УДК 514.76

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОДОЛЖЕННЫХ БИ-МЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР НА РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ НЕНУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ СУБРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

С. В. Галаев

Галаев Сергей Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, sgalaev@mail.ru

Вводится понятие внутренней геометрии субриманова многообразия M, под которой понимается совокупность тех свойств многообразия, которые зависят только от оснащения $D^{\perp}$ распределения D субриманова многообразия, а также от параллельного перенесения векторов, принадлежащих распределению D, вдоль кривых, касающихся этого распределения. Инвариантами внутренней геометрии субриманова многообразия M являются: тензор кривизны Схоутена; 1-форма η, порождающая распределение D; производная Ли $L_{\vec{\xi}}g$ метрического тензора g вдоль векторного поля $\vec{\xi}$; тензорное поле P, компоненты которого в адаптированных координатах выражаются с помощью равенств $P^c_{ad} = \partial_n \Gamma^c_{ad}$. В зависимости от свойств перечисленных выше инвариантов выделяются 12 классов субримановых многообразий. С помощью внутренней связности, заданной на субримановом многообразии M, на распределении D многообразия M определяется почти контактная структура с би-метрикой, названная в работе продолженной структурой. Проводится сравнительный анализ двух классификаций продолженных структур. В соответствии с первой классификацией выделяется 12 классов продолженных структур, соответствующих 12 классам исходных субримановых многообразий. Вторая классификация основана на свойствах фундаментального, ассоциированного с би-метрической структурой, тензора F типа $(0, 3)$. В соответствии со второй классификацией существуют 2^{11} классов би-метрических структур, среди которых 11 базисных классов F_i, $i = 1, \dots, 11$. В статье рассматривается случай субриманова многообразия с ненулевым тензором кривизны Схоутена и равной нулю производной Ли $L_{\vec{\xi}}g$. Доказывается, что продолженные почти контактные би-метрические структуры, соответствующие субримановым структурам, с равным нулю инвариантом $\omega = d\eta$ принадлежат классу $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$, а с отличным от нуля инвариантом $\omega = d\eta$ — классу $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \oplus F_7 \oplus \dots \oplus F_{10}$.

Ключевые слова: субриманово многообразие контактного типа, внутренняя геометрия субриманова многообразия, продолженная почти контактная структура с би-метрикой, распределение ненулевой кривизны.

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-263-273

ВВЕДЕНИЕ

Исследование почти контактных би-метрических структур начинается с основополагающей работы [1], в которой дано определение би-метрических многообразий и предложена классификация таких многообразий, основанная на выделении инвариантных подпространств в пространстве тензоров специального вида. В соответствии с указанной классификацией выделяются 2^{11} классов би-метрических многообразий и в том числе 11 базисных классов. В последующих работах [2, 3] приводятся примеры би-метрических многообразий различных классов. В настоящей работе исследуются почти контактные би-метрические структуры, заданные на распределениях субримановых многообразий контактного типа. Под субримановым многообразием контактного типа понимается гладкое многообразие M размерности n с заданной на нем субримановой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$, где: η — 1-форма, порождающая распределение D: $D = \ker(\eta)$; $\vec{\xi}$ — векторное поле, порождающее оснащение $D^{\perp}$ распределения D: $D^{\perp} = \mathrm{span}(\vec{\xi})$; g — риманова метрика на многообразии M, относительно которой распределения D и $D^{\perp}$ взаимно ортогональны. При этом выполняются равенства $\eta\left(\vec{\xi}\right) = 1$ и $g\left(\vec{\xi}, \vec{\xi}\right) = 1$. На основе конструкции продолжения [4–11] почти контактных метрических структур в работе [7] на тотальном пространстве D векторного расслоения (D, π, M) была определена почти контактная структура с би-метрикой, названная продолженной структурой. В работе [7] рассматривался случай субриманова многообразия с нулевым тензором Схоутена. В предлагаемой работе исследуется случай субриманова многообразия с ненулевым тензором Схоутена. Распределение D такого многообразия называется распределением ненулевой кривизны. Дополнительно мы полагаем, что векторное поле $\vec{\xi}$ — киллингово. Значения ассоциированного с продолженной би-метрической структурой тензорного поля F [1] совпадают с комитантами инвариантов внутренней геометрии [8] субримановых многообразий. Таких инвариантов четыре: тензор кривизны Схоутена R; дифференциальная 2-форма $\omega = d\eta$; производная Ли $L_{\vec{\xi}}g$ метрического тензора g вдоль векторного поля $\vec{\xi}$; тензорное поле P, компоненты которого в адаптированных координатах [8] выражаются с помощью равенств $P^{c}_{ad} = \partial_n \Gamma^{c}_{ad}$. В настоящей работе выделяется 12 классов субримановых многообразий, которым соответствуют 12 классов продолженных би-метрических структур. Целью работы является изучение классов, состоящих из многообразий с нулевым инвариантом $C = \frac{1}{2}L_{\vec{\xi}}g$, но с ненулевым инвариантом R. Исследование продолженных структур мотивируется приложениями в механике со связями [12, 13] и в теоретической физике [14]. Идея продолжения почти контактных структур тесно связана с развитием аппарата связностей над распределением и продолженных связностей [4, 8–10]. Продолженные структуры являются аналогом лифта геометрических структур на касательное расслоение [15–17].

В первом параграфе работы приводятся необходимые сведения о геометрии субримановых многообразий. Определяются внутренняя связность и внутренние инварианты субримановых многообразий. Второй параграф содержит основные результаты работы, где определяется продолженная почти контактная би-метрическая структура и обсуждаются вопросы ее классификации.

1. ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ СУБРИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ КОНТАКТНОГО ТИПА

Пусть M — гладкое многообразие размерности n с заданной на нем субримановой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$, где η и $\vec{\xi}$ — 1-форма и единичное векторное поле, порождающие соответственно ортогональные между собой распределения D и $D^{\perp}$. Внутренней линейной связностью ∇ [8] на субримановом многообразии называется отображение

$$\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D),$$

удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}}$; 2) $\nabla_{\vec{x}} f\vec{y} = (\vec{x}f)\,\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y}$; 3) $\nabla_{\vec{x}}\left(\vec{y}+\vec{z}\right) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z}$, где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D).

Внутренняя связность определяет дифференцирование допустимых тензорных полей [8]. Вот так, например, определяется ковариантная производная эндоморфизма φ: $(\nabla_{\vec{x}}\varphi)\,\vec{y} = \nabla_{\vec{x}}\left(\varphi\vec{y}\right) - \varphi(\nabla_{\vec{x}}\vec{y})$, $\vec{x},\vec{y}\in\Gamma(D)$.

На протяжении всей работы мы используем адаптированные координаты. Карту $k\left(x^{\alpha}\right)$ $(\alpha,\beta,\gamma = 1,\ldots,n;\ a,b,c = 1,\ldots,n-1;\ i,j,k = 2n-1)$ многообразия M будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_n = \vec{\xi}$ [8]. Пусть $P: TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D\bigoplus D^{\perp}$, и $k(x^{\alpha})$ — адаптированная карта. Векторные поля $P\left(\partial_a\right) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение D: $D = span(\vec{e}_a)$.

Коэффициенты внутренней линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma^c_{ab}\vec{e}_c$. Из равенств $\vec{e}_a = A^{a'}_a\vec{e}_{a'}$, где $A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов внутренней связности:

$$\Gamma^c_{ab} = A^{a'}_a A^{b'}_b A^c_{c'}\Gamma^{c'}_{a'b'} + A^c_{c'}\vec{e}_a A^{c'}_b.$$

Кручением и кривизной внутренней связности назовем соответственно допустимые тензорные поля:

$$S\left(\vec{x},\vec{y}\right) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x},\vec{y}],$$
$$R\left(\vec{x},\vec{y}\right)\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x},\vec{y}]}\vec{z} - P[Q\left[\vec{x},\vec{y}\right],\vec{z}],$$

где $Q = I - P$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\Gamma(D)$. Тензор $R\left(\vec{x},\vec{y}\right)\vec{z}$ носит название тензора кривизны субриманова многообразия. Имеет место

Предложение 1. *На субримановом многообразии существует единственная связность ∇ с нулевым кручением такая, что*

$$\nabla_{\vec{x}}g\left(\vec{x},\vec{y}\right) = 0.$$

Назовем связность ∇ внутренней метрической связностью. Коэффициенты внутренней метрической связности находятся по формуле

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}).$$

Наиболее просто устроены субримановы многообразия с нулевым тензором кривизны Схоутена. Многообразия с нулевым тензором кривизны Схоутена подробно изучались в случае контактного метрического многообразия в работах [7, 11].

Следуя В. В. Вагнеру [18], под внутренней геометрией субриманова многообразия M будем понимать геометрические свойства M, которые зависят только от параллельного перенесения, определяемого внутренней связностью, и от оснащения $D^{\perp}$. К основным инвариантам внутренней геометрии субриманова многообразия мы относим тензор кривизны Схоутена R, дифференциальную форму $\omega = d\eta$, производную Ли $C = \frac{1}{2}L_{\vec{\xi}}g$ метрического тензора g вдоль векторного поля $\vec{\xi}$, и тензорное поле P, компоненты которого в адаптированных координатах [8] представлены в виде $P^c_{ad} = \partial_n\Gamma^c_{ad}$.

2. ПРОДОЛЖЕННЫЕ ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ БИ-МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Пусть M — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m+1$, $m \geqslant 1$, с заданной на нем почти контактной структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$, где φ — тензор типа $(1,1)$, называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η — вектор и ковектор, называемые соответственно структурным вектором и контактной формой такие, что:

$$\varphi\vec{\xi} = \vec{0}, \qquad \varphi^2 = -I + \eta \otimes \vec{\xi}, \qquad \eta \circ \varphi = 0, \qquad \eta\left(\vec{\xi}\right) = 1.$$

Если почти контактная структура $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$ согласована с псевдоримановой метрикой g таким образом, что

$$g\left(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}\right) = -g\left(\vec{x}, \vec{y}\right) + \eta\left(\vec{x}\right)\eta(\vec{y}),$$

где $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(TM)$, $\Gamma(TM)$ — модуль векторных полей на многообразии M, то структура $\left(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D\right)$ называется почти контактной структурой с би-метрикой, а многообразие M — почти контактным многообразием с би-метрикой или, би-метрическим многообразием. Распределение $D = \ker(\eta)$ будем называть распределением би-метрического многообразия, а распределение $D^{\perp} = \mathrm{span}(\vec{\xi})$ — оснащением распределения D.

Тензорное поле $F\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right) = g((\nabla_{\vec{x}}\varphi)\,\vec{y}, \vec{z})$, где ∇ — связность Леви – Чивита, введено и названо в работе [1] фундаментальным тензорным полем, ассоциированным со структурой би-метрического многообразия. В зависимости от строения поля F выделяют [1] 11 базисных классов почти контактных структур с би-метрикой:

$$F_1: \quad F^1\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right) = \frac{1}{2n}\{g\left(\vec{x}.\varphi\vec{y}\right)\Theta\left(\varphi\vec{z}\right) + g\left(\varphi\vec{x}.\varphi\vec{y}\right)\Theta\left(\varphi^2\vec{z}\right) + g\left(\vec{x}.\varphi\vec{z}\right)\Theta\left(\varphi\vec{y}\right) + \\ + g\left(\varphi\vec{x}.\varphi\vec{z}\right)\Theta\left(\varphi^2\vec{y}\right)\},$$

$$F_2: \quad F^2\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right) = -\frac{1}{4}F\left(\varphi^2\vec{x}, \varphi^2\vec{y}, \varphi^2\vec{z}\right) + F\left(\varphi^2\vec{y}, \varphi^2\vec{z}, \varphi^2\vec{x}\right) - F\left(\varphi\vec{y}, \varphi^2\vec{z}, \varphi\vec{x}\right) + \\ + F\left(\varphi^2\vec{x}, \varphi^2\vec{z}, \varphi^2\vec{y}\right) + F\left(\varphi^2\vec{z}, \varphi^2\vec{y}, \varphi^2\vec{x}\right) - F\left(\varphi\vec{z}, \varphi^2\vec{y}, \varphi\vec{x}\right) - \\ - \frac{1}{2n}\{g\left(\vec{x}.\varphi\vec{y}\right)\Theta\left(\varphi\vec{z}\right) + g\left(\varphi\vec{x}.\varphi\vec{y}\right)\Theta\left(\varphi^2\vec{z}\right) + g\left(\vec{x}.\varphi\vec{z}\right)\Theta\left(\varphi\vec{y}\right) + g\left(\varphi\vec{x}.\varphi\vec{z}\right)\Theta\left(\varphi^2\vec{y}\right)\},$$

$$F_3: \quad F^3\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right) = -\frac{1}{4}F\left(\varphi^2\vec{x}, \varphi^2\vec{y}, \varphi^2\vec{z}\right) - F\left(\varphi^2\vec{y}, \varphi^2\vec{z}, \varphi^2\vec{x}\right) + \\ + F\left(\varphi\vec{y}, \varphi^2\vec{z}, \varphi\vec{x}\right) + F\left(\varphi^2\vec{x}, \varphi^2\vec{z}, \varphi^2\vec{y}\right) - F\left(\varphi^2\vec{z}, \varphi^2\vec{y}, \varphi^2\vec{x}\right) + F\left(\varphi\vec{z}, \varphi^2\vec{y}, \varphi\vec{x}\right),$$

$$F_4: \quad F^4\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right) = -\frac{\Theta(\vec{\xi})}{2n}\{g\left(\varphi\vec{x}.\varphi\vec{y}\right)\eta\left(\vec{z}\right) + g\left(\varphi\vec{x}.\varphi\vec{z}\right)\eta\left(\vec{y}\right)\},$$

$$F_5: \quad F^5\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right) = -\frac{\Theta^*(\vec{\xi})}{2n}\{g\left(\vec{x}.\varphi\vec{y}\right)\eta\left(\vec{z}\right) + g\left(\vec{x}.\varphi\vec{z}\right)\eta\left(\vec{y}\right)\},$$

$$F_6: \quad F^6\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right) = \frac{\Theta(\vec{\xi})}{2n}g\left(\varphi\vec{x}.\varphi\vec{y}\right)\eta\left(\vec{z}\right) + g\left(\varphi\vec{x}.\varphi\vec{z}\right)\eta\left(\vec{y}\right) + \\ + \frac{\Theta^*(\vec{\xi})}{2n}g\left(\vec{x}.\varphi\vec{y}\right)\eta\left(\vec{z}\right) + g\left(\vec{x}.\varphi\vec{z}\right)\eta\left(\vec{y}\right) + \frac{1}{4}F\left(\varphi^2\vec{x}, \varphi^2\vec{y}, \vec{\xi}\right) + F\left(\varphi^2\vec{y}, \varphi^2\vec{x}, \vec{\xi}\right) - \\ - F\left(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}, \vec{\xi}\right) - F\left(\varphi\vec{y}, \varphi\vec{x}, \vec{\xi}\right)\eta\left(\vec{z}\right) + \frac{1}{4}F\left(\varphi^2\vec{x}, \varphi^2\vec{z}, \vec{\xi}\right) + F\left(\varphi^2\vec{z}, \varphi^2\vec{x}, \vec{\xi}\right) -$$

$$-F\left(\varphi\vec{x},\varphi\vec{z},\vec{\xi}\right)-F\left(\varphi\vec{z},\varphi\vec{x},\vec{\xi}\right)\eta\left(\vec{y}\right),$$

$$F_7:\quad F^7\left(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)=\frac{1}{4}F\left(\varphi^2\vec{x},\varphi^2\vec{y},\vec{\xi}\right)-F\left(\varphi^2\vec{y},\varphi^2\vec{x},\vec{\xi}\right)-F\left(\varphi\vec{x},\varphi\vec{y},\vec{\xi}\right)+$$
$$+F\left(\varphi\vec{y},\varphi\vec{x},\vec{\xi}\right)\eta\left(\vec{z}\right)+\frac{1}{4}F\left(\varphi^2\vec{x},\varphi^2\vec{z},\vec{\xi}\right)-F\left(\varphi^2\vec{z},\varphi^2\vec{x},\vec{\xi}\right)-$$
$$-F\left(\varphi\vec{x},\varphi\vec{z},\vec{\xi}\right)-F\left(\varphi\vec{z},\varphi\vec{x},\vec{\xi}\right)\eta\left(\vec{y}\right),$$

$$F_8:\quad F^8\left(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)=\frac{1}{4}F\left(\varphi^2\vec{x},\varphi^2\vec{y},\vec{\xi}\right)+F\left(\varphi^2\vec{y},\varphi^2\vec{x},\vec{\xi}\right)+F\left(\varphi\vec{x},\varphi\vec{y},\vec{\xi}\right)+$$
$$+F\left(\varphi\vec{y},\varphi\vec{x},\vec{\xi}\right)\eta\left(\vec{z}\right)+\frac{1}{4}F\left(\varphi^2\vec{x},\varphi^2\vec{z},\vec{\xi}\right)+F\left(\varphi^2\vec{z},\varphi^2\vec{x},\vec{\xi}\right)+F\left(\varphi\vec{x},\varphi\vec{z},\vec{\xi}\right)+$$
$$+F\left(\varphi\vec{z},\varphi\vec{x},\vec{\xi}\right)\eta\left(\vec{y}\right),$$

$$F_9:\quad F^9\left(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)=\frac{1}{4}F\left(\varphi^2\vec{x},\varphi^2\vec{y},\vec{\xi}\right)-F\left(\varphi^2\vec{y},\varphi^2\vec{x},\vec{\xi}\right)+F\left(\varphi\vec{x},\varphi\vec{y},\vec{\xi}\right)-$$
$$-F\left(\varphi\vec{y},\varphi\vec{x},\vec{\xi}\right)\eta\left(\vec{z}\right)+\frac{1}{4}F\left(\varphi^2\vec{x},\varphi^2\vec{z},\vec{\xi}\right)-F\left(\varphi^2\vec{z},\varphi^2\vec{x},\vec{\xi}\right)+F\left(\varphi\vec{x},\varphi\vec{z},\vec{\xi}\right)-$$
$$-F\left(\varphi\vec{z},\varphi\vec{x},\vec{\xi}\right)\eta\left(\vec{y}\right),$$

$$F_{10}:\quad F^{10}\left(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)=F\left(\vec{\xi},\varphi^2\vec{y},\varphi^2\vec{z}\right)\eta(\vec{x}),$$

$$F_{11}:\quad F^{11}\left(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)=-\eta\left(\vec{x}\right)\left\{\eta\left(\vec{y}\right)F(\vec{\xi},\vec{\xi},\varphi^2\vec{z})+\eta\left(\vec{z}\right)F(\vec{\xi},\varphi^2\vec{y},\vec{\xi}\right\}.$$

Здесь $\Theta\left(\vec{z}\right)=g^{ab}F\left(\vec{e}_a,\vec{e}_b,\vec{z}\right)$, $\Theta^*\left(\vec{z}\right)=g^{ab}F\left(\vec{e}_a,\varphi\vec{e}_b,\vec{z}\right)$, $\omega\left(\vec{z}\right)=F\left(\vec{\xi},\vec{\xi},\vec{z}\right)$.

Пусть теперь D — распределение субриманова многообразия контактного типа. Векторные поля $(\vec{\varepsilon}_a=\partial_a-\Gamma_a^n\partial_n-\Gamma_{ac}^b x^{n+c}\partial_{n+b},\ \partial_n,\ \partial_{n+a})=(A_i)$ определяют [8] на распределении D как на гладком многообразии неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы $(dx^a,\ \Theta^n=dx^a+\Gamma_a^n dx^a,\ \Theta^{n+a}=dx^{n+a}+\Gamma_{bc}^a x^{n+c}dx^b)$ — соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$[\vec{\varepsilon}_a,\vec{\varepsilon}_b]=2\omega_{ba}\partial_n+x^{n+d}R_{bad}^c\partial_{n+c},\qquad [\vec{\varepsilon}_a,\partial_n]=x^{n+d}\partial_n\Gamma_{ad}^c\partial_{n+c},\qquad [\vec{\varepsilon}_a,\partial_{n+b}]=\Gamma_{ab}^c\partial_{n+c},$$

где R_{bad}^c — компоненты тензора Схоутена в адаптированных координатах [8]:

$$R_{abc}^d=2\vec{e}_{[a}\Gamma_{b]c}^d+2\Gamma_{[a||e||}^d\Gamma_{b]c}^e.$$

Имеет место

Предложение 2 (см. [8]). *Пусть ∇ — внутренняя связность с тензором кривизны Схоутена $R\left(\vec{x},\vec{y}\right)\vec{z}$. Тогда для всех $\vec{x},\vec{y}\in\Gamma(D)$ и $\vec{p}\in D$ имеют место следующие равенства:*

$$\left[\vec{x}^h,\vec{y}^h\right]_{\vec{p}}=\left[\vec{x},\vec{y}\right]^h-\left\{R\left(\vec{x},\vec{y}\right)\vec{p}\right\}^v,\tag{1}$$

$$\left[\vec{x}^h,\vec{\xi}^h\right]_{\vec{p}}=\left[\vec{x},\vec{\xi}\right]^h+\left\{P\left(\vec{x},\vec{p}\right)\right\}^v,\tag{2}$$

$$\left[\vec{x}^h,\vec{y}^v\right]=\left(\nabla_{\vec{x}}\vec{y}\right)^v,\tag{3}$$

$$\left[\vec{x}^v,\vec{\xi}^h\right]=\left[\vec{x},\vec{\xi}\right]^v.\tag{4}$$

Определим на многообразии D почти контактную структуру $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$, полагая $J\vec{x}^h = \vec{x}^v$, $J\vec{x}^v = -\vec{x}^h$. Здесь $\pi : D \to M$ — естественная проекция. Определим далее на многообразии M метрику $\tilde{g}$, подчиняющуюся равенствам:

$$\tilde{g}\left(\vec{x}^h, \vec{y}^h\right) = -\tilde{g}\left(\vec{x}^v, \vec{y}^v\right) = g\left(\vec{x}, \vec{y}\right), \qquad \tilde{g}\left(\vec{x}^h, \vec{y}^v\right) = \tilde{g}\left(\vec{x}^h, \vec{u}\right) = \tilde{g}\left(\vec{x}^v, \vec{u}\right) = 0.$$

Имеют место следующие предложения.

Предложение 3 (см. [7]). *Структура $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$ является почти контактной структурой с би-метрикой.*

Предложение 4. *Пусть $\widetilde{\nabla}$ — связность Леви – Чивита на би-метрическом многообразии D, тогда ее коэффициенты $\widetilde{\Gamma}^i_{jk}$ в адаптированных координатах получают следующее представление:*

$$\widetilde{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab}, \qquad 2\widetilde{\Gamma}^{n+c}_{ab} = R^c_{bad}x^{n+d}, \qquad 2\widetilde{\Gamma}^n_{ab} = 2\omega_{ba} - \partial_n g_{ab}, \qquad 2\widetilde{\Gamma}^c_{a,n+b} = R^c_{bda}x^{n+d},$$

$$2\widetilde{\Gamma}^c_{n+a,b} = R^c_{adb}x^{n+d}, \qquad \widetilde{\Gamma}^{n+c}_{a,n+b} = \Gamma^c_{ab}, \qquad 2\widetilde{\Gamma}^n_{a,n+b} = 2\widetilde{\Gamma}^n_{n+b,a} = \partial_n \Gamma^e_{ac}x^{n+c}g_{eb},$$

$$2\widetilde{\Gamma}^n_{n+a,n+b} = \partial_n g_{ab}, \qquad 2\widetilde{\Gamma}^c_{an} = 2\widetilde{\Gamma}^c_{na} = g^{cd}(2\omega_{ad} + \partial_n g_{ad}), \qquad 2\widetilde{\Gamma}^{n+c}_{an} = \partial_n \Gamma^c_{ad}x^{n+d} = -2\widetilde{\Gamma}^{n+c}_{na},$$

$$2\widetilde{\Gamma}^c_{n+a,n} = 2\widetilde{\Gamma}^c_{n,n+a} = -g^{cd}\partial_n \Gamma^e_{db}x^{n+b}g_{ae}, \qquad 2\widetilde{\Gamma}^{n+c}_{n+a,n} = 2\widetilde{\Gamma}^{n+c}_{n,n+a} = g^{cd}\partial_n g_{ad}.$$

Доказательство предложения 4 основано на использовании равенств (1)–(4), а также выражения для коэффициентов связности:

$$2\Gamma^m_{ij} = g^{km}\left(A_i g_{jk} + A_j g_{ik} - A_k g_{ij} + \Omega^l_{kj}g_{li} + \Omega^l_{ki}g_{lj}\right) + \Omega^m_{ij},$$

где $\Omega^n_{ab} = 2\omega_{ba}$, $\Omega^{n+c}_{ab} = R^c_{bad}x^{n+d}$, $\Omega^{n+c}_{a,n+b} = \Gamma^c_{ab}$, $\Omega^{n+c}_{an} = \partial_n \Gamma^c_{ab}x^{n+b}$.

Пусть $F\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right)$ — фундаментальное тензорное поле, ассоциированное с продолженной би-метрической структурой. Проводя необходимые вычисления, основанные на использовании предложения 4, получаем следующие значения $F\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right)$ для базисных векторов:

$$F\left(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b, \vec{\varepsilon}_c\right) = F\left(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}, \partial_{n+c}\right) = \frac{1}{2}(R_{baoc} - R_{obac}),$$

$$F\left(\partial_{n+a}, \vec{\varepsilon}_b, \partial_{n+c}\right) = F\left(\partial_{n+a}, \partial_{n+c}, \vec{\varepsilon}_b\right) = \frac{1}{2}R_{aobc},$$

$$F\left(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b, \partial_n\right) = F\left(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \vec{\varepsilon}_b\right) = \frac{1}{2}\partial_n \Gamma^e_{ao}g_{eb},$$

$$F\left(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}, \partial_n\right) = F\left(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+b}\right) = C_{ab} + \omega_{ab},$$

$$F\left(\partial_{n+a}, \vec{\varepsilon}_b, \partial_n\right) = F\left(\partial_{n+a}, \partial_n, \vec{\varepsilon}_b\right) = C_{ab},$$

$$F\left(\partial_{n+a}, \partial_{n+c}, \partial_n\right) = F\left(\partial_{n+a}, \partial_n, \partial_{n+c}\right) = -\frac{1}{2}\partial_n \Gamma^e_{bo}g_{ea},$$

$$F\left(\partial_n, \vec{\varepsilon}_b, \vec{\varepsilon}_c\right) = F\left(\partial_n, \partial_{n+b}, \partial_{n+c}\right) = -\frac{1}{2}(\partial_n \Gamma^e_{co}g_{eb} + \partial_n \Gamma^e_{bo}g_{ec}),$$

$$F\left(\partial_n, \vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}\right) = F\left(\partial_n, \partial_{n+b}, \vec{\varepsilon}_a\right) = \omega_{ab}.$$

Здесь использованы следующие обозначения: $R^e_{aob} = R^e_{adb}x^{n+d}$, $\Gamma^e_{ao} = \Gamma^e_{ad}x^{n+d}$, $R_{badc} = R^e_{bad}g_{ec}$.

В зависимости от значений внутренних инвариантов выделим 12 классов субримановых многообразий, как это показано в таблице.

Классификация субримановых многообразий контактного типа
Classification of sub-Riemannian manifolds of contact type

R	ω	C	P	Φ
0	0	0	0	Φ_0
1	0	0	0	Φ_1
0	1	0	0	Φ_2
1	1	0	0	Φ_3
0	0	1	0	Φ_4
0	1	1	0	Φ_5
1	0	1	0	Φ_6
1	1	1	0	Φ_7
0	0	1	1	Φ_8
1	0	1	1	Φ_9
0	1	1	1	Φ_{10}
1	1	1	1	Φ_{11}

Примечание. Символы «0» и «1» обозначают обращение и необращение в нуль соответствующего инварианта.
Note. The symbols “0“ and “1“ mean that a corresponding invariant either vanishes or does not vanish, respectively.

Значения фундаментального тензора продолженной структуры $F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ зависят от класса исходного субриманова многообразия. Тем самым каждому классу субримановых многообразий соответствует некоторый класс би-метрических многообразий с продолженной структурой. Таким образом, в соответствии с предложенной нами классификацией многообразий с продолженной структурой получаем 12 классов Φ_0, $\Phi_1, \ldots, \Phi_{11}$ би-метрических многообразий.

Пусть теперь M — субриманово многообразие, принадлежащее классу Φ_1. Такое многообразие характеризуется наличием единственного ненулевого внутреннего инварианта — тензора кривизны Схоутена.

Следующая теорема указывает на связи между описанными выше классификациями би-метрических многообразий.

Теорема 1. *Пусть M — субриманово многообразие. Тогда всякая продолженная би-метрическая структура, принадлежащая классу Φ_1, принадлежит классу $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.*

Доказательство. Пусть исходное субриманово многообразие M принадлежит классу Φ_1. В этом случае отличными от нуля значениями фундаментального тензора $F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ соответствующей продолженной структуры являются:

$$F(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b, \vec{\varepsilon}_c) = F(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}, \partial_{n+c}) = \frac{1}{2}(R_{baoc} - R_{obac}),$$
$$F(\partial_{n+a}, \vec{\varepsilon}_b, \partial_{n+c}) = F(\partial_{n+a}, \partial_{n+c}, \vec{\varepsilon}_b) = \frac{1}{2}R_{aobc}.$$

Проводя непосредственные вычисления, получаем:

$$F^1(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) + F^2(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) + F^3(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = -\frac{1}{4}(2F\left(\varphi^2\vec{x}, \varphi^2\vec{y}, \varphi^2\vec{z}\right) + 2F\left(\varphi^2\vec{x}, \varphi^2\vec{z}, \varphi^2\vec{y}\right) =$$

$$= -F\left(\varphi^2\vec{x}, \varphi^2\vec{y}, \varphi^2\vec{z}\right).$$

Если $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$, то последнее равенство примет вид

$$F^1\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right) + F^2\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right) + F^3\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right) = F\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right),$$

что и доказывает теорему. □

При доказательстве теоремы мы воспользовались свойствами тензора кривизны Схоутена [11]:

Предложение 5. *Тезор $R\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{u}\right)$ кривизны Схоутена субриманова многообразия контактного типа удовлетворяет следующим условиям:*

$$R\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{u}\right) + R\left(\vec{y}, \vec{x}, \vec{z}, \vec{u}\right) = 0, \qquad \int\limits_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \left\{R\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{u}\right)\right\} = 0,$$

где $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{u} \in \Gamma(D)$.

Несмотря на то что последнее утверждение доказывалось в работе [11] для случая почти контактного метрического многообразия [19], оно оказывается верным и в случае субриманова многообразия.

Теорема 2. *Пусть M — субриманово многообразие. Тогда всякая продолженная би-метрическая структура из класса Φ_3 принадлежит классу $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \oplus \oplus F_7 \oplus \dots \oplus F_{10}$.*

Доказательство. Пусть исходное субриманово многообразие M принадлежит классу Φ_3. В этом случае отличными от нуля значениями фундаментального тензора $F\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right)$ соответствующей продолженной структуры являются:

$$F\left(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b, \vec{\varepsilon}_c\right) = F\left(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}, \partial_{n+c}\right) = \frac{1}{2}(R_{baoc} - R_{obac}),$$
$$F\left(\partial_{n+a}, \vec{\varepsilon}_b, \partial_{n+c}\right) = F\left(\partial_{n+a}, \partial_{n+c}, \vec{\varepsilon}_b\right) = \frac{1}{2}R_{aobc},$$
$$F\left(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}, \partial_n\right) = F\left(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+b}\right) = F\left(\partial_n, \vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}\right) = F\left(\partial_n, \partial_{n+b}, \vec{\varepsilon}_a\right) = \omega_{ab}.$$

Проводя необходимые вычисления, получаем:

$$F^7\left(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}, \partial_n\right) = F^8\left(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}, \partial_n\right) = \frac{1}{2}\omega_{ab}, \qquad F^9\left(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}, \partial_n\right) = F^{10}\left(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}, \partial_n\right) = 0,$$
$$F^7\left(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+b}\right) = F^8\left(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+b}\right) = \frac{1}{2}\omega_{ab}, \qquad F^9\left(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+b}\right) = F^{10}\left(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+b}\right) = 0,$$
$$F^7\left(\partial_n, \vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}\right) = F^8\left(\partial_n, \vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}\right) = F^9\left(\partial_n, \vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}\right) = 0, \qquad F^{10}\left(\partial_n, \vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}\right) = \omega_{ab},$$
$$F^7\left(\partial_n, \partial_{n+b}, \vec{\varepsilon}_a\right) = F^8\left(\partial_n, \partial_{n+b}, \vec{\varepsilon}_a\right) = F^9\left(\partial_n, \partial_{n+b}, \vec{\varepsilon}_a\right) = 0, \qquad F^{10}\left(\partial_n, \partial_{n+b}, \vec{\varepsilon}_a\right) = \omega_{ab},$$

что и доказывает теорему. □

Библиографический список

1. *Ganchev G., Mihova V., Gribachev K.* Almost contact manifolds with B-metric // Math. Balkanica (N. S.). 1993. Vol. 7, fasc. 3–4. P. 261–276.
2. *Manev M.* Tangent bundles with Sasaki metric and almost hypercomplex pseudo-Hermitian structure // Topics in Almost Hermitian Geometry and Related Fields. 2005. P. 170–185. DOI: https://doi.org/10.1142/9789812701701_0013
3. *Manev M.* Tangent bundles with complete lift of the base metric and almost hypercomplex Hermitian-Norden structure // Compt. rend. Acad. bulg. Sci. 2014. Vol. 67, № 3. P. 313–322. arXiv:1309.0977v1 [math.DG].
4. *Букушева А. В.* О геометрии контактных метрических пространств с φ-связностью // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2015. № 17(214), вып. 40. С. 20–24.
5. *Букушева А. В., Галаев С. В.* Связности над распределением и геодезические пульверизации // Изв. вузов. Матем. 2013. № 4. С. 10–18.
6. *Букушева А. В., Галаев С. В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 17–22.
7. *Галаев С. В.* О классификации продолженных Би-метрических структур на субримановых многообразиях с нулевым тензором кривизны Схоутена // Вестн. Башкир. ун-та. 2017. Т. 22, № 4. С. 936–939.
8. *Bukusheva A. V., Galaev S. V.* Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics. 2011. Vol. 4 (53), № 2. P. 13–22.
9. *Галаев С. В.* Гладкие распределения с допустимой гиперкомплексной псевдо-эрмитовой структурой // Вестн. Башкир. ун-та. 2016. Т. 21, № 3. С. 551–555.
10. *Букушева А. В.* Слоения на распределениях с финслеровой метрикой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 3. С. 247–251.
11. *Галаев С. В.* О распределениях со специальной квази-сасакиевой структурой // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1, Мат. Физ. 2017, № 2 (39). С. 6–17. DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.2.1
12. *Вершик А. М., Гершкович В. Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Динамические системы–7. Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М. : ВИНИТИ, 1987. Т. 16. С. 5–85.
13. *Вершик А. М., Фаддеев Л. Д.* Лагранжева механика в инвариантном изложении // Проблемы теоретической физики. Т. 2. Теория ядра. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистической физике. Математическая физика. Л. : Изд-во ЛГУ, 1975. С. 129–141.
14. *Гладуш В. Д.* Пятимерная общая теория относительности и теория Калуцы – Клейна // ТМФ. 2003. Т. 136, № 3. С. 480–495. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf231
15. *Манин Ю. И.* Калибровочные поля и комплексная геометрия. М. : Наука, 1984. 336 с.
16. *Sasaki S.* On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds II // Tohoku Math. J. 1962. № 14. P. 146–155.
17. *Yano K., Ishihara S.* Tangent and cotangent bundles: differential geometry. N. Y. : Marcel Dekker, Inc., 1973. 423 p.
18. *Вагнер В. В.* Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.

19. *Blair D. E.* Contact manifolds in Riemannian geometry. Berlin ; N. Y. : Springer-Verlag, 1976. 146 p.

Образец для цитирования:
Галаев С. В. Классификация продолженных би-метрических структур на распределениях ненулевой кривизны субримановых многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 3. С. 263–273. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-263-273

Classification of Prolonged Bi-metric Structures on Distributions of Non-zero Curvature of Sub-Riemannian Manifolds

S. V. Galaev

Sergei V. Galaev, https://orcid.org/0000-0002-1129-7159, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, sgalaev@mail.ru

The notion of the interior geometry of a sub-Riemannian manifold M is introduced, that is the aggregate of those manifold properties that depend only on the framing $D^{\perp}$ of the distribution D of the sub-Riemannian manifold as well as on the parallel transport of the vectors tangent to the distribution D along the curves tangent to this distribution. The main invariants of the interior geometry of a sub-Riemannian manifold M are the following: the Schouten curvature tensor; the 1-form η defining the distribution D; the Lie derivative $L_{\vec{\xi}}g$ of the metric tensor g along a vector field $\vec{\xi}$; the tensor field P that with respect to adaptive coordinates has the components $P^c_{ad} = \partial_n \Gamma^c_{ad}$. Depending on the properties of these invariants, 12 classes of sub-Riemannian manifolds are defined. Using the interior connection on the sub-Riemannian manifold M, an almost contact structure with a bi-metric is defined on the distribution D, which is called the prolonged structure in the paper. The comparison of two classifications of the prolonged structures is given. Accordance with the first classification, there are 12 classes of the prolonged structures corresponding to the 12 classes of the initial sub-Riemannian manifolds. The second classification is grounded on the properties of the fundamental F of type $(0, 3)$ associated with the bi-metrical structure. According to the second classification, there exist 2^{11} classes of bi-metrical structures, among that 11 are basis classes F_i, $i = 1, \ldots, 11$. The paper considers the case of a sub-Riemannian manifold with non-zero Schouten curvature tensor and with zero Lie derivative $L_{\vec{\xi}}g$. It is proved that the prolonged almost contact bi-metrical structures corresponding to sub-Riemannian structures with the invariant $\omega = d\eta$ equal to zero, belong to the class $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$, and the ones with non-zero invariant a $\omega = d\eta$ belong to the class $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \oplus F_7 \oplus \ldots \oplus F_{10}$.

Key words: sub-Riemannian manifold of contact type; interior geometry of sub-Riemannian manifold; prolonged almost contact structure with bi-metric; distribution of non-zero curvature.

References

1. Ganchev G., Mihova V., Gribachev K. Almost contact manifolds with B-metric. *Math. Balkanica (N. S.)*, 1993, vol. 7, fasc. 3–4, pp. 261–276.
2. Manev M. Tangent bundles with Sasaki metric and almost hypercomplex pseudo-Hermitian structure. *Topics in Almost Hermitian Geometry and Related Fields*, 2005, pp. 170–185. DOI: https://doi.org/10.1142/9789812701701_0013
3. Manev M. Tangent bundles with complete lift of the base metric and almost hypercomplex Hermitian – Norden structure. *Compt. rend. Acad. bulg. Sci.*, 2014, vol. 67, no. 3, pp. 313–322. arXiv:1309.0977v1 [math.DG].

4. Bukusheva A. V. The geometry of the contact metric spaces φ-connection. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics*, 2015, no. 17(214), iss. 40, pp. 20–24 (in Russian).
5. Bukusheva A. V., Galaev S. V. Connections on distributions and geodesic sprays. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2013, vol. 57, iss. 4, pp. 7–13. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X13040026
6. Bukusheva A. V., Galaev S. V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution with admissible Finslerian metric. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 3, pp. 17–22 (in Russian).
7. Galaev S. V. On classification of continuous B-metric structures on sub-Riemannian manifolds with zero Schouten tensor. *Vestnik Bashkirskogo universiteta*, 2017, vol. 22, no. 4, pp. 936–939 (in Russian).
8. Bukusheva A. V., Galaev S. V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution. *Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics*, 2011, vol. 4 (53), no. 2, pp. 13–22.
9. Galaev S. V. Smooth distributions with admissible hypercomplex pseudo-hermitian structure. *Vestnik Bashkirskogo Universiteta*, 2016, vol. 21, no. 3, pp. 551–555 (in Russian).
10. Bukusheva A. V. Foliation on distribution with Finslerian metric. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 3, pp. 247–251 (in Russian).
11. Galaev S. V. On Distributions with Special Quasi-Sasakian Structure. *Science Journal of VolSU. Mathematics. Physics*, 2017, no. 2(39), pp. 6–17 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.2.1
12. Vershik A. M., Gershkovich V. Ya. Nonholonomic dynamical systems. Geometry of distributions and variational problems. *Dynamical systems–7, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr.* Moscow, VINITI, 1987. Vol. 16, pp. 5–85 (in Russian).
13. Vershik A. M., Faddeev L. D. Lagrangian mechanics in invariant formulation. *Selecta Math. Soviet*, 1981, vol. 1, no. 4, pp. 339–350. Reprinted in: L. D. Faddeev, 40 years in mathematical physics.
14. Gladush V. D. Five-Dimensional General Relativity and Kaluza – Klein Theory. *Theoret. and Math. Phys.*, 2003, vol. 136, no. 3, pp. 1312–1324. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1025655400605
15. Manin Yu. I. *Kalibrovochnye polia i kompleksnaia geometriia* [Calibration fields and complex geometry]. Moscow, Nauka, 1984. 336 p. (in Russian).
16. Sasaki S. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds II. *Tohoku Math. J.*, 1962, no. 14, pp. 146–155.
17. Yano K., Ishihara S. *Tangent and cotangent bundles: differential geometry*. New York, Marcel Dekker, Inc., 1973. 423 p.
18. Vagner V. V. Geometriia $(n-1)$-mernogo negolonomnogo mnogoobraziia v n-mernom prostranstve [The geometry of an $(n-1)$-dimensional non-holonomic manifold in an n-dimensional space]. *Tr. seminara po vektornomu i tenzornomu analizu* [Proceedings of the seminar on vector and tensor analysis]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1941, iss. 5, pp. 173–255 (in Russian).
19. Blair D. E. *Contact manifolds in Riemannian geometry*. Berlin, New York, Springer-Verlag, 1976. 146 p.

Cite this article as:

Galaev S. V. Classification of Prolonged Bi-metric Structures on Distributions of Non-zero Curvature of Sub-Riemannian Manifolds. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 263–273 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-263-273