(k)}(t) \right|^p dt$$

и из того, что для каждого из  $2n$  слагаемых, стоящих в правой части (7), справедливо неравенство

$$\int_0^X \left[ \int_0^T \left| \mu_2^{(k)}(t \mp x - 2lk) \right|^p dt \right] dx \leq X \int_0^{2Xn-X} \left| \mu_2^{(k)}(\tau) \right|^p d\tau. \quad (8)$$



Таким образом, для доказательства основной теоремы в случае а) в силу соотношения (6) достаточно убедиться в том, что каждый интеграл

$$\int_0^X \left[ \int_0^T |D^\alpha u_1(x, t)|^p dt \right] dx = C \int_0^X \left[ \int_{2Xn-X}^T |\mu_1^{(l\alpha)}(t-x)|^p dt \right] dx, \quad (9)$$

где  $C = \text{const}$  и  $\alpha$  — двухмерный мультииндекс  $0 \leq |\alpha| \leq l$ , существует тогда и только тогда, когда существует интеграл

$$\int_{2Xn-X}^T (T-t) |\mu_1^{(l)}(t)|^p dt. \quad (10)$$

Стоит заметить, что для случая, когда мультииндекс  $0 \leq |\alpha| < l$  интеграл (9) существует в силу того, что под знаком интеграла стоит непрерывная функция. Далее будем рассматривать интеграл (9), полагая мультииндекс, равным  $l$ .

В силу свойства полной аддитивности интеграла Лебега от неотрицательной функции достаточно доказать, что функция

$$I(\varepsilon) = \int_0^X \left[ \int_{2Xn-X}^{T-\varepsilon} |\mu_1^{(l)}(t-x)|^p dt \right] dx \quad (11)$$

ограничена на множестве всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  тогда и только тогда, когда на множестве всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  ограничена функция

$$\int_{2Xn-X}^{T-\varepsilon} (T-t) |\mu_1^{(l)}(t)|^p dt. \quad (12)$$

Произведя в интеграле (11) замену переменной  $\tau = t - x$  и учитывая, что  $\mu_1(t)$  обращается в нуль при  $0 \leq t \leq 2Xn - X$  и что  $T - \varepsilon - x \geq 2Xn - X$  только при  $x \leq l - \Delta - \varepsilon$ , мы получим

$$I(\varepsilon) = \int_0^X \left[ \int_{2Xn-X}^{T-\varepsilon-x} |\mu_1^{(l)}(\tau)|^p d\tau \right] dx = \int_0^{X-\Delta-\varepsilon} \left[ \int_{2Xn-X}^{T-\varepsilon-x} |\mu_1^{(l)}(\tau)|^p d\tau \right] dx.$$

Применяя к последнему интегралу формулу интегрирования по частям, получим

$$I(\varepsilon) = \left[ x \int_{2Xn-X}^{T-\varepsilon-x} |\mu_1^{(l)}(\tau)|^p d\tau \right]_{x=0}^{x=l-\Delta-\varepsilon} + \int_0^{l-\Delta-\varepsilon} x |\mu_1^{(l)}(T-\varepsilon-x)|^p dx.$$

При любом  $\varepsilon > 0$  обе подстановки обращаются в нуль. Поэтому, сделав в последнем интеграле замену  $y = x + \varepsilon$ , мы получим, что

$$I(\varepsilon) = \int_\varepsilon^{X-\Delta} (y-\varepsilon) |\mu_1^{(l)}(T-y)|^p dy. \quad (13)$$

Для дальнейшего нам понадобятся следующие два тривиальных неравенства:

$$y - \varepsilon \leq y \quad \text{при всех} \quad \varepsilon \leq y \leq l - \Delta, \quad (14)$$



$$y - \varepsilon \geq \frac{1}{2}y \quad \text{при всех} \quad 2\varepsilon \leq y \leq l - \Delta. \quad (15)$$

Из (13)–(15) вытекают следующие неравенства:

$$\int_{\varepsilon}^{X-\Delta} y \left| \mu_1^{(l)}(T-y) \right|^p dy \geq I(\varepsilon) \geq \frac{1}{2} \int_{2\varepsilon}^{X-\Delta} y \left| \mu_1^{(l)}(T-y) \right|^p dy.$$

Сделаем замену  $t = T - y$  и получим

$$\int_{2Xn-X}^{T-\varepsilon} (T-t) \left| \mu_1^{(l)}(t) \right|^p dt \geq I(\varepsilon) \geq \frac{1}{2} \int_{2Xn-X}^{T-2\varepsilon} (T-t) \left| \mu_1^{(l)}(T-y) \right|^p dy. \quad (16)$$

В силу сказанного выше неравенства (16) завершают доказательство основной теоремы для случая а).

Укажем теперь, как подслучай  $\mu(2Xn - X) \neq 0$  случая а) сводится к рассмотренному нами подслучаю. Для этого введем в рассмотрение решение  $u_0(x, t)$  смешанной задачи (1)–(3) с граничной функцией  $\mu_0(t)$ , имеющей следующий вид:

$$\mu_0(t) = \frac{\mu(2Xn - X)}{(2Xn - X)^2} t^2. \quad (17)$$

Для рассматриваемого нами случая а) решение  $u_0(x, t)$  определяется равенством

$$u_0(t) = \frac{\mu(2Xn - X)}{(2Xn - X)^2} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (t - x - 2Xk)^2 - \sum_{k=1}^n (t + x - 2Xk)^2 \right\}, \quad (18)$$

в котором символ  $(\underline{\tau})^2$  обозначает функцию, равную  $\tau^2$  при  $\tau \geq 0$  и равную нулю при  $\tau < 0$ .

Из явного вида (17) и (18) функций  $\mu_0(t)$  и  $u_0(x, t)$  легко проверяется, что функция  $u_0(x, t)$  принадлежит классу  $W_p^l(Q_T)$ , а для функции  $\mu_0(t)$  существует интеграл  $\int_0^T (T-t) \left| \mu_0^{(l)}(t) \right|^p dt$ . Отсюда следует, что для завершения доказательства основной теоремы в подслучае  $\mu(2Xn - X) \neq 0$  случая а) достаточно установить справедливость утверждения основной теоремы для решения  $\hat{u}(x, t) = u(x, t) - u_0(x, t)$  смешанной задачи (1)–(3) с граничной функцией  $\hat{\mu}(t) = \mu(t) - \mu_0(t)$ . Поскольку  $\hat{\mu}(2Xn - X) = 0$ , то мы свели рассматриваемый подслучай  $\mu(2Xn - X) \neq 0$  к рассмотренному выше первому подслучаю. Итак, для случая а) основная теорема доказана.

Для случая б), когда  $T = 2Xn + X - \Delta$  при  $0 \leq \Delta < l$ , схема доказательства основной теоремы полностью аналогична схеме, изложенной выше для случая а).

На этот раз для всех  $\Delta$  из полусегмента  $0 \leq \Delta < l$  решение  $u(x, t)$  смешанной задачи (1)–(3) определяется равенством

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^n \underline{\mu}(t - x - 2Xk) - \sum_{k=1}^n \underline{\mu}(t + x - 2Xk),$$

в котором  $\underline{\mu}(\tau)$  равно  $\mu(\tau)$  при  $\tau \geq 0$  и равно нулю при  $\tau < 0$ , а сегмент  $0 \leq t \leq 2Xn - X$  и интервал  $2Xn - X < t < T$ , на которые в случае а) разбивается полусегмент  $[0, T)$ , в случае б) заменяются сегментом  $0 \leq t \leq 2Xn$  и интервалом  $2Xn < t < T$ .





В случае б) так же, как и в случае а), рассматриваются два подслучая  $\mu(2Xn) = 0$  и  $\mu(2Xn) \neq 0$ , причем второй из этих подслучаев сводится к первому.

На этом доказательство теоремы завершено.  $\square$

### Библиографический список

1. Ильин В. А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // УМН. 1960. Т. 15, № 2. С. 97–154.
2. Ильин В. А., Кулешов А. А. О некоторых свойствах обобщенных решений волнового уравнения из классов  $L_p$  и  $W_p^1$  при  $p \geq 1$  // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 11. С. 1493–1500.
3. Моисеев Е. И., Холомеева А. А. О разрешимости смешанных задач для уравнения колебаний струны в пространстве  $W_p^1, p \geq 1$  // Докл. АН. 2011. Т. 441, № 3. С. 310–312.
4. Ильин В. А., Кулешов А. А. Об эквивалентности двух определений обобщенного из класса  $l_p$  решения смешанной задачи для волнового уравнения // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2014. Т. 284. С. 163–168.
5. Ильин В. А., Кулешов А. А. Необходимые и достаточные условия принадлежности классу  $W_p^1$  при  $p \geq 1$  обобщенного решения смешанной задачи для волнового уравнения // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2013. Т. 283. С. 115–120.
6. Моисеев Е. И., Тихомиров В. В. О волновом процессе с конечной энергией при заданном граничном режиме на одном конце и упругом закреплении на другом конце // Нелинейная динамика и управление. М. : Физматлит, 2007. Вып. 5. С. 141–148.
7. Хромов А. П., Бурлуцкая М. Ш. Классическое решение методом Фурье смешанных задач при минимальных требованиях на исходные данные // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 2. С. 171–198.
8. Хромов А. П. О классическом решении одной смешанной задачи для волнового уравнения // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 56–66. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-56-66>
9. Ильин В. А., Кулешов А. А. Критерий принадлежности классу  $W_p^1$  обобщенного из класса  $L_p$  решения волнового уравнения // Докл. АН. 2012. Т. 447, № 1. С. 15–17.
10. Ильин В. А., Кулешов А. А. Обобщенные решения волнового уравнения из классов  $L_p$  и  $W_p^1$  при  $p \geq 1$  // Докл. АН. 2012. Т. 446, № 4. С. 374–377.
11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1972. 736 с.
12. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1981. 512 с.
13. Садовничий В. А. Теория операторов. М. : Дрофа, 2004. 381 с.
14. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.
15. Стеклов В. А. Основные задачи математической физики. М. : Наука, 1983. 432 с.
16. Ладыженская О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М. : Гостехиздат, 1953. 282 с.
17. Ильин В. А. Избранные труды : в 2 т. М. : Изд-во ООО «Макс-пресс», 2008. Т. 1. 727 с.

---

### Образец для цитирования:

Мокроусов И. С. Критерий принадлежности классу  $W_p^1$  обобщенного из класса  $L_p$  решения волнового уравнения // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 3. С. 297–304. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-297-304>

---



## Criterion for a Generalized Solution in the Class $L_p$ for the Wave Equation to Be in the Class $W_p^1$

I. S. Mokrousov

Ilya S. Mokrousov, <https://orcid.org/0000-0002-9990-5859>, Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia, [mokrousov.ilya@cs.msu.su](mailto:mokrousov.ilya@cs.msu.su)

In this paper we consider the question of whether a generalized solution of the wave equation belongs to different function spaces. Consideration of classical solutions imposes substantial restrictions on the initial data of the problem. But if we proceed not from differential but from integral equations, then the class of solutions and the class of initial boundary value problems can be substantially expanded. To solve the boundary value problem for the wave equation obtained by the wave counting method, it is easy to obtain a sufficient condition for belonging to a particular class. A much more subtle question is finding the necessary and sufficient condition. A criterion is established for class  $W_p^1$  to belong to the solution of the wave equation generalized from class  $L_p$ . The criterion establishes a connection between the condition for the boundary function  $\mu(t)$  and the condition on the solution of the problem  $u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0$ . Thus, this criterion can be applied to the estimation of control tasks, in particular, depending on the final condition of the problem, it is possible to establish the membership of the control function. In the same way this criterion can be applied to the estimates of the observation problems for the wave equation, when the properties of the solution can be predicted from the properties of the boundary function. This article consists of the formulation of the problem, the consideration of earlier results, the formulation and proof of the main theorem. The proof of the main theorem is essentially based on the representation of the solution of this problem in explicit analytical form. This result generalizes the previously obtained criterion for  $W_p^1$ . It should be noted that, although the proof of the criterion for the class  $W_p^1$  structurally repeats the proof for the class  $W_p^1$ , it is significantly complicated by more subtle estimates of the norms of functions entering into the solution of the problem.

*Key words:* wave equation, generalized solution, Lebesgue class, Sobolev class.

### References

1. Il'in V. A. The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations. *Russ. Math. Surv.*, 1960, vol. 15, no. 2, pp. 85–142.
2. Il'in V. A., Kuleshov A. A. On some properties of generalized solutions of the wave equation in the classes  $L_p$  and  $W_p^1$  for  $p \geq 1$ . *Differential equations*, 2012, vol. 48, no. 11, pp. 1470–1476. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266112110043>
3. Moiseev E. I., Kholomeeva A. A. Solvability of mixed problems for the string oscillation equation in the space  $W_p^1$ , with  $p \geq 1$ . *Doklady Math.*, 2011, vol. 84, no. 3, pp. 818–820. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064562411070192>
4. Il'in V. A., Kuleshov A. A. Equivalence of two definitions of a generalized  $L_p$  solution to the initial-boundary value problem for the wave equation. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2014, vol. 284, iss. 1, pp. 155–160. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0081543814010106>
5. Il'in V. A., Kuleshov A. A. Necessary and sufficient conditions for a generalized solution to the initial-boundary value problem for the wave equation to belong to  $W_p^1$  with  $p \geq 1$ . *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2013, vol. 283, iss. 1, pp. 110–115. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0081543813080087>
6. Moiseev E. I., Tihomirov V. V. O volnovom processe s konechnoj ehnergiej pri zadannom granichnom rezhime na odnom konce i uprugom zakreplenii na drugom konce [On a wave process with finite energy for a given boundary regime at one end and elastic fastening at the other end]. *Nelineinaia dinamika i upravlenie* [Nonlinear dynamics and control], Moscow, Physmathlit, 2007, iss. 5, pp. 141–148 (in Russian).



7. Khromov A. P., Burlutskaya M. Sh. Classical solution by the Fourier method of mixed problems with minimum requirements on the initial data. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 2, pp. 171–198 (in Russian).
8. Khromov A. P. About the classical solution of the mixed problem for the wave equation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 1, pp. 56–66 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-56-66>
9. Il'in V. A., Kuleshov A. A. Criterion for a generalized solution in the class  $L_p$  for the wave equation to be in the class  $W_p^1$ . *Doklady Math.*, 2012, vol. 86, no. 3, pp. 740–742. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064562412060038>
10. Il'in V. A., Kuleshov A. A. Generalized solutions of the wave equation in the classes  $L_p$  and  $W_p^1$  with  $p \geq 1$ . *Doklady Math.*, 2012, vol. 86, no. 2, pp. 657–660. DOI: <https://doi.org/10.1134/S106456241205016X>
11. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1972. 736 p. (in Russian).
12. Vladimirov V. S. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 512 p. (in Russian).
13. Sadovnichii V. A. *Teoriia operatorov* [Operator theory]. Moscow, Drofa, 2004. 381 p. (in Russian).
14. Naimark M. A. *Lineinye differentsial'nye operatory* [Linear differential operators]. Moscow, Nauka, 1969. 528 p. (in Russian).
15. Steklov V. A. *Osnovnye zadachi matematicheskoi fiziki* [Fundamental problems in mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1983. 432 pp. (in Russian)
16. Ladyzhenskaya O. A. *Smeshannaya zadacha dlya giperbolicheskogo uravneniya* [A mixed problem for the hyperbolic equation]. Moscow, Gostehizdat, 1953. 282 p. (in Russian).
17. Il'in V. A. *Izbrannye trudy* [Selected works]. Vol. 1. Moscow, MAKS Press, 2008. 727 p. (in Russian).

---

**Cite this article as:**

Mokrousov I. S. Criterion for a Generalized Solution in the Class  $L_p$  for the Wave Equation to Be in the Class  $W_p^1$ . *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 297–304 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-297-304>

---



УДК 514.17+517.51+519.6

## НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА 0/1-СИМПЛЕКСОВ

М. В. Невский, А. Ю. Ухалов

Невский Михаил Викторович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа, Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова, Россия, 150003, Ярославль, Советская, 14, mnevsk55@yandex.ru

Ухалов Алексей Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова, Россия, 150003, Ярославль, Советская, 14, alex-uhalov@yandex.ru

Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Q_n = [0, 1]^n$ . Для  $n$ -мерного невырожденного симплекса  $S$  под  $\sigma S$  понимается результат гомотетии  $S$  относительно центра тяжести с коэффициентом гомотетии  $\sigma$ . Положим  $\xi(S) = \min\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\}$ ,  $\xi_n = \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$ . Через  $P$  обозначим интерполяционный проектор, действующий из  $C(Q_n)$  на пространство линейных функций от  $n$  переменных, узлы которого совпадают с вершинами симплекса  $S \subset Q_n$ . Пусть  $\|P\|$  — норма  $P$  как оператора из  $C(Q_n)$  в  $C(Q_n)$ ,  $\theta_n = \min \|P\|$ . Через  $\xi'_n$  и  $\theta'_n$  обозначаются величины, аналогичные  $\xi_n$  и  $\theta_n$ , при дополнительном ограничении, что рассматриваемые симплексы являются 0/1-многогранниками, т. е. их вершины совпадают с вершинами  $Q_n$ . В статье систематизируются общие оценки чисел  $\xi'_n, \theta'_n$ , а также приводятся их новые оценки и точные значения для конкретных  $n$ . Доказывается, что  $\xi'_n \asymp n$ ,  $\theta'_n \asymp \sqrt{n}$ . Пусть одна из вершин 0/1-симплекса  $S^*$  есть произвольная вершина  $v$  куба  $Q_n$ , а  $n$  остальных являются смежными с противоположной к  $v$  вершиной куба. Для  $2 \leq n \leq 5$  каждый симплекс, экстремальный в смысле  $\xi'_n$ , совпадает с  $S^*$ . Минимальное  $n$ , при котором  $\xi(S^*) > \xi'_n$ , равно 6. Обозначим через  $P^*$  интерполяционный проектор с узлами в вершинах  $S^*$ . Минимальное  $n$ , при котором  $\|P^*\| > \theta'_n$ , равно 5.

*Ключевые слова:* симплекс, куб, гомотетия, осевой диаметр, интерполяция, проектор, численные методы.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-305-315>

### 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Q_n := [0, 1]^n$ ,  $C(Q_n)$  — пространство непрерывных функций  $f : Q_n \rightarrow \mathbb{R}$  с равномерной нормой  $\|f\|_{C(Q_n)} := \max_{x \in Q_n} |f(x)|$ ,  $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$  — совокупность многочленов от  $n$  переменных степени  $\leq 1$ . Запись  $L(n) \asymp M(n)$  означает, что существуют константы  $c_1, c_2 > 0$ , с которыми выполняется  $c_1 M(n) \leq L(n) \leq c_2 M(n)$ .

Пусть  $S$  —  $n$ -мерный невырожденный симплекс. Под  $\sigma S$  будем понимать образ  $S$  при гомотетии относительно центра тяжести симплекса с коэффициентом гомотетии  $\sigma$ . Через  $d_i(S)$  обозначим  $i$ -й осевой диаметр  $S$ , т. е. максимальную длину отрезка, содержащегося в  $S$  и параллельного  $i$ -й координатной оси. Понятие осевого диаметра выпуклого тела было введено Скоттом (Scott) [1, 2].

Введём в рассмотрение величины, связанные с поглощением куба  $Q_n$  гомотетом симплекса  $S$ . По определению  $\xi(S) := \min\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\}$ . Положим  $\xi_n := \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$ ,  $\xi'_n := \min\{\xi(S) : \text{ver}(S) \subset \text{ver}(Q_n)\}$ . Очевидно,  $\xi'_n \geq \xi_n$ . Через  $\alpha(S)$  обозначим минимальное  $\sigma > 0$ , для которого  $Q_n$  принадлежит трансляту



симплекса  $\sigma S$ . Всегда  $\alpha(S) \leq \xi(S)$ . Равенство  $\xi(S) = \alpha(S)$  эквивалентно тому, что симплекс  $\xi(S)S$  описан вокруг  $Q_n$ , т.е. каждая грань этого симплекса содержит вершину куба.

Пусть  $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$  — вершины  $S$ ,  $1 \leq j \leq n + 1$ . Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \dots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица является невырожденной, причём  $|\det(\mathbf{A})| = n! \operatorname{vol}(S)$ . Пусть  $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$ . Обозначим через  $\lambda_j$  многочлен из  $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ , коэффициенты которого составляют  $j$ -й столбец  $\mathbf{A}^{-1}$ , т.е.  $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$ . Числа  $\lambda_j(x)$  являются барицентрическими координатами точки  $x$  относительно  $S$ . Мы называем  $\lambda_j$  *базисными многочленами Лагранжа*, соответствующими  $S$ .

Величина  $d_i(S)$  удовлетворяет равенству

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \tag{1}$$

Если  $Q_n \not\subset S$ , то

$$\xi(S) = (n + 1) \max_{1 \leq j \leq n+1} \max_{x \in \operatorname{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) + 1. \tag{2}$$

Справедлива формула

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)}. \tag{3}$$

Равенства (1)–(2) доказаны в [3], соотношение (3) получено в [4].

*Интерполяционный проектор*  $P : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$  по набору узлов  $x^{(j)} \in Q_n$  определяется равенствами  $Pf(x^{(j)}) = f(x^{(j)})$ ,  $1 \leq j \leq n + 1$ . Норма проектора  $P$  как оператора из  $C(Q_n)$  в  $C(Q_n)$  может быть вычислена по формуле

$$\|P\| = \max_{x \in \operatorname{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|. \tag{4}$$

Обозначим  $\theta_n = \min \|P\|$ ,  $\theta'_n := \min\{\|P\| : x^{(j)} \in \operatorname{ver}(Q_n)\}$ . Очевидно,  $\theta'_n \geq \theta_n$ . Для проектора  $P$  и симплекса  $S$  с вершинами в узлах интерполяции справедливо неравенство

$$\xi(S) \leq \frac{n + 1}{2} (\|P\| - 1) + 1. \tag{5}$$

Отсюда следует, что

$$\xi_n \leq \frac{n + 1}{2} (\theta_n - 1) + 1, \quad \xi'_n \leq \frac{n + 1}{2} (\theta'_n - 1) + 1. \tag{6}$$

Справедливы соотношения  $\theta_n \asymp n^{1/2}$ ,  $\xi_n \asymp n$ . Если  $n + 1$  — число Адамара, т.е. существует матрица Адамара порядка  $n + 1$ , то  $\xi_n = n$  (о матрицах Адамара см., например, [6, 7]). Большой материал о числах  $\xi_n$  и  $\theta_n$  содержится в [5].

В настоящей статье мы приведём новые оценки и точные значения  $\theta'_n$  и  $\xi'_n$ , а также систематизируем сведения, имеющиеся к данному вопросу.



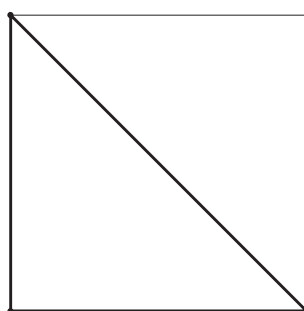
## 2. ЖЁСТКИЙ СИМПЛЕКС И ЕГО СВОЙСТВА

Введём в рассмотрение  $n$ -мерный невырожденный симплекс  $S^*$ , определяемый следующим образом. При  $n = 1$  считаем  $S^* = [0, 1]$ . При  $n > 1$  одна из вершин  $S^*$  совпадает с произвольной вершиной  $Q_n$ , а  $n$  остальных являются смежными с противоположной к ней вершиной куба. Например, таковым является симплекс с вершинами  $x^{(1)} = (0, 1, \dots, 1)$ ,  $x^{(2)} = (1, 0, \dots, 1)$ ,  $\dots$ ,  $x^{(n)} = (1, 1, \dots, 0)$ ,  $x^{(n+1)} = (0, 0, \dots, 0)$ . Для него выбранная сначала вершина является нулевой:  $x^{(n+1)} = (0, 0, \dots, 0)$ , а  $n$  остальных вершин  $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$  являются вершинами  $Q_n$ , смежными с  $(1, \dots, 1)$ . Длины  $n$  рёбер  $S$ , содержащих  $x^{(n+1)}$ , равны  $\sqrt{n-1}$ ; длины остальных рёбер равны  $\sqrt{2}$ . При  $n = 3$  (и только в этой ситуации) симплекс  $S^*$  является правильным. В этом случае каждое из рёбер имеет длину  $\sqrt{2}$ . В дальнейшем считаем, что вершины  $S^*$  выбраны именно так, как отмечено выше. Для  $n = 2$  и  $n = 3$  симплекс  $S^*$  изображён на рисунке.

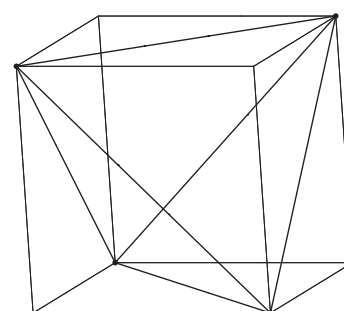
Обозначим через  $P^*$  интерполяционный проектор из  $C(Q_n)$  на  $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$  по узлам  $x^{(j)}$ .

Если  $n = 1$ , то

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



$a / a$



$b / b$

Симплекс  $S^*$  для  $n = 2$  (а) и  $n = 3$  (б)

Simplex  $S^*$  for  $n = 2$  (a) and  $n = 3$  (b)

Значит,  $\lambda_1(x) = x_1$ ,  $\lambda_2(x) = 1 - x_1$ . Очевидно, каждая из величин  $\xi(S^*)$ ,  $d_1(S^*)$ ,  $\alpha(S^*)$ ,  $\|P^*\|$ ,  $\text{vol}(S^*)$  равна 1. Это следует и из формул парагр. 1. Заметим также, что для  $n = 1$  и  $S = S^*$  соотношение (5) является равенством.

Пусть теперь  $n > 1$ . Тогда

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} -(n-2) & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & -(n-2) & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -(n-2) & \dots & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -(n-2) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \end{pmatrix}.$$





Справедливо равенство  $\det(\mathbf{A}) = (-1)^{n-1}(n-1)$ , поэтому  $\text{vol}(S^*) = \frac{n-1}{n!}$ .

Базисные многочлены Лагранжа  $\lambda_j$  имеют вид

$$\lambda_j(x) = \frac{1}{n-1} \left[ -(n-2)x_j + \sum_{k \neq j} x_k \right], \quad j \leq n; \quad \lambda_{n+1}(x) = \frac{1}{n-1} \left[ -\sum_{k=1}^n x_k + n-1 \right].$$

При  $n=2$  по формуле (2) имеем  $\xi(S^*) = -3\lambda_3(1,1) + 1 = 4$ . Если же  $n > 2$ , то

$$\xi(S^*) = -(n+1)\lambda_1(1,0,\dots,0) + 1 = \frac{(n+1)(n-2)}{n-1} + 1 = \frac{n^2-3}{n-1}.$$

Таким образом,

$$\xi(S^*) = \begin{cases} 1, & n=1, \\ 4, & n=2, \\ \frac{n^2-3}{n-1}, & n \geq 3. \end{cases} \quad (7)$$

При любом  $n$  из (1) следуют равенства  $d_1(S^*) = \dots = d_n(S^*) = 1$ . Они эквивалентны тому, что сумма модулей элементов каждой из верхних  $n$  строк матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$  равна 2. Поскольку  $d_i(S^*) = 1$ , из (3) получается, что  $\alpha(S^*) = n$ . Одномерный случай — единственный, когда  $\alpha(S^*) = \xi(S^*)$ . Это означает, что симплекс  $\xi(S^*)S^*$  описан вокруг  $Q_n$  лишь при  $n=1$ .

Норма интерполяционного проектора  $P^*$  для произвольного  $n$  найдена в [8]:

$$\|P^*\| = \begin{cases} 3, & n=2, \\ \frac{n+1}{2}, & n \text{ нечётное}, \\ \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2(n-1)}, & n \geq 4 \text{ чётное}. \end{cases} \quad (8)$$

Прямое вычисление показывает, что при  $n=1, 2, 3, 4$  соотношение (5) для симплекса  $S^*$  является равенством, т. е. выполняется

$$\xi(S^*) = \frac{n+1}{2} (\|P^*\| - 1) + 1.$$

Однако при  $n > 4$  неравенство (5) для этого симплекса является строгим. Эти факты можно установить и с помощью теоретического анализа без применения (8) (см. [5]).

Начиная с  $n=3$  симплекс  $S^*$  обладает следующим свойством (см. [7, лемма 3.3]): если заменить любую одну вершину  $S^*$  на любую точку  $Q_n$ , то объём симплекса уменьшится. В связи с этим симплекс  $S^*$  при  $n \geq 3$  назван в [7] *жестким, или неизгибаемым (rigid)*. Это свойство выполняется и для  $n=1$ . В двумерном же случае объём симплекса указанным образом не увеличивается. Авторы сохраняют термин *жесткий симплекс* для всех  $n$ . При  $n=1, 2, 3, 4$  (и только в этих ситуациях) объём  $S^*$  является максимально возможным для симплекса, содержащегося в  $Q_n$ .

Жесткий симплекс имеет и другие интересные свойства. Пусть  $\mathbf{B}$  — матрица порядка  $n > 1$ , строки которой содержат координаты ненулевых вершин  $S^*$  (т. е.  $b_{ii} \neq 0$ ,



а при  $i \neq j$  имеем  $b_{ij} = 1$ ). Эта матрица возникает в ряде задач комбинаторики и теории графов. Например, её перманент

$$\text{per } \mathbf{B} := \sum_{\omega} b_{1\omega_1} \dots b_{n\omega_n} = n! \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{1}{j!}$$

равен числу  $q_n$  перестановок  $\omega$  порядка  $n$  таких, что  $\omega_i \neq i$  для всех  $i = 1, \dots, n$ . Величина  $q_n$  называется *числом беспорядков порядка  $n$*  (см. [9]). Первые значения равны  $q_1 = 0, q_2 = 1, q_3 = 2, q_4 = 9, q_5 = 44, q_6 = 265$ . При больших  $n$  имеем  $q_n \approx \frac{n!}{e}$ . В то же время  $\det \mathbf{B} = (-1)^{n-1}(n-1)$ .

К экстремальным свойствам  $S^*$  относятся и равенства  $\xi'_n = \xi(S^*), \theta'_n = \|P^*\|$ , справедливые для ряда размерностей. Вопрос о выполнении этих равенств для  $1 \leq n \leq 7$  будет обсуждаться в парагр. 4.

### 3. ОБЩИЕ ОЦЕНКИ ЧИСЕЛ $\theta'_n$ И $\xi'_n$

Последовательность  $\theta'_n$  была введена в [8], где доказано, что  $\theta'_n \geq \frac{1}{2e}\sqrt{n}$ , а если  $n+1$  — число Адамара, то  $\theta'_n \leq \sqrt{n+1}$ . Далее мы покажем, что эти оценки точны по порядку  $n$  для всех размерностей.

*Стандартизованным многочленом Лежандра степени  $n$*  называется функция

$$\chi_n(t) := \frac{1}{2^n n!} [(t^2 - 1)^n]^{(n)}$$

(формула Родрига). Многочлены Лежандра ортогональны на  $[-1, 1]$  с весом  $w(t) = 1$ . По поводу свойств  $\chi_n$  см. [10, 11]. Известно, что  $\chi_n(1) = 1, \chi_n(t)$  возрастает при  $t \geq 1$ . Обозначим через  $\chi_n^{-1}$  функцию, обратную к  $\chi_n$  на  $[1, +\infty)$ .

**Теорема 1.** *Выполняется неравенство  $\theta'_n > \frac{1}{e}\sqrt{n-1}$ . Если  $n \neq 2$ , то*

$$\theta'_n \leq \min \left( \frac{n+1}{2}, \frac{4\sqrt{e}}{3}\sqrt{n+2} + 1 \right). \tag{9}$$

**Доказательство.** Появление многочленов Лежандра при оценивании норм интерполяционных проекторов объясняется в [5], где показано, что

$$\theta_n \geq \chi_n^{-1} \left( \frac{1}{\nu_n} \right) > \frac{\sqrt{n-1}}{e}.$$

Здесь  $\nu_n$  — максимальный объём  $n$ -мерного симплекса, содержащегося в  $Q_n$ . Так как  $\theta'_n \geq \theta_n$ , отсюда следует первое утверждение теоремы.

Докажем оценку (9). Для любого симплекса  $S$  максимального объёма в  $Q_n$  выполняется неравенство (см. [5, теорема 3.5.1])

$$\|P\| \leq \min \left( n+1, \frac{4\sqrt{e}}{3}\sqrt{n+2} + 1 \right), \tag{10}$$

где  $P$  — интерполяционный проектор, узлы которого совпадают с вершинами  $S$ . Обозначим через  $h_n$  величину максимального определителя порядка  $n$ , состоящего из 0 и 1. Справедливо равенство  $h_n = n!\nu_n$  (см., например, [7]). Рассмотрим произвольный определитель порядка  $n$ , состоящий из 0 и 1, равный  $h_n$ . Пусть  $S$  — симплекс,



ненулевые вершины которого задаются строками определителя, а последняя вершина является нулевой. Для этого симплекса  $|\det(\mathbf{A})| = h_n = n! \nu_n$ , откуда  $\text{vol}(S) = \nu_n$ . Значит,  $S$  есть симплекс максимального объёма в  $Q_n$ . Соответствующий проектор удовлетворяет (10). Так как  $\text{ver}(S) \subset \text{ver}(Q_n)$ , отсюда получается

$$\theta'_n \leq \min \left( n + 1, \frac{4\sqrt{e}}{3} \sqrt{n + 2} + 1 \right).$$

Для установления (9) остаётся учесть, что при  $n \neq 2$  верно  $\theta'_n \leq \frac{n+1}{2}$ . Действительно,  $\theta'_n$  не превосходит нормы проектора  $P^*$  из предыдущего пункта, а в соответствии с (8) выполняется  $\|P^*\| \leq \frac{n+1}{2}$ . Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 2.** При любом  $n$  верно  $\xi'_n \geq n$ . Если  $n$  — чётное, то  $\xi'_n > n$ . Если  $n+1$  — число Адамара, то  $\xi'_n = n$ . Для  $n > 2$  выполняется неравенство  $\xi'_n \leq \frac{n^2 - 3}{n - 1}$ .

**Доказательство.** Пусть  $S \subset Q_n$ . Тогда для любого  $i$  верно  $d_i(S) \leq d_i(Q_n) = 1$ . Применяя (3), имеем

$$\xi(S) \geq \alpha(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \geq n.$$

Отсюда  $\xi'_n \geq \xi_n \geq n$ .

Пусть теперь  $n$  таково, что  $\xi'_n = n$ . Тогда для некоторого  $n$ -мерного симплекса  $S$  одновременно выполняются включения  $\text{ver}(S) \subset \text{ver}(Q_n)$  и  $Q_n \subset nS$ . Пусть  $x^{(j)}$  — вершины  $S$ . Как доказано в [12], из условий  $S \subset Q_n \subset nS$  следует, что центр тяжести  $S$ , а именно точка  $\frac{1}{n+1} \sum x^{(j)}$  совпадает с центром  $Q_n$ , т. е. точкой  $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ . Отсюда

$$\sum_{j=1}^{n+1} x^{(j)} = \left( \frac{n+1}{2}, \dots, \frac{n+1}{2} \right).$$

Так как  $x^{(j)} \in \text{ver}(Q_n)$ , координаты точки  $\sum x^{(j)}$  являются целыми. Поэтому число  $n$  является нечётным. Следовательно, при любом чётном  $n$  верно  $\xi'_n > n$ .

Пусть теперь  $n+1$  — число Адамара. В [7] отмечается, что в этом и только в этом случае существует  $n$ -мерный правильный симплекс, вершины которого находятся в вершинах  $Q_n$ . Для такого симплекса  $S$  верно  $\xi(S) = n$  (различные доказательства даются в [5, 13]). Следовательно,  $\xi'_n \leq n$ . Но, как мы выяснили,  $\xi'_n \geq n$ , поэтому в рассматриваемой ситуации  $\xi'_n$  в точности равно  $n$ .

Наконец, пусть  $n > 2$  и  $S^*$  — симплекс из парагр. 2. Тогда в силу (7) имеем  $\xi'_n \leq \xi(S^*) = \frac{n^2 - 3}{n - 1}$ . Это завершает доказательство.  $\square$

**Следствие 1.** Справедливы соотношения  $\theta'_n \asymp n^{1/2}$ ,  $\xi'_n \asymp n$ .

Для любого симплекса  $S \subset Q_n$ , имеющего максимальный объём, выполняется неравенство  $\xi(S) \leq n + 2$  (см. [5, теорема 3.2.1]). Вместе с предыдущим это даёт следующий результат.

**Следствие 2.** Пусть  $S$  —  $n$ -мерный 0/1-симплекс максимального объёма,  $P : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$  — интерполяционный проектор, узлы которого совпадают с вершинами  $S$ . Тогда с константами, не зависящими от  $n$ , верно  $\|P\| \asymp \theta'_n$ ,  $\xi(S) \asymp \xi'_n$ .



**Следствие 3.** При  $n \geq 3$  последовательность  $\{\xi'_n\}$  строго возрастает.

**Доказательство.** Из теоремы 2 следует, что при  $n \geq 3$  выполняются неравенства  $n \leq \xi'_n \leq \frac{n^2 - 3}{n - 1} < n + 1$ . Поэтому  $\xi'_n < n + 1 \leq \xi'_{n+1}$ .  $\square$

**4. ЗНАЧЕНИЯ  $\theta'_n$  И  $\xi'_n$  ДЛЯ  $1 \leq n \leq 7$**

Пусть  $S^*$  —  $n$ -мерный жёсткий симплекс,  $P^* : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$  — интерполяционный проектор, узлы которого совпадают с вершинами  $S^*$  (см. парагр. 2). Оказывается, что  $S^*$  даёт точные значения  $\xi'_n$  при  $1 \leq n \leq 5$ , т. е. для этих размерностей  $\xi(S^*) = \xi'_n$ . Минимальное  $n$ , при котором  $\xi(S^*) > \xi'_n$ , равно 6. Проектор  $P^*$  является экстремальным в смысле  $\theta_n$  для  $1 \leq n \leq 4$ , т. е. для этих  $n$  верно  $\|P^*\| = \theta'_n$ . Минимальное  $n$ , при котором  $\|P^*\| > \theta'_n$ , равно 5. Рассмотрим эти случаи подробнее.

Пусть  $n = 1$ . Имеем  $Q_1 = S^* = [0, 1]$ ,  $\|P^*\| = \xi(S^*) = 1$ , поэтому  $\theta_1 = \xi_1 = \theta'_1 = \xi'_1 = 1$ .

В случае  $n = 2$  имеется (с точностью до подобия) всего один симплекс с вершинами в вершинах куба. Это симплекс  $S^*$  с вершинами  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 0)$ . Из рассмотрения  $S^*$  следует, что  $\theta'_2 = 3$ ,  $\xi'_2 = 4$ .

Случай  $n = 3$  исследован в работах М. В. Невского (см., например, [5]). Минимумы  $\xi(S)$  и  $\|P\|$  достигаются на симплексе  $S^*$  с вершинами  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 0)$ . Верны равенства  $\xi_3 = \xi'_3 = 3$ ,  $\theta_3 = \theta'_3 = 2$ . Отметим, что те же значения  $\xi(S)$  и  $\|P\|$  достигаются и на симплексе  $S^{**}$  с вершинами  $(\frac{1}{2}, 0, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, 1, 0)$ ,  $(0, \frac{1}{2}, 1)$ ,  $(1, \frac{1}{2}, 1)$  (и подобных ему). Однако вершины  $S^{**}$  не совпадают с вершинами куба. Других экстремальных симплексов в трёхмерной ситуации нет.

Для  $n = 4$  и  $n = 5$  нами выполнен полный перебор  $n$ -мерных симплексов, удовлетворяющих условию  $\text{ver}(S) \subset \text{ver}(Q_n)$ . Вычисления показали, что при  $n = 4$  симплекс  $S^*$  и проектор  $P^*$  доставляют минимумы обеих величин  $\xi(S)$  и  $\|P\|$ . Имеют место равенства  $\theta'_4 = \frac{7}{3}$ ,  $\xi'_4 = \frac{13}{3}$ . Симплекс  $S^*$  остаётся экстремальным и относительно  $\xi_5$ , т. е.  $\xi_5 = \xi(S^*) = \frac{11}{2}$ . Обнаружено, что точное значение  $\theta_5$  равно  $\frac{13}{5}$ . Неравенство  $\theta'_5 \leq \frac{13}{5}$ , означающее, что  $\theta'_5 < \|P^*\|$ , установлено ранее в [5, п. 3.8.3].

Перейдем к случаю  $n = 6$ . Из рассмотрения жёсткого симплекса  $S^*$  следуют неравенства  $6 \leq \xi'_6 \leq \frac{33}{5}$ . Покажем, что верхняя оценка может быть существенно улучшена.

**Теорема 3.** Справедливо неравенство  $\xi'_6 \leq \frac{25}{4}$ .

**Доказательство.** Достаточно предъявить симплекс  $S$ , для которого  $\text{ver}(S) \subset \text{ver}(Q_6)$  и  $\xi(S) = \frac{25}{4}$ . Пусть вершины  $S$  суть  $(0, 0, 0, 0, 1, 1)$ ,  $(0, 0, 0, 1, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1, 1, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 1, 1, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 0, 1, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 1, 0, 0, 1)$ ,  $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ . Матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}^{-1}$  имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -5 & 3 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -5 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 3 & -5 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & 1 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$



Коэффициенты многочленов  $\lambda_j$  составляют столбцы  $\mathbf{A}^{-1}$ , следовательно,

$$\begin{aligned}\lambda_1(x) &= \frac{1}{8}(-x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 + 5x_5 + 3x_6), \\ \lambda_2(x) &= \frac{1}{8}(-x_1 - x_2 - x_3 + 5x_4 - 3x_5 + 3x_6), \\ \lambda_3(x) &= \frac{1}{8}(-5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 - x_6), \\ \lambda_4(x) &= \frac{1}{8}(3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 - x_6), \\ \lambda_5(x) &= \frac{1}{8}(3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 + x_5 - x_6), \\ \lambda_6(x) &= \frac{1}{8}(2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 2x_6), \\ \lambda_7(x) &= \frac{1}{8}(-x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 - 3x_5 - 5x_6 + 8).\end{aligned}$$

Вычислим  $\xi(S)$ , применяя равенство (2). Для каждого  $j$  подберём  $x^* \in \text{ver}(Q_6)$  так, чтобы при  $x = x^*$  величина  $(-\lambda_j(x))$  была максимальна. Нетрудно видеть, что  $m := \max_j \max_x(-\lambda_j(x)) = \frac{3}{4}$ . Это значение при  $j = 1$  достигается на вершине  $(1, 1, 1, 1, 0, 0)$ , при  $j = 2$  — на вершине  $(1, 1, 1, 0, 1, 0)$ , при  $j = 3$  — на вершине  $(1, 0, 0, 0, 0, 1)$ , при  $j = 4$  — на вершине  $(0, 1, 0, 0, 0, 1)$ , при  $j = 5$  — на вершине  $(0, 0, 1, 0, 0, 1)$  и при  $j = 7$  — на вершине  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ . Отметим, что  $\max_x(-\lambda_6(x)) = \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ . По формуле (2) имеем  $\xi(S) = 7m + 1 = \frac{25}{4}$ . Теорема доказана.  $\square$

Нами был выполнен полный перебор шестимерных симплексов, удовлетворяющих условию  $\text{ver}(S) \subset \text{ver}(Q_6)$ . Одна вершина каждого симплекса (нулевая) была фиксирована. Остальные шесть его вершин выбирались из оставшихся  $2^6 - 1$  вершин куба. Таким образом, всего потребовалось рассмотреть  $\binom{2^6 - 1}{6} = 67\,945\,521$  симплекс. Вычисления проводились с помощью специально написанной программы на языке системы Wolfram Mathematica (см. [14, 15]). Как оказалось, минимум  $\xi(S)$  доставляет симплекс  $S$  из доказательства теоремы 3. Следовательно,  $\xi'_6 = \frac{25}{4}$ . Одновременно мы показали, что наименьшее  $n$ , для которого жёсткий симплекс  $S^*$  не даёт точного значения  $\xi'_n$ , равно 6.

Из результатов [5, п. 3.8.3] следует, что  $\theta'_6 \leq 3$ . Полный перебор 0/1-симплексов в  $\mathbb{R}^6$  показал, что симплекс  $S$  из доказательства теоремы 3 минимизирует и норму интерполяционного проектора. Для проектора  $P$  по узлам в вершинах  $S$  формула (4) даёт  $\|P\| = 3$ . Как выяснилось, это и есть минимальное значение нормы интерполяционного проектора по узлам, расположенным в вершинах  $Q_6$ . Следовательно, точное значение  $\theta'_6$  равно 3. Заметим, что  $\|P^*\| = \frac{17}{5} > \theta'_6$ .

Наконец, рассмотрим случай  $n = 7$ . В силу того что 8 есть число Адамара, существует семимерный правильный симплекс, вершины которого находятся в вершинах куба (см. [7]). Например, таковым является симплекс  $S$  с вершинами  $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ,  $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$ . Справедливо равенство  $\xi(S) = 7$ . Из оценки  $\xi'_n \geq \xi_n \geq n$  следует, что  $\xi'_7 = \xi_7 = 7$ . Так как  $\xi_7 = 7$ , левое неравенство (6) влечёт  $\theta_7 \geq \frac{5}{2}$ . Однако, как отмечено в [8], для проектора  $P$ , соответствующего  $S$ , верно  $\|P\| = \frac{5}{2}$ . Следовательно,  $\theta'_7 = \theta_7 = \frac{5}{2}$ .



В таблице приведена сводка известных результатов о числах  $\xi_n, \xi'_n, \theta_n$  и  $\theta'_n$  при  $1 \leq n \leq 7$ . Она объединяет результаты настоящей статьи и работ [5, 8, 13].

Оценки  $\xi_n, \xi'_n, \theta_n$  и  $\theta'_n$  для  $1 \leq n \leq 7$   
 Estimates of  $\xi_n, \xi'_n, \theta_n$ , and  $\theta'_n$  for  $1 \leq n \leq 7$

$n$	$\xi_n$	$\xi'_n$	$\theta_n$	$\theta'_n$
1	1	1	1	1
2	$\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 = 2.34\dots$	4	$\frac{2\sqrt{5}}{5} + 1 = 1.89\dots$	3
3	3	3	2	2
4	$4 \leq \xi_4 \leq \frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.11\dots$ $\xi_4 = \frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.11\dots$ (?)	$\frac{13}{3}$	$\frac{11}{5} \leq \theta_4 \leq \frac{7}{3}$ $\theta_4 = \frac{7}{3}$ (?)	$\frac{7}{3}$
5	5	$\frac{11}{2}$	$\frac{7}{3} \leq \theta_5 < 2.448804$	$\frac{13}{5}$
6	$6 \leq \xi_6 < 6.0166$	$\frac{25}{4}$	$\frac{17}{7} \leq \theta_6 \leq 3$	3
7	7	7	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$

*Примечание.* Знаком вопроса отмечены числа, которые, по предположению авторов, являются точными значениями. Для величин, точные значения которых неизвестны, приведены лучшие из полученных авторами оценок.

*Note.* The question sign points to values which are sharp by authors' assumption. For values whose exact values are unknown, the best estimates obtained by the authors are given.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ (проект № 1.12873.2018/12.1).

**Библиографический список**

1. Scott P. R. Lattices and convex sets in space // Quart. J. Math. Oxford (2). 1985. Vol. 36. P. 359–362.
2. Scott P. R. Properties of axial diameters // Bull. Austral. Math. Soc. 1989. Vol. 39. P. 329–333.
3. Невский М. В. Об одном свойстве  $n$ -мерного симплекса // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 580–593. DOI: 10.4213/mzm7698
4. Nevskii M. Properties of axial diameters of a simplex // Discrete Comput. Geom. 2011. Vol. 46, № 2. P. 301–312. DOI: 10.1007/s00454-011-9355-7
5. Невский М. В. Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции. Ярославль : ЯрГУ, 2012. 218 с.
6. Холл М. Комбинаторика / пер. с англ. М. : Мир, 1970. 424 с.
7. Hudelson M., Klee V., Larman D. Largest  $j$ -simplices in  $d$ -cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem // Linear Algebra Appl. 1996. Vol. 241–243. P. 519–598.
8. Невский М. В. Оценки для минимальной нормы проектора при линейной интерполяции по вершинам  $n$ -мерного куба // Моделирование и анализ информационных систем. 2003. Т. 10, № 1. С. 9–19.
9. Тараканов В. Е. Комбинаторные задачи и  $(0, 1)$ -матрицы. М. : Наука, 1985. 218 с.
10. Сегё Г. Ортогональные многочлены : пер. с англ. М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. 500 с.





11. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М. : Наука, 1979. 416 с.
12. Невский М. В., Ухалов А. Ю. Об  $n$ -мерных симплексах, удовлетворяющих включениям  $S \subset [0, 1]^n \subset nS$  // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. Т. 24, № 5. С. 578–595. DOI: <https://doi.org/10.18255/1818-1015-2017-5-578-595>
13. Невский М. В., Ухалов А. Ю. Новые оценки числовых величин, связанных с симплексом // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. Т. 24, № 1. С. 94–110. DOI: <https://doi.org/10.18255/1818-1015-2017-1-94-110>
14. Mangano S. Mathematica cookbook. Cambridge : O'Reilly Media Inc., 2010. 832 p.
15. Дьяконов В. П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство. М. : ДМК Пресс, 2010. 624 с.

---

**Образец для цитирования:**

Невский М. В., Ухалов А. Ю. Некоторые свойства 0/1-симплексов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 3. С. 305–315. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-305-315>

---

## Some Properties of 0/1-Simplices

M. V. Nevskii, A. Yu. Ukhalov

Mikhail V. Nevskii, <https://orcid.org/0000-0002-6392-7618>, P. G. Demidov Yaroslavl State University, 14, Sovetskaya Str., Yaroslavl, 150003, Russia, [mnevsk55@yandex.ru](mailto:mnevsk55@yandex.ru)

Alexey Yu. Ukhalov, <https://orcid.org/0000-0001-6551-5118>, P. G. Demidov Yaroslavl State University, 14, Sovetskaya Str., Yaroslavl, 150003, Russia, [alex-ukhalov@yandex.ru](mailto:alex-ukhalov@yandex.ru)

Let  $n \in \mathbb{N}$ , and let  $Q_n = [0, 1]^n$ . For a nondegenerate simplex  $S \subset \mathbb{R}^n$ , by  $\sigma S$  we mean the homothetic copy of  $S$  with center of homothety in the center of gravity of  $S$  and ratio of homothety  $\sigma$ . Put  $\xi(S) = \min\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\}$ ,  $\xi_n = \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$ . By  $P$  we denote the interpolation projector from  $C(Q_n)$  onto the space of linear functions of  $n$  variables with the nodes in the vertices of a simplex  $S \subset Q_n$ . Let  $\|P\|$  be the norm of  $P$  as an operator from  $C(Q_n)$  to  $C(Q_n)$ ,  $\theta_n = \min \|P\|$ . By  $\xi'_n$  and  $\theta'_n$  we denote the values analogous to  $\xi_n$  and  $\theta_n$ , with the additional condition that corresponding simplices are 0/1-polytopes, i. e., their vertices coincide with vertices of  $Q_n$ . In the present paper, we systematize general estimates of the numbers  $\xi'_n, \theta'_n$  and also give their new estimates and precise values for some  $n$ . We prove that  $\xi'_n \asymp n, \theta'_n \asymp \sqrt{n}$ . Let one vertex of 0/1-simplex  $S^*$  be an arbitrary vertex  $v$  of  $Q_n$  and the other  $n$  vertices are close to the vertex of the cube opposite to  $v$ . For  $2 \leq n \leq 5$ , each simplex extremal in the sense of  $\xi'_n$  coincides with  $S^*$ . The minimal  $n$  such that  $\xi(S^*) > \xi'_n$  is equal to 6. Denote by  $P^*$  the interpolation projector with the nodes in the vertices of  $S^*$ . The minimal  $n$  such that  $\|P^*\| > \theta'_n$  is equal to 5.

**Key words:** simplex, cube, homothety, axial diameter, interpolation, projector, numerical methods.

**Acknowledgements:** This work was carried out within the framework of the State Programme of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 1.12873.2018/12.1).

### References

1. Scott P. R. Lattices and convex sets in space. *Quart. J. Math. Oxford (2)*, 1985, vol. 36, pp. 359–362.
2. Scott P. R. Properties of axial diameters. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 1989, vol. 39, pp. 329–333.



3. Nevskii M. V. On a property of  $n$ -dimensional simplices. *Math. Notes*, 2010, vol. 87, no. 4, pp. 543–555. DOI: 10.4213/mzm7698
4. Nevskii M. Properties of axial diameters of a simplex. *Discrete Comput. Geom.*, 2011, vol. 46, no 2, pp. 301–312. DOI: 10.1007/s00454-011-9355-7
5. Nevskii M. V. *Geometricheskie ocenki v polinomial'noy interpol'yacii* [Geometric Estimates in Polynomial Interpolation]. Yaroslavl, Yaroslavl State University, 2012. 218 p. (in Russian).
6. Hall M., Jr. *Combinatorial Theory*. Waltham (Massachusetts), Toronto, London, Blaisdall publishing company, 1967. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1970. 424 p).
7. Hudelson M., Klee V., Larman D. Largest  $j$ -simplices in  $d$ -cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem. *Linear Algebra Appl.*, 1996, vol. 241–243, pp. 519–598.
8. Nevskii M. V. Estimates for the minimal norm of a projector related to the linear interpolation by vertices of an  $n$ -dimensional cube. *Modeling and Analysis of Information Systems*, 2003, vol. 10, no. 1, pp. 9–19 (in Russian).
9. Tarakanov V. E. *Kombinatornye zadachi i (0,1)-matricy* [Combinatoric Problems and (0,1)-Matrices]. Moscow, Nauka, 1985. 218 p. (in Russian).
10. Szego G. *Orthogonal Polynomials*. New York, American Mathematical Society, 1959. (Russ. ed.: Moscow, Gos. izd-vo fiz.-mat. lit., 1962. 500 p.)
11. Suetin P. K. *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny* [Classic Orthogonal Polynomials]. Moscow, Nauka, 1979. 416 p. (in Russian).
12. Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu. On  $n$ -dimensional simplices satisfying inclusions  $S \subset [0, 1]^n \subset nS$ . *Modeling and Analysis of Information Systems*, 2017, vol. 24, no. 5, pp. 578–595 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18255/1818-1015-2017-5-578-595>
13. Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu. New estimates of numerical values related to a simplex. *Modeling and Analysis of Information Systems*, 2017, vol. 24, no. 1, pp. 94–110 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18255/1818-1015-2017-1-94-110>
14. Mangano S. *Mathematica Cookbook*. Cambridge, O'Reilly Media Inc., 2010. 832 p.
15. Diakonov V. P. *Mathematica 5/6/7. Polnoe rukovodstvo* [Mathematica 5/6/7. Full Guidance], Moscow, DMK Press, 2010. 624 p. (in Russian).

---

**Cite this article as:**

Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu. Some Properties of 0/1-Simplices. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 305–315 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-305-315>

---



УДК 517.5

## ЭРМИТОВА ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НА СИМПЛЕКСЕ

Р. Ш. Хасянов

Хасянов Рамис Шавкятович, студент, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, hasbendshurich@gmail.com

В статье рассмотрена задача полиномиальной интерполяции и аппроксимации функций многих переменных на  $n$ -мерном симплексе в равномерной норме посредством многочленов 3-й степени. Выбраны интерполяционные условия в терминах производных по направлениям ребер симплекса. В этих же терминах получены оценки отклонения производных многочлена от соответствующих производных интерполируемой функции в предположении, что интерполируемая функция имеет непрерывные производные по направлениям до 4-го порядка включительно. Определено понятие длинного ребра и в терминах длинных ребер введены геометрические характеристики симплекса. Доказано, что для размерности 3 и 4 интерполяционные условия можно выбрать так, что оценки отклонения производных не зависят от геометрии симплекса, а в случае размерности больше 4 при выбранных интерполяционных условиях это невозможно.

*Ключевые слова:* эрмитов сплайн, симплекс, многомерная интерполяция на симплексе, метод конечных элементов.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-316-327>

### ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $D$  — подмножество евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ), на котором можно построить геометрический комплекс  $\{\bar{T}_i\}_{i \in I}$  (разбить  $D$  на симплексы  $\bar{T}_i$ ). Будем рассматривать задачу выбора на симплексе  $\bar{T}_i$  интерполяционных условий для построения многочлена Эрмита третьей степени, производные до третьего порядка включительно которого будут аппроксимировать соответствующие производные некоторой функции  $f \in C^4(\bar{T}_i)$ . Задача многомерной аппроксимации на симплексе изучалась, например, в работах [1–4]. В данной работе мы предлагаем новый способ построения многочлена Эрмита на многомерном симплексе (эрмитов многочлен строился, например, в работах [5–8]). Есть смысл получать оценки отклонения в терминах производных по направлениям так, чтобы оценка становилась «лучше» при уменьшении диаметра симплекса (измельчении комплекса). В [9] требуемый результат был получен для тетраэдра. Наш результат распространяется и на трёхмерный случай. От полученного результата из [9] он отличается только одним интерполяционным условием. Дадим необходимое определение и сформулируем результат из [9]:

**Определение 1.** Пусть  $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^n$  — аффинно независимые точки, т. е. точки, не лежащие ни в какой гиперплоскости пространства  $\mathbb{R}^n$  (подпространстве размерности  $n - 1$ ). Тогда любая точка  $P \in \mathbb{R}^n$  единственным образом представима в виде

$$P = U + \alpha_0 \overrightarrow{UP_0} + \alpha_1 \overrightarrow{UP_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{UP_n}, \quad (1)$$



где  $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$ ,  $U \in \mathbb{R}^n$ . Оказывается, что числа  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  не зависят от выбора точки  $U$  и, выбирая  $U = (0, 0, \dots, 0)$ , (1) можно переписать в виде  $P = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n$ . Тогда говорят, что точка  $P$  имеет *барицентрические* координаты  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

Заметим, что барицентрические координаты зависят от выбора точек  $P_0, P_1, \dots, P_n$ .

**Теорема 1 (см. [9]).** Пусть  $\bar{T} = A_0 A_1 A_2 A_3$  — тетраэдр,  $f \in C^4(\bar{T})$ ,

$$M_4 = \max_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4} \max_{0 \leq i_j \leq 4: \sum i_j = 4} \max_{\mathbf{x} \in \bar{T}} \left| \frac{\partial^4 f(\mathbf{x})}{\partial e_1^{i_1} \partial e_2^{i_2} \partial e_3^{i_3} \partial e_4^{i_4}} \right|,$$

где  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$  — всевозможные направления в тетраэдре.

В любом тетраэдре есть вершина, из которой выходят по крайней мере два ребра, больших  $\frac{d}{2}$ , пусть это будет вершина  $A_3$ . Будем считать, что точка  $\mathbf{x}$  задана своими барицентрическими координатами  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  относительно вершин треугольника,  $d$  — диаметр  $\bar{T}$ , и пусть многочлен удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} f(A_i) &= Q(A_i), & i &= \overline{0, 3}, \\ \frac{\partial f(A_i)}{\partial e_{ij}} &= \frac{\partial Q(A_i)}{\partial e_{ij}}, & i, j &= \overline{0, 3}, \quad i \neq j, \\ \frac{\partial(Q-f)(P_{32})}{\partial e_{30}} &= 0, & \frac{\partial(Q-f)(P_{32})}{\partial e_{31}} &= 0, \\ \frac{\partial(Q-f)(P_{10})}{\partial e_{32}} &= 0, & \frac{\partial(Q-f)(P_{10})}{\partial e_{31}} &= 0, \end{aligned}$$

где  $P_{ij}$  — середина отрезка  $[A_i A_j]$ ,  $\mathbf{e}_{ij} = \frac{\overrightarrow{A_i A_j}}{|A_i A_j|}$ .

Тогда существует  $C > 0$  такое, что для всех  $\mathbf{x} \in \bar{T}$  имеет место

$$\left| \frac{\partial^r (Q-f)(\mathbf{x})}{\partial e_{30}^i \partial e_{31}^k \partial e_{32}^{r-i-k}} \right| \leq C M_4 d^{4-r}, \quad 1 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq i, k \leq r \quad (i+k \leq r).$$

Мы будем получать оценки, не зависящие от геометрии симплекса в пространствах размерности 3 и 4, а в пространствах большей размерности для получения «хорошей» оценки нужно будет выбрать подходящую триангуляцию, так как в этом случае в оценке присутствует дополнительный параметр, который связан с коэффициентом изопериметричности симплекса [10]. Вопросы триангуляции в аппроксимации производных изучались в работах [11–13].

## 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В [14] был получен аналогичный результат на треугольнике. Этим результатом мы будем пользоваться при доказательстве основной теоремы.



**Теорема 2 (см. [14]).** Пусть  $\bar{T} = A_0A_1A_2$  — замкнутый невырожденный треугольник на плоскости, функция  $f \in C^4(\bar{T})$ ,  $d$  — диаметр  $\bar{T}$ ,  $(x_0, x_1, x_2)$  — барицентрические координаты точки  $\mathbf{x}$  относительно вершин тетраэдра.  $P_{01}$  — средняя точка стороны  $[A_0A_1]$ , выберем число  $c > 0$  и пусть  $|A_0A_2| > \frac{d}{c}$ .

$$M_4 = \max_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2} \max_{0 \leq k \leq 4} \max_{\mathbf{x} \in \bar{T}} \left| \frac{\partial^4 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_1^k \partial \mathbf{e}_2^{4-k}} \right|,$$

где  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  — всевозможные направления в треугольнике.

Многочлен

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^2 a_i x_i^3 + \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 2 \\ i \neq j}} a_{ij} x_i^2 x_j + a_{012} x_0 x_1 x_2$$

определяется следующими интерполяционными условиями:

$$\begin{aligned} f(A_i) &= Q(A_i), \quad i = \overline{0, 2}, \\ \frac{\partial f(A_i)}{\partial e_{ij}} &= \frac{\partial Q(A_i)}{\partial e_{ij}}, \quad i, j = \overline{0, 2}, \quad i \neq j, \\ \frac{\partial f(P_{01})}{\partial e_{02}} &= \frac{\partial Q(P_{01})}{\partial e_{02}}. \end{aligned}$$

Тогда для любого  $\mathbf{x}$  справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial^r f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{01}^k \partial \mathbf{e}_{02}^{r-k}} \right| \leq 4cM_4 d^{4-r}, \quad 1 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq k \leq r.$$

**Определение 2.** Симплексом (точнее,  $n$ -симплексом, где число  $n$  называется размерностью симплекса) называют выпуклую оболочку  $n + 1$  точки аффинного пространства (размерности  $n$  или больше), которые предполагаются аффинно независимыми (то есть не лежат ни в одном подпространстве размерности  $n - 1$ ). Эти точки называются вершинами симплекса.

В символике барицентрического исчисления  $n$ -мерный симплекс может быть охарактеризован как множество всевозможных точек с неотрицательными барицентрическими координатами относительно вершин симплекса.

**Предложение 1.** Пусть  $\bar{T} = A_1A_2 \dots A_{n+1}$  —  $n$ -симплекс,  $\mathbf{x} \in T$  (точка  $\mathbf{x}$  не лежит на границе симплекса). Пусть  $l$  — луч, выходящий из точки  $\mathbf{x}$  и направленный по  $\mathbf{e}_{ij} = \frac{\overrightarrow{A_i A_j}}{|A_i A_j|}$ .

Тогда луч  $l$  пересечёт  $(n - 1)$ -мерную грань симплекса без вершины  $A_i$  и не пересечёт остальные  $(n - 1)$ -мерные грани.

**Доказательство.** Выберем на луче  $l$  точку  $\mathbf{y}$ . Пусть  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$  в барицентрической системе координат. Тогда для всех  $i$ ,  $x_i > 0$  и  $\overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{y}} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_{n+1} - x_{n+1})$ .



Запишем факт принадлежности точки  $y$  лучу  $l$ :

$$\exists \lambda > 0 : \overrightarrow{xy} = \lambda \overrightarrow{A_i A_j}. \tag{2}$$

Барицентрические координаты вектора  $\overrightarrow{A_i A_j}$  записываются в следующем виде:

$$\overrightarrow{A_i A_j} = (0, 0, \dots, 1_j, 0, \dots, (-1)_i, 0, \dots, 0).$$

Тогда (2) перепишем в виде системы уравнений с неизвестным  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} y_1 - x_1 &= 0, \\ \dots \\ y_j - x_j &= \lambda, \\ \dots \\ y_i - x_i &= -\lambda, \\ \dots \\ y_{n+1} - x_{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Известно, что точка  $x$  попадёт на  $(n - 1)$ -мерную грань симплекса без вершины  $A_i$  и не попадёт на остальные  $(n - 1)$ -мерные грани тогда и только тогда, когда координата  $y_i = 0$  и все остальные координаты  $y_s \neq 0$ .

Подставим в систему уравнений  $y_i = 0$ , тогда получим решение  $\lambda = x_i$ .

Если  $y_j = 0$ , то  $\lambda = -x_j < 0$ , а если  $y_s = 0 (s \neq i, s \neq j)$ , то  $x_s = 0$ . Но  $\lambda, x_s > 0$ .  $\square$

## 2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть  $\overline{T} = A_0 A_1 \dots A_n$  есть  $n$ -симплекс ( $n \geq 3$ ),  $d$  — диаметр этого симплекса (длина наибольшего ребра). Пусть  $c_n > 1$ . Назовём ребро длинным, если оно больше, чем  $\frac{d}{c_n}$ . Будем предполагать, что симплекс  $\overline{T}$  выбран таким образом, что в нём можно найти вершину, из которой выходят по крайней мере  $(n - 1)$  длинное ребро, и пусть это будет вершина  $A_n$ . Длинные рёбра обозначим  $[A_n A_m]$  и  $[A_n A_l]$ , а те, про которые неизвестно, являются ли они длинными или нет, назовём неизвестными и обозначим их  $[A_n A_s]$  ( $m < l < s$ ).

Пусть

$$M_4 = \max_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4} \max_{0 \leq i_j \leq 4: \sum i_j = 4} \max_{\mathbf{x} \in \overline{T}} \left| \frac{\partial^4 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_1^{i_1} \partial \mathbf{e}_2^{i_2} \partial \mathbf{e}_3^{i_3} \partial \mathbf{e}_4^{i_4}} \right|,$$

где  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$  — всевозможные направления в симплексе.

Будем считать, что точка  $x$  задана барицентрическими координатами  $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Пусть многочлен

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^n a_i x_i^3 + \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} a_{ij} x_i^2 x_j + \sum_{0 \leq i < j < k \leq n} a_{ijk} x_i x_j x_k$$





удовлетворяет следующим интерполяционным условиям:

$$f(A_i) = Q(A_i), \quad i = \overline{0, n}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial f(A_i)}{\partial e_{ij}} = \frac{\partial Q(A_i)}{\partial e_{ij}}, \quad i, j = \overline{0, n}, \quad i \neq j, \tag{4}$$

$$\frac{\partial(Q - f)(P_{nk})}{\partial e_{np}} = 0, \quad 0 \leq p < k < n, \tag{5}$$

$$\frac{\partial(Q - f)(P_{ij})}{\partial e_{np}} = 0, \quad 0 \leq i < j < p < n, \tag{6}$$

где  $P_{ij}$  есть середина отрезка  $[A_i A_j]$ ,  $e_{ij} = \frac{\overrightarrow{A_i A_j}}{|A_i A_j|}$ .

**Теорема 3.** Пусть  $f(\mathbf{x}) \in C^4(\overline{T})$ , тогда для любой точки  $\mathbf{x} \in \overline{T}$

$$\left| \frac{\partial^r(Q - f)(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}^i \partial e_{nl}^j \partial e_{ns}^{r-i-j}} \right| \leq 15c_n M_4 d^{4-r}, \quad 1 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq i, j \leq r, \quad i + j \leq r. \tag{7}$$

**Доказательство.** Обозначим

$$f_i = f(A_i), \quad i = \overline{0, n},$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial e_{kj}} = \frac{\partial f(A_i)}{\partial e_{kj}}, \quad k, j = \overline{0, n}, \quad k \neq j.$$

Коэффициенты  $a_i$  можно найти из условия (3):  $a_i = f_i$ .

Производные по направлениям вычисляются с помощью следующего правила:

$$\frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial e_{ij}} = \frac{1}{|A_i A_j|} \left( \frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial x_j} - \frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right). \tag{8}$$

Из этой же формулы и из интерполяционных условий (4) нетрудно найти коэффициенты  $a_{ij}$ :

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial e_{ij}} |A_i A_j| + 3f_i. \tag{9}$$

Из условий (5) и (6) можно вычислить оставшиеся  $C_{n+1}^3$  коэффициентов (или их разности, которые понадобятся в дальнейшем):

$$a_{mln} = 4 \frac{\partial f(P_{nl})}{\partial e_{nm}} |A_n A_m| + 6f_n + 2 \frac{\partial f_n}{\partial e_{nl}} |A_n A_l| + |A_n A_m| \left( \frac{\partial f_l}{\partial e_{mn}} + \frac{\partial f_n}{\partial e_{mn}} \right),$$

$$a_{ijm} - a_{ijn} = 4 \frac{\partial f(P_{ij})}{\partial e_{nm}} |A_n A_m| - \frac{\partial f_i}{\partial e_{nm}} |A_n A_m| - \frac{\partial f_j}{\partial e_{nm}} |A_n A_m|.$$

Производная многочлена третьего порядка, взятая три раза по одному и тому же направлению, имеет вид

$$\frac{\partial^3 Q(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}^3} = \frac{6}{|A_n A_m|^3} \left[ 2(f_n - f_m) + |A_n A_m| \left( \frac{\partial f_m}{\partial e_{nm}} + \frac{\partial f_n}{\partial e_{nm}} \right) \right].$$



Оценим отклонение  $\left| \frac{\partial^3(Q-f)(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}^3} \right|$ . Для этого представим  $f_n$  и  $\frac{\partial f_n}{\partial e_{nm}}$  по формуле Тейлора в окрестности точки  $A_m$  с остаточным членом в форме Лагранжа (в дальнейшем не будем указывать вид остатка, подразумевая форму Лагранжа), т. е.

$$f_n - f_m = \frac{\partial f_m}{\partial e_{mn}} |A_n A_m| + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f_m}{\partial e_{nm}^2} |A_n A_m|^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f_m}{\partial e_{nm}^3} |A_n A_m|^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial e_{nm}^4} |A_n A_m|^4,$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial e_{nm}} = \frac{\partial f_m}{\partial e_{nm}} + \frac{\partial^2 f_m}{\partial e_{nm}^2} |A_n A_m| + \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 f_m}{\partial e_{nm}^3} |A_n A_m|^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^4 f(\eta)}{\partial e_{nm}^4} |A_n A_m|^3,$$

где  $\xi$  и  $\eta$  — точки, лежащие на ребре  $[A_n A_m]$ .

Тогда имеем

$$\left| \frac{\partial^3(Q-f)(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}^3} \right| = \left| \frac{\partial^3 f_m}{\partial e_{nm}^3} - \frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}^3} + \frac{1}{|A_n A_m|^3} \left( |A_n A_m|^4 \frac{\partial^4 f(\eta)}{\partial e_{nm}^4} - \frac{|A_n A_m|^4}{2} \frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial e_{nm}^4} \right) \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{\partial^3 f_m}{\partial e_{nm}^3} - \frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}^3} \right| + \frac{1}{|A_n A_m|^3} \left| |A_n A_m|^4 \frac{\partial^4 f(\eta)}{\partial e_{nm}^4} - \frac{|A_n A_m|^4}{2} \frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial e_{nm}^4} \right|.$$

Применяя теорему о среднем на отрезке  $[\mathbf{x} A_m]$  по направлению  $\mathbf{e} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{x} A_m}}{|\mathbf{x} A_m|}$  и учитывая, что четвёртые производные ограничены, получаем следующее:

$$\left| \frac{\partial^3 f_m}{\partial e_{nm}^3} - \frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}^3} \right| + \frac{1}{|A_n A_m|^3} \left| |A_n A_m|^4 \frac{\partial^4 f(\eta)}{\partial e_{nm}^4} - \frac{|A_n A_m|^4}{2} \frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial e_{nm}^4} \right| \leq$$

$$\leq M_4 |\mathbf{x} A_m| + 2 |A_n A_m| M_4 \leq 3 M_4 d = 3 c_n M_4 d.$$

Теперь оценим смешанную производную  $\frac{\partial^3 Q(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}^2 \partial e_{ns}}$ , взятую два раза по «длинным» направлениям и один раз по «неизвестному».

Поскольку  $|A_i A_j| e_{ij} = |A_i A_k| e_{ik} + |A_k A_j| e_{kj}$ , то

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial e_{ij}} = \frac{|A_i A_k|}{|A_i A_j|} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial e_{ik}} + \frac{|A_k A_j|}{|A_i A_j|} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial e_{kj}}. \quad (10)$$

Применяя (5) и (10) в вычислении  $\frac{\partial^3 Q(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}^2 \partial e_{ns}}$ , получаем:

$$\frac{\partial^3 Q(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}^2 \partial e_{ns}} = \frac{2}{|A_n A_m|^2 |A_n A_s|} (-3f_n + a_{ms} + a_{ns} - a_{mn} + 2a_{nm} - a_{smn}) =$$

$$= \frac{2}{|A_n A_m|^2 |A_n A_s|} \left( |A_n A_m| \left( -4 \frac{\partial f(P_{ns})}{\partial e_{nm}} + \frac{\partial f_s}{\partial e_{nm}} + 3 \frac{\partial f_n}{\partial e_{nm}} \right) + |A_n A_s| \left( \frac{\partial f_m}{\partial e_{ns}} - \frac{\partial f_n}{\partial e_{ns}} \right) \right).$$

Представим  $\frac{\partial f(P_{ns})}{\partial e_{nm}}$ ,  $\frac{\partial f_s}{\partial e_{nm}}$  и  $\frac{\partial f_m}{\partial e_{ns}}$  по формуле Тейлора в окрестности точки  $A_n$ :

$$\frac{\partial f(P_{ns})}{\partial e_{nm}} = \frac{\partial f_n}{\partial e_{nm}} + \frac{|A_n A_s|}{2} \frac{\partial^2 f_n}{\partial e_{nm} \partial e_{ns}} + \frac{1}{2!} \left( \frac{|A_n A_s|}{2} \right)^2 \frac{\partial^3 f_n}{\partial e_{nm} \partial e_{ns}^2} + \frac{1}{3!} \left( \frac{|A_n A_s|}{2} \right)^3 \frac{\partial f(\xi)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns}^3},$$

$$\frac{\partial f_s}{\partial e_{nm}} = \frac{\partial f_n}{\partial e_{nm}} + \frac{\partial^2 f_n}{\partial e_{nm} \partial e_{ns}} |A_n A_s| + \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 f_n}{\partial e_{nm} \partial e_{ns}^2} |A_n A_s|^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^4 f(\eta)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns}^3} |A_n A_s|^3,$$



$$\frac{\partial f_m}{\partial e_{ns}} = \frac{\partial f_n}{\partial e_{ns}} + \frac{\partial^2 f_n}{\partial e_{ns} \partial e_{nm}} |A_n A_m| + \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 f_n}{\partial e_{ns} \partial e_{nm}^2} |A_n A_m|^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^4 f(\sigma)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns}^3} |A_n A_m|^3,$$

где  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\sigma$  — точки, лежащие на рёбрах  $[A_n A_s]$  и  $[A_n A_m]$  соответственно. Тогда, учитывая, что  $|A_n A_m| > \frac{d}{c_n}$ , и используя теорему о среднем, получаем:

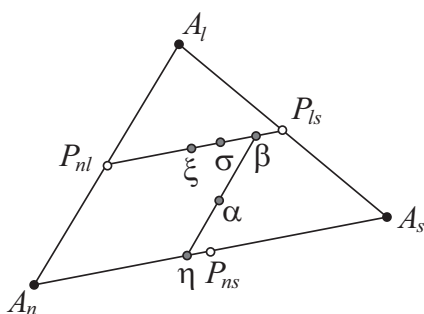
$$\left| \frac{\partial^3(Q - f)(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}^2 \partial e_{ns}} \right| \leq \left| \frac{\partial^3 f_m}{\partial e_{nm}^2 \partial e_{ns}} - \frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}^2 \partial e_{ns}} \right| + \frac{1}{|A_n A_m|^2 |A_n A_s|} \left| \frac{|A_n A_m| |A_n A_s|^3}{3} \frac{\partial^4 f(\eta)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns}^3} - \frac{4}{3} |A_n A_m| \left( \frac{|A_n A_s|}{2} \right)^3 \frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns}^3} + \frac{|A_n A_m|^3 |A_n A_s|}{6} \frac{\partial^4 f(\sigma)}{\partial e_{nm}^3 \partial e_{ns}} \right| \leq 3c_n M_4 d.$$

В случае, когда производная берётся по двум «неизвестным» направлениям и одному «длинному», оценка получается аналогично.

Теперь рассмотрим производную по трём различным направлениям.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 Q(\mathbf{x})}{\partial e_{nm} \partial e_{nl} \partial e_{ns}} &= \frac{a_{mls} - a_{lsn} + 2a_{nl} + a_{ns} - a_{msn} - a_{mln} - 6f_n + 2a_{nm}}{|A_n A_m| |A_n A_l| |A_n A_s|} = \\ &= \frac{4}{|A_n A_l| |A_n A_s|} \left( \frac{\partial f(P_{ls})}{\partial e_{nm}} - \frac{\partial f(P_{nl})}{\partial e_{nm}} - \frac{\partial f(P_{ns})}{\partial e_{nm}} + \frac{\partial f_n}{\partial e_{nm}} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим треугольник  $\Delta A_n A_l A_s$  (рис. 1): в нём отрезок  $[P_{nl} P_{ls}]$  есть средняя линия. Тогда по теореме о среднем



$$\begin{aligned} \frac{\partial f(P_{ls})}{\partial e_{nm}} - \frac{\partial f(P_{nl})}{\partial e_{nm}} &= \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns}} |P_{nl} P_{ls}| = \\ &= \frac{1}{2} |A_n A_s| \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns}}, \xi \in [P_{nl} P_{ls}]. \end{aligned}$$

По формуле Тейлора

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(P_{ns})}{\partial e_{nm}} &= \frac{\partial f_n}{\partial e_{nm}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns}} |A_n A_s|, \\ \eta &\in [P_{ns} A_n]. \end{aligned}$$

Рис. 1. Треугольник  $\Delta A_n A_l A_s$

Fig. 1. Triangle  $\Delta A_n A_l A_s$

Следовательно,

$$\frac{\partial^3 Q(\mathbf{x})}{\partial e_{nm} \partial e_{nl} \partial e_{ns}} = \frac{2}{|A_n A_l|} \left( \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns}} - \frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns}} \right).$$

Снова применяем теорему Тейлора, выбрав заранее точку  $\beta \in [P_{nl} P_{ns}]$  такую, что  $[\eta\beta] \parallel [A_n A_l]$ :

$$\frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns}} = \frac{\partial^2 f(\beta)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns}} - \frac{\partial^3 f(\alpha)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns} \partial e_{nl}} \frac{|A_n A_l|}{2}, \alpha \in [\eta\beta].$$

Подставляем

$$\frac{\partial^3 Q(\mathbf{x})}{\partial e_{nm} \partial e_{nl} \partial e_{ns}} = \frac{2}{|A_n A_l|} \left( \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns}} - \frac{\partial^2 f(\beta)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns}} + \frac{|A_n A_l|}{2} \frac{\partial^3 f(\alpha)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns} \partial e_{nl}} \right).$$



По теореме Лагранжа

$$\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns}} - \frac{\partial^2 f(\beta)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns}} = \xi \beta \left| \frac{\partial^3 f(\sigma)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns}^2} \right|.$$

В итоге получаем:

$$\frac{\partial^3 Q(\mathbf{x})}{\partial e_{nm} \partial e_{nl} \partial e_{ns}} = 2 \frac{|\xi \beta|}{|A_n A_l|} \frac{\partial^3 f(\sigma)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns}^2} + \frac{\partial^3 f(\alpha)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns} \partial e_{nl}}.$$

Оценим разность, используя полученные выше результаты:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^3(Q - f)(\mathbf{x})}{\partial e_{nm} \partial e_{nl} \partial e_{ns}} \right| &= \left| 2 \frac{|\xi \beta|}{|A_n A_l|} \frac{\partial^3 f(\sigma)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns}^2} + \frac{\partial^3 f(\alpha)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns} \partial e_{nl}} - \frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial e_{nm} \partial e_{ns} \partial e_{nl}} \right| \leq \\ &\leq 2 \frac{|\xi \beta|}{|A_n A_l|} \left| \frac{\partial^3 f(\sigma)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns}^2} \right| + \left| \frac{\partial^3 f(\alpha)}{\partial e_{nm} \partial e_{ns} \partial e_{nl}} - \frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial e_{nm} \partial e_{ns} \partial e_{nl}} \right| \leq 7c_n M_4 d. \end{aligned}$$

Для нахождения производных первого и второго порядка воспользуемся методом математической индукции.

1. Рассмотрим тетраэдр  $A_n A_m A_l A_s$ . Напомним, что ребро  $A_n A_s$  является неизвестным. Занумеруем его вершины:  $3 := n, 2 := s, 1 := l, 0 := m$ .

Тогда интерполяционные условия (5) и (6) для тетраэдра будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Q - f)(P_{31})}{\partial e_{30}} &= 0, & \frac{\partial(Q - f)(P_{32})}{\partial e_{30}} &= 0, \\ \frac{\partial(Q - f)(P_{32})}{\partial e_{31}} &= 0, & \frac{\partial(Q - f)(P_{01})}{\partial e_{32}} &= 0. \end{aligned}$$

Заметим, что от интерполяционных условий в [9] они отличаются только одним равенством.

Для всех граней, кроме  $\Delta A_0 A_1 A_2$ , нашего тетраэдра выполняются условия теоремы [14].

Рассмотрим треугольник  $\Delta A_3 A_2 A_1$ . В нём  $\frac{\partial(Q - f)(P_{32})}{\partial e_{31}} = 0$ , причём  $|A_3 A_1| > \frac{d}{c_n}$ . Это означает, что для этого треугольника можно воспользоваться теоремой [14]:

Для любого  $\mathbf{x} \in \Delta A_3 A_2 A_1$  справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial^r f(\mathbf{x})}{\partial e_{31}^k \partial e_{32}^{r-k}} \right| \leq 4c_n M_4 d^{4-r}, \quad 1 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq k \leq r.$$

Возьмём точку  $\mathbf{x} \in \Delta A_3 A_0 A_1 A_2$  и спроектируем её параллельно противоположному направлению  $A_0 A_3$  на грань  $\Delta A_3 A_2 A_1$ . Обозначим проекцию через  $\mathbf{c}$ . Тогда по теореме Лагранжа

$$\left| \frac{\partial^2(Q - f)(\mathbf{x})}{\partial e_{31} \partial e_{32}} \right| = \left| \frac{\partial^2(Q - f)(\mathbf{c})}{\partial e_{31} \partial e_{32}} - \frac{\partial^3(Q - f)(\xi)}{\partial e_{31} \partial e_{32} \partial e_{30}} \Big|_{A_3 A_0} \right| \leq 11c_n M_4 d^2,$$

аналогично и с остальными производными.



2. Нетрудно видеть, что для всех  $(n - 1)$ -граней  $n$ -симплекса  $A_n A_{n-1} \dots A_1 A_0$ , кроме грани  $A_{n-1} \dots A_0$ , выполняются условия доказываемой теоремы. Предположим, что в них можно получить требуемую оценку производных. Возьмём точку  $x$  в  $n$ -симплексе и спроектируем её параллельно противоположному «длинному» направлению  $\overrightarrow{A_n A_m}$  на ту грань, в которой известны оценки производной, которую мы аппроксимируем. По предложению 1 проекция будет лежать на  $(n - 1)$ -грани, не содержащей точку  $A_m$ . Аналогично первому пункту находим оценку для оставшихся производных.  $\square$

**Предложение 2.** 1. В любом тетраэдре можно найти вершину, из которой выходят по крайней мере два ребра, больших  $\frac{d}{2}$ , и в любом 4-симплексе есть вершина, из которой исходят по крайней мере три ребра, больших  $\frac{d}{2}$ .

2. Для любого натурального  $n \geq 5$  и для всякого  $c > 0$  существует такой  $n$ -симплекс, из всех вершин которого выходят по крайней мере два ребра, длина которых не больше чем  $\frac{d}{c}$ .

**Доказательство.** 1. Докажем первый пункт предложения. Так как 4-симплекс имеет 5 вершин  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ , каждая из которых соединена рёбрами со всеми остальными вершинами, то его можно рассматривать как полный граф с пятью вершинами (рис. 2).

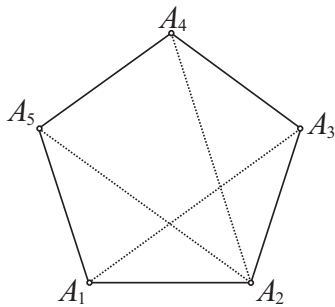


Рис. 2. 4-симплекс с выделенными рёбрами

Fig. 2. A 4-simplex with distinguished edges

Пусть  $[A_1 A_2]$  — самое длинное ребро в симплексе, т. е.  $|A_1 A_2| = d$ .

Рассмотрим треугольник  $\Delta A_1 A_2 A_3$ . В нём либо  $|A_1 A_3| > \frac{d}{2}$ , либо  $|A_2 A_3| > \frac{d}{2}$ , иначе по неравенству треугольника

$$d < |A_1 A_3| + |A_2 A_3| < \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d.$$

Пусть для определённости  $|A_1 A_3| > \frac{d}{2}$  (на рис. 2 выделены рёбра, которые больше, чем  $d/2$ ). Таким образом, так как  $A_1 A_2 A_3 A_4$  — тетраэдр, предложение для тетраэдра доказано.

Теперь рассмотрим треугольник  $\Delta A_1 A_2 A_4$ . Если в нём  $|A_1 A_4| > \frac{d}{2}$ , то первый пункт предложения доказан. Если же  $|A_2 A_4| > \frac{d}{2}$ , то аналогично рассматриваем  $\Delta A_1 A_2 A_5$ , и первый пункт доказан.

2. Для простоты докажем второй пункт для 5-симплекса. Доказательство для случая симплекса произвольной размерности получается аналогичным образом. Выберем  $x > 0$  и построим симплекс со следующими аффинно независимыми вершинами:

$$\begin{aligned} A_1 &= (x + 1, 1, 0, 0, 0), & A_2 &= (x, 1, 0, 0, 0), & A_3 &= (x, 0, 1, 0, 0), \\ A_4 &= (0, 0, 0, 1, 0), & A_5 &= (0, 0, 0, 0, 1), & A_6 &= (0, 0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$



Диаметр симплекса равен  $d(x) = \sqrt{(x+1)^2 + 2}$ . Выберем  $c > 0$  — произвольное. Тогда мы можем взять  $x$  достаточно большим, чтобы считать, что длины рёбер  $[A_1A_2]$ ,  $[A_1A_3]$ ,  $[A_2A_3]$ ,  $[A_4A_6]$ ,  $[A_5A_6]$  и  $[A_5A_6]$  будут меньше, чем  $\frac{d(x)}{c}$ . Таким образом, при любом  $c > 0$  можно найти 5-симплекс, из каждой вершины которого выходит по крайней мере два ребра, длина которых меньше, чем  $\frac{d}{c}$ .  $\square$

**Следствие 1.** В случаях размерностей  $n = 3$  и  $n = 4$  в неравенствах (7) можно избавиться от параметра  $c_n$  и получить следующие оценки:

$$\left| \frac{\partial^r(Q-f)(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}^i \partial e_{ni}^j \partial e_{ns}^{r-i-k}} \right| \leq 30M_4 d^{4-r}, \quad 1 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq i, j \leq r, \quad i+j \leq r.$$

Второй пункт предложения означает, что если  $n \geq 5$ , то в неравенствах (7) нельзя избавиться от параметра  $c_n$ . Отметим, что с похожей проблемой столкнулась Н. В. Байдакова в работе [15], где интерполяция проводилась в равномерных узлах симплекса.

**Благодарности.** Автор признателен профессору Сергею Фёдоровичу Лукомскому за постановку задачи и внимание к работе.

### Библиографический список

1. Ciarlet P. G., Paviart P. A. General Lagrange and Hermite interpolation in  $\mathbb{R}^n$  with applications to finite element methods // Arch. Rational Mech. Anal. 1972. Vol. 46, iss. 3. P. 177–199. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00252458>
2. Субботин Ю. Н. Зависимость оценок многомерной кусочно-полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 189. С. 117–137.
3. Субботин Ю. Н. Погрешность аппроксимации интерполяционными многочленами малых степеней на  $n$ -симплексах // Матем. заметки. 1990. Т. 48, вып. 4. С. 88–99.
4. Килижеков Ю. А. Погрешность аппроксимации интерполяционными многочленами первой степени на  $n$ -симплексах // Матем. заметки. 1996. Т. 60, вып. 4. С. 504–510. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1858>
5. Куприянова Ю. В., Лукомский С. Ф. Об оптимальном выборе интерполяционного сплайна по треугольной сетке // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 5, вып. 1–2. С. 26–33.
6. Матвеева Ю. В. Об эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике с использованием смешанных производных // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2007. Т. 7, вып. 1. С. 23–27.
7. Мелешкина А. В. Об аппроксимации производных интерполяционного многочлена Эрмита на треугольнике // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50, № 2. С. 211–220.
8. Zenisek A. Maximum-angle condition and triangular finite element of Hermite type // Math. Comput. 1995. Vol. 64, № 211. P. 929–941. DOI: <https://doi.org/10.2307/2153477>
9. Куприянова Ю. В. Об одной теореме из теории сплайнов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48, № 2. С. 206–211.





10. Клячин В. А., Шуркаева Д. В. Коэффициент изопериметричности симплекса в задаче аппроксимации производных // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 151–160. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-2-151-160>
11. Клячин В. А., Широкий А. А. Триангуляция Делоне многомерных поверхностей и ее аппроксимационные свойства // Изв. вузов. Матем. 2012. № 1. С. 31–39.
12. Клячин В. А. Модифицированное условие пустой сферы Делоне в задаче аппроксимации градиента // Изв. РАН. Сер. матем. 2016. Т. 80, № 3. С. 95–102. DOI: <https://doi.org/10.4213/im8350>
13. Клячин В. А. О многомерном аналоге примера Шварца // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76, № 4. С. 41–48. DOI: <https://doi.org/10.4213/im6845>
14. Куприянова Ю. В. Об аппроксимации производных интерполяционного многочлена по направлениям на треугольнике // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронеж. зимн. матем. шк. Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2007. С. 120–121.
15. Байдакова Н. В. Об оценках П. Жамэ для конечных элементов с интерполяцией в равномерных узлах симплекса // Матем. тр. 2017. Т. 20, вып. 1. С. 43–74. DOI: <https://doi.org/10.17377/mattrudy.2017.20.103>

---

**Образец для цитирования:**

Хасянов Р. Ш. Эрмитова интерполяция на симплексе // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 3. С. 316–327. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-316-327>

---

## Hermite Interpolation on a Simplex

R. Sh. Khasyanov

Khasyanov Ramis Shavkyatovich, <https://orcid.org/0000-0002-2819-5781>, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, hasbendshurich@gmail.com

In the paper, we solve the problem of polynomial interpolation and approximation functions of several variables on an  $n$ -dimensional simplex in the uniform norm using polynomials of the third degree. We choose interpolation conditions in terms of derivatives in the directions of the edges of a simplex. In the same terms we obtained estimates of the deviation of derivatives of polynomial from the corresponding derivatives of an interpolated function under the assumption that the interpolated function has continuous directional derivatives up to the fourth order inclusive. We defined a long edge and in these terms we introduce the geometric characteristics of the simplex. It is proved that for dimensions 3 and 4, the interpolation conditions can be chosen so that the estimates the deviations of the derivatives do not depend on the geometry of the simplex, and in the cases of dimensions greater than 4 with the selected interpolation conditions it is impossible.

*Key words:* Hermite spline, simplex, multidimensional interpolation on simplexes, finite element method.

**Acknowledgements:** The author is grateful to Prof. Lukomskii for setting the goal and the attention he paid to this research.



## References

1. Ciarlet P. G., Paviart P. A. General Lagrange and Hermite interpolation in  $\mathbb{R}^n$  with applications to finite element methods. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1972, vol. 46, iss. 3, pp. 177–199. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00252458>
2. Subbotin Yu. N. Dependence of estimates of a multidimensional piecewise polynomial approximation on the geometric characteristics of the triangulation. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1990, vol. 189, pp. 135–159.
3. Subbotin Yu. N. Error of the approximation by interpolation polynomials of small degrees on  $n$ -simplices. *Math. Notes*, 1990, vol. 48, iss. 4, pp. 1030–1037. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01139604>
4. Kilizhekov Yu. A. Approximation error for linear polynomial interpolation on  $n$ -simplices. *Math. Notes*, 1996, vol. 60, iss.4, pp. 378–382. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02305420>
5. Kupriyanova Yu. V., Lukomskiy S. F. On optimal choice of interpolation spline on triangular net. *Izv. Saratov Univ. (N. S.) Ser. Math. Mech. Inform.*, 2005, vol. 5, iss. 1–2, pp. 26–33 (in Russian).
6. Matveeva Yu. V. Method of Hermite Interpolation by Polynomials of the Third Degree on a Triangle Using Mixed Derivatives. *Izv. Saratov Univ. (N. S.) Ser. Math. Mech. Inform.*, 2007, vol. 7, iss. 1, pp. 23–27 (in Russian).
7. Meleshkina A. V. On the approximation of derivatives of the interpolation Hermite polynomial on a triangle. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2010, vol. 50, iss. 2, pp. 201–210. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542510020016>
8. Zenisek A. Maximum-angle condition and triangular finite element of Hermite type. *Math. Comput.*, 1995, vol. 64, no. 211, pp. 929–941. DOI: <https://doi.org/10.2307/2153477>
9. Kupriyanova Yu. V. On a theorem in spline theory. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2008, vol. 48, iss. 2, pp. 195–200. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11470-008-2003-5>
10. Klyachin V. A., Shurkaeva D. V. Isoperimetry Coefficient for Simplex in the Problem of Approximation of Derivatives. *Izv. Saratov Univ. (N. S.) Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 151–160 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-2-151-160>
11. Klyachin V. A., Shirokiy A. A. Delaunay triangulation of multidimensional surfaces and its approximation properties. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2012, vol. 56, iss. 1, pp. 27–34. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X12010045>
12. Klyachin V. A. Modified Delaunay empty sphere condition in the problem of approximation of the gradient. *Izv. Math.*, 2016, vol. 80, iss. 3, pp. 549–556. DOI: <https://doi.org/10.1070/IM8350>
13. Klyachin V. A. On a multidimensional analogue of the Schwarz example. *Izv. Math.*, 2012, vol. 76, iss. 4, pp. 681–687. DOI: <https://doi.org/10.1070/IM2012v076n04ABEH002601>
14. Kupriyanova Yu. V. Approximation of directional derivatives of interpolating polynomial on a triangle. *Contemporary Methods in Theory of Functions and Adjacent Problems : Proc. of the Voronezh Winter Mathematical School*. Voronezh, Voronezh State Univ., 2007, pp. 120–121 (in Russian).
15. Baydakova N. V. Jamet estimates for finite elements with interpolation in uniform nodes of a simplex. *Siberian Adv. Math.*, 2017, vol. 28, iss. 1, pp. 1–22. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1055134418010017>

---

### Cite this article as:

Khasyanov R. Sh. Hermite Interpolation on a Simplex. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 316–327 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-316-327>

---



## On Inverse Problem for Differential Operators with Deviating Argument

V. A. Yurko

Vjacheslav A. Yurko, <https://orcid.org/0000-0002-4853-0102>, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, YurkoVA@info.sgu.ru

Second-order functional differential operators with a constant delay are considered. Properties of their spectral characteristics are obtained, and a nonlinear inverse spectral problem is studied, which consists in constructing operators from their spectra. We establish the uniqueness and develop a constructive procedure for solution of the inverse problem.

*Key words:* differential operators, deviating argument, inverse spectral problem.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-328-333>

### INTRODUCTION

We study the inverse spectral problem for Sturm – Liouville differential operators with a constant delay. Such problems often appear in natural sciences and engineering (see, for example, monograph [1] and the references therein). Inverse spectral problems consist in constructing operators with given spectral characteristics. For the classical Sturm – Liouville operators the inverse problems have been studied fairly completely; the main results can be found in [2, 3]. However, differential operators with delay are essentially more difficult for investigating, since the main methods in the inverse problem theory (the transformation operator method and the method of spectral mappings [2, 3]) do not work for operators with delay. Note that some particular results on the inverse problems for operators with delay were obtained in [4–7].

Consider the boundary value problems  $L_j(q)$ ,  $j = 1, 2$ :

$$-y''(x) + q(x)y(x - a) = \lambda y(x), \quad x \in (0, \pi), \quad (1)$$

$$y(0) = y'(\pi) + H_j y(\pi) = 0, \quad (2)$$

where  $\lambda$  is the spectral parameter,  $a \in (0, \pi)$ ,  $q(x) \in L(a, \pi)$  is a complex-valued function, and  $q(x) \equiv 0$  for  $x \in [0, a]$ . We study the inverse problem of constructing the potential  $q(x)$  and the coefficients  $H_j$  from the given two spectra of the boundary value problems  $L_j(q)$ . More precisely, let  $\{\mu_{nj}\}_{n \geq 0}$ ,  $j = 1, 2$  be the eigenvalues of the problems  $L_j(q)$ .

**Inverse problem 1.** Given  $\{\mu_{nj}\}_{n \geq 0}$ ,  $j = 1, 2$ , construct  $q(x)$  and  $H_j$ .

We note that in the case of *large delay* when  $a \geq \pi/2$ , the characteristic functions of the problems  $L_j(q)$  depend on the potential  $q(x)$  linearly, i.e. the inverse problem becomes linear. This linear case was studied in [5, 7]. For  $a < \pi/2$  the characteristic functions depend on the potential nonlinearly, i.e. the inverse problem becomes nonlinear. This nonlinear case is seriously more difficult for investigating and for constructing the global solution of the inverse problem. In this paper we study namely nonlinear case. For definiteness, let  $a \in [2\pi/5, \pi/2)$ . The case  $a < 2\pi/5$  requires separate consideration. The main results of the paper are Theorem 1 and Algorithm 1, where a global constructive procedure for solving the inverse problem is provided, and the uniqueness of the solution is proved.



### 1. PROPERTIES OF SPECTRAL CHARACTERISTICS

Let  $S(x, \lambda)$  be the solution of Eq. (1) under the initial conditions  $S(0, \lambda) = 0$ ,  $S'(0, \lambda) = 1$ . Eigenvalues of the boundary value problem (1)–(2) coincide with the zeros of its characteristic function

$$p_j(\lambda) := S'(\pi, \lambda) + H_j S(\pi, \lambda), \quad j = 1, 2. \tag{3}$$

**Lemma 1.** *Boundary value problem  $L_j$  has a countable set of eigenvalues  $\{\mu_{nj}\}_{n \geq 0}$ , and for  $n \rightarrow \infty$ :*

$$\sqrt{\mu_{nj}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{A_0 \cos(n + 1/2)a}{2\pi n} + \frac{H_j}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{4}$$

where  $A_0 = \int_a^\pi q(t) dt$ .

**Lemma 2.** *The specification of the spectrum  $\{\mu_{nj}\}_{n \geq 0}$  uniquely determines  $p_j(\lambda)$  via*

$$p_j(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_{nj} - \lambda}{(n + 1/2)^2}. \tag{5}$$

Let us study the connections between the characteristic functions  $p_j(\lambda)$  and the potential  $q(x)$ . Let  $\lambda = \rho^2$ . The function  $S(x, \lambda)$  satisfies the integral equation

$$S(x, \lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_a^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q(t) S(t-a, \lambda) dt. \tag{6}$$

Solving (6) we get for  $x \geq 2a$ :

$$S(x, \lambda) = S_0(x, \lambda) + S_1(x, \lambda) + S_2(x, \lambda),$$

where

$$S_0(x, \lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho}, \tag{7}$$

$$S_1(x, \lambda) = \int_a^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q(t) S_0(t-a, \lambda) dt, \tag{8}$$

$$S_2(x, \lambda) = \int_{2a}^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q(t) S_1(t-a, \lambda) dt, \tag{9}$$

Using (7) and (8), we calculate

$$S_1(x, \lambda) = -\frac{\cos \rho(x-a)}{2\rho^2} \int_a^x q(t) dt + \frac{1}{2\rho^2} \int_a^x q(t) \cos \rho(x-2t+a) dt. \tag{10}$$

Denote  $\Delta_k(\lambda) := S^{(k)}(\pi, \lambda)$ ,  $k = 0, 1$ . In view of (3), one has

$$p_j(\lambda) := \Delta_1(\lambda) + H_j \Delta_0(\lambda), \quad j = 1, 2, \tag{11}$$



and consequently,

$$\Delta_0(\lambda) = \frac{1}{H_1 - H_2} (p_1(\lambda) - p_2(\lambda)). \tag{12}$$

Taking (7), (9) and (10) into account, we obtain

$$\Delta_0(\lambda) = \frac{\sin \rho \pi}{\rho} - A_0 \frac{\cos \rho(\pi - a)}{2\rho^2} + \frac{1}{2\rho^2} \int_a^\pi q(t) \cos \rho(2t - \pi - a) dt + S_2(\pi, \lambda),$$

$$\Delta_1(\lambda) = \cos \rho \pi + A_0 \frac{\sin \rho(\pi - a)}{2\rho} + \frac{1}{2\rho} \int_a^\pi q(t) \sin \rho(2t - \pi - a) dt + S'_2(\pi, \lambda).$$

Denote

$$\Delta_0^*(\rho) := 2\rho^2 \left( \Delta_0(\lambda) - \frac{\sin \rho \pi}{\rho} + A_0 \frac{\cos \rho(\pi - a)}{2\rho^2} \right), \tag{13}$$

$$\Delta_1^*(\rho) := 2\rho \left( \Delta_1(\lambda) - \cos \rho \pi - A_0 \frac{\sin \rho(\pi - a)}{2\rho} \right). \tag{14}$$

Then

$$\Delta_0^*(\rho) = \int_a^\pi q(t) \cos \rho(2t - \pi - a) dt + \delta_0(\rho), \tag{15}$$

$$\Delta_1^*(\rho) = \int_a^\pi q(t) \sin \rho(2t - \pi - a) dt + \delta_1(\rho), \tag{16}$$

where  $\delta_0(\rho) = 2\rho^2 S_2(\pi, \lambda)$ ,  $\delta_1(\rho) = 2\rho S'_2(\pi, \lambda)$ . Using (9) and (10), we infer

$$2\rho \delta_0(\rho) = -A \sin \rho(\pi - 2a) + \frac{1}{2} \int_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)} Q(\xi) \sin \rho \xi d\xi, \tag{17}$$

$$2\rho \delta_1(\rho) = -A \cos \rho(\pi - 2a) - \frac{1}{2} \int_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)} Q(\xi) \cos \rho \xi d\xi, \tag{18}$$

where

$$A = \int_{2a}^\pi q(t) dt \int_a^{t-a} q(s) ds,$$

$$Q(\xi) = Q_1(\xi/2 + \pi/2 + a) - Q_2(\xi/2 + \pi/2) - Q_3(\xi/2 + \pi/2),$$

$$Q_1(x) = q(x) \int_a^{x-a} q(s) ds, \quad Q_2(x) = q(x) \int_{x+a}^\pi q(s) ds, \quad Q_3(x) = \int_{x+a}^\pi q(s) q(s-x) ds.$$

For simplicity we assume that  $q(x) \in AC[a, \pi]$ . The general case requires small technical modifications. Denote  $q_1(x) := q'(x)$ . Taking (15)–(18) into account, we get

$$\begin{aligned} 4\rho \Delta_0^*(\rho) &= B_1 \sin \rho(\pi - a) - 2A \sin \rho(\pi - 2a) - \\ &- \int_{-(\pi-a)}^{(\pi-a)} q_0(\xi) \sin \rho \xi d\xi + \int_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)} Q(\xi) \sin \rho \xi d\xi, \\ 4\rho \Delta_1^*(\rho) &= B_2 \cos \rho(\pi - a) - 2A \cos \rho(\pi - 2a) + \end{aligned} \tag{19}$$



$$+ \int_{-(\pi-a)}^{(\pi-a)} q_0(\xi) \cos \rho \xi \, d\xi - \int_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)} Q(\xi) \cos \rho \xi \, d\xi, \tag{20}$$

where  $B_1 = 2(q(a) + q(\pi))$ ,  $B_2 = 2(q(a) - q(\pi))$ ,  $q_0(\xi) = q_1(\xi/2 + \pi/2 + a/2)$ . Denote

$$d_0(\rho) = 4\rho\Delta_0^*(\rho) - B_1 \sin \rho(\pi - a) + 2A \sin \rho(\pi - 2a), \tag{21}$$

$$d_1(\rho) = 4\rho\Delta_1^*(\rho) - B_2 \cos \rho(\pi - a) + 2A \cos \rho(\pi - 2a). \tag{22}$$

It follows from (19)–(20) and (21)–(22) that

$$d_0(\rho) = - \int_{-(\pi-a)}^{(\pi-a)} R(\xi) \sin \rho \xi \, d\xi, \quad d_1(\rho) = \int_{-(\pi-a)}^{(\pi-a)} R(\xi) \cos \rho \xi \, d\xi, \tag{23}$$

where  $R(\xi) = q_0(\xi) - Q(\xi)$ , and  $Q(\xi) \equiv 0$  outside the interval  $(-\pi - 2a, \pi - 2a)$ . In particular, this yields

$$q_1(x) = R(2x - \pi - a) + Q_1(x + a/2) - Q_2(x - a/2) - Q_3(x - a/2), \quad x \in (3a/2, \pi - a/2). \tag{24}$$

Denote by  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  the zeros of the entire function  $\Delta_0(\lambda)$ . Then

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{A_0 \cos na}{2\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{25}$$

## 2. SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM

In this section we present our main results: a constructive procedure for solving the inverse problem and the corresponding uniqueness theorem. The solution of Inverse problem 1 can be found by the following algorithm.

**Algorithm 1.** Let the spectra  $\{\mu_{nj}\}_{n \geq 0}$ ,  $j = 1, 2$  be given.

1. Construct  $p_j(\lambda)$ ,  $j = 0, 1$ , via (5).
2. Find  $H_1 - H_2$ , using (4):

$$H_1 - H_2 = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{\mu_{n1}} - \sqrt{\mu_{n2}}).$$

3. Construct  $\Delta_0(\lambda)$ , using (12), and calculate  $\lambda_n$ .
4. Find  $A_0$  from (25).
5. Calculate  $H_1$  and  $H_2$ , using (4).
6. Find  $\Delta_1(\lambda)$  from (11).
7. Construct  $\Delta_j^*(\lambda)$ ,  $j = 0, 1$ , according to (13) and (14).
8. Calculate  $A, B_1$  and  $B_2$ , using (19) and (12), and find

$$q(a) = (B_1 + B_2)/4, \quad q(\pi) = (B_1 - B_2)/4.$$

9. Construct  $d_0(\rho)$  and  $d_1(\rho)$  by (21) and (22).
10. Calculate  $R(\xi)$ , using (23).
11. Find  $q_0(\xi)$  for  $\xi \in (-\pi - a, -(\pi - 2a)) \cup (\pi - 2a, \pi - a)$ :  $q_0(\xi) = R(\xi)$ .
12. Calculate  $q_1(x) = q_0(2x - \pi - a)$  for  $x \in (a, 3a/2) \cup (\pi - a/2, \pi)$ .





13. Find

$$q(x) = q(a) + \int_a^x q_1(t) dt, \quad x \in (a, 3a/2), \quad q(x) = q(\pi) - \int_x^\pi q_1(t) dt, \quad x \in (\pi - a/2, \pi).$$

14. Using (24) and knowledge of  $q(x)$  for  $x \in (a, 3a/2) \cup (\pi - a/2, \pi)$ , construct  $q_1(x)$  for  $x \in (3a/2, \pi - a/2)$ :

$$q_1(x) = R(2x - \pi - a) + q(x + a/2) \int_a^{x-a/2} q(s) ds - q(x - a/2) \int_{x+a/2}^\pi q(s) ds - \int_{x+a/2}^\pi q(s)q(s - x + a/2) ds.$$

15. Calculate  $q(x)$  for  $x \in (3a/2, \pi - a/2)$ .

Thus, the following theorem is proved.

**Theorem 1.** *The specification of two spectra  $\{\mu_{nj}\}_{n \geq 0}$ ,  $j = 1, 2$  uniquely determines the potential  $q(x)$  and the coefficients  $H_1, H_2$ . The solution of Inverse problem 1 can be found by Algorithm 1.*

**Acknowledgements:** This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project nos. 1.1660.2017/4.6) and by the Russian Foundation for Basic Research (projects nos. 16-01-00015, 17-51-53180).

## References

1. Hale J. *Theory of functional-differential equations*. New York, Springer-Verlag, 1977. 420 p.
2. Freiling G., Yurko V. *Inverse Sturm–Liouville Problems and Their Applications*. New York, NOVA Science Publishers, 2001. 305 p.
3. Yurko V. *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht, VSP, 2002. 316 p.
4. Freiling G., Yurko V. Inverse problems for Sturm–Liouville differential operators with a constant delay. *Appl. Math. Lett.*, 2012, vol. 25, iss. 11, pp. 1999–2004. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aml.2012.03.026>
5. Vladičić V., Pikula M. An inverse problem for Sturm–Liouville-type differential equation with a constant delay. *Sarajevo J. Math.*, 2016, vol. 12(24), no. 1, pp. 83–88. DOI: <https://doi.org/10.5644/SJM.12.1.06>
6. Yurko V., Buterin S., Pikula M. Sturm–Liouville differential operators with deviating argument. *Tamkang J. Math.*, 2017, vol. 48, no. 1, pp. 61–71. DOI: <https://doi.org/10.5556/j.tkjm.48.2017.2264>
7. Buterin S., Yurko V. An inverse spectral problem for Sturm–Liouville operators with a large constant delay. *Anal. Math. Phys.*, 2017, pp. 1–11. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13324-017-0176-6>

## Cite this article as:

Yurko V. A. On Inverse Problem for Differential Operators with Deviating Argument. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 328–333. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-328-333>



УДК 517.984

## ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

В. А. Юрко

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической физики и вычислительной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, YurkoVA@info.sgu.ru

Рассматриваются функционально-дифференциальные операторы второго порядка с постоянным запаздыванием. Установлены свойства их спектральных характеристик и исследуется нелинейная обратная спектральная задача, которая состоит в построении операторов по их спектрам. Доказана единственность решения обратной задачи и указана конструктивная процедура ее решения.

*Ключевые слова:* дифференциальные операторы, отклоняющийся аргумент, обратная спектральная задача.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1660.2017/4.6) и РФФИ (проекты № 16-01-00015, № 17-51-53180).

---

### Образец для цитирования:

Yurko V. A. On Inverse Problem for Differential Operators with Deviating Argument [Юрко В. А. Об обратной задаче для дифференциальных операторов с отклоняющимся аргументом] // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 3. С. 328–333. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-328-333>

---

## МЕХАНИКА

УДК 531.396;629.78

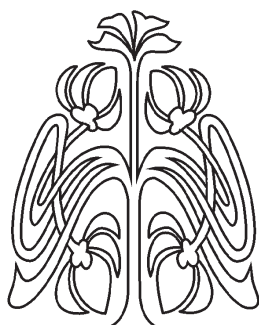
### ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ КОСМИЧЕСКОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ ПРИ БУКСИРОВКЕ ПАССИВНОГО АППАРАТА С ОСТАТКАМИ ТОПЛИВА

**А. А. Авраменко, В. С. Асланов**

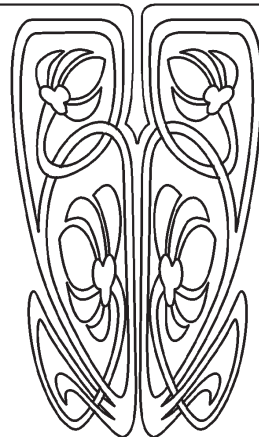
Авраменко Александр Алексеевич, кандидат технических наук, профессор кафедры теоретической механики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, Россия, 443086, Самара, Московское шоссе, 34, avramenko\_a\_a@mail.ru

Асланов Владимир Степанович, доктор технических наук, заведующий кафедрой теоретической механики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, Россия, 443086, Самара, Московское шоссе, 34, aslanov\_vs@mail.ru

Рассматривается задача увода с орбиты крупногабаритного космического мусора с помощью тросовой транспортной системы, включающей в себя орбитальный буксир, трос и нефункционирующий космический аппарат с остатками топлива. Исследуется движение выбранной системы в плоскости орбиты при допущении, что орбита является круговой. Движение тросовой системы изучается в орбитальной системе отсчета в предположении, что тяга орбитального буксира постоянна, как по величине, так и по направлению. На основе формализма Лагранжа построены нелинейные уравнения движения, в которых, кроме сил инерции, учтены гравитационные моменты. Определены два варианта устойчивых положений относительного равновесия, реализация которых определяется основными параметрами тросовой системы: соотношением линейных размеров и масс троса, орбитального буксира и пассивного аппарата. Составлены уравнения первого приближения, описывающие колебания системы в окрестности каждого из двух вариантов положений относительного равновесия. Анализ коэффициентов этих уравнений показал, что при определенном соотношении параметров системы возможно сближение всех трех собственных частот системы. Найдены условия, при выполнении которых частоты имеют близкие значения. Приведены результаты численного моделирования движения нелинейной системы, подтверждающие возможность обмена энергией при колебаниях с близкими частотами. Показано, что при увеличении начальных отклонений от относитель-



**НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ**





ного равновесия в системе возможно возникновение хаотических колебаний. Результаты работы могут быть полезны для анализа поведения и выбора параметров тросовой транспортной системы, предназначенной для увода с орбиты космического мусора с остатками топлива (верхних ступеней ракет-носителей и нефункционирующих спутников).

*Ключевые слова:* космическая тросовая система, космический мусор, положения равновесия, орбита.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-334-346>

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящее время широко изучаются возможности применения тросовых систем для многих операций в космосе [1–3], в том числе для увода космического мусора с орбиты. В этих задачах весьма важными являются вопросы, связанные с движением закрепленного на тросе спутника относительно центра масс [4]. Анализ поведения крупногабаритного космического мусора (верхних ступеней ракет-носителей и нефункционирующих спутников), буксируемого с помощью троса, требует изучения его движения вокруг центра масс. В работах [5–10] дан анализ движения таких тросовых систем с учетом упругих свойств троса и космического мусора, а также других факторов. В ряде работ рассматриваются вопросы влияния наличия топлива на вращение космического аппарата [11, 12] и устойчивости космических тросовых систем [13]. Однако в этих работах не учитывается большой класс пассивных космических объектов, подлежащих уводу с орбиты и содержащих на своем борту остатки топлива. В статье изучается плоское движение на круговой орбите тросовой системы, состоящей из космического буксира, троса и нефункционирующего космического аппарата с остатками топлива. Целью работы является поиск и анализ возможных устойчивых орбитальных конфигураций рассматриваемой тросовой системы.

## 2. ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ И ПАРАМЕТРЫ СИСТЕМЫ

Рассматривается совместное движение космической тросовой системы, состоящей из орбитального буксира и буксируемого космического аппарата (КА) с остатками топлива в баках. Буксир и КА связаны между собой тросом (рис. 1). Ограничимся рассмотрением тех случаев, когда все движения происходят в плоскости орбиты, а сама орбита является круговой. Для составления уравнений движения космической тросовой системы выберем орбитальную систему координат, начало которой — точка  $O$  — соответствует начальному положению буксира. Ось  $Oz$  направлена от центра Земли, а ось  $Ox$  — перпендикулярно оси  $Oz$  по направлению движения буксира (см. рис. 1).

Орбитальная система координат вращается вокруг центра Земли с угловой скоростью [14]  $\omega = n = \sqrt{\gamma M}/r_O^{3/2} = \sqrt{K}/r_O^{3/2}$ , где  $\gamma$  — универсальная гравитационная постоянная,  $M$  — масса Земли,  $r_O$  — расстояние от центра Земли до начального положения буксира. Будем считать, что движение орбитального буксира полностью определяется работой его системы ориентации и тягового двигателя. Это позволяет в пределах рассматриваемой задачи не учитывать его ориентацию и рассматривать буксир как материальную точку  $A$  массой  $m_1$ . Тяга двигателя  $\mathbf{F}$  имеет постоянную



величину и направлена вдоль оси  $Ox$   $\mathbf{F} = F\mathbf{i} = \text{const}$ . Трос длиной  $l$  полагается невесомым и нерастяжимым. Буксируемый космический аппарат имеет массу  $m_2$ , его моменты инерции относительно центральных осей  $A, B, C$  соответственно. Расстояние от точки крепления троса до центра масс КА —  $a$ . Для описания движения остатков топлива в баках КА будем использовать модель присоединенного осциллятора в виде математического маятника [15] (см. рис. 1).

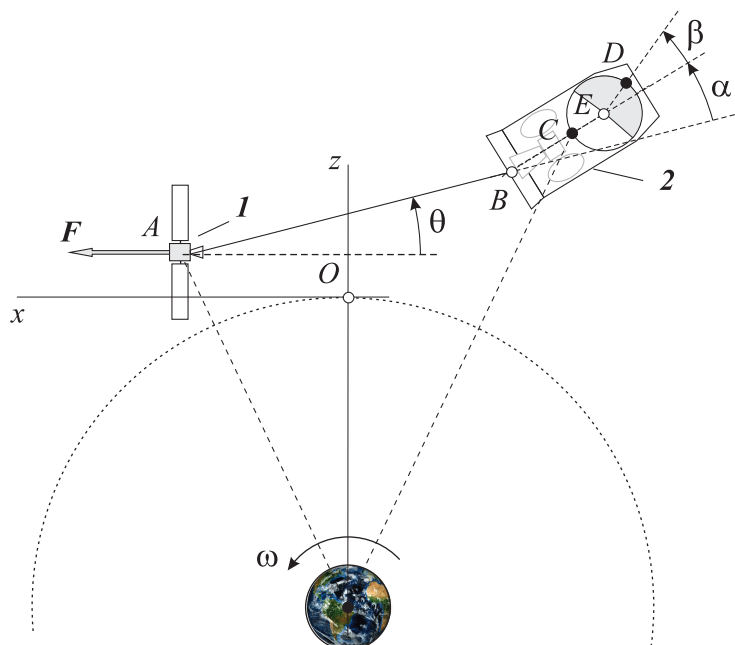


Рис. 1. Состав космической буксируемой системы, орбитальная система отсчета и выбранные координаты: 1 — орбитальный буксир, 2 — космический аппарат с остатками топлива

Fig. 1. Space tethered system, orbital frame and coordinates: 1 — orbit tug, 2 — spacecraft with fuel residuals

Параметры маятниковой модели: длина приведенного маятника  $ED = b$ , масса маятника  $m_3$ , расстояние от точки подвеса до точки крепления троса  $BE = d$ .

### 3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Для составления уравнений движения в орбитальной системе координат воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, s. \quad (1)$$

Положение рассматриваемой системы в плоскости движения полностью определяется пятью координатами, показанными на рис. 1. Координаты  $x_A$  и  $z_A$  определяют положение буксира в орбитальной системе координат, угол  $\vartheta$  задает отклонение троса от оси  $Ox$ , угол  $\alpha$  — поворот буксируемого аппарата относительно троса и угол  $\beta$  — отклонение маятника от оси буксируемого аппарата. Через компоненты вектора обобщенных координат

$$\mathbf{q} = (x_A, z_A, \theta, \alpha, \beta)^T \quad (2)$$



и соответствующие им скорости выразим кинетическую энергию системы, которая складывается из кинетических энергий буксира  $T_1$ , буксируемого аппарата  $T_2$  и колеблющихся остатков топлива  $T_3$  :  $T = T_1 + T_2 + T_3$ . Если кинетическую энергию представить в векторно-матричной форме:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}, \quad (3)$$

то отличные от нуля элементы матрицы инерции  $\mathbf{A}$  определяются через параметры системы и обобщенные координаты следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_1 + m_2 + m_3, \\ a_{13} = a_{31} &= m_2 [l \sin \vartheta + a \sin (\alpha + \vartheta)] + m_3 [b \sin (\alpha + \beta + \vartheta) + l \sin \theta + d \sin (\alpha + \vartheta)], \\ a_{14} = a_{41} &= m_2 a \sin (\alpha + \vartheta) + m_3 [b \sin (\alpha + \beta + \vartheta) + d \sin (\alpha + \vartheta)], \\ a_{15} = a_{51} &= m_3 b \sin (\alpha + \beta + \vartheta), \quad a_{22} = m_1 + m_2 + m_3, \\ a_{23} = a_{32} &= m_2 [l \cos \vartheta + a \cos (\alpha + \vartheta)] + m_3 [b \cos (\alpha + \beta + \vartheta) + l \cos \vartheta + d \cos (\alpha + \vartheta)], \\ a_{24} = a_{42} &= m_2 a \cos (\alpha + \vartheta) + m_3 [b \cos (\alpha + \beta + \vartheta) + d \cos (\alpha + \vartheta)], \\ a_{25} = a_{52} &= m_3 b \cos (\alpha + \beta + \vartheta), \\ a_{33} &= m_2 (l^2 + a^2 + 2al \cos \alpha) + B + m_3 [l^2 + d^2 + b^2 + 2bl \cos (\alpha + \beta) + \\ &\quad + 2dl \cos \alpha + 2bd \cos \beta], \\ a_{34} = a_{43} &= m_2 [a^2 + al \cos \alpha] + B + m_3 [d^2 + b^2 + bl \cos (\alpha + \beta) + dl \cos \alpha + 2bd \cos \beta], \\ a_{35} = a_{53} &= m_3 (b^2 + bl \cos (\alpha + \beta) + bd \cos \beta), \\ a_{44} &= m_2 a^2 + B + m_3 (d^2 + b^2 + 2bd \cos \beta), \\ a_{45} = a_{54} &= m_3 (b^2 + bd \cos \beta), \quad a_{55} = m_3 b^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Обобщенные силы в этой тросовой системе в виде вектора

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_x, \mathbf{Q}_z, \mathbf{Q}_\theta, \mathbf{Q}_\alpha, \mathbf{Q}_\beta)^T \quad (5)$$

определяются тягой буксира, силами притяжения и силами инерции. В выбранной системе отсчета при используемых допущениях линейным координатам соответствуют обобщенные силы

$$Q_x = F, \quad Q_z = 0. \quad (6)$$

Совместное действие сил притяжения и сил инерции можно свести к двум гравитационным моментам. Величина первого момента, действующего на всю тросовую систему в целом, такова [14]:

$$M_1 = \frac{3}{2} K \frac{m_1 (m_2 + m_3) l^2}{(m_1 + m_2 + m_3) r_O^3} \sin 2\theta. \quad (7)$$

Второй момент, действующий на буксируемый аппарат и определенный относительно его центра масс, может быть записан следующим образом:

$$M_2 = \frac{3}{2} K \frac{(A - C)}{r_O^3} \sin 2(\theta + \alpha). \quad (8)$$





В силу (6)–(8) вектор обобщенных сил имеет вид

$$\mathbf{Q} = (F, 0, M_1, M_2, 0)^T. \quad (9)$$

Совместное действие двух моментов делает возможным наличие различных равновесных конфигураций системы, которые можно найти из уравнений движения, записанных при отсутствии угловых движений:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x}_A = F, \\ \ddot{z}_A = 0, \\ \frac{F(m_2 + m_3)l}{m_1 + m_2 + m_3} \sin \theta = \frac{3}{2} K \frac{m_1(m_2 + m_3)l^2}{(m_1 + m_2 + m_3)r_O^3} \sin 2\theta, \\ \frac{F(\frac{m_2}{2} + m_3)a}{m_1 + m_2 + m_3} \sin(\theta + \alpha) = \frac{3}{2} K \frac{(A - C)}{r_O^3} \sin 2(\theta + \alpha), \\ \frac{Fm_3b}{m_1 + m_2 + m_3} \sin(\theta + \alpha + \beta) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Первое уравнение движения системы (10) определяет очевидную величину ускорения, с которым будет двигаться неизменная конфигурация

$$\ddot{x}_A = F/(m_1 + m_2 + m_3). \quad (11)$$

Второе уравнение при отсутствии возмущений дает тривиальное решение:  $z_A = \text{const} = z_{A0}$ .

Из оставшихся трех уравнений системы (10) можно найти значения угловых координат при равновесном движении. Из последнего уравнения получаем  $\beta_0 = -(\alpha_0 + \theta_0)$ .

Откуда следует, что в относительном равновесии маятник направлен вдоль оси  $Ox$  в сторону, противоположную движению системы. Для углов  $\alpha$  и  $\vartheta$  получаем два набора возможных значений, реализация которых зависит от параметров системы:

$$\begin{cases} \theta_1 = 0, & \left\{ \begin{array}{l} \theta_2 = \arccos k_\vartheta, \\ \alpha_2 = \arccos(k_\vartheta k_m k_I) - \arccos k_\vartheta, \end{array} \right. & \begin{array}{l} k_\vartheta \leq 1, \\ k_\vartheta k_m k_I \leq 1, \end{array} \end{cases} \quad (12)$$

где  $k_\vartheta = Fr_O^3/(3Km_1l)$  — коэффициент, определяющий соотношение сил, соответствующих невозмущенному орбитальному движению, и силы тяги буксира,  $k_m = m_1(m_2/2 + m_3)/[m_2(m_1 + m_2 + m_3)]$  — коэффициент, характеризующий соотношение масс составных частей тросовой системы,  $k_I = m_2al/(A - C)$  — коэффициент, зависящий от распределения масс пассивного КА и расположения на нем точки крепления троса.

Если тяга буксира и параметры тросовой системы таковы, что  $k_\vartheta > 1$  и  $k_m k_\vartheta k_I > 1$ , то возможна только первая конфигурация системы.

Для коэффициента  $k_\vartheta = Fr_O^3/3Km_1l$  это условие выполняется при увеличении тяги буксира и уменьшении длины троса. Для того чтобы была возможна вторая конфигурация, должна быть малой величина параметра  $a$  — расстояния от точки крепления троса до центра масс буксируемого аппарата.



#### 4. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Построим уравнения первого приближения для исследования частот и форм малых колебаний в окрестности двух равновесных положений. Три уравнения первого приближения, описывающие вращательные движения в окрестности равновесных конфигураций, можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{A}_k \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_k \mathbf{x} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (13)$$

Здесь  $\mathbf{A}_k = \{a^k_{ij}\}$  и  $\mathbf{C}_k = \{c^k_{ij}\}$  — квадратные симметричные матрицы коэффициентов инерции и коэффициентов упругости, обусловленных ускоренным движением системы, а  $\mathbf{x}$  — вектор-столбец отклонений углов  $\vartheta$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  от невозмущенного движения:

$$\mathbf{x} = (x_\vartheta, x_\alpha, x_\beta)^T. \quad (14)$$

##### 4.1. Малые колебания в окрестности первой равновесной конфигурации

Сохраним индексы координат, выбранные при записи (4). Тогда отличные от нуля компоненты матрицы  $\mathbf{C}_1$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{33}^1 &= \frac{m_2(l+a) + m_3(l+d+b)}{m_1 + m_2 + m_3} F - 3K \frac{m_1(m_2 + m_3)l^2}{(m_1 + m_2 + m_3)r_O^3}, \\ c_{34}^1 &= c_{43}^1 = \frac{m_2a + m_3(d+b)}{m_1 + m_2 + m_3} F - 3K \frac{(A-C)}{r_O^3}, \\ c_{44}^1 &= \frac{m_2a + m_3(d+b)}{m_1 + m_2 + m_3} F, \\ c_{35}^1 &= c_{53}^1 = c_{45}^1 = c_{54}^1 = c_{55}^1 = \frac{m_3bF}{m_1 + m_2 + m_3}. \end{aligned} \quad (15)$$

В линейной конфигурации характеристическое уравнение для уравнений первого приближения

$$k_0\omega^6 + k_1\omega^4 + k_2\omega^2 + k_3 = 0 \quad (16)$$

определяет три собственных частоты рассматриваемой системы. Коэффициенты характеристического уравнения (16) имеют вид

$$\begin{aligned} k_0 &= \mu\epsilon\kappa^2, \\ k_1 &= -\frac{\lambda\epsilon\kappa}{1 + \mu + \epsilon} (\epsilon\delta\lambda\mu(\delta + \kappa) + \mu\lambda(\mu\kappa - 2\epsilon\delta) + \mu(2\mu\kappa + \lambda\epsilon + 2\epsilon\kappa)), \\ k_2 &= \frac{\lambda\epsilon\kappa}{(1 + \mu + \epsilon)^2} (\epsilon + \mu + \epsilon\delta\kappa\mu + \epsilon\delta\lambda\mu + 2\mu^2 + 3\mu\epsilon + \epsilon^2\delta^2 + \mu^2\lambda + \epsilon\delta^2\mu + \dots), \\ k_3 &= \frac{\lambda\epsilon\kappa(\mu + \epsilon\delta)(\mu + \epsilon)}{(1 + \mu + \epsilon)^2}, \end{aligned}$$

где  $\mu = m_2/m_1$  — относительная масса буксира;  $\epsilon = m_3/m_2$  — относительная масса остатков топлива;  $\lambda = l/a$  — относительная длина троса;  $\delta = d/a$  — относительная длина маятника;  $\kappa = (A - C)/(m_2a^2) = l/ak_I$  — коэффициент формы КА.



Дискриминант кубического уравнения имеет вид [16]

$$Q = -(4p^3 + 27q^2),$$

где  $p = -\frac{1}{3}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 + \frac{k_3}{k_1}$ ,  $q = \frac{2}{27}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^3 - \frac{k_2 k_3}{3k_1^2} + \frac{k_4}{k_1}$ . Дискриминант может принимать только положительные значения, так как все корни  $\omega^2$  вещественные. Значения корней будут тем ближе друг к другу, чем меньше значение дискриминанта  $Q$ .

Исследование поведения значений дискриминанта при изменении его параметров показало, что минимальные значения дискриминанта лежат над линией  $\lambda = \kappa\mu$ , причем они уменьшаются по мере роста  $\mu$  и  $\lambda$ . Таким образом, уравнение  $\lambda = \kappa\mu$

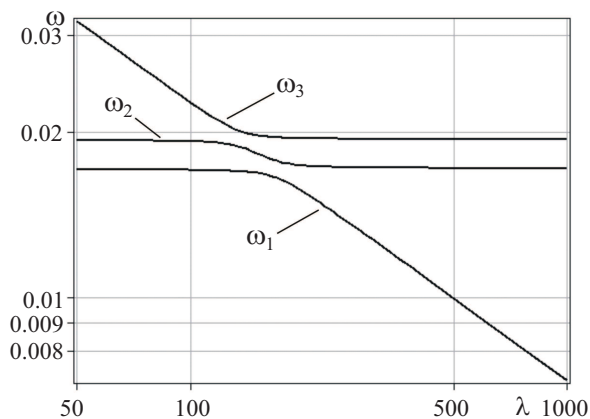


Рис. 2. Зависимость собственных частот в системе от относительной длины троса  $\lambda$

Fig. 2. Dependence natural frequencies on relative length of tether  $\lambda$

дает критическое сочетание параметров, при котором возможно сближение всех трех собственных частот колебаний тросовой системы. На рис. 2 представлена зависимость собственных частот тросовой системы от относительной длины троса  $\lambda$ . Из полученных зависимостей следует, что при сравнительно малых значениях относительной массы буксира  $\mu$  и относительной длины троса  $\lambda$  возможно сближение значений всех трех собственных частот системы, что может привести к перераспределению энергии между формами колебаний.

#### 4.2. Малые колебания в окрестности второй равновесной конфигурации

Рассмотрим малые колебания тросовой системы относительно равновесных конфигураций при отсутствии нулевых решений. Компоненты матрицы  $\mathbf{C}_2$  в этом случае определяются следующим образом:

$$c_{33}^2 = \frac{m_2(l+a) + m_3(l+d+b)}{m_1 + m_2 + m_3} Fk_\vartheta - 3K \frac{m_1(m_2 + m_3)l^2}{(m_1 + m_2 + m_3)r_O^3} (2k_\vartheta^2 - 1),$$

$$c_{34}^2 = c_{43}^2 = c_{44}^2 = \frac{m_2a + m_3(d+b)}{m_1 + m_2 + m_3} Fk_\vartheta k_m k_I - 3K \frac{(A-C)}{r_O^3} (2k_\vartheta^2 k_m^2 k_I^2 - 1), \quad (17)$$

$$c_{35}^2 = c_{53}^2 = c_{45}^2 = c_{54}^2 = c_{55}^2 = \frac{m_3 b F}{m_1 + m_2 + m_3} k_\vartheta.$$

Полученными уравнениями первого приближения можно воспользоваться для определения частот и форм колебаний тросовых систем с выбранными параметрами. В отличие от линейной конфигурации не было обнаружено таких сочетаний параметров системы, при которых дискриминант соответствующего кубического уравнения стремился к нулю. Это исключает возможность сближения собственных частот и перераспределения энергии колебаний между разными формами.



## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Результаты численного моделирования колебаний тросовой системы показали, что при одних и тех же начальных условиях наибольшие амплитуды колебаний наблюдаются в тех случаях, когда все три собственные частоты имеют близкие значения. В результате сложения всех трех форм колебаний с близкими частотами наблюдаются биения, при которых происходит перераспределение энергии колебаний между различными частями колебательной системы. Рассмотрим движение буксира при следующих начальных условиях:  $\vartheta_0 = 0$ ,  $\alpha_0 = 0.1$ ,  $\beta_0 = 0$ .

Длина троса выбрана такой, что все три собственные частоты близки друг другу ( $l_0 = 145$  м). Амплитуда колебаний буксируемого аппарата не остается постоянной (рис. 3, угол  $\alpha$ ), что свидетельствует о передаче энергии остальным элементам. Так, амплитуда колебаний остатков топлива может быть до 20 раз больше амплитуды колебаний самого аппарата (рис. 3, угол  $\beta$ ). Хотя угол отклонения троса изменяется в тех же пределах, что и  $\alpha$  (рис. 3, угол  $\vartheta$ ), это может оказать неблагоприятное влияние на ориентацию буксира и привести к его неравномерному движению.

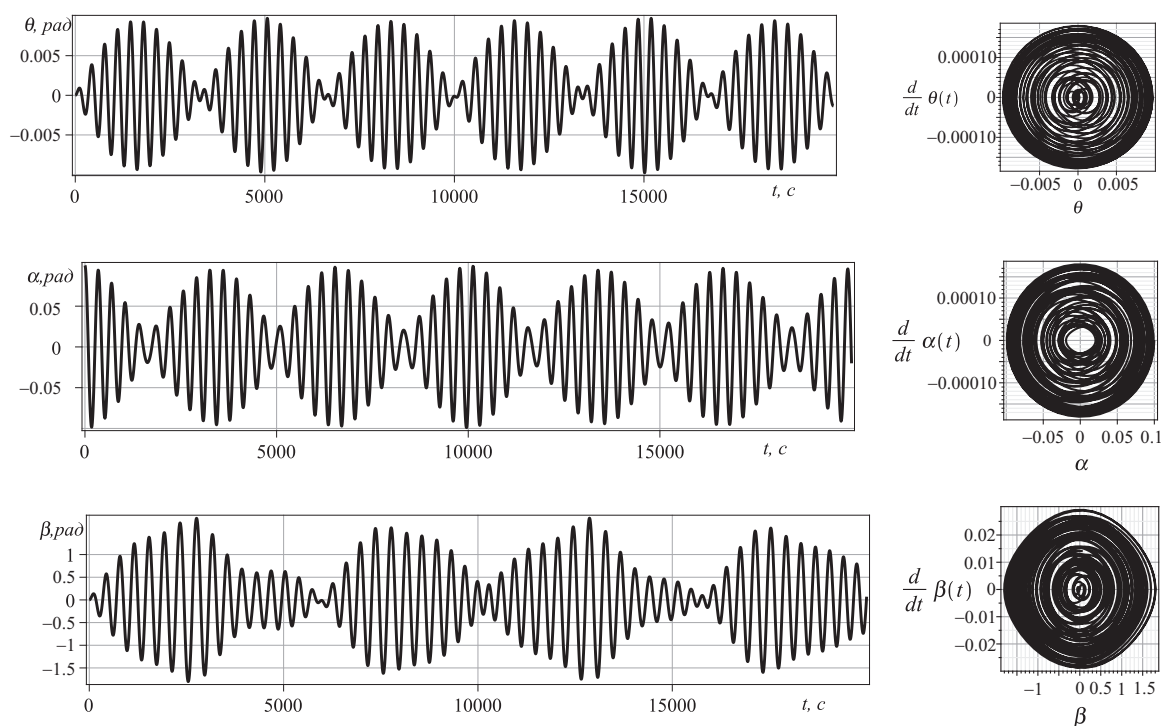


Рис. 3. Изменение углов отклонений при близких значениях трех собственных частот  
 Fig. 3. Deviation angles changing in case of near natural frequencies

Если близость частот нарушается, то сохраняются регулярные колебания буксируемого аппарата, остальные углы изменяются незначительно. При колебаниях относительно второй равновесной конфигурации период колебаний существенно больше. При сравнительно небольших начальных отклонениях по углам  $\vartheta$  и  $\alpha$  наблюдаются регулярные колебания, практически независимые от колебаний остатков топлива (рис. 4)

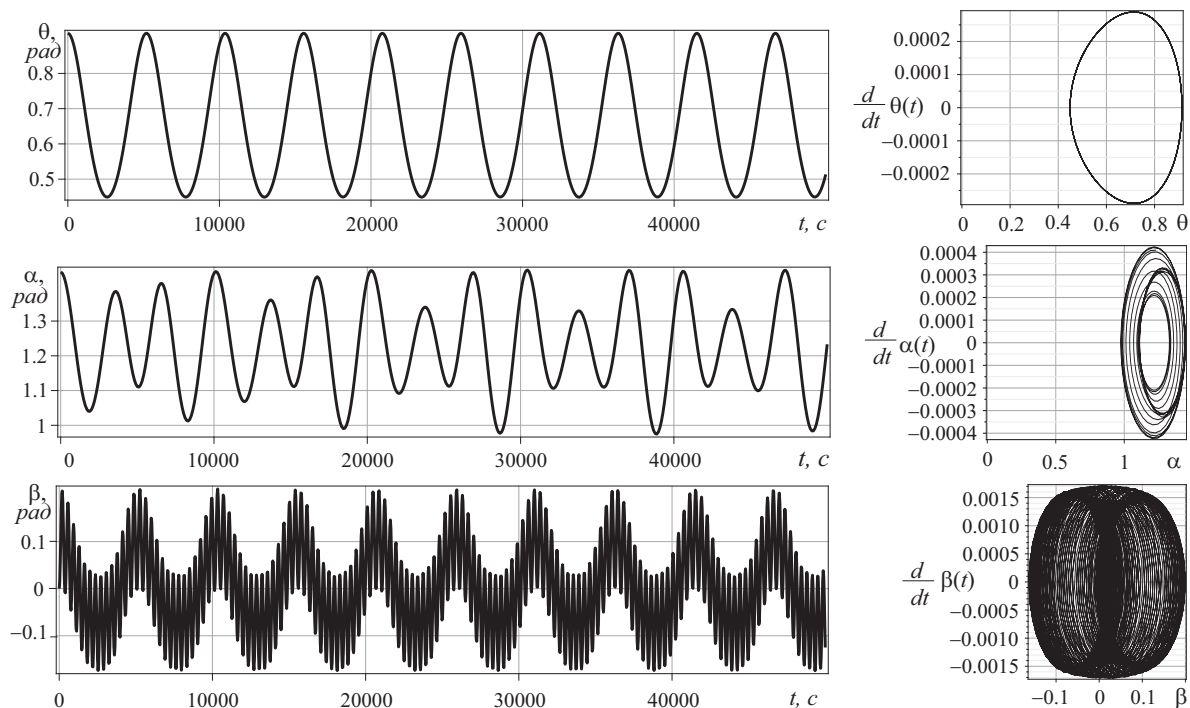


Рис. 4. Колебания во второй конфигурации при малых начальных отклонениях  
Fig. 4. Oscillations in the second position variant with small deviations

Принципиальным отличием от первой конфигурации является возникновение хаотического движения при увеличении начальных отклонений от равновесных значений. Такой переход сопровождается существенным увеличением размаха колебаний. На рис. 5 приведены графики колебаний угловых координат и соответствующие им фазовые портреты относительно одной из равновесных конфигураций.

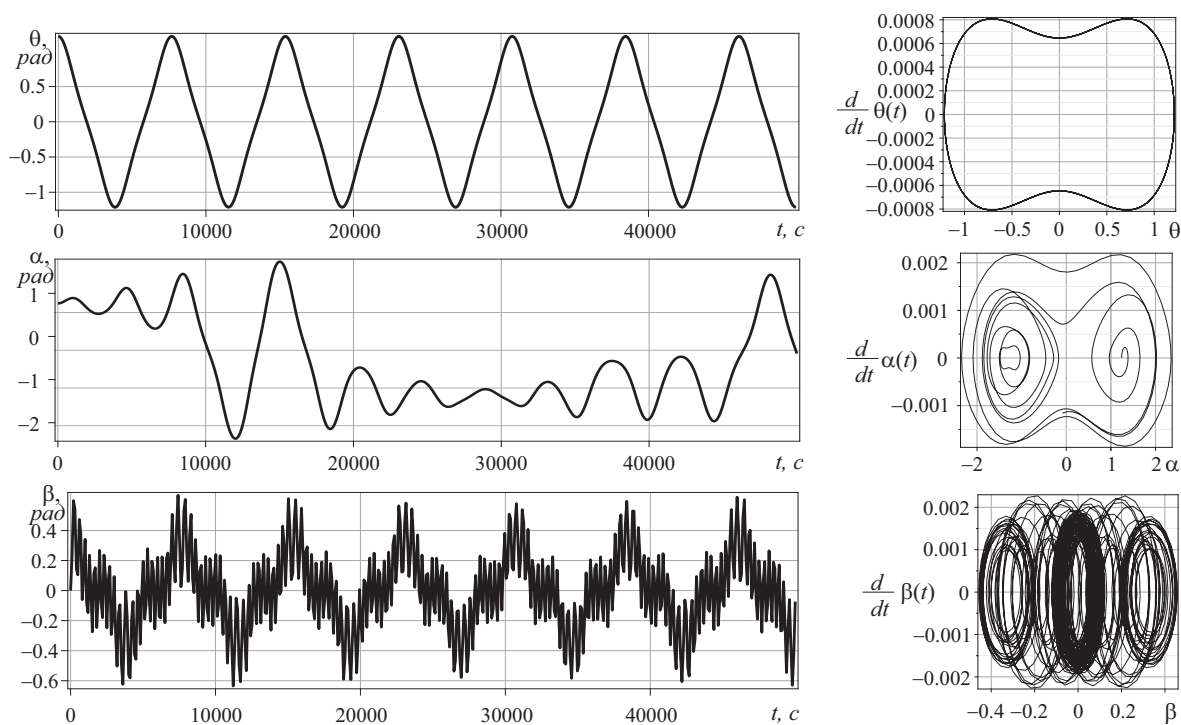


Рис. 5. Колебания во второй конфигурации при больших начальных отклонениях  
Fig. 5. Oscillations in the second position variant with big deviations



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вывод и анализ уравнений движения космической тросовой системы позволил установить соотношение параметров системы, при которых возможно как одно, так и несколько равновесных положений космической тросовой системы. Анализ возникающих колебаний показал, что в случае первой равновесной конфигурации, которая является устойчивой при коротком тросе и сравнительно большом ускорении, возможно сближение собственных частот и увеличение амплитуд колебаний за счет перераспределения энергии. В конфигурации с отличными от нуля углами регулярные колебания при увеличении начальных отклонений могут переходить в хаотические с существенным увеличением амплитуд колебаний. Результаты работы могут быть полезны для анализа устойчивости движения космических тросовых систем, предназначенных для увода космического мусора с орбиты.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 16-19-10158).

## Библиографический список

1. Белецкий В. В., Левин Е. М. Динамика космических тросовых систем. М. : Наука, 1990. 329 с.
2. Aslanov V. S., Ledkov A. S. Dynamics of the Tethered Satellite Systems. Elsevier, 2012. 356 p.
3. Динамика космических систем с тросовыми и шарнирными соединениями / А. П. Алпатов, В. В. Белецкий, В. И. Драновский и др. М. ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2007. 560 с.
4. Асланов В. С. Колебания тела с орбитальной тросовой системой // ПММ. 2007. Т. 71, вып. 6. С. 1027–1033.
5. Aslanov V. S., Yudintsev V. V. Dynamics, Analytical Solutions and Choice of Parameters for Towed Space Debris with Flexible Appendages // Advances in Space Research. 2015. Vol. 55. P. 660–667. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2014.10.034>
6. Williams P., Hyslop A., Stelzer M., Kruijff M. YYES2 optimal trajectories in presence of eccentricity and aerodynamic drag // Acta Astronautica. 2009. Vol. 64, iss. 7–8. P. 745–769. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2008.11.007>
7. Bonnal C., Ruault J.-M., Desjean M.-C. Active debris removal: Recent progress and current trends // Acta Astronautica. 2013. Vol. 85. P. 51–60. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2012.11.009>
8. Jasper L., Schaub H. Input Shaped Large Thrust Maneuver with a Tethered Debris Object // Acta Astronautica. 2014. Vol. 96. P. 128–137. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.11.005>
9. Jasper L., Schaub H. Tethered Towing Using Open-Loop Input-Shaping and Discrete Thrust Levels // Acta Astronautica. 2014. Vol. 105, iss. 1. P. 373–384. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.10.001>
10. Kitamura S., Hayakawa Y., Kawamoto S. A reorbiter for large GEO debris objects using ion beam irradiation // Acta Astronautica. 2014. Vol. 94, iss. 2. P. 725–735. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.07.037>
11. Reyhanoglu M., Rubio Hervas J. Nonlinear dynamics and control of space vehicles with multiple fuel slosh modes // Control Eng. Pract. 2012. Vol. 20, iss. 9. P. 912–918. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2012.05.011>





12. Rubio Hervas J., Reyhanoglu M. Thrust-vector control of a threeaxis stabilized upper-stage rocket with fuel slosh dynamics // Acta Astronautica. 2014. Vol. 98. P. 120–127. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.01.022>
13. Купреев С. А. Условия существования предельных циклов у динамической системы движения связанных объектов на эллиптической орбите // Тр. МАИ. 2016. № 88. С. 1–33. URL: [http://trudymai.ru/upload/iblock/9c1/kupreev\\_gus\\_1.pdf](http://trudymai.ru/upload/iblock/9c1/kupreev_gus_1.pdf) (дата обращения 18.05.2018).
14. Маркеев А. П. Теоретическая механика : учебник для университетов. М. : ЧеРо, 1999. 572 с.
15. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М. : Машиностроение, 1968. 532 с.
16. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М. : Наука, 1978. 720 с.

---

**Образец для цитирования:**

Авраменко А. А., Асланов В. С. Исследование равновесных конфигураций космической тросовой системы при буксировке пассивного аппарата с остатками топлива // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т.18, вып. 3. С. 334–346. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-334-346>

---

## Equilibrium Analysis of the Tethered Tug Debris System with Fuel Residuals

A. A. Avramenko, V. S. Aslanov

Alersandr A. Avramenko, <https://orcid.org/0000-0001-6798-4196>, Samara National Research University, 34, Moskovskoye Shosse, Samara, 443086, Russia, [avramenko\\_a\\_a@mail.ru](mailto:avramenko_a_a@mail.ru)

Vladimir S. Aslanov, <https://orcid.org/0000-0003-4065-137X>, Samara National Research University, 34, Moskovskoye Shosse, Samara, 443086, Russia, [aslanov\\_vs@mail.ru](mailto:aslanov_vs@mail.ru)

The problem of tethered transportation of space debris is considered. The system consists of orbit tug, tether, and passive spacecraft with fuel residuals. The planar motion on circular orbit is studied in the orbital frame. Nonlinear motion equations are obtained by Lagrangian formalism. They consider action of the space tug-thrust and gravitational moments. Two variants of stable positions of relative equilibrium are defined. They depend on main parameters of the tethered system: aspect ratio and mass ratio. The equations of the first approximation for the each of the stable position variants are obtained. Their coefficients analysis give evidence of approachment all of the natural frequency of the system and permit to find corresponding conditions. The results of numerical simulation of the motion of the tethered system and their comparison with small oscillations determined by are presented. Proposed equations can be used to analyze the attitude motion of the tug–debris system and to determine the conventional parameters for safe tethered transportation of space debris.

*Key words:* space tethered system, space debris, equilibrium positions, orbit.

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 16-19-10158).



## References

1. Beletsky V. V., Levin E. M. *Dynamics of Space Tether Systems. Vol. 83: Advances in the Astronautical Sciences*. American Astronautical Society, 1993. 500 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1990. 329 p.)
2. Aslanov V. S., Ledkov A. S. *Dynamics of the Tethered Satellite Systems*. Elsevier, 2012. 350 p.
3. Alpatov A. P., Beletsky V. V., Dranovsky V. I., Zakrzhevsky A. E., Pirozhenko A.V., Troger G., Khoroshilov V. S. *Dinamika kosmicheskikh sistem s trosovymi i sharnirnymi soedineniyami* [Dynamics of Space Systems Joined by Tethers and Hings]. Moscow, Izhevsk, Research center "Regular and Chaotic Dynamics", Institute of Computer Science, 2007. 560 p. (in Russian)
4. Aslanov V. S. Oscillations of the Body with Orbit Tethered System. *J. Appl. Math. Mech.*, 2007, vol. 71, iss. 6, pp. 1027–1033.
5. Aslanov V. S., Yuditsev V. V. Dynamics, Analytical Solutions and Choice of Parameters for Towed Space Debris with Flexible Appendages. *Advances in Space Research*, 2015, vol. 55, pp. 660–667. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2014.10.034>
6. Williams P., Hyslop A., Stelzer M., Kruijff M. YYES2 optimal trajectories in presence of eccentricity and aerodynamic drag. *Acta Astronautica*, 2009, vol. 64, iss. 7–8, pp. 745–769. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2008.11.007>
7. Bonnal C., Ruault J.-M., Desjean M.-C. Active debris removal: Recent progress and current trends. *Acta Astronautica*, 2013, vol. 85, pp. 51–60. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2012.11.009>
8. Jasper L., Schaub H. Input Shaped Large Thrust Maneuver with a Tethered Debris Object. *Acta Astronautica*, 2014, vol. 96, pp. 128–137. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.11.005>
9. Jasper L., Schaub H. Tethered Towing Using Open-Loop Input- Shaping and Discrete Thrust Levels. *Acta Astronautica*, 2014, vol. 105, iss. 1, pp. 373–384. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.10.001>
10. Kitamura S., Hayakawa Y., Kawamoto S. A reorbiter for large GEO debris objects using ion beam irradiation. *Acta Astronautica*, 2014, vol. 94, iss. 2, pp. 725–735. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.07.037>
11. Reyhanoglu M., Rubio Hervas J. Nonlinear dynamics and control of space vehicles with multiple fuel slosh modes. *Control Eng. Pract.*, 2012, vol. 20, iss. 9, pp. 912–918. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2012.05.011>
12. Rubio Hervas J., Reyhanoglu M. Thrust-vector control of a threeaxis stabilized upper-stage rocket with fuel slosh dynamics. *Acta Astronautica*, 2014, vol. 98, pp. 120–127. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.01.022>
13. Kupreev S. A. The conditions of existence of limit cycles in dynamic motion system of related objects on an elliptical orbit. *Electronic journal „Trudy MAI“*, 2016, no. 88. Available at: <http://www.trudymai.ru/eng/published.php?ID=69696&eng=Y> (accessed 18 May 2018).
14. Markeev A. P. *Teoreticheskaya mekhanika : uchebnik dlya universitetov* [Theoretical Mechanics: A Textbook for Universities]. Moscow, CheRho, 1999. 572 p. (in Russian).
15. Mikishev G. N., Rabinovitch B. I. Dynamics of the solid body with cavities partially filled the liquid. Moscow, Mashinostroenie, 1968. 532 p. (in Russian).



16. Korn G., Korn T. *Mathematical Handbook for scientists and engineers*. New York, San Francisco, Toronto, London, Sydney, McGraw-Hill Book Company, 1968. 1130 p. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.19690490921> (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1978. 720 p.)

---

**Cite this article as:**

Avramenko A. A., Aslanov V. S. Equilibrium Analysis of the Tethered Tug Debris System with Fuel Residuals. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 334–346 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-334-346>

---



# ИНФОРМАТИКА

УДК 519.17

## О ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ ГУДМАНА – ХЕДЕТНИЕМИ ГАМИЛЬТОНОВОСТИ ГРАФА

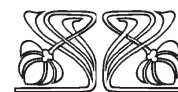
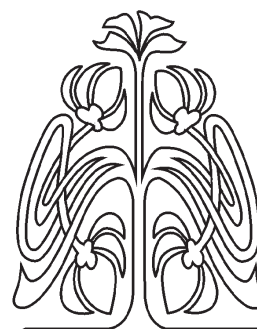
**М. Б. Абросимов**

Абросимов Михаил Борисович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, mic@rambler.ru

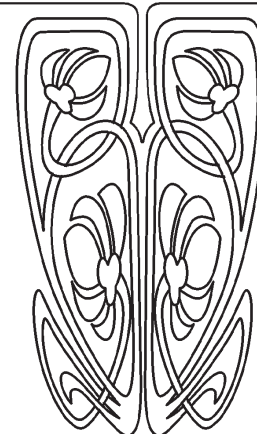
В 1859 году ирландский математик сэр Уильям Роуэн Гамильтон предложил игру, в которой требовалось найти обход додекаэдра по его ребрам с возвратом в исходную точку. В его честь позднее был назван соответствующий обход графа. Гамильтоновым циклом называется остовной цикл в графе, то есть цикл, проходящий по всем вершинам графа. Граф, содержащий гамильтонов цикл, называется гамильтоновым. В 1952 году Дирак предложил достаточное условие гамильтоновости графа: если степень каждой вершины не меньше половины от общего числа вершин графа, то такой граф является гамильтоновым. Впоследствии было получено много различных достаточных условий гамильтоновости, из которых большую группу образуют так называемые условия типа Дирака, или достаточные условия, сформулированные в терминах степеней вершин графа: достаточные условия Оре, Поша, Хватала и другие. В 1976 году Бонди и Хватал предложили конструкцию замыкания графа и новое достаточное условие: если замыкание графа является полным графом, то сам граф является гамильтоновым. Это условие остается одним из наиболее эффективных достаточных условий. В работе исследуется достаточное условие гамильтоновости графов Гудмана – Хедетниemi, которое было предложено в 1974 году. Это условие формулируется в терминах запрещенных подграфов. Дается описание всех графов, удовлетворяющих условию Гудмана – Хедетниemi, и доказывается, что при  $n > 4$  существует только  $\lfloor n/2 \rfloor + 2$  таких  $n$ -вершинных графов.

*Ключевые слова:* гамильтоновы графы, запрещенные подграфы.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-347-353>



**НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ**





## ВВЕДЕНИЕ

Неориентированным графом (далее — просто графом) называется пара  $G = (V, \alpha)$ , где  $\alpha$  — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин  $V$ , называемое отношением смежности. Если  $(u, v) \in \alpha$ , то говорят, что вершины  $u$  и  $v$  смежны и эти вершины соединены ребром  $(u, v)$ . При этом  $(u, v)$  и  $(v, u)$  — это одно и то же ребро, которое обозначают  $\{u, v\}$ . Говорят, что ребро  $\{u, v\}$  инцидентно каждой из вершин  $u$  и  $v$  и эти вершины называются концевыми вершинами, или концами ребра  $\{u, v\}$ . Степенью вершины  $v$  в графе  $G$  будем называть количество вершин в  $G$ , смежных с  $v$ , и обозначать через  $d(v)$ . Основные определения даются по работе [1].

Гамильтоновым циклом называется остовной цикл в графе, то есть цикл, проходящий по всем вершинам графа. Граф, содержащий гамильтонов цикл, называется гамильтоновым. Задача проверки гамильтоновости графа является NP-полной, поэтому эффективный алгоритм решения этой задачи неизвестен. В 1952 году Дирак предложил достаточное условие гамильтоновости.

**Теорема 1 (Дирак, 1952 [2]).** *Если в графе  $G$  с числом вершин  $n \geq 3$  степень любой вершины  $d(u) \geq n/2$ , то граф  $G$  — гамильтонов.*

Очевидно, что графы, которые удовлетворяют условию теоремы 1, имеют достаточно много рёбер. В последующие годы было предложено много других достаточных условий гамильтоновости: Оре (Ore) [3, 4], Поша (Posa) [5], Хватала (Chvatal) [6], Бонди – Хватала (Bondy, Chvatal) [7], Фана (Fan) [8], Фодри – Гульда – Якобсона – Шелпа (Faudree, Gould, Jacobson, Schelp) [9] и др. [10, 11]. Многие из условий формулируются в терминах степеней вершин. Одна из немногих попыток предложить достаточное условие гамильтоновости в терминах запрещенных подграфов была предпринята в 1976 году Гудманом (Goodman) и Хедетниemi (Hedetniemi) [12].

## 1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Подграфом графа  $G = (V, \alpha)$ , порожденным подмножеством вершин  $V'$ , называется пара  $G' = (V', \alpha')$ , где  $V' \in V$  и  $\alpha' = (V' \times V') \cap \alpha$ . Подграф называется максимальным, если он получается из графа удалением одной вершины и всех инцидентных её рёбер. Граф называется двусвязным, если все его максимальные подграфы связные. В двусвязном графе нет вершины, после удаления которой граф перестаёт быть связным. Двусвязность является необходимым условием гамильтоновости графа [1]. Связный  $n$ -вершинный граф, у которого все вершины имеют степень 2, называется циклом и обозначается  $C_n$ . Очевидно, что любой цикл  $C_n$  является гамильтоновым, однако при  $n > 4$  он не удовлетворяет условию теоремы Дирака.

Граф  $G$  называется двудольным, если множество его вершин можно разбить на два подмножества  $V_1$  и  $V_2$  такие, что концы любого ребра графа  $G$  принадлежат разным подмножествам. Если граф  $G$  содержит все возможные рёбра, соединяющие вершины  $V_1$  и  $V_2$ , то  $G$  называется полным двудольным графом и обозначается  $K_{m,n}$ , где  $m$  и  $n$  — число вершин в  $V_1$  и  $V_2$ . На рис. 1 изображены графы  $K_{1,3}$  и  $K_{1,3} + x$ . Граф  $K_{1,3} + x$  получается из графа  $K_{1,3}$  добавлением одного ребра (рис. 1).





**Теорема 2 (Гудман, Хедетниemi, 1976 [12]).** Если двусвязный граф  $G$  не содержит подграфов вида  $K_{1,3}$  и  $K_{1,3} + x$ , то граф  $G$  — гамильтонов.

В своей работе вместе с элегантным доказательством, занимающим один абзац, авторы приводят и эффективный алгоритм проверки выполнения условия теоремы с одновременным построением гамильтонова цикла. Авторы также отмечают, что в отличие от графов, удовлетворяющих достаточным условиям гамильтоновости типа Дирака, Поша, Хватала и других, графы, удовлетворяющие предложенному условию, могут иметь меньше рёбер. В работе [10] отмечается, что число графов, удовлетворяющих условию Гудмана – Хедетниemi, не очень велико. Очевидно, что любой цикл  $C_n$  удовлетворяет условию теоремы 2. Как показывают две следующие теоремы, эффективность условия Гудмана – Хедетниemi действительно оказывается очень низкой.

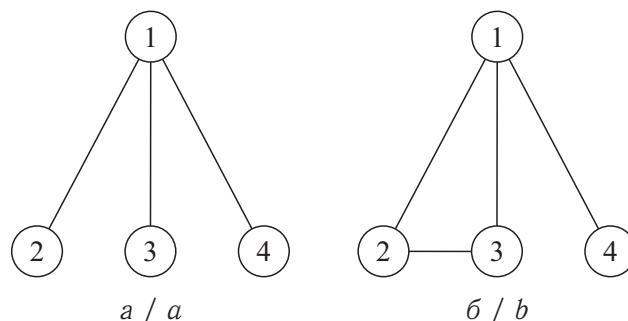


Рис. 1. Графы  $K_{1,3}$  (а) и  $K_{1,3} + x$  (б)  
Fig. 1. Graph  $K_{1,3}$  (a) and  $K_{1,3} + x$  (b)

**Теорема 3.** Если  $n$ -вершинный граф  $G$  с числом вершин  $n > 4$  удовлетворяет условию теоремы 2 и не является циклом, то он не содержит вершин степени ниже  $n - 2$ .

**Доказательство.** Пусть  $n$ -вершинный граф  $G$  удовлетворяет условию теоремы. Так как граф  $G$  не является циклом, то хотя бы одна его вершина имеет степень больше 2. Покажем, что граф  $G$  не содержит вершин степени 2.

Обозначим гамильтонов цикл в графе  $G$  через  $C$  и занумеруем вершины в порядке его прохождения:  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Возьмем произвольную вершину  $v$  такую, что  $d(v) > 2$ : пусть это будет  $v_1$ . Тогда вершина  $v_1$  смежна с  $v_2$  и  $v_n$ , а также, по крайней мере, еще с одной вершиной  $v_i, i \notin \{1, 2, n\}$ . Так как граф  $G$  не содержит подграфов вида  $K_{1,3}$  и  $K_{1,3} + x$ , то вершины  $v_2, v_n$  и  $v_i$  соединены не менее чем двумя ребрами. Рассмотрим два случая.

*Случай 1.* Вершины  $v_2$  и  $v_n$  смежны между собой (рис. 2). С учетом того, что вершина  $v_2$  также смежна с  $v_3$ , а вершина  $v_n$  — с вершиной  $v_{n-1}$ , получаем, что степени вершин  $v_2$  и  $v_n$  больше 2.

*Случай 2.* Вершины  $v_2$  и  $v_n$  не смежны между собой, тогда обе они смежны с вершиной  $v_i$ . Если вершина  $v_i$  отлична от вершин  $v_3$  и  $v_{n-1}$  (рис. 3, а), то снова получаем, что степени вершин  $v_2$  и  $v_n$  больше 2. Пусть  $i = 3$ . Рассмотрим вершину  $v_3$  (рис. 3, б). Она смежна с  $v_2, v_4$  и  $v_n$ , причем  $v_2$  и  $v_n$  не смежны между собой. Так как граф  $G$  не содержит подграфов вида  $K_{1,3}$  и  $K_{1,3} + x$ , то вершина  $v_4$  должна быть смежна с  $v_2$  и  $v_n$ . Снова получаем, что степени вершин  $v_2$  и  $v_n$  больше 2.

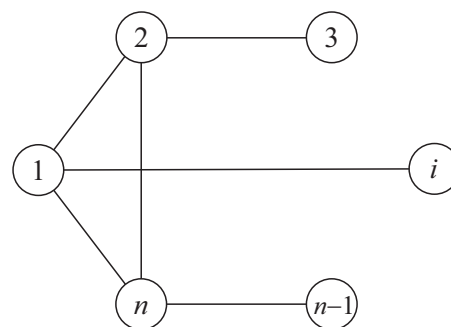


Рис. 2. Случай 1  
Fig. 2. Case 1



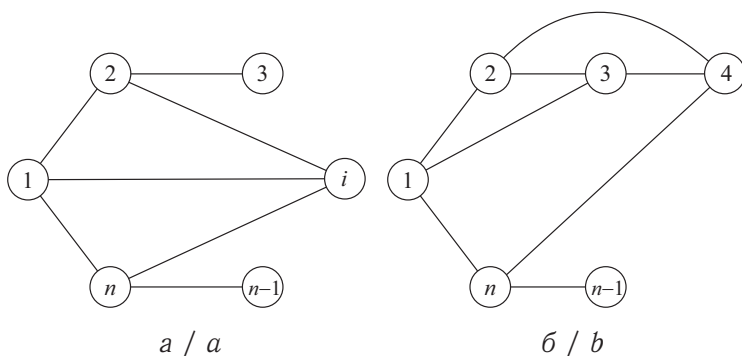


Рис. 3. Случай 2:  $a - i \neq 3$  и  $i \neq n - 1$ ;  $б - i = 3$

Fig. 3. Case 2:  $a - i \neq 3$  and  $i \neq n - 1$ ;  $b - i = 3$

ных с  $v_1$  вершин пару вершин  $v_i$  и  $v_j$ , таких что  $j > i$  и разность  $j - i$  минимальна. При равенстве разностей  $j - i$  будем выбирать пару с меньшим значением  $i$ . Это означает, что при прохождении по циклу между вершинами  $v_i$  и  $v_j$  все вершины смежны с  $v_1$ . Рассмотрим два случая.

*Случай 1.*  $j = i + 1$ . Так как вершина  $v_i$  не смежна с вершиной  $v_1$ , то  $i > 2$ , причем вершина  $v_{i-1}$  смежна с  $v_1$ . По доказанному ранее  $d(v_i) > 2$ , следовательно, есть смежная с  $v_i$  вершина  $w$ , отличная от  $v_{i-1}$  и  $v_j$ . Рассмотрим подграф, порожденный вершинами  $\{v_i, v_{i-1}, v_j, w\}$ . Возможны два варианта.

1а. Вершина  $v_{i-1}$  смежна с  $v_j$ . Рассматривая подграф, порожденный вершинами  $\{v_{i-1}, v_1, v_i, v_j\}$ , получим граф, изоморфный  $K_{1,3} + x$ .

1б. Вершины  $v_{i-1}$  и  $v_j$  смежны с  $w$ . Рассматривая подграф, порожденный вершинами  $\{v_{i-1}, v_1, v_i, w\}$ , получим, что вершина  $w$  смежна с  $v_1$ . Наконец, рассматривая подграф, порожденный вершинами  $\{w, v_1, v_i, v_j\}$ , получим граф,  $K_{1,3} + x$ .

*Случай 2.*  $j > i + 1$ , т. е. между вершинами  $v_i$  и  $v_j$  все вершины  $v_{i+1}, \dots, v_{j-1}$  смежны с  $v_1$ . Рассмотрим подграф, порожденный вершинами  $\{v_{i+1}, v_1, v_i, v_{i+2}\}$ . Так как вершины  $v_1$  и  $v_i$  не смежны, то получим, что вершины  $v_{i+2}$  и  $v_i$  смежны. Рассматривая аналогично подграфы, порожденные  $\{v_{i+2}, v_1, v_i, v_{i+3}\}, \dots, \{v_{j-2}, v_1, v_i, v_{j-1}\}$ , получим что вершина  $v_{j-1}$  смежна с  $v_i$ . Кроме того, она смежна с  $v_j$  и с  $v_1$ . Таким образом, подграф, порожденный вершинами  $\{v_{j-1}, v_1, v_i, v_j\}$ , изоморфен либо  $K_{1,3}$ , либо  $K_{1,3} + x$  (в зависимости от смежности вершин  $v_i$  и  $v_j$ ).

Оба возможных случая привели к противоречию, что доказывает утверждение теоремы.  $\square$

**Теорема 4.** Для заданного  $n > 4$  количество графов, удовлетворяющих условию Гудмана – Хедетниemi, равно  $\lfloor n/2 \rfloor + 2$ .

**Доказательство.** Пусть дано  $n > 4$ . Для любого  $n$  условию теоремы 2 удовлетворяет цикл  $C_n$ . Перечислим, какие  $n$ -вершинные графы, кроме цикла  $C_n$ , удовлетворяют условию теоремы 2 с учетом теоремы 3. Эти графы могут иметь степенное множество вида  $\{n - 1\}$ ,  $\{n - 1, n - 2\}$  или  $\{n - 2\}$ . Напомним, что степенным множеством называется множество, составленное из степеней вершин графа. Вектором степеней называется вектор, компонентами которого являются степени вершин графа в порядке невозрастания. Если вектор степеней однозначно с точностью до изоморфизма определяет граф, то такой граф называется униграфом.

При любом  $n$  только один  $n$ -вершинный граф имеет степенное множество  $\{n - 1\}$  — это полный граф  $K_n$ .

Продолжая рассуждения с вершиной  $v_2$ , докажем, что граф  $G$  не содержит вершин степени 2. Рассмотрим произвольную вершину  $v_1$  и покажем, что  $d(v_1) \geq n - 2$ .

Предположим, что это не так. Тогда есть по крайней мере две вершины, с которыми вершина  $v_1$  несмежна. Выберем среди всех несмежных



При чётном  $n$  только один  $n$ -вершинный граф имеет степенное множество  $\{n-2\}$ . Для доказательства единственности достаточно посмотреть на дополнение этого графа — однородный граф порядка  $\{1\}$ . Такой граф представляет собой объединение двухвершинных цепей.

Рассмотрим граф  $G$  со степенным множеством вида  $\{n-1, n-2\}$ . Обозначим через  $k$  количество вершин степени  $n-2$ . Рассмотрим  $G'$  — дополнение графа  $G$ .  $G'$  будет иметь степенное множество вида  $\{1, 0\}$ . То есть граф  $G'$  будет представлять собой  $k$  вершин степени 1 и  $n-k$  вершин степени 0. Такой граф для заданных  $n$  и  $k$  может быть только один с точностью до изоморфизма, причем только при четном  $k$ . Граф  $G$  можно получить из полного графа  $K_n$  удалив рёбра  $k/2$  раз, соединяющие вершины степени  $n-1$ . Всего графов со степенным множеством  $\{n-1, n-2\}$  и  $\{n-2\}$  будет  $\lfloor n/2 \rfloor$ , откуда и получается утверждение теоремы.  $\square$

**Замечание 1.** При  $n = 3$  число графов, удовлетворяющих условию Гудмана – Хедетниemi, равно 1 (полный граф  $K_3$ ), а при  $n = 4$  таких графов 3: цикл  $C_4$ , полный граф  $K_4$  и униграф с вектором степеней  $(3, 3, 2, 2)$ .

### Библиографический список

1. Харари Ф. Теория графов. М : Мир, 1973. 300 с.
2. Dirac G. A. Some Theorems on Abstract Graphs // Proc. London Math. Soc. 1952. Vol. s3-2, iss. 1. P. 69–81. DOI: <https://doi.org/10.1112/plms/s3-2.1.69>
3. Ore O. Note on Hamilton Circuits // Amer. Math. Monthly. 1960. Vol. 67, № 1. P. 55. DOI: <https://doi.org/10.2307/2308928>
4. Ore O. Arc coverings of graphs // Ann. Mat. Pura Appl. 1961. Vol. 55, iss. 1. P. 315–322. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02412090>
5. Posa L. On the circuits of finite graphs // Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 1963. Vol. 8. P. 355–361.
6. Chvatal V. On Hamilton's ideals // J. Combinat. Theory (B). 1972. Vol. 12, iss. 2. P. 163–168. DOI: [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(72\)90020-2](https://doi.org/10.1016/0095-8956(72)90020-2)
7. Bondy J. A., Chvatal V. A method in graph theory // Discrete Math. 1976. Vol. 15, iss. 2. P. 111–135. DOI: [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(76\)90078-9](https://doi.org/10.1016/0012-365X(76)90078-9)
8. Fan G. H. New sufficient conditions for cycles in graphs // J. Combinat. Theory (B). 1984. Vol. 37, iss. 3. P. 221–227. DOI: [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(84\)90054-6](https://doi.org/10.1016/0095-8956(84)90054-6)
9. Faudree R. J., Gould R. J., Jacobson M. S., Schelp R. H. Neighborhood unions and Hamiltonian properties in graphs // J. Combinat. Theory (B). 1989. Vol. 47, iss. 1. P. 1–9. DOI: [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(89\)90060-9](https://doi.org/10.1016/0095-8956(89)90060-9)
10. Gould R. J. Advances on the Hamiltonian Problem – A Survey // J. Graph Theory. 1991. Vol. 15, iss. 2. P. 121–157. DOI: <https://doi.org/10.1002/jgt.3190150204>
11. Li H. Generalizations of Diracs theorem in Hamiltonian graph theory – A survey // Discrete Math. 2013. Vol. 313, iss. 19. P. 2034–2053. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.11.025>
12. Goodman S. E., Hedetniemi S. T. Sufficient Conditions for a graph to be Hamiltonian // J. Combin Theory (B). 1974. Vol. 16, iss. 2. P. 175–180. DOI: [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(74\)90061-6](https://doi.org/10.1016/0095-8956(74)90061-6)

---

### Образец для цитирования:

Абросимов М. Б. О достаточном условии Гудмана – Хедетниemi гамильтоновости графа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 3. С. 347–353. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-347-353>

---



## On a Goodman – Hedetniemi Sufficient Condition for the Graph Hamiltonicity

M. B. Abrosimov

Mikhail B. Abrosimov, <https://orcid.org/0000-0002-4473-8790>, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, mic@rambler.ru

In 1859 the Irish mathematician Sir William Rowan Hamilton proposed a game in which it was required to find a dodecahedron bypass around its edges with a return to the starting point. In his honor, the corresponding path in the graph was later called the Hamiltonian cycle: it is the spanning cycle in the graph, that is, the cycle passing through all the vertices of the graph. A graph containing a Hamiltonian cycle is said to be Hamiltonian. In 1952 Dirac proposed a sufficient condition for the graph to be Hamiltonian: if the degree of each vertex is not less than half of the total number of vertices of the graph, then such a graph is Hamiltonian. Subsequently, many different sufficient conditions for Hamiltonicity were obtained, of which a large group is formed by so-called Dirac-type conditions or sufficient conditions formulated in terms of degrees of the vertices of the graph: sufficient conditions by Ore, Pocha, Chvatal and others. In 1976 Bondy and Chvatal proposed a closure construction for the graph and a new sufficient condition: if the closure of a graph is a complete graph, then the graph itself is Hamiltonian. This condition remains one of the most effective sufficient condition. In this paper, we will investigate the sufficient condition for the Hamiltonian graph by Goodman – Hedetniemi, which is formulated in terms of forbidden subgraphs. We give a description of all graphs that satisfy the Goodman – Hedetniemi condition and prove that for  $n > 4$  there are only  $\lfloor n/2 \rfloor + 2$  such  $n$ -vertex graphs.

*Key words:* Hamiltonian graph, forbidden subgraphs.

### References

1. Harary F. *Graph Theory*. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1969. 274 p. [Russ. ed. Moscow, Mir, 1973. 300 p.].
2. Dirac G. A. Some Theorems on Abstract Graphs. *Proc. London Math. Soc.*, 1952, vol. s3–2, iss. 1, pp. 69–81. DOI: <https://doi.org/10.1112/plms/s3-2.1.69>
3. Ore O. Note on Hamilton circuits. *Amer. Math. Monthly.*, 1960, vol. 67, no. 1, pp. 55. DOI: <https://doi.org/10.2307/2308928>
4. Ore O. Arc coverings of graphs. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1961, vol. 55, iss. 1, pp. 315–322. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02412090>
5. Posa L. On the circuits of finite graphs. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, 1963, vol. 8, pp. 355–361.
6. Chvatal V. On Hamilton's ideals. *J. Combinat. Theory (B)*, 1972, vol. 12, iss. 2, pp. 163–168. DOI: [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(72\)90020-2](https://doi.org/10.1016/0095-8956(72)90020-2)
7. Bondy J. A., Chvatal V. A method in graph theory. *Discrete Math.*, 1976, vol. 15, iss. 2, pp. 111–135. DOI: [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(76\)90078-9](https://doi.org/10.1016/0012-365X(76)90078-9)
8. Fan G. H. New sufficient conditions for cycles in graphs. *J. Combinat. Theory (B)*, 1984, vol. 37, iss. 3, pp. 221–227. DOI: [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(84\)90054-6](https://doi.org/10.1016/0095-8956(84)90054-6)
9. Faudree R. J., Gould R. J., Jacobson M. S., Schelp R. H. Neighborhood unions and Hamiltonian properties in graphs. *J. Combinat. Theory (B)*, 1989, vol. 47, pp. 1–9. DOI: [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(89\)90060-9](https://doi.org/10.1016/0095-8956(89)90060-9)



10. Gould R. J. Advances on the Hamiltonian Problem – A Survey. *J. Graph Theory*, 1991, vol. 15, iss. 2, pp. 121–157. DOI: <https://doi.org/10.1002/jgt.3190150204>
11. Li H. Generalizations of Diracs theorem in Hamiltonian graph theory – A survey. *Discrete Math.*, 2013, vol. 313, iss. 19, pp. 2034–2053. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.11.025>
12. Goodman S. E., Hedetniemi S. T. Sufficient Conditions for a graph to be Hamiltonian. *J. Combin Theory (B)*, 1974, vol. 16, iss. 2, pp. 175–180. DOI: [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(74\)90061-6](https://doi.org/10.1016/0095-8956(74)90061-6)

---

**Cite this article as:**

Abrosimov M. B. On a Goodman – Hedetniemi Sufficient Condition for the Graph Hamiltonicity. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 347–353 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-347-353>

---



УДК 501.1

## ОБУЧЕНИЕ НЕЙРОСЕТЕВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ КОМБИНИРОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Д. К. Андрейченко, Ф. М. Жадаев

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, [kr\\_andreichenko@renet.ru](mailto:kr_andreichenko@renet.ru)

Жадаев Фёдор Михайлович, аспирант, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, [ZhadaevFM@gmail.com](mailto:ZhadaevFM@gmail.com)

Устройства управления на основе искусственных нейронных сетей в настоящее время довольно часто используются для управления объектами с сосредоточенными по пространству параметрами. Объекты управления в таких системах характеризуются конечным множеством собственных частот. Поэтому применение нейросетевых управляющих устройств после соответствующей настройки внутренних параметров (обучения) либо полностью исключает, либо минимизирует вероятность появления неустойчивых собственных частот колебаний объекта управления в течение достаточно продолжительного периода времени. В то же время если в состав объекта управления входят объекты с распределёнными по пространству параметрами (например, гибкие стержни), число его характерных собственных частот колебаний будет как минимум счётно-бесконечным. Таким образом, для использования нейросетевых управляющих устройств для управления такими объектами требуется дополнительная проверка устойчивости системы. В случае использования классических управляющих устройств (таких как ПИД-регуляторы) для выполнения этого условия их параметры выбираются из области устойчивости системы. Такой подход неприменим к устройствам управления на основе искусственных нейронных сетей, так как их параметры подбираются в процессе обучения. В данной работе выводится правило, гарантирующее, что после обучения выбранные веса будут принадлежать области устойчивости системы. Описываемое правило является модификацией функции ошибки нейронной сети и не накладывает существенных ограничений на выбор алгоритма обучения. Полученные результаты могут быть использованы при управлении комбинированными динамическими системами при помощи нейросетевых управляющих устройств на основе искусственных нейронных сетей прямого распространения.

*Ключевые слова:* динамические системы, комбинированные динамические системы, нейронные сети, управление.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-354-360>

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время наблюдается повышенный интерес к проектированию нейросетевых устройств для управления движением объектов с сосредоточенными по пространству параметрами [1–5]. Обучение нейросетевого управляющего устройства выполняется на основе минимизации взвешенной разности желаемых и фактических координат траектории движения объекта, взятых на достаточно большом, но конечном множестве дискретных моментов времени. Поскольку математическая модель

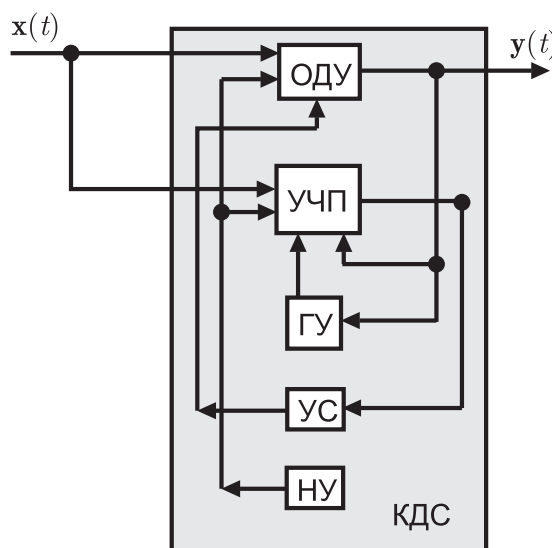


собственно управляемого объекта представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), объект характеризуется конечным множеством собственных частот. Следовательно, в данном случае применение подобных алгоритмов обучения либо минимизирует вероятность возникновения неустойчивых собственных частот колебаний управляемого объекта, либо делает невозможным развитие неустойчивости в течение достаточно длительного периода, когда происходит управление объектом.

Комбинированные динамические системы (КДС) представляют собой математические модели в форме связанных посредством граничных условий и условий связи систем ОДУ и уравнений в частных производных [6, 7]. Из-за наличия объектов управления с распределенными по пространству параметрами спектр характерных собственных частот будет как минимум счетно-бесконечным. Следовательно, при проектировании алгоритмов обучения нейросетевых регуляторов для управления движением подобных объектов нужно априорно ограничивать параметры регулятора условием их принадлежности области устойчивости.

### 1. УПРАВЛЕНИЕ КОМБИНИРОВАННЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

На рисунке показана структурная схема КДС, где  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_x}$ ,  $\mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_y}$ ,  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{N_x}(t))^T$  — кусочно-непрерывная входная вектор-функция,  $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_{N_y}(t))^T$  — непрерывная выходная вектор-функция. Здесь ОДУ — обыкновенные дифференциальные уравнения, моделирующие движение объектов управления с сосредоточенными по пространству параметрами; УЧП — уравнения в частных производных, моделирующие движение объектов управления с распределенными по пространству параметрами; ГУ, УС, НУ — граничные условия, условия связи и начальные условия соответственно.



Структурная схема КДС

Structural scheme of hybrid dynamic system

Уравнения управляемых КДС зависят от параметров обратных связей  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{N_p})^T \in \mathbb{R}^{N_p}$ . В результате линеаризации и применения одностороннего интегрального преобразования Лапласа по времени  $f(t) \rightarrow \tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t} dt$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  динамическая модель КДС представляется в виде матрицы передаточных функций  $\Phi(\lambda, \mathbf{p})$ ,  $\Phi : \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{C}^{(N_y, N_x)}$ :

$$\tilde{\mathbf{y}}(\lambda) = \Phi(\lambda, \mathbf{p})\tilde{\mathbf{x}}(\lambda), \quad \Phi(\lambda, \mathbf{p}) = [\Phi_{kj}(\lambda, \mathbf{p})] = [Q_{kj}(\lambda, \mathbf{p})/D(\lambda, \mathbf{p})], \quad (1)$$

$$D(\bar{\lambda}, \mathbf{p}) = \overline{D(\lambda, \mathbf{p})}, \quad Q_{kj}(\bar{\lambda}, \mathbf{p}) = \overline{Q_{kj}(\lambda, \mathbf{p})}, \quad k = 1, 2, \dots, N_y, \quad j = 1, 2, \dots, N_x, \quad (2)$$

где  $D(\lambda, \mathbf{p})$  — характеристический, а  $Q_{kj}(\lambda, \mathbf{p})$  — возмущающие квазимногочлены. Если математические модели элементов КДС с распределёнными по пространству





параметрами учитывают малую конечную диссипацию энергии и выполнен ряд условий, сформулированных и доказанных в [8], то при

$$\operatorname{Re} \lambda > \sigma_0, \quad \sigma_0 \in (-\infty, 0) \quad (3)$$

функции  $D(\lambda, \mathbf{p})$  и  $Q_{kj}(\lambda, \mathbf{p})$  аналитичны по  $\lambda$ .

Обобщённая степень [7]  $n \in \mathbb{R}$  характеристического квазимногочлена  $D(\lambda, \mathbf{p})$  определяется следующим условием:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-n} D(\lambda, \mathbf{p}) = C_a(\mathbf{p}), \quad 0 < |C_a(\mathbf{p})| < \infty, \quad \operatorname{Re} \lambda > -\infty. \quad (4)$$

Как следует из теорем об устойчивости КДС, для проверки принадлежности параметров обратных связей  $\mathbf{p}$  области устойчивости  $\Omega_{st} \subset \mathbb{R}^{N_p}$  достаточно проверить условие

$$\mathbf{p} \in \Omega_{st} \Leftrightarrow \Delta_{0 \leq \omega < \infty} \arg D(i\omega, \mathbf{p}) = n\pi/2. \quad (5)$$

В работе [9] была обоснована применимость теорем и методов проверки устойчивости КДС из [7, 10] для систем с нейросетевыми управляющими устройствами на основе нейронных сетей прямого распространения. При этом роль параметров обратных связей  $\mathbf{p}$  играют внутренние параметры (*веса*) нейросетевых управляющих устройств.

В отличие от задач параметрического синтеза КДС с ПД и ПИД регуляторами [10–14], в нейросетевых управляющих устройствах внутренние параметры  $\mathbf{p}$  подбираются в процессе обучения с использованием специальных алгоритмов, например, алгоритма обратного распространения ошибки, минимизирующих некоторую определённую *функцию ошибки*. Для обеспечения устойчивости КДС необходимо, чтобы после обучения искусственной нейронной сети управляющего устройства условие (5) выполнялось для полученного набора весов  $\mathbf{p}$ .

## 2. ОБУЧЕНИЕ НЕЙРОСЕТИ В ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ

Для выполнения условия устойчивости, сформулированного выше, наиболее эффективным решением является обеспечение условий, при которых во время обучения нейронной сети веса  $\mathbf{p}$  будут выбираться в пределах области устойчивости  $\Omega_{st}$ . Так как в процессе обучения происходит минимизация некоторой функции ошибки, наиболее простым решением будет модификация этой функции таким образом, чтобы она интенсивно возрастала при приближении изнутри к границе области устойчивости  $\Omega_{st}$  и при выходе за границу этой области. То есть требуется некоторая скалярная функция параметров обратных связей  $f_d(\mathbf{p})$ ,  $f_d : \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{R}$ , позволяющая оценить расстояние от границы области устойчивости (по направлению изнутри к границе области устойчивости).

Рассмотрим представление КДС в виде (1). Пусть выполнены условия (2)–(4), и  $\lambda_0 = \lambda_0(\mathbf{p})$  — корень характеристического квазимногочлена  $D(\lambda, \mathbf{p})$  с наибольшей вещественной частью. Из теорем об устойчивости [6, 7] следует, что система асимптотически устойчива, если  $\operatorname{Re} \lambda_0 < 0$ , и неустойчива при  $\operatorname{Re} \lambda_0 > 0$ , а случай  $\operatorname{Re} \lambda_0 = 0$  соответствует границе области устойчивости. То есть можно полагать, что расстояние от границы области устойчивости оценивается следующим образом:

$$f_d(\mathbf{p}) = \operatorname{Re} \lambda_0(\mathbf{p}). \quad (6)$$



Аналогично [7] на основе принципа аргумента доказывается следующее утверждение.

**Утверждение.** Если справедливы условия (2)–(4) и  $\sigma > \sigma_0$ , то функция  $D(\lambda, \mathbf{p})$  не будет иметь нулей при  $\operatorname{Re} \lambda_0 \geq 0$ , если

$$\Delta_{0 \leq \omega < \infty} \arg D(i\omega + \sigma, \mathbf{p}) = n\pi/2. \quad (7)$$

Если при  $\sigma = \sigma_1$  не выполняется условие (7), то  $\sigma_1 < \operatorname{Re} \lambda_0$ . Если при  $\sigma = \sigma_2 > \sigma_1$  условие (7) выполняется, то  $\sigma_2 > \operatorname{Re} \lambda_0$ . Таким образом, значение  $\operatorname{Re} \lambda_0$  из правой части определения (6) достаточно быстро может быть найдено методом половинного деления отрезка  $[\sigma_1, \sigma_2]$ .

Полученная метрика (6) позволяет легко модифицировать имеющуюся функцию ошибки, выбранную для обучения нейросетевого управляющего устройства путём добавления коэффициента  $k(\mathbf{p})$ ,  $k : \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{R}$ , интенсивно возрастающего при переходе изнутри вовне через границу области устойчивости  $\Omega_{st}$ . Например, в качестве такого коэффициента может быть использована функция  $k(\mathbf{p}) = f_k(f_d(\mathbf{p}))$ , где  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — кусочно-заданная функция вида

$$f_k(z) = \begin{cases} 0, & z < -1/C_k, \\ (C_k z + 1)^2, & z \geq -1/C_k. \end{cases}$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получена метрика, позволяющая без существенного изменения процесса обучения искусственной нейронной сети гарантировать выбор весов, принадлежащих области устойчивости КДС, тем самым позволяя использовать соответствующий класс управляющих устройств для управления динамическими системами с распределёнными по пространству параметрами. Заметим, что полученные результаты почти не накладывают ограничений на метод обучения нейронной сети, внося лишь дополнительный коэффициент в функцию ошибки.

Таким образом, описанный подход к ограничению возможных значений весов областью устойчивости динамической системы может быть использован как для упомянутого ранее алгоритма обратного распространения ошибки, так и для более сложных алгоритмов, например, использующих квазиньютоновские методы оптимизации [15].

## Библиографический список

1. Luoren L., Jinling L. Research of PID Control Algorithm Based on Neural Network // Energy Procedia. 2011. Vol. 13. P. 6988–6993.
2. MacKunis W., Leve F., Patre P. M., Fitz-Coy N., Dixon W. E. Adaptive neural network-based satellite attitude control in the presence of CMG uncertainty // Aerospace Science and Technology. 2016. № 54. P. 218–228.
3. Ajorkar A., Fazlyab A., Saberi F. F., Kabgani M. Design of an Adaptive-Neural Network Attitude Controller of a Satellite using Reaction Wheels // JACM. 2014. Vol. 1, iss. 2. P. 67–73. DOI: <https://doi.org/10.22055/jacm.2014.10757>



4. *MacKunis W., Dupree K., Bhasin S., Dixon W. E.* Adaptive neural network satellite attitude control in the presence of inertia and CMG actuator uncertainties // 2008 American Control Conference. 2008. P. 2975–2980. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACC.2008.4586948>
5. *Sivaprakash N., Shanmugam J.* Neural network based three axis satellite attitude control using only magnetic torquers // 24th Digital Avionics Systems Conference. 2005. Vol. 2. P. 6. DOI: <https://doi.org/10.1109/DASC.2005.1563440>
6. *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П.* К теории комбинированных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54–69.
7. *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П.* Моделирование, анализ и синтез комбинированных динамических систем : учеб. пособие. Саратов : ООО «ИД «Райт-Экспо», 2013. 144 с.
8. *Портенко М. С., Мельничук Д. В., Андрейченко Д. К.* Условия аналитичности характеристического и возмущающих квазимногочленов комбинированных динамических систем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 208–217. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-2-208-217>
9. *Андрейченко К. П., Никишов Д. А., Жадаев Ф. М.* Синтез передаточной функции нейронной сети в нейросетевом управляющем модуле // Докл. Академии военных наук. 2016. № 2(70). С. 13–15.
10. *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Комарова М. С.* Выбор оптимальных параметров комбинированных динамических систем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 2. С. 7–11
11. *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Комарова М. С.* Выбор параметров систем и динамический анализ газореактивных систем стабилизации с упругими стержнями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2012. № 4. С. 101–114.
12. *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Кононов В. В.* Параллельный алгоритм вычисления оптимальных параметров одноканальной системы угловой стабилизации // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 1. С. 109–117.
13. *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Мельничук Д. В., Портенко М. С.* Адаптивный алгоритм параметрического синтеза комбинированных динамических систем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 465–475. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-4-465-475>
14. *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Кононов В. В.* Параллельный алгоритм параметрического синтеза системы угловой стабилизации вращающегося упругого стержня под действием продольного ускорения // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 2. С. 22–37.
15. *Robitaille B., Marcos B., Veillette M., Payre G.* Quasi-Newton methods for training neural networks // WIT Transactions on Information and Communications Technologies. 1993. Vol. 2. P. 323–335. DOI: <https://doi.org/10.2495/AIENG930242>

---

**Образец для цитирования:**

*Андрейченко Д. К., Жадаев Ф. М.* Обучение нейросетевых регуляторов для стабилизации комбинированных динамических систем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 3. С. 354–360. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-354-360>

---



## Learning Neural Network Controllers for Stabilizing Hybrid Dynamic Systems

D. K. Andreichenko, F. M. Zhadaev

Dmitrii K. Andreichenko, <https://orcid.org/0000-0003-0525-984X>, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, [kp\\_andreichenko@renet.ru](mailto:kp_andreichenko@renet.ru)

Fedor M. Zhadaev, <https://orcid.org/0000-0002-2609-8590>, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, [ZhadaevFM@gmail.com](mailto:ZhadaevFM@gmail.com)

Control modules based on artificial neural networks (NN) are often used for controlling objects with lumped parameters. Controlled objects in such systems have finite set of natural oscillation frequencies. Thereby applying NN-based controllers after setting appropriate internal parameters (learning) minimize or fully exclude probability of appearing unstable natural oscillation frequencies for a long period of time. On the other hand if the controlled object includes objects with distributed parameters (such as elastic rods) the number of its natural oscillation frequencies is at least countable infinite. Thus, for using NN-based controllers for such systems additional check of stability is needed. In case of using classic controllers (such as PID-controller) stability is guaranteed by choosing internal parameters of controller from the area of stability of the system. Such approach is not applicable for NN-based controllers since their parameters are determined during the learning process. This article develops the rule which guarantees that after the learning process set of NN weights will belong to the area of stability of the system. That rule in fact appears as modification of loss function and does not apply valuable limitations on choosing a learning method. The obtained results could be used in cases of controlling hybrid dynamic systems with help of control modules based on feedforward neural networks.

*Key words:* dynamic systems, hybrid dynamic systems, neural networks, control.

### References

1. Luoren L., Jinling L. Research of PID Control Algorithm Based on Neural Network. *Energy Procedia*, 2011, vol. 13, pp. 6988–6993.
2. MacKunis W., Leve F., Patre P. M., Fitz-Coy N., Dixon W. E. Adaptive neural network-based satellite attitude control in the presence of CMG uncertainty. *Aerospace Science and Technology*, 2016, no. 54, pp. 218–228.
3. Ajorkar A., Fazlyab A., Saberi F. F., Kabgarian M. Design of an Adaptive-Neural Network Attitude Controller of a Satellite using Reaction Wheels. *JACM*, 2014, vol. 1, iss. 2. P. 67–73. DOI: <https://doi.org/10.22055/jacm.2014.10757>
4. MacKunis W., Dupree K., Bhasin S., Dixon W. E. Adaptive neural network satellite attitude control in the presence of inertia and CMG actuator uncertainties. *2008 American Control Conference*, 2008, pp. 2975–2980. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACC.2008.4586948>
5. Sivaprakash N., Shanmugam J. Neural network based three axis satellite attitude control using only magnetic torquers. *24th Digital Avionics Systems Conference*, 2005, vol. 2, pp. 6. DOI: <https://doi.org/10.1109/DASC.2005.1563440>
6. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. On the theory of hybrid dynamical systems. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2000, vol. 39, no. 3, pp. 383–398.
7. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. *Modelirovanie, analiz i sintez kombinirovannykh dinamicheskikh sistem* : ucheb. posobie. [Modeling, analysis and synthesis of hybrid dynamic systems : Schoolbook]. Saratov, OOO “ID “Rait-Ekspo” [Publ. House “Write-Expo”], 2013. 144 p. (in Russian).



8. Portenko M. S., Melnichuk D. V., Andreichenko D. K. Analyticity conditions of characteristic and disturbing quasipolynomials of hybrid dynamical systems. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 2, pp. 208–217 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-2-208-217>
9. Andreichenko K. P., Nikishov D. A., Zhadaev F. M. The Synthesis of Transfer Function of Neural Network in NN Control Module. *Reports of Military Sciences Academy*, 2016, no. 2(70), pp. 13–15 (in Russian).
10. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Komarova M. S. The Choice of Optimal Parameters for Combined Dynamical Systems. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 1, pt. 2, pp. 7–11 (in Russian).
11. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Komarova M. S. Parameter Selection and Dynamic Analysis of Gas Jet Stabilization Systems with Elastic Rods. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2012, vol. 51, no. 4, pp. 573–586. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064230712030021>
12. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Kononov V. V. Parallel Algorithm of Optimal Parameters Calculation for the Single Channel Angular Stabilization System. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mesh. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 4, pt. 1, pp. 109–117 (in Russian).
13. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Melnichuk D. V., Portenko M. S. Adaptive Algorithm of Parametric Synthesis of Hybrid Dynamical Systems. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mesh. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 465–475 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-4-465-475>
14. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Kononov V. V. A Parallel Algorithm for the Parametric Synthesis of a System for the Angular Stabilization of a Rotating Elastic Beam under the Action of Longitudinal Acceleration. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2017, vol. 56, no. 2, pp. 192–207. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064230717020034>
15. Robitaille B., Marcos B., Veillette M., Payre G. Quasi-Newton methods for training neural networks. *WIT Transactions on Information and Communications Technologies*, 1993, vol. 2, pp. 323–335. DOI: <https://doi.org/10.2495/AIENG930242>

---

**Cite this article as:**

Andreichenko D. K., Zhadaev F. M. Learning Neural Network Controllers for Stabilizing Hybrid Dynamic Systems. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 354–360 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-354-360>

---



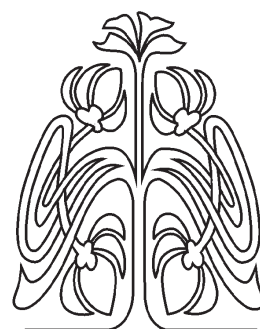
# ХРОНИКА НАУЧНОЙ ЖИЗНИ

## 19-Я МЕЖДУНАРОДНАЯ САРАТОВСКАЯ ЗИМНЯЯ ШКОЛА «СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ»

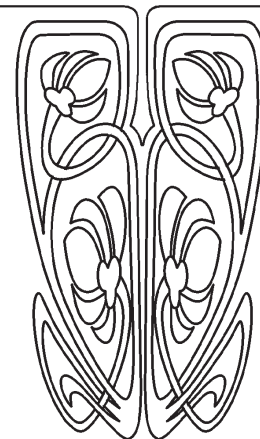
С 29 января по 2 февраля 2018 года в Саратове проходила 19-я международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения». Конференция была посвящена 90-летию со дня рождения академика П. Л. Ульянова, уроженца Саратовской области и выпускника Саратовского государственного университета. Ее организаторами были Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова и Математический институт имени В. А. Стеклова РАН. Конференция проходила при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-10008мол\_г).

В конференции принимали участие научные работники, преподаватели вузов, аспиранты и студенты. Это более 150 ученых из Астаны (Казахстан), Баку (Азербайджан), Барселоны (Испания), Быдгоща (Польша), Брянска, Владимира, Волгограда, Вологды, Воронежа, Долгопрудного, Екатеринбурга, Казани, Махачкалы, Москвы, Ростова-на-Дону, Самары, Томска, Тулы, Саратова. Самыми большими были делегации из Саратова (84 чел.), Москвы (36 чел.), Екатеринбурга (6 чел.) и Самары (5 чел). В число участников входили три академика РАН, один член-корреспондент РАН, 43 доктора физ.-мат. наук и 39 кандидатов физ.-мат. наук. Необходимо отметить, что благодаря финансовой поддержке РФФИ в школе смогли принять участие большое количество молодых ученых, в том числе и иногородних.

В рамках конференции были представлены новые актуальные научные результаты в области действительного и комплексного анализа, ортогональных полиномов и рядов, спектральной теории операторов и других разделах



**ПРИЛОЖЕНИЯ**







математических знаний, а также их приложений. Все они были опубликованы в сборнике «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов : ООО «Издательство «Научная книга», 2018. 380 с. ISBN 978-5-9758-1691-7). Всего было опубликовано 148 статей.

Оргкомитет конференции возглавил доктор физ.-мат. наук, профессор, академик РАН Б. С. Кашин. В состав оргкомитета вошли Б. И. Голубов (зам. председателя), Л. Ю. Коссович (зам. председателя); А. Н. Чумаченко (зам. председателя), А. П. Хромов (зам. председателя), А. В. Абанин, А. Д. Баев, академик РАН В. И. Бердышев, Е. П. Долженко, С. И. Дудов, М. И. Дьяченко, академик РАН С. В. Конягин, В. Г. Кротов, А. Г. Лосев, С. Р. Насыров, А. М. Олевский, Е. С. Половинкин, Д. В. Прохоров, А. М. Седлецкий, М. А. Скопина, член-корр. РАН Ю. Н. Субботин, С. П. Сидоров (секретарь).

Программный комитет конференции возглавил доктор физ.-мат. наук, профессор А. П. Хромов. В состав программного комитета вошли академик РАН Б. С. Кашин, академик РАН С. В. Конягин, член-корр. РАН В. Н. Дубинин, член-корр. РАН Ю. Н. Субботин, В. В. Арестов, С. В. Асташкин, Б. И. Голубов, А. Л. Лукашов, С. И. Дудов, В. Г. Кротов, С. Ф. Лукомский, С. Р. Насыров, С. Я. Новиков, С. С. Платонов, Е. С. Половинкин, Д. В. Прохоров, В. В. Старков, П. А. Терехин, Н. И. Черных, С. С. Волосивец, С. П. Сидоров, В. А. Халова (секретарь).

Конференция проходила в формате школы, т. е. помимо участия молодых ученых в ее работе принимали участие также и состоявшиеся исследователи, которые представляли свои результаты на пленарных и секционных выступлениях. На утренних заседаниях для участников конференции ведущими учеными были прочитаны лекции, в которых были представлены решения важных научных проблем действительного и комплексного анализа, теории приближений, спектральной теории операторов, оптимизации, негладкого анализа, гармонического и вейвлет-анализа. Всего было прочитано 15 лекций и сделано более 100 докладов и выступлений.

Подобный формат проведения конференции способствует интенсивной передаче научного опыта молодому поколению, более активному вовлечению молодых исследователей в пространство современной науки.

Результаты, представленные участниками школы, вносят большой вклад в актуальные направления науки и представляют широкий научный и практический интерес. Тематику и проблематику этих исследований можно распределить следующим образом: ортогональные системы и ряды; тригонометрические ряды; системы функций, порожденные сдвигами; базисы в различных пространствах; вопросы конструктивной теории функций; однолистные функции, квазиконформные отображения; граничные свойства аналитических функций; спектральная теория операторов; приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных; оптимизация и негладкий анализ.

Для целостного представления о современном состоянии и существующих приложениях теории функций и возможных путях ее дальнейшего развития были прочитаны следующие лекции.

Доктор физико-математических наук М. И. Дьяченко (Москва, Россия) прочитал лекцию на тему «Основополагающие работы П. Л. Ульянова и дальнейшее развитие его идей», в которой был представлен обзор результатов исследований академика Петра Лаврентьевича Ульянова и его учеников.

Доктор физико-математических наук С. Ю. Тихонов (Барселона, Испания) в сво-



ей лекции «Неравенства П. Л. Ульянова для модулей гладкости» представил обзор результатов и задач, связанных с развитием идей П. Л. Ульянова для модулей гладкости.

Лекция члена-корреспондента РАН А. И. Аптекарева (Москва, Россия) «Асимптотика «окрашенных» многочленов Джонса» была посвящена изучению  $N$ -«окрашенных» многочленов Джонса и гипотезе ТКТП, а также были представлены общий подход и некоторые результаты по задаче нахождения асимптотики многочленов Джонса для конкретного узла.

Академик РАН Б. С. Кашин (Москва, Россия) посвятил лекцию «Дискретизация систем функций и оценки норм подматриц» актуальному направлению исследований, связанному с оценкой сверху норм больших подматриц данной матрицы, задающей оператор единичной нормы.

В лекции доктора физико-математических наук А. А. Шкаликова (Москва, Россия) «Мультипликаторы в пространствах бесселевых потенциалов и дифференциальные операторы с сингулярными коэффициентами» были отражены новые результаты теории дифференциальных операторов. Лектором было представлено описание пространств мультипликаторов, действующих из одного пространства бесселевых потенциалов, в другое пространство, при этом основное внимание было уделено случаю, когда индексы гладкости этих пространств имеют разные знаки. В докладе показано, что полученные результаты имеют важные приложения в теории дифференциальных операторов с коэффициентами-распределениями (обыкновенными и с частными производными).

Лекция доктора физико-математических наук А. П. Хромова (Саратов, Россия) «Смешанные задачи для волнового уравнения с двумя неизвестными» представила новые результаты по использованию резольвентного подхода к решению волнового уравнения. В лекции было отмечено, что метод Фурье решения смешанных задач для дифференциальных уравнений в частных производных берет свое начало от работ Эйлера, Бернулли и Фурье. В обоснование этого метода большой вклад внесли знаменитые отечественные математики В. А. Стеклов и А. Н. Крылов. Докладчик, опираясь на исследования А. Н. Крылова и В. А. Черныгина, предложил резольвентный подход к обоснованию метода Фурье для волнового уравнения. В лекции были представлены результаты по исследованию сходимости ряда Фурье, представляющего формальное решение смешанной задачи для волнового уравнения с двумя неизвестными. Это позволило получить обобщенное решение однородного и неоднородного волнового уравнения при минимальных требованиях на начальные данные.

В совместном выступлении академика РАН В. И. Бердышева (Екатеринбург, Россия) и кандидата физико-математических наук В. Б. Костоусова (Екатеринбург, Россия) на тему «Навигация по геофизическим полям и связанные с ней экстремальные задачи» рассматривался ряд задач, связанных с проблемой навигации. Были представлены проблемы, которые возникают при исследовании проблем навигации по геофизическим полям, при планировании маршрутов движущихся объектов. Было отмечено, что автономная навигация по геофизическим полям является альтернативой спутниковой навигации и все более привлекает внимание исследователей в последнее время. В докладе были рассмотрены как простейшие модели процесса навигации, так и более сложные, в частности, задача планирования маршрута при условии, что наблюдатели неподвижны. Предложены эффективные численные методы для их решения, основанные на модификации алгоритма Дейкстры.



Доктор физико-математических наук Г. Е. Иванов (Москва, Россия) в докладе «Локальные и глобальные характеристики сильно и слабо выпуклых множеств» представил результаты по характеристике классов сильно и слабо выпуклых множеств в гильбертовом пространстве. Кроме того, лектор привел новые факты, устанавливающие взаимосвязь между этими типами множеств и ослабленной и усиленной выпуклостью множеств. В лекции устанавливалась связь глобальных и локальных характеристик сильной и слабой выпуклости множеств.

Доктор физико-математических наук Б. И. Голубов (Долгопрудный, Россия) в своей лекции «О некоторых результатах и задачах из двоичного анализа» представил некоторые результаты и проблемы в диадическом гармоническом анализе. В частности, были рассмотрены модифицированный сильный диадический интеграл и производные дробного порядка на  $\mathbb{R}_+$ , диадический аналог теоремы Таубериана, а также диадические операторы Харди и Харди – Литтлвуда, заданных в некоторых пространствах.

В лекции доктора физико-математических наук П. А. Бородина (Москва, Россия) «Приближение на прямой суммами сдвигов одной функции» были исследованы аппроксимационные свойства сумм сдвигов одной функции в действительных пространствах на прямой. Представлен результат, утверждающий, что в действительном пространстве  $p$ -интегрируемых на оси функций ( $p \geq 2$ ) существует функция, для которой суммы сдвигов плотны в этом пространстве.

Академик РАН С. В. Конягин (Москва, Россия) в своей лекции «О сходимости последовательности тригонометрических полиномов с натуральными коэффициентами к нулю почти всюду» доказал, что существует последовательность тригонометрических многочленов с целыми спектрами и целыми положительными коэффициентами, сходящаяся к нулю почти всюду.

Доктор физико-математических наук С. Р. Насыров (Казань, Россия) в своей лекции «Однопараметрические семейства комплексных торов над сферой Римана с точками ветвления произвольной кратности» изучал гладкие однопараметрические семейства эллиптических функций с заданными периодами, которые имеют критические точки заданных порядков и единственный полюс в начале координат. Рассматривалась задача нахождения системы дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют критические точки и периоды в случае, когда зависимости критических значений функции от критических точек нам известны.

Доктор физико-математических наук Т. П. Лукашенко (Москва, Россия), академик РАН В. А. Садовничий (Москва, Россия), кандидат физико-математических наук В. В. Галатенко (Москва, Россия) в лекции «О сходимости орторекурсивных разложений» рассмотрели задачу нахождения орторекурсивных разложений по замкнутым подпространствам и представили критерий, когда разложения по конечной последовательности подпространств элементов некоторого конечномерного подпространства совпадают с разлагаемыми элементами. Кроме того, ими был представлен ряд результатов, связанных с наилучшими приближениями элементов частичной суммой их орторекурсивного разложения по последовательности конечномерных подпространств.

Доктор физико-математических наук Н. Ю. Антонов (Екатеринбург, Россия) в лекции «О сходимости почти всюду по прямоугольникам кратных тригонометрических рядов Фурье» рассмотрел задачу сходимости кратных тригонометрических рядов Фурье, промежуточных между сходимостью над кубами и  $\lambda$ -сходимостью при



$\lambda > 1$ . Хорошо известный результат о почти всюду сходимости рядов Фурье по кубам функций из одного класса был обобщен на случай  $\Lambda$ -сходимости для некоторых последовательностей  $\Lambda$ .

В лекции доктора физико-математических наук А. Ю. Попова (Москва, Россия) «Оценка снизу минимума модуля аналитической функции через отрицательную степень максимума модуля на большей окружности» было приведено подробное доказательство основного результата по оценке снизу наибольшего значения минимума модуля аналитической функции на окружностях, радиусы которых пробегают отрезок с фиксированным отношением концов. Представленная оценка была дана через отрицательную степень интегральной нормы на большей окружности.

Следующую школу планируется провести в январе–феврале 2020 года в окрестностях Саратова. Оргкомитету поручено провести необходимую подготовительную работу.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-10008 мол\_г).

Б. И. Голубов, Б. С. Кашин, Л. Ю. Коссович,  
С. П. Сидоров, А. П. Хромов, А. Н. Чумаченко

---

**Образец для цитирования:**

Голубов Б. И., Кашин Б. С., Коссович Л. Ю., Сидоров С. П., Хромов А. П., Чумаченко А. Н. 19-я международная саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 3. С. 361–365.

---

**19th International Saratov Winter School  
“Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications”**

**B. I. Golubov, B. S. Kashin, L. Yu. Kossovich,  
S. P. Sidorov, A. P. Khromov, A. N. Chumachenko**

The paper reports the 19th International Saratov Winter School “Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications” which was held from 29 January to 2 February 2018. The School was organized by Saratov State University, Lomonosov Moscow State University and Steklov Mathematical Institute of RAS. The conference was dedicated to Prof. P. L. Ulyanov and covered different fields such as real and complex analysis, approximation of functions, orthogonal polynomials and series, numerical methods of analysis, spectral theory of operators, optimization, nonsmooth analysis, Fourier and wavelet analysis.

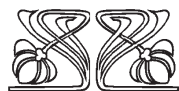
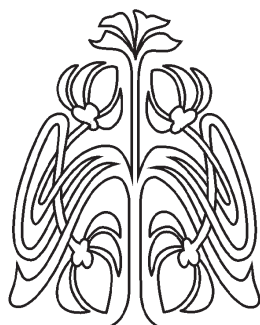
**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-31-10008mol\_g).

---

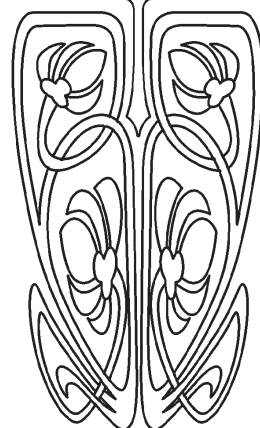
**Cite this article as:**

Golubov B. I., Kashin B. S., Kossovich L. Yu., Sidorov S. P., Khromov A. P., Chumachenko A. N. 19th International Saratov Winter School “Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications”. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 361–365 (in Russian).

---



**ПОДПИСКА**



**Подписка на I полугодие 2019 года**

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год

Цена свободная

Оформить подписку онлайн можно в Интернет-каталоге «Пресса по подписке» ([www.akc.ru](http://www.akc.ru))

**Адрес издательства:**

410012, Саратов, Астраханская, 83

**Тел.:** +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89

**Факс:** +7(845-2) 27-85-29

**E-mail:** [izvestiya@sgu.ru](mailto:izvestiya@sgu.ru)

**Адрес редколлегии серии:**

410012, Саратов, Астраханская, 83,

СГУ имени Н. Г. Чернышевского,  
механико-математический факультет

**Тел./факс:** +7(845-2) 26-15-54

**E-mail:** [mmi@sgu.ru](mailto:mmi@sgu.ru)

**Website:** <http://mmi.sgu.ru/>