УДК 517.5

ЭРМИТОВА ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НА СИМПЛЕКСЕ

Р. Ш. Хасянов

Хасянов Рамис Шавкятович, студент, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, hasbendshurich@gmail.com

В статье рассмотрена задача полиномиальной интерполяции и аппроксимации функций многих переменных на n-мерном симплексе в равномерной норме посредством многочленов 3-й степени. Выбраны интерполяционные условия в терминах производных по направлениям ребер симплекса. В этих же терминах получены оценки отклонения производных многочлена от соответствующих производных интерполируемой функции в предположении, что интерполируемая функция имеет непрерывные производные по направлениям до 4-го порядка включительно. Определено понятие длинного ребра и в терминах длинных ребер введены геометрические характеристики симплекса. Доказано, что для размерности 3 и 4 интерполяционные условия можно выбрать так, что оценки отклонения производных не зависят от геометрии симплекса, а в случае размерности больше 4 при выбранных интерполяционных условиях это невозможно.

Ключевые слова: эрмитов сплайн, симплекс, многомерная интерполяция на симплексе, метод конечных элементов.

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-316-327

ВВЕДЕНИЕ

Пусть D — подмножество евклидового пространства $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$), на котором можно построить геометрический комплекс $\{\overline{T_i}\}_{i\in I}$ (разбить D на симплексы $\overline{T_i}$). Будем рассматривать задачу выбора на симплексе $\overline{T_i}$ интерполяционных условий для построения многочлена Эрмита третьей степени, производные до третьего порядка включительно которого будут аппроксимировать соответствующие производные некоторой функции $f \in C^4(\overline{T_i})$. Задача многомерной аппроксимации на симплексе изучалась, например, в работах [1–4]. В данной работе мы предлагаем новый способ построения многочлена Эрмита на многомерном симплексе (эрмитов многочлен строился, например, в работах [5–8]). Есть смысл получать оценки отклонения в терминах производных по направлениям так, чтобы оценка становилась «лучше» при уменьшении диаметра симплекса (измельчении комплекса). В [9] требуемый результат был получен для тетраэдра. Наш результат распространяется и на трёхмерный случай. От полученного результата из [9] он отличается только одним интерполяционным условием. Дадим необходимое определение и сформулируем результат из [9]:

Определение 1. Пусть $P_0, P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^n$ — аффинно независимые точки, т. е. точки, не лежащие ни в какой гиперплоскости пространства $\mathbb{R}^n$ (подпространстве размерности $n-1$). Тогда любая точка $P \in \mathbb{R}^n$ единственным образом представима в виде

$$P = U + \alpha_0\overrightarrow{UP_0} + \alpha_1\overrightarrow{UP_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{UP_n}, \tag{1}$$

где $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$, $U \in \mathbb{R}^n$. Оказывается, что числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ не зависят от выбора точки U и, выбирая $U = (0, 0, \ldots, 0)$, (1) можно переписать в виде $P = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n$. Тогда говорят, что точка P имеет *барицентрические* координаты $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Заметим, что барицентрические координаты зависят от выбора точек P_0, $P_1, \ldots, P_n$.

Теорема 1 (см. [9]). *Пусть $\overline{T} = A_0A_1A_2A_3$ — тетраэдр, $f \in C^4(\overline{T})$,*

$$M_4 = \max_{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3},\mathbf{e_4}} \max_{0\leqslant i_j\leqslant 4:\sum i_j=4} \max_{\mathbf{x}\in\overline{T}} \left|\frac{\partial^4 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_1^{i_1}\partial \mathbf{e}_2^{i_2}\partial \mathbf{e}_3^{i_3}\partial \mathbf{e}_4^{i_4}}\right|,$$

где $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}$ — всевозможные направления в тетраэдре.

В любом тетраэдре есть вершина, из которой выходят по крайней мере два ребра, больших $\dfrac{d}{2}$, пусть это будет вершина A_3. Будем считать, что точка $\mathbf{x}$ задана своими барицентрическими координатами (x_0, x_1, x_2, x_3) относительно вершин треугольника, d — диаметр $\overline{T}$, и пусть многочлен удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned}
&f(A_i) = Q(A_i), && i = \overline{0,3},\\
&\frac{\partial f(A_i)}{\partial e_{ij}} = \frac{\partial Q(A_i)}{\partial e_{ij}}, && i,j = \overline{0,3}, \quad i \neq j,\\
&\frac{\partial (Q-f)(P_{32})}{\partial e_{30}} = 0, && \frac{\partial (Q-f)(P_{32})}{\partial e_{31}} = 0,\\
&\frac{\partial (Q-f)(P_{10})}{\partial e_{32}} = 0, && \frac{\partial (Q-f)(P_{10})}{\partial e_{31}} = 0,
\end{aligned}$$

где P_{ij} — середина отрезка $[A_iA_j], \mathbf{e}_{ij} = \dfrac{\overrightarrow{A_iA_j}}{|A_iA_j|}$.

Тогда существует $C > 0$ такое, что для всех $\mathbf{x} \in \overline{T}$ имеет место

$$\left|\frac{\partial^r (Q-f)(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{30}^{i}\partial \mathbf{e}_{31}^{k}\partial \mathbf{e}_{32}^{r-i-k}}\right| \leqslant CM_4 d^{4-r}, \quad 1 \leqslant r \leqslant 3, \quad 0 \leqslant i,k \leqslant r \quad (i+k \leqslant r).$$

Мы будем получать оценки, не зависящие от геометрии симплекса в пространствах размерности 3 и 4, а в пространствах большей размерности для получения «хорошей» оценки нужно будет выбрать подходящую триангуляцию, так как в этом случае в оценке присутствует дополнительный параметр, который связан с коэффициентом изопериметричности симплекса [10]. Вопросы триангуляции в аппроксимации производных изучались в работах [11–13].

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В [14] был получен аналогичный результат на треугольнике. Этим результатом мы будем пользоваться при доказательстве основной теоремы.

Теорема 2 (см. [14]). *Пусть* $\overline{T} = A_0A_1A_2$ *— замкнутый невырожденный треугольник на плоскости, функция* $f \in C^4(\overline{T})$, d *— диаметр* $\overline{T}$, (x_0, x_1, x_2) *— барицентрические координаты точки* $\mathbf{x}$ *относительно вершин тетраэдра.* P_{01} *— средняя точка стороны* $[A_0A_1]$, *выберем число* $c > 0$ *и пусть* $|A_0A_2| > \dfrac{d}{c}$.

$$M_4 = \max_{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}} \max_{0\leqslant k\leqslant 4} \max_{\mathbf{x}\in\overline{T}} \left|\frac{\partial^4 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_1^k \partial \mathbf{e}_2^{4-k}}\right|,$$

где $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ *— всевозможные направления в треугольнике.*

Многочлен

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{2} a_i x_i^3 + \sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant 2\\ i\neq j}} a_{ij} x_i^2 x_j + a_{012} x_0 x_1 x_2$$

определяется следующими интерполяционными условиями:

$$f(A_i) = Q(A_i), \qquad i = \overline{0,2},$$
$$\frac{\partial f(A_i)}{\partial e_{ij}} = \frac{\partial Q(A_i)}{\partial e_{ij}}, \qquad i,j = \overline{0,2}, \qquad i \neq j,$$
$$\frac{\partial f(P_{01})}{\partial e_{02}} = \frac{\partial Q(P_{01})}{\partial e_{02}}.$$

Тогда для любого $\mathbf{x}$ *справедливы неравенства*

$$\left|\frac{\partial^r f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{01}^k \partial \mathbf{e}_{02}^{r-k}}\right| \leqslant 4cM_4 d^{4-r}, \qquad 1 \leqslant r \leqslant 3, \qquad 0 \leqslant k \leqslant r.$$

Определение 2. *Симплексом* (точнее, n-*симплексом*, где число n называется *размерностью* симплекса) называют выпуклую оболочку $n+1$ точки аффинного пространства (размерности n или больше), которые предполагаются аффинно независимыми (то есть не лежат ни в одном подпространстве размерности $n-1$). Эти точки называются *вершинами* симплекса.

В символике барицентрического исчисления n-мерный симплекс может быть охарактеризован как множество всевозможных точек с неотрицательными барицентрическими координатами относительно вершин симплекса.

Предложение 1. *Пусть* $\overline{T} = A_1A_2\ldots A_{n+1}$ *—* n-*симплекс,* $\mathbf{x} \in T$ *(точка* $\mathbf{x}$ *не лежит на границе симплекса). Пусть* l *— луч, выходящий из точки* $\mathbf{x}$ *и направленный по* $\mathbf{e}_{ij} = \frac{\overrightarrow{A_iA_j}}{|A_iA_j|}$.

Тогда луч l *пересечёт* $(n-1)$-*мерную грань симплекса без вершины* A_i *и не пересечёт остальные* $(n-1)$-*мерные грани.*

Доказательство. Выберем на луче l точку $\mathbf{y}$. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots x_{n+1})$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots y_{n+1})$ в барицентрической системе координат. Тогда для всех i, $x_i > 0$ и $\overrightarrow{\mathbf{xy}} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots y_{n+1} - x_{n+1})$.

Запишем факт принадлежности точки $\mathbf{y}$ лучу l:

$$\exists\ \lambda > 0 : \overrightarrow{\mathbf{xy}} = \lambda \overrightarrow{A_i A_j}. \tag{2}$$

Барицентрические координаты вектора $\overrightarrow{A_i A_j}$ записываются в следующем виде:

$$\overrightarrow{A_i A_j} = (0, 0, \dots 1_j, 0, \dots (-1)_i, 0, \dots 0).$$

Тогда (2) перепишем в виде системы уравнений с неизвестным λ:

$$\begin{aligned}
&y_1 - x_1 = 0,\\
&\dots\\
&y_j - x_j = \lambda,\\
&\dots\\
&y_i - x_i = -\lambda,\\
&\dots\\
&y_{n+1} - x_{n+1} = 0.
\end{aligned}$$

Известно, что точка $\mathbf{x}$ попадёт на $(n-1)$-мерную грань симплекса без вершины A_i и не попадёт на остальные $(n-1)$-мерные грани тогда и только тогда, когда координата $y_i = 0$ и все остальные координаты $y_s \neq 0$.

Подставим в систему уравнений $y_i = 0$, тогда получим решение $\lambda = x_i$.

Если $y_j = 0$, то $\lambda = -x_j < 0$, а если $y_s = 0 (s \neq i, s \neq j)$, то $x_s = 0$. Но $\lambda, x_s > 0$. $\square$

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть $\overline{T} = A_0 A_1 \dots A_n$ есть n-симплекс $(n \geqslant 3)$, d — диаметр этого симплекса (длина наибольшего ребра). Пусть $c_n > 1$. Назовём ребро длинным, если оно больше, чем $\dfrac{d}{c_n}$. Будем предполагать, что симплекс $\overline{T}$ выбран таким образом, что в нём можно найти вершину, из которой выходят по крайней мере $(n-1)$ длинное ребро, и пусть это будет вершина A_n. Длинные рёбра обозначим $[A_n A_m]$ и $[A_n A_l]$, а те, про которые неизвестно, являются ли они длинными или нет, назовём неизвестными и обозначим их $[A_n A_s]$ $(m < l < s)$.

Пусть

$$M_4 = \max_{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}} \max_{0 \leqslant i_j \leqslant 4 : \sum i_j = 4} \max_{\mathbf{x} \in \overline{T}} \left| \frac{\partial^4 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_1^{i_1} \partial \mathbf{e}_2^{i_2} \partial \mathbf{e}_3^{i_3} \partial \mathbf{e}_4^{i_4}} \right|,$$

где $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} . \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}$ — всевозможные направления в симплексе.

Будем считать, что точка $\mathbf{x}$ задана барицентрическими координатами $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пусть многочлен

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i^3 + \sum_{\substack{0 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} a_{ij} x_i^2 x_j + \sum_{0 \leqslant i < j < k \leqslant n} a_{ijk} x_i x_j x_k$$

удовлетворяет следующим интерполяционным условиям:

$$f(A_i) = Q(A_i), \qquad i = \overline{0, n}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial f(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}} = \frac{\partial Q(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}}, \qquad i, j = \overline{0, n}, \qquad i \neq j, \tag{4}$$

$$\frac{\partial (Q - f)(P_{nk})}{\partial \mathbf{e}_{np}} = 0, \quad 0 \leqslant p < k < n, \tag{5}$$

$$\frac{\partial (Q - f)(P_{ij})}{\partial \mathbf{e}_{np}} = 0, \qquad 0 \leqslant i < j < p < n, \tag{6}$$

где P_{ij} есть середина отрезка $[A_i A_j], \mathbf{e}_{ij} = \dfrac{\overrightarrow{A_i A_j}}{|A_i A_j|}$.

Теорема 3. *Пусть $f(\mathbf{x}) \in C^4(\overline{T})$, тогда для любой точки $\mathbf{x} \in \overline{T}$*

$$\left| \frac{\partial^r (Q - f)(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{nm}^i \partial \mathbf{e}_{nl}^j \partial \mathbf{e}_{ns}^{r-i-j}} \right| \leqslant 15 c_n M_4 d^{4-r}, \qquad 1 \leqslant r \leqslant 3, \qquad 0 \leqslant i, j \leqslant r, \qquad i + j \leqslant r. \tag{7}$$

Доказательство. Обозначим

$$f_i = f(A_i), \qquad i = \overline{0, n},$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial e_{kj}} = \frac{\partial f(A_i)}{\partial e_{kj}}, \qquad k, j = \overline{0, n}, \qquad k \neq j.$$

Коэффициенты a_i можно найти из условия (3): $a_i = f_i$.

Производные по направлениям вычисляются с помощью следующего правила:

$$\frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial e_{ij}} = \frac{1}{|A_i A_j|} \left(\frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial x_j} - \frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right). \tag{8}$$

Из этой же формулы и из интерполяционных условий (4) нетрудно найти коэффициенты a_{ij}:

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial e_{ij}} |A_i A_j| + 3 f_i. \tag{9}$$

Из условий (5) и (6) можно вычислить оставшиеся C_{n+1}^3 коэффициентов (или их разности, которые понадобятся в дальнейшем):

$$a_{mln} = 4 \frac{\partial f(P_{nl})}{\partial e_{nm}} |A_n A_m| + 6 f_n + 2 \frac{\partial f_n}{\partial e_{nl}} |A_n A_l| + |A_n A_m| \left(\frac{\partial f_l}{\partial e_{mn}} + \frac{\partial f_n}{\partial e_{mn}} \right),$$

$$a_{ijm} - a_{ijn} = 4 \frac{\partial f(P_{ij})}{\partial e_{nm}} |A_n A_m| - \frac{\partial f_i}{\partial e_{nm}} |A_n A_m| - \frac{\partial f_j}{\partial e_{nm}} |A_n A_m|.$$

Производная многочлена третьего порядка, взятая три раза по одному и тому же направлению, имеет вид

$$\frac{\partial^3 Q(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}^3} = \frac{6}{|A_n A_m|^3} \Big[2(f_n - f_m) + |A_n A_m| \Big(\frac{\partial f_m}{\partial e_{nm}} + \frac{\partial f_n}{\partial e_{nm}} \Big) \Big].$$

Оценим отклонение $\left|\dfrac{\partial^3(Q-f)(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}^3}\right|$. Для этого представим f_n и $\dfrac{\partial f_n}{\partial e_{nm}}$ по формуле Тейлора в окрестности точки A_m с остаточным членом в форме Лагранжа (в дальнейшем не будем указывать вид остатка, подразумевая форму Лагранжа), т. е.

$$f_n - f_m = \frac{\partial f_m}{\partial e_{mn}}|A_nA_m| + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f_m}{\partial e_{nm}^2}|A_nA_m|^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f_m}{\partial e_{nm}^3}|A_nA_m|^3 + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial e_{nm}^4}|A_nA_m|^4,$$
$$\frac{\partial f_n}{\partial e_{nm}} = \frac{\partial f_m}{\partial e_{nm}} + \frac{\partial^2 f_m}{\partial e_{nm}^2}|A_nA_m| + \frac{1}{2!}\frac{\partial^3 f_m}{\partial e_{nm}^3}|A_nA_m|^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^4 f(\eta)}{\partial e_{nm}^4}|A_nA_m|^3,$$

где ξ и η — точки, лежащие на ребре $[A_nA_m]$.

Тогда имеем

$$\left|\frac{\partial^3(Q-f)(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}^3}\right| = \left|\frac{\partial^3 f_m}{\partial e_{nm}^3} - \frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}^3} + \frac{1}{|A_nA_m|^3}\Big(|A_nA_m|^4\frac{\partial^4 f(\eta)}{\partial e_{nm}^4} - \frac{|A_nA_m|^4}{2}\frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial e_{nm}^4}\Big)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{\partial^3 f_m}{\partial e_{nm}^3} - \frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}^3}\right| + \frac{1}{|A_nA_m|^3}\left||A_nA_m|^4\frac{\partial^4 f(\eta)}{\partial e_{nm}^4} - \frac{|A_nA_m|^4}{2}\frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial e_{nm}^4}\right|.$$

Применяя теорему о среднем на отрезке $[\mathbf{x}A_m]$ по направлению $\mathbf{e} = \dfrac{\overrightarrow{\mathbf{x}A_m}}{|\mathbf{x}A_m|}$ и учитывая, что четвёртые производные ограничены, получаем следующее:

$$\left|\frac{\partial^3 f_m}{\partial e_{nm}^3} - \frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}^3}\right| + \frac{1}{|A_nA_m|^3}\left||A_nA_m|^4\frac{\partial^4 f(\eta)}{\partial e_{nm}^4} - \frac{|A_nA_m|^4}{2}\frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial e_{nm}^4}\right| \leqslant$$
$$\leqslant M_4|\mathbf{x}A_m| + 2|A_nA_m|M_4 \leqslant 3M_4d = 3c_nM_4d.$$

Теперь оценим смешанную производную $\dfrac{\partial^3 Q(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}^2\partial e_{ns}}$, взятую два раза по «длинным» направлениям и один раз по «неизвестному».

Поскольку $|A_iA_j|e_{ij} = |A_iA_k|e_{ik} + |A_kA_j|e_{kj}$, то

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial e_{ij}} = \frac{|A_iA_k|}{|A_iA_j|}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial e_{ik}} + \frac{|A_kA_j|}{|A_iA_j|}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial e_{kj}}. \tag{10}$$

Применяя (5) и (10) в вычислении $\dfrac{\partial^3 Q(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}^2\partial e_{ns}}$, получаем:

$$\frac{\partial^3 Q(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}^2\partial e_{ns}} = \frac{2}{|A_nA_m|^2|A_nA_s|}\big(-3f_n + a_{ms} + a_{ns} - a_{mn} + 2a_{nm} - a_{smn}\big) =$$
$$= \frac{2}{|A_nA_m|^2|A_nA_s|}\Big(|A_nA_m|\Big(-4\frac{\partial f(P_{ns})}{\partial e_{nm}} + \frac{\partial f_s}{\partial e_{nm}} + 3\frac{\partial f_n}{\partial e_{nm}}\Big) + |A_nA_s|\Big(\frac{\partial f_m}{\partial e_{ns}} - \frac{\partial f_n}{\partial e_{ns}}\Big)\Big).$$

Представим $\dfrac{\partial f(P_{ns})}{\partial e_{nm}}$, $\dfrac{\partial f_s}{\partial e_{nm}}$ и $\dfrac{\partial f_m}{\partial e_{ns}}$ по формуле Тейлора в окрестности точки A_n :

$$\frac{\partial f(P_{ns})}{\partial e_{nm}} = \frac{\partial f_n}{\partial e_{nm}} + \frac{|A_nA_s|}{2}\frac{\partial^2 f_n}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}} + \frac{1}{2!}\Big(\frac{|A_nA_s|}{2}\Big)^2\frac{\partial^3 f_n}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}^2} + \frac{1}{3!}\Big(\frac{|A_nA_s|}{2}\Big)^3\frac{\partial f(\xi)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}^3},$$
$$\frac{\partial f_s}{\partial e_{nm}} = \frac{\partial f_n}{\partial e_{nm}} + \frac{\partial^2 f_n}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}}|A_nA_s| + \frac{1}{2!}\frac{\partial^3 f_n}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}^2}|A_nA_s|^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^4 f(\eta)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}^3}|A_nA_s|^3,$$

$$\frac{\partial f_m}{\partial e_{ns}} = \frac{\partial f_n}{\partial e_{ns}} + \frac{\partial^2 f_n}{\partial e_{ns}\partial e_{nm}}|A_nA_m| + \frac{1}{2!}\frac{\partial^3 f_n}{\partial e_{ns}\partial e_{4m}^2}|A_nA_m|^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^4 f(\sigma)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}^3}|A_nA_m|^3,$$

где ξ, η и σ — точки, лежащие на рёбрах $[A_nA_s]$ и $[A_nA_m]$ соответственно. Тогда, учитывая, что $|A_nA_m| > \dfrac{d}{c_n}$, и используя теорему о среднем, получаем:

$$\left|\frac{\partial^3(Q-f)(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}^2\partial e_{ns}}\right| \leqslant \left|\frac{\partial^3 f_m}{\partial e_{nm}^2\partial e_{ns}} - \frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}^2\partial e_{ns}}\right| + \frac{1}{|A_nA_m|^2|A_nA_s|}\left|\frac{|A_nA_m||A_nA_s|^3}{3}\frac{\partial^4 f(\eta)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}^3} - \right.$$
$$\left. -\frac{4}{3}|A_nA_m|\Big(\frac{|A_nA_s|}{2}\Big)^3\frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}^3} + \frac{|A_nA_m|^3|A_nA_s|}{6}\frac{\partial^4 f(\sigma)}{\partial e_{nm}^3\partial e_{ns}}\right| \leqslant 3c_nM_4d.$$

В случае, когда производная берётся по двум «неизвестным» направлениям и одному «длинному», оценка получается аналогично.

Теперь рассмотрим производную по трём различным направлениям.

$$\frac{\partial^3 Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{nm}\partial \mathbf{e}_{nl}\partial \mathbf{e}_{ns}} = \frac{a_{mls} - a_{lsn} + 2a_{nl} + a_{ns} - a_{msn} - a_{mln} - 6f_n + 2a_{nm}}{|A_nA_m||A_nA_l||A_nA_s|} =$$
$$= \frac{4}{|A_nA_l||A_nA_s|}\Big(\frac{\partial f(P_{ls})}{\partial e_{nm}} - \frac{\partial f(P_{nl})}{\partial e_{nm}} - \frac{\partial f(P_{ns})}{\partial e_{nm}} + \frac{\partial f_n}{\partial e_{nm}}\Big).$$

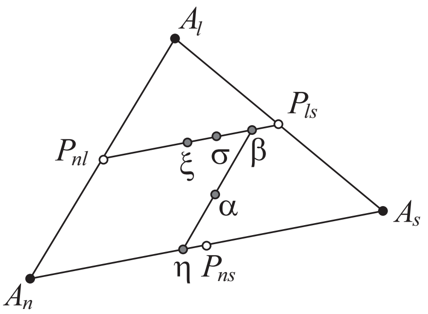

Рис. 1. Треугольник $\Delta A_nA_lA_s$

Fig. 1. Triangle $\Delta A_nA_lA_s$

Рассмотрим треугольник $\Delta A_nA_lA_s$ (рис. 1): в нём отрезок $[P_{nl}P_{ls}]$ есть средняя линия. Тогда по теореме о среднем

$$\frac{\partial f(P_{ls})}{\partial e_{nm}} - \frac{\partial f(P_{nl})}{\partial e_{nm}} = \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}}|P_{nl}P_{ls}| =$$
$$= \frac{1}{2}|A_nA_s|\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}}, \xi \in [P_{nl}P_{ls}].$$

По формуле Тейлора

$$\frac{\partial f(P_{ns})}{\partial e_{nm}} = \frac{\partial f_n}{\partial e_{nm}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}}|A_nA_s|,$$
$$\eta \in [P_{ns}A_n].$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^3 Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{nm}\partial \mathbf{e}_{nl}\partial \mathbf{e}_{ns}} = \frac{2}{|A_nA_l|}\Big(\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}} - \frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}}\Big).$$

Снова применяем теорему Тейлора, выбрав заранее точку $\beta \in [P_{nl}P_{ns}]$ такую, что $[\eta\beta]\|[A_nA_l]$:

$$\frac{\partial^2 f(\eta)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}} = \frac{\partial^2 f(\beta)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}} - \frac{\partial^3 f(\alpha)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}\partial e_{nl}}\frac{|A_nA_l|}{2}, \alpha \in [\eta\beta].$$

Подставляем

$$\frac{\partial^3 Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{nm}\partial \mathbf{e}_{nl}\partial \mathbf{e}_{ns}} = \frac{2}{|A_nA_l|}\Big(\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}} - \frac{\partial^2 f(\beta)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}} + \frac{|A_nA_l|}{2}\frac{\partial^3 f(\alpha)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}\partial e_{nl}}\Big).$$

По теореме Лагранжа

$$\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}} - \frac{\partial^2 f(\beta)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}} = \xi\beta|\frac{\partial^3 f(\sigma)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}^2}.$$

В итоге получаем:

$$\frac{\partial^3 Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{nm}\partial \mathbf{e}_{nl}\partial \mathbf{e}_{ns}} = 2\frac{|\xi\beta|}{|A_nA_l|}\frac{\partial^3 f(\sigma)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}^2} + \frac{\partial^3 f(\alpha)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}\partial e_{nl}}.$$

Оценим разность, используя полученные выше результаты:

$$\left|\frac{\partial^3 (Q-f)(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{nm}\partial \mathbf{e}_{nl}\partial \mathbf{e}_{ns}}\right| = \left|2\frac{|\xi\beta|}{|A_nA_l|}\frac{\partial^3 f(\sigma)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}^2} + \frac{\partial^3 f(\alpha)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}\partial e_{nl}} - \frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}\partial e_{nl}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\frac{|\xi\beta|}{|A_nA_l|}\left|\frac{\partial^3 f(\sigma)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}^2}\right| + \left|\frac{\partial^3 f(\alpha)}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}\partial e_{nl}} - \frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial e_{nm}\partial e_{ns}\partial e_{nl}}\right| \leqslant 7c_nM_4d.$$

Для нахождения производных первого и второго порядка воспользуемся методом математической индукции.

1. Рассмотрим тетраэдр $A_nA_mA_lA_s$. Напомним, что ребро A_nA_s является неизвестным. Занумеруем его вершины: $3 := n$, $2 := s$, $1 := l$, $0 := m$.

Тогда интерполяционные условия (5) и (6) для тетраэдра будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial (Q-f)(P_{31})}{\partial \mathbf{e}_{30}} = 0, \qquad \frac{\partial (Q-f)(P_{32})}{\partial \mathbf{e}_{30}} = 0,$$
$$\frac{\partial (Q-f)(P_{32})}{\partial \mathbf{e}_{31}} = 0, \qquad \frac{\partial (Q-f)(P_{01})}{\partial \mathbf{e}_{32}} = 0.$$

Заметим, что от интерполяционных условий в [9] они отличаются только одним равенством.

Для всех граней, кроме $\Delta A_0A_1A_2$, нашего тетраэдра выполняются условия теоремы [14].

Рассмотрим треугольник $\Delta A_3A_2A_1$. В нём $\dfrac{\partial (Q-f)(P_{32})}{\partial \mathbf{e}_{31}} = 0$, причём $|A_3A_1| > \dfrac{d}{c_n}$. Это означает, что для этого треугольника можно воспользоваться теоремой [14]:

Для любого $\mathbf{x} \in \Delta A_3A_2A_1$ справедливы неравенства

$$\left|\frac{\partial^r f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{31}^k \partial \mathbf{e}_{32}^{r-k}}\right| \leqslant 4c_nM_4d^{4-r}, \qquad 1 \leqslant r \leqslant 3, \qquad 0 \leqslant k \leqslant r.$$

Возьмём точку $\mathbf{x} \in A_3A_0A_1A_2$ и спроектируем её параллельно противоположному направлению $\overrightarrow{A_0A_3}$ на грань $\Delta A_3A_2A_1$. Обозначим проекцию через $\mathbf{c}$. Тогда по теореме Лагранжа

$$\left|\frac{\partial^2 (Q-f)(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{31}\partial \mathbf{e}_{32}}\right| = \left|\frac{\partial^2 (Q-f)(\mathbf{c})}{\partial \mathbf{e}_{31}\partial \mathbf{e}_{32}} - \frac{\partial^3 (Q-f)(\xi)}{\partial \mathbf{e}_{31}\partial \mathbf{e}_{32}\partial \mathbf{e}_{30}}|A_3A_0|\right| \leqslant 11c_nM_4d^2,$$

аналогично и с остальными производными.

2. Нетрудно видеть, что для всех $(n-1)$-граней n-симплекса $A_nA_{n-1}\dots A_1A_0$, кроме грани $A_{n-1}\dots A_0$, выполняются условия доказываемой теоремы. Предположим, что в них можно получить требуемую оценку производных. Возьмём точку $\mathbf{x}$ в n-симплексе и спроектируем её параллельно противоположному «длинному» направлению $\overrightarrow{A_nA_m}$ на ту грань, в которой известны оценки производной, которую мы аппроксимируем. По предложению 1 проекция будет лежать на $(n-1)$-грани, не содержащей точку A_m. Аналогично первому пункту находим оценку для оставшихся производных. $\square$

Предложение 2. 1. *В любом тетраэдре можно найти вершину, из которой выходят по крайней мере два ребра, больших* $\dfrac{d}{2}$, *и в любом 4-симплексе есть вершина, из которой исходят по крайней мере три ребра, больших* $\dfrac{d}{2}$.

2. *Для любого натурального* $n \geqslant 5$ *и для всякого* $c > 0$ *существует такой* n*-симплекс, из всех вершин которого выходят по крайней мере два ребра, длина которых не больше чем* $\dfrac{d}{c}$.

Доказательство. 1. Докажем первый пункт предложения. Так как 4-симплекс имеет 5 вершин A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, каждая из которых соединена рёбрами со всеми остальными вершинами, то его можно рассматривать как полный граф с пятью вершинами (рис. 2).

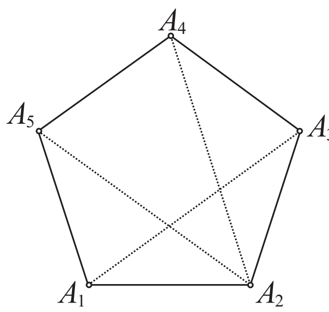

Рис. 2. 4-симплекс с выделенными рёбрами
Fig. 2. A 4-simplex with distinguished edges

Пусть $[A_1A_2]$ — самое длинное ребро в симплексе, т. е. $|A_1A_2| = d$.

Рассмотрим треугольник $\Delta A_1A_2A_3$. В нём либо $|A_1A_3| > \dfrac{d}{2}$, либо $|A_2A_3| > \dfrac{d}{2}$, иначе по неравенству треугольника

$$d < |A_1A_3| + |A_2A_3| < \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d.$$

Пусть для определённости $|A_1A_3| > \dfrac{d}{2}$ (на рис. 2 выделены рёбра, которые больше, чем $d/2$). Таким образом, так как $A_1A_2A_3A_4$ — тетраэдр, предложение для тетраэдра доказано.

Теперь рассмотрим треугольник $\Delta A_1A_2A_4$. Если в нём $|A_1A_4| > \dfrac{d}{2}$, то первый пункт предложения доказан. Если же $|A_2A_4| > \dfrac{d}{2}$, то аналогично рассматриваем $\Delta A_1A_2A_5$, и первый пункт доказан.

2. Для простоты докажем второй пункт для 5-симплекса. Доказательство для случая симплекса произвольной размерности получается аналогичным образом. Выберем $x > 0$ и построим симплекс со следующими аффинно независимыми вершинами:

$$A_1 = (x+1, 1, 0, 0, 0), \qquad A_2 = (x, 1, 0, 0, 0), \qquad A_3 = (x, 0, 1, 0, 0),$$
$$A_4 = (0, 0, 0, 1, 0), \qquad A_5 = (0, 0, 0, 0, 1), \qquad A_6 = (0, 0, 0, 0, 0).$$

Диаметр симплекса равен $d(x) = \sqrt{(x+1)^2+2}$. Выберем $c > 0$ — произвольное. Тогда мы можем взять x достаточно большим, чтобы считать, что длины рёбер $[A_1A_2]$, $[A_1A_3]$, $[A_2A_3]$, $[A_4A_6]$, $[A_5A_6]$ и $[A_5A_6]$ будут меньше, чем $\dfrac{d(x)}{c}$. Таким образом, при любом $c > 0$ можно найти 5-симплекс, из каждой вершины которого выходит по крайней мере два ребра, длина которых меньше, чем $\dfrac{d}{c}$. □

Следствие 1. *В случаях размерностей $n = 3$ и $n = 4$ в неравенствах* (7) *можно избавиться от параметра c_n и получить следующие оценки:*

$$\left|\frac{\partial^r (Q-f)(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{nm}^i \partial \mathbf{e}_{nl}^j \partial \mathbf{e}_{ns}^{r-i-k}}\right| \leqslant 30 M_4 d^{4-r}, \qquad 1 \leqslant r \leqslant 3, \qquad 0 \leqslant i,j \leqslant r, \qquad i+j \leqslant r.$$

Второй пункт предложения означает, что если $n \geqslant 5$, то в неравенствах (7) нельзя избавиться от параметра c_n. Отметим, что с похожей проблемой столкнулась Н. В. Байдакова в работе [15], где интерполяция проводилась в равномерных узлах симплекса.

Благодарности. Автор признателен профессору Сергею Фёдоровичу Лукомскому за постановку задачи и внимание к работе.

Библиографический список

1. *Ciarlet P. G., Paviart P. A.* General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite element methods // Arch. Rational Mech. Anal. 1972. Vol. 46, iss. 3. P. 177–199. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00252458
2. *Субботин Ю. Н.* Зависимость оценок многомерной кусочно-полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 189. С. 117–137.
3. *Субботин Ю. Н.* Погрешность аппроксимации интерполяционными многочленами малых степеней на n-симплексах // Матем. заметки. 1990. Т. 48, вып. 4. С. 88–99.
4. *Килижеков Ю. А.* Погрешность аппроксимации интерполяционными многочленами первой степени на n-симплексах // Матем. заметки. 1996. Т. 60, вып. 4. С. 504–510. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm1858
5. *Куприянова Ю. В., Лукомский С. Ф.* Об оптимальном выборе интерполяционного сплайна по треугольной сетке // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 5, вып. 1–2. С. 26–33.
6. *Матвеева Ю. В.* Об эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике с использованием смешанных производных // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2007. Т. 7, вып. 1. С. 23–27.
7. *Мелешкина А. В.* Об аппроксимации производных интерполяционного многочлена Эрмита на треугольнике // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50, № 2. С. 211–220.
8. *Zenisek A.* Maximum-angle condition and triangular finite element of Hermite type // Math. Comput. 1995. Vol. 64, № 211. P. 929–941. DOI: https://doi.org/10.2307/2153477
9. *Куприянова Ю. В.* Об одной теореме из теории сплайнов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48, № 2. С. 206–211.

10. *Клячин В. А., Шуркаева Д. В.* Коэффициент изопериметричности симплекса в задаче аппроксимации производных // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 151–160. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-2-151-160
11. *Клячин В. А., Широкий А. А.* Триангуляция Делоне многомерных поверхностей и ее аппроксимационные свойства // Изв. вузов. Матем. 2012. № 1. С. 31–39.
12. *Клячин В. А.* Модифицированное условие пустой сферы Делоне в задаче аппроксимации градиента // Изв. РАН. Сер. матем. 2016. Т. 80, № 3. С. 95–102. DOI: https://doi.org/10.4213/im8350
13. *Клячин В. А.* О многомерном аналоге примера Шварца // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76, № 4. С. 41–48. DOI: https://doi.org/10.4213/im6845
14. *Куприянова Ю. В.* Об аппроксимации производных интерполяционного многочлена по направлениям на треугольнике // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронеж. зимн. матем. шк. Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2007. С. 120–121.
15. *Байдакова Н. В.* Об оценках П. Жамэ для конечных элементов с интерполяцией в равномерных узлах симплекса // Матем. тр. 2017. Т. 20, вып. 1. С. 43–74. DOI: https://doi.org/10.17377/mattrudy.2017.20.103

Образец для цитирования:
Хасянов Р. Ш. Эрмитова интерполяция на симплексе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 3. С. 316–327. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-316-327

Hermite Interpolation on a Simplex

R. Sh. Khasyanov

Khasyanov Ramis Shavkyatovich, https://orcid.org/0000-0002-2819-5781, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, hasbendshurich@gmail.com

In the paper, we solve the problem of polynomial interpolation and approximation functions of several variables on an n-dimensional simplex in the uniform norm using polynomials of the third degree. We choose interpolation conditions in terms of derivatives in the directions of the edges of a simplex. In the same terms we obtained estimates of the deviation of derivatives of polynomial from the corresponding derivatives of an interpolated function under the assumption that the interpolated function has continuous directional derivatives up to the fourth order inclusive. We defined a long edge and in these terms we introduce the geometric characteristics of the simplex. It is proved that for dimensions 3 and 4, the interpolation conditions can be chosen so that the estimates the deviations of the derivatives do not depend on the geometry of the simplex, and in the cases of dimensions greater than 4 with the selected interpolation conditions it is impossible.

Key words: Hermite spline, simplex, multidimensional interpolation on simplexes, finite elemet method.

Acknowledgements: The author is grateful to Prof. Lukomskii for setting the goal and the attention he paid to this research.

References

1. Ciarlet P. G., Paviart P. A. General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite element methods. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1972, vol. 46, iss. 3, pp. 177–199. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00252458
2. Subbotin Yu. N. Dependence of estimates of a multidimensional piecewise polynomial approximation on the geometric characteristics of the triangulation. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1990, vol. 189, pp. 135–159.
3. Subbotin Yu. N. Error of the approximation by interpolation polynomials of small degrees on n-simplices. *Math. Notes*, 1990, vol. 48, iss. 4, pp. 1030–1037. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01139604
4. Kilizhekov Yu. A. Approximation error for linear polynomial interpolation on n-simplices. *Math. Notes*, 1996, vol. 60, iss.4, pp. 378–382. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02305420
5. Kupriyanova Yu. V., Lukomskiy S. F. On optimal choice of interpolation spline on triangular net. *Izv. Saratov Univ. (N. S.) Ser. Math. Mech. Inform.*, 2005, vol. 5, iss. 1–2, pp. 26–33 (in Russian).
6. Matveeva Yu. V. Method of Hermite Interpolation by Polynomials of the Third Degree on a Triangle Using Mixed Derivatives. *Izv. Saratov Univ. (N. S.) Ser. Math. Mech. Inform.*, 2007, vol. 7, iss. 1, pp. 23–27 (in Russian).
7. Meleshkina A. V. On the approximation of derivatives of the interpolation Hermite polynomial on a triangle. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2010, vol. 50, iss. 2, pp. 201–210. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542510020016
8. Zenisek A. Maximum-angle condition and triangular finite element of Hermite type. *Math. Comput.*, 1995, vol. 64, no. 211, pp. 929–941. DOI: https://doi.org/10.2307/2153477
9. Kupriyanova Yu. V. On a theorem in spline theory. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2008, vol. 48, iss. 2, pp. 195–200. DOI: https://doi.org/10.1007/s11470-008-2003-5
10. *Klyachin V. A., Shurkaeva D. V.* Isoperimetry Coefficient for Simplex in the Problem of Approximation of Derivatives. *Izv. Saratov Univ. (N. S.) Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 151–160 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-2-151-160
11. *Klyachin V. A., Shirokiy A. A.* Delaunay triangulation of multidimensional surfaces and its approximation properties. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2012, vol. 56, iss. 1, pp. 27–34. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X12010045
12. *Klyachin V. A.* Modified Delaunay empty sphere condition in the problem of approximation of the gradient. *Izv. Math.*, 2016, vol. 80, iss. 3, pp. 549–556. DOI: https://doi.org/10.1070/IM8350
13. *Klyachin V. A.* On a multidimensional analogue of the Schwarz example. *Izv. Math.*, 2012, vol. 76, iss. 4, pp. 681–687. DOI: https://doi.org/10.1070/IM2012v076n04ABEH002601
14. Kupriyanova Yu. V. Approximation of directional derivatives of interpolating polynomial on a triangle. *Contemporary Methods in Theory of Functions and Adjacent Problems : Proc. of the Voronezh Winter Mathematical School*. Voronezh, Voronezh State Univ., 2007, pp. 120–121 (in Russian).
15. *Baydakova N. V.* Jamet estimates for finite elements with interpolation in uniform nodes of a simplex. *Siberian Adv. Math.*, 2017, vol. 28, iss. 1, pp. 1–22. DOI: https://doi.org/10.3103/S1055134418010017

Cite this article as:

Khasyanov R. Sh. Hermite Interpolation on a Simplex. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 316–327 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-316-327