УДК 514.17+517.51+519.6

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА 0/1-СИМПЛЕКСОВ

М. В. Невский, А. Ю. Ухалов

Невский Михаил Викторович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа, Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова, Россия, 150003, Ярославль, Советская, 14, mnevsk55@yandex.ru

Ухалов Алексей Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова, Россия, 150003, Ярославль, Советская, 14, alex-uhalov@yandex.ru

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = [0,1]^n$. Для n-мерного невырожденного симплекса S под σS понимается результат гомотетии S относительно центра тяжести с коэффициентом гомотетии σ. Положим $\xi(S) = \min\{\sigma \geqslant 1 : Q_n \subset \sigma S\}$, $\xi_n = \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$. Через P обозначим интерполяционный проектор, действующий из $C(Q_n)$ на пространство линейных функций от n переменных, узлы которого совпадают с вершинами симплекса $S \subset Q_n$. Пусть $\|P\|$ — норма P как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$, $\theta_n = \min \|P\|$. Через ξ_n' и θ_n' обозначаются величины, аналогичные ξ_n и θ_n, при дополнительном ограничении, что рассматриваемые симплексы являются 0/1-многогранниками, т. е. их вершины совпадают с вершинами Q_n. В статье систематизируются общие оценки чисел ξ_n', θ_n', а также приводятся их новые оценки и точные значения для конкретных n. Доказывается, что $\xi_n' \asymp n$, $\theta_n' \asymp \sqrt{n}$. Пусть одна из вершин 0/1-симплекса S^* есть произвольная вершина v куба Q_n, а n остальных являются смежными с противоположной к v вершиной куба. Для $2 \leqslant n \leqslant 5$ каждый симплекс, экстремальный в смысле ξ_n', совпадает с S^*. Минимальное n, при котором $\xi(S^*) > \xi_n'$, равно 6. Обозначим через P^* интерполяционный проектор с узлами в вершинах S^*. Минимальное n, при котором $\|P^*\| > \theta_n'$, равно 5.

Ключевые слова: симплекс, куб, гомотетия, осевой диаметр, интерполяция, проектор, численные методы.

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-305-315

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $Q_n := [0,1]^n$, $C(Q_n)$ — пространство непрерывных функций $f : Q_n \to \mathbb{R}$ с равномерной нормой $\|f\|_{C(Q_n)} := \max\limits_{x \in Q_n} |f(x)|$, $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — совокупность многочленов от n переменных степени $\leqslant 1$. Запись $L(n) \asymp M(n)$ означает, что существуют константы $c_1, c_2 > 0$, с которыми выполняется $c_1 M(n) \leqslant L(n) \leqslant c_2 M(n)$.

Пусть S — n-мерный невырожденный симплекс. Под σS будем понимать образ S при гомотетии относительно центра тяжести симплекса с коэффициентом гомотетии σ. Через $d_i(S)$ обозначим i-*й осевой диаметр* S, т. е. максимальную длину отрезка, содержащегося в S и параллельного i-й координатной оси. Понятие осевого диаметра выпуклого тела было введено Скоттом (Scott) [1, 2].

Введём в рассмотрение величины, связанные с поглощением куба Q_n гомотетом симплекса S. По определению $\xi(S) := \min\{\sigma \geqslant 1 : Q_n \subset \sigma S\}$. Положим $\xi_n := \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$, $\xi_n' := \min\{\xi(S) : \mathrm{ver}(S) \subset \mathrm{ver}(Q_n)\}$. Очевидно, $\xi_n' \geqslant \xi_n$. Через $\alpha(S)$ обозначим минимальное $\sigma > 0$, для которого Q_n принадлежит трансляту симплекса σS. Всегда $\alpha(S) \leqslant \xi(S)$. Равенство $\xi(S) = \alpha(S)$ эквивалентно тому, что симплекс $\xi(S)S$ описан вокруг Q_n, т. е. каждая грань этого симплекса содержит вершину куба.

Пусть $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)$ — вершины S, $1 \leqslant j \leqslant n+1$. Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица является невырожденной, причём $|\det(\mathbf{A})| = n!\,\mathrm{vol}(S)$. Пусть $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$. Обозначим через λ_j многочлен из $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$, коэффициенты которого составляют j-й столбец $\mathbf{A}^{-1}$, т. е. $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$. Числа $\lambda_j(x)$ являются барицентрическими координатами точки x относительно S. Мы называем λ_j *базисными многочленами Лагранжа,* соответствующими S.

Величина $d_i(S)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|\,. \tag{1}$$

Если $Q_n \not\subset S$, то

$$\xi(S) = (n+1)\max_{1\leqslant j\leqslant n+1}\max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}(-\lambda_j(x)) + 1. \tag{2}$$

Справедлива формула

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i(S)}. \tag{3}$$

Равенства (1)–(2) доказаны в [3], соотношение (3) получено в [4].

Интерполяционный проектор $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ по набору узлов $x^{(j)} \in Q_n$ определяется равенствами $Pf\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right)$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$. Норма проектора P как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$ может быть вычислена по формуле

$$\|P\| = \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}\sum_{j=1}^{n+1}|\lambda_j(x)|. \tag{4}$$

Обозначим $\theta_n = \min\|P\|$, $\theta'_n := \min\{\|P\| : x^{(j)} \in \mathrm{ver}(Q_n)\}$. Очевидно, $\theta'_n \geqslant \theta_n$. Для проектора P и симплекса S с вершинами в узлах интерполяции справедливо неравенство

$$\xi(S) \leqslant \frac{n+1}{2}\left(\|P\| - 1\right) + 1. \tag{5}$$

Отсюда следует, что

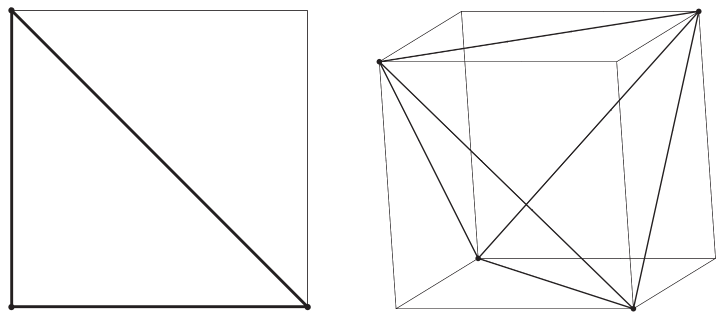
$$\xi_n \leqslant \frac{n+1}{2}(\theta_n - 1) + 1, \qquad \xi'_n \leqslant \frac{n+1}{2}(\theta'_n - 1) + 1. \tag{6}$$

Справедливы соотношения $\theta_n \asymp n^{1/2}$, $\xi_n \asymp n$. Если $n+1$ — *число Адамара,* т. е. существует матрица Адамара порядка $n+1$, то $\xi_n = n$ (о матрицах Адамара см., например, [6, 7]). Большой материал о числах ξ_n и θ_n содержится в [5].

В настоящей статье мы приведём новые оценки и точные значения θ'_n и ξ'_n, а также систематизируем сведения, имеющиеся к данному вопросу.

2. ЖЁСТКИЙ СИМПЛЕКС И ЕГО СВОЙСТВА

Введём в рассмотрение n-мерный невырожденный симплекс S^*, определяемый следующим образом. При $n = 1$ считаем $S^* = [0, 1]$. При $n > 1$ одна из вершин S^* совпадает с произвольной вершиной Q_n, а n остальных являются смежными с противоположной к ней вершиной куба. Например, таковым является симплекс с вершинами $x^{(1)} = (0, 1, \ldots, 1)$, $x^{(2)} = (1, 0, \ldots, 1)$, $\ldots$, $x^{(n)} = (1, 1, \ldots, 0)$, $x^{(n+1)} = (0, 0, \ldots, 0)$. Для него выбранная сначала вершина является нулевой: $x^{(n+1)} = (0, 0, \ldots, 0)$, а n остальных вершин $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ являются вершинами Q_n, смежными с $(1, \ldots, 1)$. Длины n рёбер S, содержащих $x^{(n+1)}$, равны $\sqrt{n-1}$; длины остальных рёбер равны $\sqrt{2}$. При $n = 3$ (и только в этой ситуации) симплекс S^* является правильным. В этом случае каждое из рёбер имеет длину $\sqrt{2}$. В дальнейшем считаем, что вершины S^* выбраны именно так, как отмечено выше. Для $n = 2$ и $n = 3$ симплекс S^* изображён на рисунке.



а / *a* б / *b*

Симплекс S^* для $n = 2$ (*а*) и $n = 3$ (*б*)
Simplex S^* for $n = 2$ (*a*) and $n = 3$ (*b*)

Обозначим через P^* интерполяционный проектор из $C(Q_n)$ на $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ по узлам $x^{(j)}$.

Если $n = 1$, то

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\lambda_1(x) = x_1$, $\lambda_2(x) = 1 - x_1$. Очевидно, каждая из величин $\xi(S^*)$, $d_1(S^*)$, $\alpha(S^*)$, $\|P^*\|$, $\mathrm{vol}(S^*)$ равна 1. Это следует и из формул парагр. 1. Заметим также, что для $n = 1$ и $S = S^*$ соотношение (5) является равенством.

Пусть теперь $n > 1$. Тогда

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} -(n-2) & 1 & 1 & \ldots & 1 & -1 \\ 1 & -(n-2) & 1 & \ldots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -(n-2) & \ldots & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & -(n-2) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n-1 \end{pmatrix}.$$

Справедливо равенство $\det(\mathbf{A}) = (-1)^{n-1}(n-1)$, поэтому $\mathrm{vol}(S^*) = \dfrac{n-1}{n!}$.

Базисные многочлены Лагранжа λ_j имеют вид

$$\lambda_j(x) = \frac{1}{n-1}\left[-(n-2)x_j + \sum_{k\neq j} x_k\right],\ j \leqslant n; \quad \lambda_{n+1}(x) = \frac{1}{n-1}\left[-\sum_{k=1}^{n} x_k + n - 1\right].$$

При $n = 2$ по формуле (2) имеем $\xi(S^*) = -3\lambda_3(1,1) + 1 = 4$. Если же $n > 2$, то

$$\xi(S^*) = -(n+1)\lambda_1(1,0,\ldots,0) + 1 = \frac{(n+1)(n-2)}{n-1} + 1 = \frac{n^2-3}{n-1}.$$

Таким образом,

$$\xi(S^*) = \begin{cases} 1, & n = 1,\\ 4, & n = 2,\\ \dfrac{n^2-3}{n-1}, & n \geqslant 3. \end{cases} \tag{7}$$

При любом n из (1) следуют равенства $d_1(S^*) = \ldots = d_n(S^*) = 1$. Они эквивалентны тому, что сумма модулей элементов каждой из верхних n строк матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ равна 2. Поскольку $d_i(S^*) = 1$, из (3) получается, что $\alpha(S^*) = n$. Одномерный случай — единственный, когда $\alpha(S^*) = \xi(S^*)$. Это означает, что симплекс $\xi(S^*)S^*$ описан вокруг Q_n лишь при $n = 1$.

Норма интерполяционного проектора P^* для произвольного n найдена в [8]:

$$\|P^*\| = \begin{cases} 3, & n = 2,\\ \dfrac{n+1}{2}, & n \text{ нечётное},\\ \dfrac{n+1}{2} - \dfrac{1}{2(n-1)}, & n \geqslant 4 \text{ чётное}. \end{cases} \tag{8}$$

Прямое вычисление показывает, что при $n = 1, 2, 3, 4$ соотношение (5) для симплекса S^* является равенством, т. е. выполняется

$$\xi(S^*) = \frac{n+1}{2}\left(\|P^*\| - 1\right) + 1.$$

Однако при $n > 4$ неравенство (5) для этого симплекса является строгим. Эти факты можно установить и с помощью теоретического анализа без применения (8) (см. [5]).

Начиная с $n = 3$ симплекс S^* обладает следующим свойством (см. [7, лемма 3.3]): если заменить любую одну вершину S^* на любую точку Q_n, то объём симплекса уменьшится. В связи с этим симплекс S^* при $n \geqslant 3$ назван в [7] *жёстким, или неизгибаемым (rigid)*. Это свойство выполняется и для $n = 1$. В двумерном же случае объём симплекса указанным образом не увеличивается. Авторы сохраняют термин *жёсткий симплекс* для всех n. При $n = 1, 2, 3, 4$ (и только в этих ситуациях) объём S^* является максимально возможным для симплекса, содержащегося в Q_n.

Жёсткий симплекс имеет и другие интересные свойства. Пусть $\mathbf{B}$ — матрица порядка $n > 1$, строки которой содержат координаты ненулевых вершин S^* (т. е. b_{ii}=0, а при $i \neq j$ имеем $b_{ij} = 1$). Эта матрица возникает в ряде задач комбинаторики и теории графов. Например, её перманент

$$\mathrm{per}\,\mathbf{B} := \sum_{\omega} b_{1\omega_1} \dots b_{n\omega_n} = n! \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{1}{j!}$$

равен числу q_n перестановок ω порядка n таких, что $\omega_i \neq i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Величина q_n называется *числом беспорядков порядка* n (см. [9]). Первые значения равны $q_1 = 0$, $q_2 = 1$, $q_3 = 2$, $q_4 = 9$, $q_5 = 44$, $q_6 = 265$. При больших n имеем $q_n \approx \frac{n!}{e}$. В то же время $\det \mathbf{B} = (-1)^{n-1}(n-1)$.

К экстремальным свойствам S^* относятся и равенства $\xi_n' = \xi(S^*)$, $\theta_n' = \|P^*\|$, справедливые для ряда размерностей. Вопрос о выполнении этих равенств для $1 \leqslant n \leqslant 7$ будет обсуждаться в параг. 4.

3. ОБЩИЕ ОЦЕНКИ ЧИСЕЛ θ_n' И ξ_n'

Последовательность θ_n' была введена в [8], где доказано, что $\theta_n' \geqslant \frac{1}{2e}\sqrt{n}$, а если $n+1$ — число Адамара, то $\theta_n' \leqslant \sqrt{n+1}$. Далее мы покажем, что эти оценки точны по порядку n для всех размерностей.

Стандартизованным многочленом Лежандра степени n называется функция

$$\chi_n(t) := \frac{1}{2^n n!} \left[(t^2-1)^n\right]^{(n)}$$

(формула Родрига). Многочлены Лежандра ортогональны на $[-1, 1]$ с весом $w(t) = 1$. По поводу свойств χ_n см. [10,11]. Известно, что $\chi_n(1) = 1$, $\chi_n(t)$ возрастает при $t \geqslant 1$. Обозначим через χ_n^{-1} функцию, обратную к χ_n на $[1, +\infty)$.

Теорема 1. *Выполняется неравенство* $\theta_n' > \frac{1}{e}\sqrt{n-1}$. *Если* $n \neq 2$, *то*

$$\theta_n' \leqslant \min\left(\frac{n+1}{2}, \frac{4\sqrt{e}}{3}\sqrt{n+2} + 1\right). \tag{9}$$

Доказательство. Появление многочленов Лежандра при оценивании норм интерполяционных проекторов объясняется в [5], где показано, что

$$\theta_n \geqslant \chi_n^{-1}\left(\frac{1}{\nu_n}\right) > \frac{\sqrt{n-1}}{e}.$$

Здесь ν_n — максимальный объём n-мерного симплекса, содержащегося в Q_n. Так как $\theta_n' \geqslant \theta_n$, отсюда следует первое утверждение теоремы.

Докажем оценку (9). Для любого симплекса S максимального объёма в Q_n выполняется неравенство (см. [5, теорема 3.5.1])

$$\|P\| \leqslant \min\left(n+1, \frac{4\sqrt{e}}{3}\sqrt{n+2} + 1\right), \tag{10}$$

где P — интерполяционный проектор, узлы которого совпадают с вершинами S. Обозначим через h_n величину максимального определителя порядка n, состоящего из 0 и 1. Справедливо равенство $h_n = n!\nu_n$ (см., например, [7]). Рассмотрим произвольный определитель порядка n, состоящий из 0 и 1, равный h_n. Пусть S — симплекс, ненулевые вершины которого задаются строками определителя, а последняя вершина является нулевой. Для этого симплекса $|\det(\mathbf{A})| = h_n = n!\nu_n$, откуда $\mathrm{vol}(S) = \nu_n$. Значит, S есть симплекс максимального объёма в Q_n. Соответствующий проектор удовлетворяет (10). Так как $\mathrm{ver}(S) \subset \mathrm{ver}(Q_n)$, отсюда получается

$$\theta'_n \leqslant \min\left(n+1, \frac{4\sqrt{e}}{3}\sqrt{n+2}+1\right).$$

Для установления (9) остаётся учесть, что при $n \neq 2$ верно $\theta'_n \leqslant \dfrac{n+1}{2}$. Действительно, θ'_n не превосходит нормы проектора P^* из предыдущего пункта, а в соответствии с (8) выполняется $\|P^*\| \leqslant \frac{n+1}{2}$. Теорема доказана. □

Теорема 2. *При любом n верно $\xi'_n \geqslant n$. Если n — чётное, то $\xi'_n > n$. Если $n+1$ — число Адамара, то $\xi'_n = n$. Для $n > 2$ выполняется неравенство $\xi'_n \leqslant \dfrac{n^2-3}{n-1}$.*

Доказательство. Пусть $S \subset Q_n$. Тогда для любого i верно $d_i(S) \leqslant d_i(Q_n) = 1$. Применяя (3), имеем

$$\xi(S) \geqslant \alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} \geqslant n.$$

Отсюда $\xi'_n \geqslant \xi_n \geqslant n$.

Пусть теперь n таково, что $\xi'_n = n$. Тогда для некоторого n-мерного симплекса S одновременно выполняются включения $\mathrm{ver}(S) \subset \mathrm{ver}(Q_n)$ и $Q_n \subset nS$. Пусть $x^{(j)}$ — вершины S. Как доказано в [12], из условий $S \subset Q_n \subset nS$ следует, что центр тяжести S, а именно точка $\frac{1}{n+1}\sum x^{(j)}$ совпадает с центром Q_n, т. е. точкой $\left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)$. Отсюда

$$\sum_{j=1}^{n+1} x^{(j)} = \left(\frac{n+1}{2}, \ldots, \frac{n+1}{2}\right).$$

Так как $x^{(j)} \in \mathrm{ver}(Q_n)$, координаты точки $\sum x^{(j)}$ являются целыми. Поэтому число n является нечётным. Следовательно, при любом чётном n верно $\xi'_n > n$.

Пусть теперь $n+1$ — число Адамара. В [7] отмечается, что в этом и только в этом случае существует n-мерный правильный симплекс, вершины которого находятся в вершинах Q_n. Для такого симплекса S верно $\xi(S) = n$ (различные доказательства даются в [5, 13]). Следовательно, $\xi'_n \leqslant n$. Но, как мы выяснили, $\xi'_n \geqslant n$, поэтому в рассматриваемой ситуации ξ'_n в точности равно n.

Наконец, пусть $n > 2$ и S^* — симплекс из параграф. 2. Тогда в силу (7) имеем $\xi'_n \leqslant \xi(S^*) = \dfrac{n^2-3}{n-1}$. Это завершает доказательство. □

Следствие 1. *Справедливы соотношения $\theta'_n \asymp n^{1/2}$, $\xi'_n \asymp n$.*

Для любого симплекса $S \subset Q_n$, имеющего максимальный объём, выполняется неравенство $\xi(S) \leqslant n+2$ (см. [5, теорема 3.2.1]). Вместе с предыдущим это даёт следующий результат.

Следствие 2. *Пусть S — n-мерный $0/1$-симплекс максимального объёма, $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — интерполяционный проектор, узлы которого совпадают с вершинами S. Тогда с константами, не зависящими от n, верно $\|P\| \asymp \theta'_n$, $\xi(S) \asymp \xi'_n$.*

Следствие 3. *При $n \geqslant 3$ последовательность $\{\xi'_n\}$ строго возрастает.*

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что при $n \geqslant 3$ выполняются неравенства $n \leqslant \xi'_n \leqslant \dfrac{n^2-3}{n-1} < n+1$. Поэтому $\xi'_n < n+1 \leqslant \xi'_{n+1}$. □

4. ЗНАЧЕНИЯ θ'_n И ξ'_n ДЛЯ $1 \leqslant n \leqslant 7$

Пусть S^* — n-мерный жёсткий симплекс, $P^* : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — интерполяционный проектор, узлы которого совпадают с вершинами S^* (см. парагр. 2). Оказывается, что S^* даёт точные значения ξ'_n при $1 \leqslant n \leqslant 5$, т. е. для этих размерностей $\xi(S^*) = \xi'_n$. Минимальное n, при котором $\xi(S^*) > \xi'_n$, равно 6. Проектор P^* является экстремальным в смысле θ_n для $1 \leqslant n \leqslant 4$, т. е. для этих n верно $\|P^*\| = \theta'_n$. Минимальное n, при котором $\|P^*\| > \theta'_n$, равно 5. Рассмотрим эти случаи подробнее.

Пусть $n = 1$. Имеем $Q_1 = S^* = [0,1]$, $\|P^*\| = \xi(S^*) = 1$, поэтому $\theta_1 = \xi_1 = \theta'_1 = \xi'_1 = 1$.

В случае $n = 2$ имеется (с точностью до подобия) всего один симплекс с вершинами в вершинах куба. Это симплекс S^* с вершинами $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,0)$. Из рассмотрения S^* следует, что $\theta'_2 = 3$, $\xi'_2 = 4$.

Случай $n = 3$ исследован в работах М. В. Невского (см., например, [5]). Минимумы $\xi(S)$ и $\|P\|$ достигаются на симплексе S^* с вершинами $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(0,0,0)$. Верны равенства $\xi_3 = \xi'_3 = 3$, $\theta_3 = \theta'_3 = 2$. Отметим, что те же значения $\xi(S)$ и $\|P\|$ достигаются и на симплексе S^{**} с вершинами $\left(\frac{1}{2},0,0\right)$, $\left(\frac{1}{2},1,0\right)$, $\left(0,\frac{1}{2},1\right)$, $\left(1,\frac{1}{2},1\right)$ (и подобных ему). Однако вершины S^{**} не совпадают с вершинами куба. Других экстремальных симплексов в трёхмерной ситуации нет.

Для $n = 4$ и $n = 5$ нами выполнен полный перебор n-мерных симплексов, удовлетворяющих условию $\mathrm{ver}(S) \subset \mathrm{ver}(Q_n)$. Вычисления показали, что при $n = 4$ симплекс S^* и проектор P^* доставляют минимумы обеих величин $\xi(S)$ и $\|P\|$. Имеют место равенства $\theta'_4 = \frac{7}{3}$, $\xi'_4 = \frac{13}{3}$. Симплекс S^* остаётся экстремальным и относительно ξ_5, т. е. $\xi_5 = \xi(S^*) = \frac{11}{2}$. Обнаружено, что точное значение θ_5 равно $\frac{13}{5}$. Неравенство $\theta'_5 \leqslant \frac{13}{5}$, означающее, что $\theta'_5 < \|P^*\|$, установлено ранее в [5, п. 3.8.3].

Перейдем к случаю $n = 6$. Из рассмотрения жёсткого симплекса S^* следуют неравенства $6 \leqslant \xi'_6 \leqslant \frac{33}{5}$. Покажем, что верхняя оценка может быть существенно улучшена.

Теорема 3. *Справедливо неравенство $\xi'_6 \leqslant \frac{25}{4}$.*

Доказательство. Достаточно предъявить симплекс S, для которого $\mathrm{ver}(S) \subset \subset \mathrm{ver}(Q_6)$ и $\xi(S) = \frac{25}{4}$. Пусть вершины S суть $(0,0,0,0,1,1)$, $(0,0,0,1,0,1)$, $(0,1,1,1,1,0)$, $(1,0,1,1,1,0)$, $(1,1,0,1,1,0)$, $(1,1,1,0,0,1)$, $(0,0,0,0,0,0)$. Матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{-1}$ имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -5 & 3 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -5 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 3 & -5 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & 1 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты многочленов λ_j составляют столбцы $\mathbf{A}^{-1}$, следовательно,

$$\lambda_1(x) = \frac{1}{8}\left(-x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 + 5x_5 + 3x_6\right),$$
$$\lambda_2(x) = \frac{1}{8}\left(-x_1 - x_2 - x_3 + 5x_4 - 3x_5 + 3x_6\right),$$
$$\lambda_3(x) = \frac{1}{8}\left(-5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 - x_6\right),$$
$$\lambda_4(x) = \frac{1}{8}\left(3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 - x_6\right),$$
$$\lambda_5(x) = \frac{1}{8}\left(3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 + x_5 - x_6\right),$$
$$\lambda_6(x) = \frac{1}{8}\left(2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 2x_6\right),$$
$$\lambda_7(x) = \frac{1}{8}\left(-x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 - 3x_5 - 5x_6 + 8\right).$$

Вычислим $\xi(S)$, применяя равенство (2). Для каждого j подберём $x^* \in \operatorname{ver}(Q_6)$ так, чтобы при $x = x^*$ величина $(-\lambda_j(x))$ была максимальна. Нетрудно видеть, что $m := \max\limits_j \max\limits_x(-\lambda_j(x)) = \frac{3}{4}$. Это значение при $j = 1$ достигается на вершине $(1,1,1,1,0,0)$, при $j = 2$ — на вершине $(1,1,1,0,1,0)$, при $j = 3$ — на вершине $(1,0,0,0,0,1)$, при $j = 4$ — на вершине $(0,1,0,0,0,1)$, при $j = 5$ — на вершине $(0,0,1,0,0,1)$ и при $j = 7$ — на вершине $(1,1,1,1,1,1)$. Отметим, что $\max\limits_x(-\lambda_6(x)) = \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$. По формуле (2) имеем $\xi(S) = 7m + 1 = \frac{25}{4}$. Теорема доказана. $\square$

Нами был выполнен полный перебор шестимерных симплексов, удовлетворяющих условию $\operatorname{ver}(S) \subset \operatorname{ver}(Q_6)$. Одна вершина каждого симплекса (нулевая) была фиксирована. Остальные шесть его вершин выбирались из оставшихся $2^6 - 1$ вершин куба. Таким образом, всего потребовалось рассмотреть $\binom{2^6-1}{6} = 67\,945\,521$ симплекс. Вычисления проводились с помощью специально написанной программы на языке системы Wolfram Mathematica (см. [14,15]). Как оказалось, минимум $\xi(S)$ доставляет симплекс S из доказательства теоремы 3. Следовательно, $\xi_6' = \frac{25}{4}$. Одновременно мы показали, что наименьшее n, для которого жёсткий симплекс S^* не даёт точного значения ξ_n', равно 6.

Из результатов [5, п. 3.8.3] следует, что $\theta_6' \leqslant 3$. Полный перебор 0/1-симплексов в $\mathbb{R}^6$ показал, что симплекс S из доказательства теоремы 3 минимизирует и норму интерполяционного проектора. Для проектора P по узлам в вершинах S формула (4) даёт $\|P\| = 3$. Как выяснилось, это и есть минимальное значение нормы интерполяционного проектора по узлам, расположенным в вершинах Q_6. Следовательно, точное значение θ_6' равно 3. Заметим, что $\|P^*\| = \frac{17}{5} > \theta_6'$.

Наконец, рассмотрим случай $n = 7$. В силу того что 8 есть число Адамара, существует семимерный правильный симплекс, вершины которого находятся в вершинах куба (см. [7]). Например, таковым является симплекс S с вершинами $(1,1,1,1,1,1,1)$, $(0,1,0,1,0,1,0)$, $(0,0,1,1,0,0,1)$, $(1,0,0,1,1,0,0)$, $(0,0,0,0,1,1,1)$, $(1,0,1,0,0,1,0)$, $(1,1,0,0,0,0,1)$, $(0,1,1,0,1,0,0)$. Справедливо равенство $\xi(S) = 7$. Из оценки $\xi_n' \geqslant \xi_n \geqslant n$ следует, что $\xi_7' = \xi_7 = 7$. Так как $\xi_7 = 7$, левое неравенство (6) влечёт $\theta_7 \geqslant \frac{5}{2}$. Однако, как отмечено в [8], для проектора P, соответствующего S, верно $\|P\| = \frac{5}{2}$. Следовательно, $\theta_7' = \theta_7 = \frac{5}{2}$.

В таблице приведена сводка известных результатов о числах ξ_n, ξ_n', θ_n и θ_n' при $1 \leqslant n \leqslant 7$. Она объединяет результаты настоящей статьи и работ [5, 8, 13].

Оценки ξ_n, ξ_n', θ_n и θ_n' для $1 \leqslant n \leqslant 7$
Estimates of ξ_n, ξ_n', θ_n, and θ_n' for $1 \leqslant n \leqslant 7$

n	ξ_n	ξ_n'	θ_n	θ_n'
1	1	1	1	1
2	$\frac{3\sqrt{5}}{5}+1=2.34\ldots$	4	$\frac{2\sqrt{5}}{5}+1=1.89\ldots$	3
3	3	3	2	2
4	$4 \leqslant \xi_4 \leqslant \frac{19+5\sqrt{13}}{9}=4.11\ldots$ $\xi_4=\frac{19+5\sqrt{13}}{9}=4.11\ldots$ (?)	$\frac{13}{3}$	$\frac{11}{5} \leqslant \theta_4 \leqslant \frac{7}{3}$ $\theta_4=\frac{7}{3}$ (?)	$\frac{7}{3}$
5	5	$\frac{11}{2}$	$\frac{7}{3} \leqslant \theta_5 < 2.448804$	$\frac{13}{5}$
6	$6 \leqslant \xi_6 < 6.0166$	$\frac{25}{4}$	$\frac{17}{7} \leqslant \theta_6 \leqslant 3$	3
7	7	7	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$

Примечание. Знаком вопроса отмечены числа, которые, по предположению авторов, являются точными значениями. Для величин, точные значения которых неизвестны, приведены лучшие из полученных авторами оценок.

Note. The question sign points to values which are sharp by authors' assumption. For values whose exact values are unknown, the best estimates obtained by the authors are given.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ (проект № 1.12873.2018/12.1).

Библиографический список

1. *Scott P. R.* Lattices and convex sets in space // Quart. J. Math. Oxford (2). 1985. Vol. 36. P. 359–362.
2. *Scott P. R.* Properties of axial diameters // Bull. Austral. Math. Soc. 1989. Vol. 39. P. 329–333.
3. *Невский М. В.* Об одном свойстве n-мерного симплекса // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 580–593. DOI: 10.4213/mzm7698
4. *Nevskii M.* Properties of axial diameters of a simplex // Discrete Comput. Geom. 2011. Vol. 46, № 2. P. 301–312. DOI: 10.1007/s00454-011-9355-7
5. *Невский М. В.* Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции. Ярославль : ЯрГУ, 2012. 218 с.
6. *Холл М.* Комбинаторика / пер. с англ. М. : Мир, 1970. 424 с.
7. *Hudelson M., Klee V., Larman D.* Largest j-simplices in d-cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem // Linear Algebra Appl. 1996. Vol. 241–243. P. 519–598.
8. *Невский М. В.* Оценки для минимальной нормы проектора при линейной интерполяции по вершинам n-мерного куба // Моделирование и анализ информационных систем. 2003. Т. 10, № 1. С. 9–19.
9. *Тараканов В. Е.* Комбинаторные задачи и $(0,1)$-матрицы. М. : Наука, 1985. 218 с.
10. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены : пер. с англ. М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. 500 с.

11. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М. : Наука, 1979. 416 с.
12. *Невский М. В., Ухалов А. Ю.* Об n-мерных симплексах, удовлетворяющих включениям $S \subset [0,1]^n \subset nS$ // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. Т. 24, № 5. С. 578–595. DOI: https://doi.org/10.18255/1818-1015-2017-5-578-595
13. *Невский М. В., Ухалов А. Ю.* Новые оценки числовых величин, связанных с симплексом // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. Т. 24, № 1. С. 94–110. DOI: https://doi.org/10.18255/1818-1015-2017-1-94-110
14. *Mangano S.* Mathematica cookbook. Cambridge : O'Reilly Media Inc., 2010. 832 p.
15. *Дьяконов В. П.* Mathematica 5/6/7. Полное руководство. М. : ДМК Пресс, 2010. 624 с.

Образец для цитирования:
Невский М. В., Ухалов А. Ю. Некоторые свойства 0/1-симплексов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 3. С. 305–315. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-305-315

Some Properties of 0/1-Simplices

M. V. Nevskii, A. Yu. Ukhalov

Mikhail V. Nevskii, https://orcid.org/0000-0002-6392-7618, P. G. Demidov Yaroslavl State University, 14, Sovetskaya Str., Yaroslavl, 150003, Russia, mnevsk55@yandex.ru
Alexey Yu. Ukhalov, https://orcid.org/0000-0001-6551-5118, P. G. Demidov Yaroslavl State University, 14, Sovetskaya Str., Yaroslavl, 150003, Russia, alex-ukhalov@yandex.ru

Let $n \in \mathbb{N}$, and let $Q_n = [0,1]^n$. For a nondegenerate simplex $S \subset \mathbb{R}^n$, by σS we mean the homothetic copy of S with center of homothety in the center of gravity of S and ratio of homothety σ. Put $\xi(S) = \min\{\sigma \geqslant 1 : Q_n \subset \sigma S\}$, $\xi_n = \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$. By P we denote the interpolation projector from $C(Q_n)$ onto the space of linear functions of n variables with the nodes in the vertices of a simplex $S \subset Q_n$. Let $\|P\|$ be the norm of P as an operator from $C(Q_n)$ to $C(Q_n)$, $\theta_n = \min \|P\|$. By ξ_n' and θ_n' we denote the values analogous to ξ_n and θ_n, with the additional condition that corresponding simplices are 0/1-polytopes, i. e., their vertices coincide with vertices of Q_n. In the present paper, we systematize general estimates of the numbers ξ_n', θ_n' and also give their new estimates and precise values for some n. We prove that $\xi_n' \asymp n$, $\theta_n' \asymp \sqrt{n}$. Let one vertex of 0/1-simplex S^* be an arbitrary vertex v of Q_n and the other n vertices are close to the vertex of the cube opposite to v. For $2 \leqslant n \leqslant 5$, each simplex extremal in the sense of ξ_n' coincides with S^*. The minimal n such that $\xi(S^*) > \xi_n'$ is equal to 6. Denote by P^* the interpolation projector with the nodes in the vertices of S^*. The minimal n such that $\|P^*\| > \theta_n'$ is equal to 5.

Key words: simplex, cube, homothety, axial diameter, interpolation, projector, numerical methods.

Acknowledgements: This work was carried out within the framework of the State Programme of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 1.12873.2018/12.1).

References

1. Scott P. R. Lattices and convex sets in space. *Quart. J. Math. Oxford (2)*, 1985, vol. 36, pp. 359–362.
2. Scott P. R. Properties of axial diameters. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 1989, vol. 39, pp. 329–333.

3. Nevskii M. V. On a property of n-dimensional simplices. *Math. Notes*, 2010, vol. 87, no. 4, pp. 543–555. DOI: 10.4213/mzm7698
4. Nevskii M. Properties of axial diameters of a simplex. *Discrete Comput. Geom.*, 2011, vol. 46, no 2, pp. 301–312. DOI: 10.1007/s00454-011-9355-7
5. Nevskii M. V. *Geometricheskie ocenki v polinomial'noy interpolyacii* [Geometric Estimates in Polynomial Interpolation]. Yaroslavl, Yaroslavl State University, 2012. 218 p. (in Russian).
6. Hall M., Jr. *Combinatorial Theory.* Waltham (Massachusets), Toronto, London, Blaisdall publishing company, 1967. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1970. 424 p).
7. Hudelson M., Klee V., Larman D. Largest j-simplices in d-cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem. *Linear Algebra Appl.*, 1996, vol. 241–243, pp. 519–598.
8. Nevskii M. V. Estimates for the minimal norm of a projector related to the linear interpolation by vertices of an n-dimensional cube. *Modeling and Analysis of Information Systems*, 2003, vol. 10, no. 1, pp. 9–19 (in Russian).
9. Tarakanov V. E. *Kombinatornye zadachi i* $(0,1)$*-matricy* [Combinatoric Problems and $(0,1)$-Matrices]. Moscow, Nauka, 1985. 218 p. (in Russian).
10. Szego G.*Orthogonal Polynomials.* New York, American Mathematical Society, 1959. (Russ. ed.: Moscow, Gos. izd-vo fiz.-mat. lit., 1962. 500 p.)
11. Suetin P. K. *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny* [Classic Orthogonal Polynomials]. Moscow, Nauka, 1979. 416 p. (in Russian).
12. Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu. On n-dimensional simplices satisfying inclusions $S \subset [0,1]^n \subset nS$. *Modeling and Analysis of Information Systems*, 2017, vol. 24, no. 5, pp. 578–595 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18255/1818-1015-2017-5-578-595
13. Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu. New estimates of numerical values related to a simplex. *Modeling and Analysis of Information Systems*, 2017, vol. 24, no. 1, pp. 94–110 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18255/1818-1015-2017-1-94-110
14. Mangano S. *Mathematica Cookbook.* Cambridge, O'Reilly Media Inc., 2010. 832 p.
15. Diakonov V. P. *Mathematica 5/6/7. Polnoe rukovodstvo* [Mathematica 5/6/7. Full Guidance], Moscow, DMK Press, 2010. 624 p. (in Russian).

Cite this article as:

Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu. Some Properties of 0/1-Simplices. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 305–315 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-305-315