

МЕХАНИКА

УДК 531.396;629.78

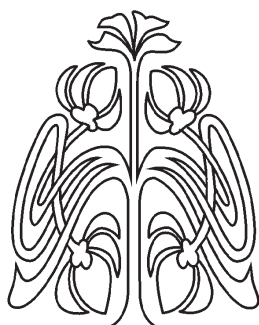
ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ КОСМИЧЕСКОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ ПРИ БУКСИРОВКЕ ПАССИВНОГО АППАРАТА С ОСТАТКАМИ ТОПЛИВА

А. А. Авраменко, В. С. Асланов

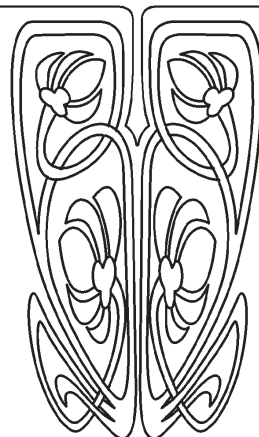
Авраменко Александр Алексеевич, кандидат технических наук, профессор кафедры теоретической механики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, Россия, 443086, Самара, Московское шоссе, 34, avramenko_a_a@mail.ru

Асланов Владимир Степанович, доктор технических наук, заведующий кафедрой теоретической механики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, Россия, 443086, Самара, Московское шоссе, 34, aslanov_vs@mail.ru

Рассматривается задача увода с орбиты крупногабаритного космического мусора с помощью тросовой транспортной системы, включающей в себя орбитальный буксир, трос и нефункционирующий космический аппарат с остатками топлива. Исследуется движение выбранной системы в плоскости орбиты при допущении, что орбита является круговой. Движение тросовой системы изучается в орбитальной системе отсчета в предположении, что тяга орбитального буксира постоянна, как по величине, так и по направлению. На основе формализма Лагранжа построены нелинейные уравнения движения, в которых, кроме сил инерции, учтены гравитационные моменты. Определены два варианта устойчивых положений относительного равновесия, реализация которых определяется основными параметрами тросовой системы: соотношением линейных размеров и масс троса, орбитального буксира и пассивного аппарата. Составлены уравнения первого приближения, описывающие колебания системы в окрестности каждого из двух вариантов положений относительного равновесия. Анализ коэффициентов этих уравнений показал, что при определенном соотношении параметров системы возможно сближение всех трех собственных частот системы. Найдены условия, при выполнении которых частоты имеют близкие значения. Приведены результаты численного моделирования движения нелинейной системы, подтверждающие возможность обмена энергией при колебаниях с близкими частотами. Показано, что при увеличении начальных отклонений от относитель-



**НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ**





ного равновесия в системе возможно возникновение хаотических колебаний. Результаты работы могут быть полезны для анализа поведения и выбора параметров тросовой транспортной системы, предназначенной для увода с орбиты космического мусора с остатками топлива (верхних ступеней ракет-носителей и нефункционирующих спутников).

Ключевые слова: космическая тросовая система, космический мусор, положения равновесия, орбита.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-334-346>

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящее время широко изучаются возможности применения тросовых систем для многих операций в космосе [1–3], в том числе для увода космического мусора с орбиты. В этих задачах весьма важными являются вопросы, связанные с движением закрепленного на тросе спутника относительно центра масс [4]. Анализ поведения крупногабаритного космического мусора (верхних ступеней ракет-носителей и нефункционирующих спутников), буксируемого с помощью троса, требует изучения его движения вокруг центра масс. В работах [5–10] дан анализ движения таких тросовых систем с учетом упругих свойств троса и космического мусора, а также других факторов. В ряде работ рассматриваются вопросы влияния наличия топлива на вращение космического аппарата [11, 12] и устойчивости космических тросовых систем [13]. Однако в этих работах не учитывается большой класс пассивных космических объектов, подлежащих уводу с орбиты и содержащих на своем борту остатки топлива. В статье изучается плоское движение на круговой орбите тросовой системы, состоящей из космического буксира, троса и нефункционирующего космического аппарата с остатками топлива. Целью работы является поиск и анализ возможных устойчивых орбитальных конфигураций рассматриваемой тросовой системы.

2. ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ И ПАРАМЕТРЫ СИСТЕМЫ

Рассматривается совместное движение космической тросовой системы, состоящей из орбитального буксира и буксируемого космического аппарата (КА) с остатками топлива в баках. Буксир и КА связаны между собой тросом (рис. 1). Ограничимся рассмотрением тех случаев, когда все движения происходят в плоскости орбиты, а сама орбита является круговой. Для составления уравнений движения космической тросовой системы выберем орбитальную систему координат, начало которой — точка O — соответствует начальному положению буксира. Ось Oz направлена от центра Земли, а ось Ox — перпендикулярно оси Oz по направлению движения буксира (см. рис. 1).

Орбитальная система координат вращается вокруг центра Земли с угловой скоростью [14] $\omega = n = \sqrt{\gamma M}/r_O^{3/2} = \sqrt{K}/r_O^{3/2}$, где γ — универсальная гравитационная постоянная, M — масса Земли, r_O — расстояние от центра Земли до начального положения буксира. Будем считать, что движение орбитального буксира полностью определяется работой его системы ориентации и тягового двигателя. Это позволяет в пределах рассматриваемой задачи не учитывать его ориентацию и рассматривать буксир как материальную точку A массой m_1 . Тяга двигателя \mathbf{F} имеет постоянную



величину и направлена вдоль оси Ox $\mathbf{F} = F\mathbf{i} = \text{const}$. Трос длиной l полагается невесомым и нерастяжимым. Буксируемый космический аппарат имеет массу m_2 , его моменты инерции относительно центральных осей A, B, C соответственно. Расстояние от точки крепления троса до центра масс КА — a . Для описания движения остатков топлива в баках КА будем использовать модель присоединенного осциллятора в виде математического маятника [15] (см. рис. 1).

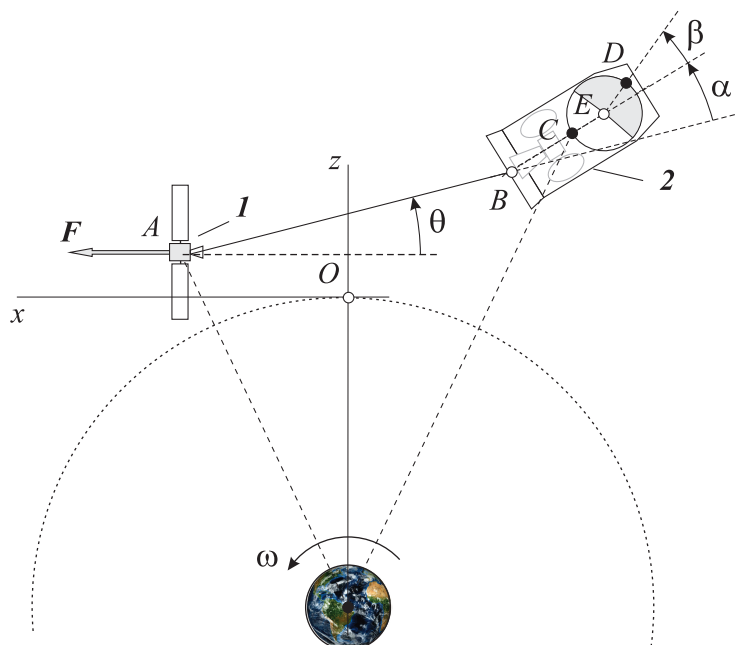


Рис. 1. Состав космической буксируемой системы, орбитальная система отсчета и выбранные координаты: 1 — орбитальный буксир, 2 — космический аппарат с остатками топлива

Fig. 1. Space tethered system, orbital frame and coordinates: 1 — orbit tug, 2 — spacecraft with fuel residuals

Параметры маятниковой модели: длина приведенного маятника $ED = b$, масса маятника m_3 , расстояние от точки подвеса до точки крепления троса $BE = d$.

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Для составления уравнений движения в орбитальной системе координат воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, s. \quad (1)$$

Положение рассматриваемой системы в плоскости движения полностью определяется пятью координатами, показанными на рис. 1. Координаты x_A и z_A определяют положение буксира в орбитальной системе координат, угол ϑ задает отклонение троса от оси Ox , угол α — поворот буксируемого аппарата относительно троса и угол β — отклонение маятника от оси буксируемого аппарата. Через компоненты вектора обобщенных координат

$$\mathbf{q} = (x_A, z_A, \theta, \alpha, \beta)^T \quad (2)$$



и соответствующие им скорости выразим кинетическую энергию системы, которая складывается из кинетических энергий буксира T_1 , буксируемого аппарата T_2 и колеблющихся остатков топлива T_3 : $T = T_1 + T_2 + T_3$. Если кинетическую энергию представить в векторно-матричной форме:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}, \quad (3)$$

то отличные от нуля элементы матрицы инерции \mathbf{A} определяются через параметры системы и обобщенные координаты следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_1 + m_2 + m_3, \\ a_{13} = a_{31} &= m_2 [l \sin \vartheta + a \sin (\alpha + \vartheta)] + m_3 [b \sin (\alpha + \beta + \vartheta) + l \sin \theta + d \sin (\alpha + \vartheta)], \\ a_{14} = a_{41} &= m_2 a \sin (\alpha + \vartheta) + m_3 [b \sin (\alpha + \beta + \vartheta) + d \sin (\alpha + \vartheta)], \\ a_{15} = a_{51} &= m_3 b \sin (\alpha + \beta + \vartheta), \quad a_{22} = m_1 + m_2 + m_3, \\ a_{23} = a_{32} &= m_2 [l \cos \vartheta + a \cos (\alpha + \vartheta)] + m_3 [b \cos (\alpha + \beta + \vartheta) + l \cos \vartheta + d \cos (\alpha + \vartheta)], \\ a_{24} = a_{42} &= m_2 a \cos (\alpha + \vartheta) + m_3 [b \cos (\alpha + \beta + \vartheta) + d \cos (\alpha + \vartheta)], \\ a_{25} = a_{52} &= m_3 b \cos (\alpha + \beta + \vartheta), \\ a_{33} &= m_2 (l^2 + a^2 + 2al \cos \alpha) + B + m_3 [l^2 + d^2 + b^2 + 2bl \cos (\alpha + \beta) + \\ &\quad + 2dl \cos \alpha + 2bd \cos \beta], \\ a_{34} = a_{43} &= m_2 [a^2 + al \cos \alpha] + B + m_3 [d^2 + b^2 + bl \cos (\alpha + \beta) + dl \cos \alpha + 2bd \cos \beta], \\ a_{35} = a_{53} &= m_3 (b^2 + bl \cos (\alpha + \beta) + bd \cos \beta), \\ a_{44} &= m_2 a^2 + B + m_3 (d^2 + b^2 + 2bd \cos \beta), \\ a_{45} = a_{54} &= m_3 (b^2 + bd \cos \beta), \quad a_{55} = m_3 b^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Обобщенные силы в этой тросовой системе в виде вектора

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_x, \mathbf{Q}_z, \mathbf{Q}_\theta, \mathbf{Q}_\alpha, \mathbf{Q}_\beta)^T \quad (5)$$

определяются тягой буксира, силами притяжения и силами инерции. В выбранной системе отсчета при используемых допущениях линейным координатам соответствуют обобщенные силы

$$Q_x = F, \quad Q_z = 0. \quad (6)$$

Совместное действие сил притяжения и сил инерции можно свести к двум гравитационным моментам. Величина первого момента, действующего на всю тросовую систему в целом, такова [14]:

$$M_1 = \frac{3}{2} K \frac{m_1 (m_2 + m_3) l^2}{(m_1 + m_2 + m_3) r_O^3} \sin 2\theta. \quad (7)$$

Второй момент, действующий на буксируемый аппарат и определенный относительно его центра масс, может быть записан следующим образом:

$$M_2 = \frac{3}{2} K \frac{(A - C)}{r_O^3} \sin 2(\theta + \alpha). \quad (8)$$



В силу (6)–(8) вектор обобщенных сил имеет вид

$$\mathbf{Q} = (F, 0, M_1, M_2, 0)^T. \quad (9)$$

Совместное действие двух моментов делает возможным наличие различных равновесных конфигураций системы, которые можно найти из уравнений движения, записанных при отсутствии угловых движений:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x}_A = F, \\ \ddot{z}_A = 0, \\ \frac{F(m_2 + m_3)l}{m_1 + m_2 + m_3} \sin \theta = \frac{3}{2} K \frac{m_1(m_2 + m_3)l^2}{(m_1 + m_2 + m_3)r_O^3} \sin 2\theta, \\ \frac{F(\frac{m_2}{2} + m_3)a}{m_1 + m_2 + m_3} \sin(\theta + \alpha) = \frac{3}{2} K \frac{(A - C)}{r_O^3} \sin 2(\theta + \alpha), \\ \frac{Fm_3b}{m_1 + m_2 + m_3} \sin(\theta + \alpha + \beta) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Первое уравнение движения системы (10) определяет очевидную величину ускорения, с которым будет двигаться неизменная конфигурация

$$\ddot{x}_A = F/(m_1 + m_2 + m_3). \quad (11)$$

Второе уравнение при отсутствии возмущений дает тривиальное решение: $z_A = \text{const} = z_{A0}$.

Из оставшихся трех уравнений системы (10) можно найти значения угловых координат при равновесном движении. Из последнего уравнения получаем $\beta_0 = -(\alpha_0 + \theta_0)$.

Откуда следует, что в относительном равновесии маятник направлен вдоль оси Ox в сторону, противоположную движению системы. Для углов α и ϑ получаем два набора возможных значений, реализация которых зависит от параметров системы:

$$\begin{cases} \theta_1 = 0, & \left\{ \begin{array}{l} \theta_2 = \arccos k_\vartheta, \\ \alpha_2 = \arccos(k_\vartheta k_m k_I) - \arccos k_\vartheta, \end{array} \right. & \begin{array}{l} k_\vartheta \leq 1, \\ k_\vartheta k_m k_I \leq 1, \end{array} \end{cases} \quad (12)$$

где $k_\vartheta = Fr_O^3/(3Km_1l)$ — коэффициент, определяющий соотношение сил, соответствующих невозмущенному орбитальному движению, и силы тяги буксира, $k_m = m_1(m_2/2 + m_3)/[m_2(m_1 + m_2 + m_3)]$ — коэффициент, характеризующий соотношение масс составных частей тросовой системы, $k_I = m_2al/(A - C)$ — коэффициент, зависящий от распределения масс пассивного КА и расположения на нем точки крепления троса.

Если тяга буксира и параметры тросовой системы таковы, что $k_\vartheta > 1$ и $k_m k_\vartheta k_I > 1$, то возможна только первая конфигурация системы.

Для коэффициента $k_\vartheta = Fr_O^3/3Km_1l$ это условие выполняется при увеличении тяги буксира и уменьшении длины троса. Для того чтобы была возможна вторая конфигурация, должна быть малой величина параметра a — расстояния от точки крепления троса до центра масс буксируемого аппарата.



4. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Построим уравнения первого приближения для исследования частот и форм малых колебаний в окрестности двух равновесных положений. Три уравнения первого приближения, описывающие вращательные движения в окрестности равновесных конфигураций, можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{A}_k \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_k \mathbf{x} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (13)$$

Здесь $\mathbf{A}_k = \{a^k_{ij}\}$ и $\mathbf{C}_k = \{c^k_{ij}\}$ — квадратные симметричные матрицы коэффициентов инерции и коэффициентов упругости, обусловленных ускоренным движением системы, а \mathbf{x} — вектор-столбец отклонений углов ϑ , α и β от невозмущенного движения:

$$\mathbf{x} = (x_\vartheta, x_\alpha, x_\beta)^T. \quad (14)$$

4.1. Малые колебания в окрестности первой равновесной конфигурации

Сохраним индексы координат, выбранные при записи (4). Тогда отличные от нуля компоненты матрицы \mathbf{C}_1 определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{33}^1 &= \frac{m_2(l+a) + m_3(l+d+b)}{m_1 + m_2 + m_3} F - 3K \frac{m_1(m_2 + m_3)l^2}{(m_1 + m_2 + m_3)r_O^3}, \\ c_{34}^1 &= c_{43}^1 = \frac{m_2a + m_3(d+b)}{m_1 + m_2 + m_3} F - 3K \frac{(A-C)}{r_O^3}, \\ c_{44}^1 &= \frac{m_2a + m_3(d+b)}{m_1 + m_2 + m_3} F, \\ c_{35}^1 &= c_{53}^1 = c_{45}^1 = c_{54}^1 = c_{55}^1 = \frac{m_3bF}{m_1 + m_2 + m_3}. \end{aligned} \quad (15)$$

В линейной конфигурации характеристическое уравнение для уравнений первого приближения

$$k_0 \omega^6 + k_1 \omega^4 + k_2 \omega^2 + k_3 = 0 \quad (16)$$

определяет три собственных частоты рассматриваемой системы. Коэффициенты характеристического уравнения (16) имеют вид

$$\begin{aligned} k_0 &= \mu \varepsilon \kappa^2, \\ k_1 &= -\frac{\lambda \varepsilon \kappa}{1 + \mu + \varepsilon} (\varepsilon \delta \lambda \mu (\delta + \kappa) + \mu \lambda (\mu \kappa - 2\varepsilon \delta) + \mu (2\mu \kappa + \lambda \varepsilon + 2\varepsilon \kappa)), \\ k_2 &= \frac{\lambda \varepsilon \kappa}{(1 + \mu + \varepsilon)^2} (\varepsilon + \mu + \varepsilon \delta \kappa \mu + \varepsilon \delta \lambda \mu + 2\mu^2 + 3\mu \varepsilon + \varepsilon^2 \delta^2 + \mu^2 \lambda + \varepsilon \delta^2 \mu + \dots), \\ k_3 &= \frac{\lambda \varepsilon \kappa (\mu + \varepsilon \delta) (\mu + \varepsilon)}{(1 + \mu + \varepsilon)^2}, \end{aligned}$$

где $\mu = m_2/m_1$ — относительная масса буксира; $\varepsilon = m_3/m_2$ — относительная масса остатков топлива; $\lambda = l/a$ — относительная длина троса; $\delta = d/a$ — относительная длина маятника; $\kappa = (A-C)/(m_2 a^2) = l/a k_I$ — коэффициент формы КА.



Дискриминант кубического уравнения имеет вид [16]

$$Q = -(4p^3 + 27q^2),$$

где $p = -\frac{1}{3}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 + \frac{k_3}{k_1}$, $q = \frac{2}{27}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^3 - \frac{k_2 k_3}{3k_1^2} + \frac{k_4}{k_1}$. Дискриминант может принимать только положительные значения, так как все корни ω^2 вещественные. Значения корней будут тем ближе друг к другу, чем меньше значение дискриминанта Q .

Исследование поведения значений дискриминанта при изменении его параметров показало, что минимальные значения дискриминанта лежат над линией $\lambda = \kappa\mu$, причем они уменьшаются по мере роста μ и λ . Таким образом, уравнение $\lambda = \kappa\mu$

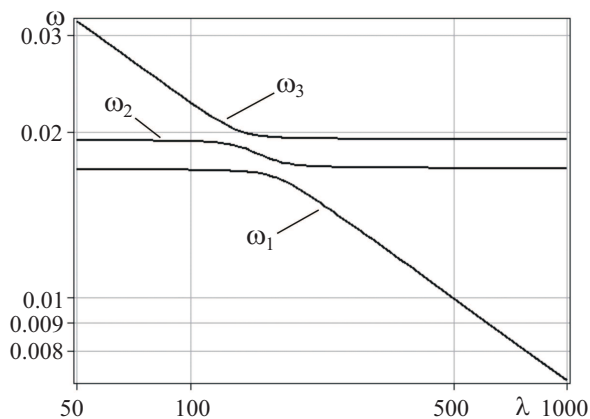


Рис. 2. Зависимость собственных частот в системе от относительной длины троса λ

Fig. 2. Dependence natural frequencies on relative length of tether λ

дает критическое сочетание параметров, при котором возможно сближение всех трех собственных частот колебаний тросовой системы. На рис. 2 представлена зависимость собственных частот тросовой системы от относительной длины троса λ . Из полученных зависимостей следует, что при сравнительно малых значениях относительной массы буксира μ и относительной длины троса λ возможно сближение значений всех трех собственных частот системы, что может привести к перераспределению энергии между формами колебаний.

4.2. Малые колебания в окрестности второй равновесной конфигурации

Рассмотрим малые колебания тросовой системы относительно равновесных конфигураций при отсутствии нулевых решений. Компоненты матрицы \mathbf{C}_2 в этом случае определяются следующим образом:

$$c_{33}^2 = \frac{m_2(l+a) + m_3(l+d+b)}{m_1 + m_2 + m_3} Fk_\vartheta - 3K \frac{m_1(m_2 + m_3)l^2}{(m_1 + m_2 + m_3)r_O^3} (2k_\vartheta^2 - 1),$$

$$c_{34}^2 = c_{43}^2 = c_{44}^2 = \frac{m_2a + m_3(d+b)}{m_1 + m_2 + m_3} Fk_\vartheta k_m k_I - 3K \frac{(A-C)}{r_O^3} (2k_\vartheta^2 k_m^2 k_I^2 - 1), \quad (17)$$

$$c_{35}^2 = c_{53}^2 = c_{45}^2 = c_{54}^2 = c_{55}^2 = \frac{m_3 b F}{m_1 + m_2 + m_3} k_\vartheta.$$

Полученными уравнениями первого приближения можно воспользоваться для определения частот и форм колебаний тросовых систем с выбранными параметрами. В отличие от линейной конфигурации не было обнаружено таких сочетаний параметров системы, при которых дискриминант соответствующего кубического уравнения стремился к нулю. Это исключает возможность сближения собственных частот и перераспределения энергии колебаний между разными формами.



5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Результаты численного моделирования колебаний тросовой системы показали, что при одних и тех же начальных условиях наибольшие амплитуды колебаний наблюдаются в тех случаях, когда все три собственные частоты имеют близкие значения. В результате сложения всех трех форм колебаний с близкими частотами наблюдаются биения, при которых происходит перераспределение энергии колебаний между различными частями колебательной системы. Рассмотрим движение буксира при следующих начальных условиях: $\vartheta_0 = 0$, $\alpha_0 = 0.1$, $\beta_0 = 0$.

Длина троса выбрана такой, что все три собственные частоты близки друг другу ($l_0 = 145$ м). Амплитуда колебаний буксируемого аппарата не остается постоянной (рис. 3, угол α), что свидетельствует о передаче энергии остальным элементам. Так, амплитуда колебаний остатков топлива может быть до 20 раз больше амплитуды колебаний самого аппарата (рис. 3, угол β). Хотя угол отклонения троса изменяется в тех же пределах, что и α (рис. 3, угол ϑ), это может оказать неблагоприятное влияние на ориентацию буксира и привести к его неравномерному движению.

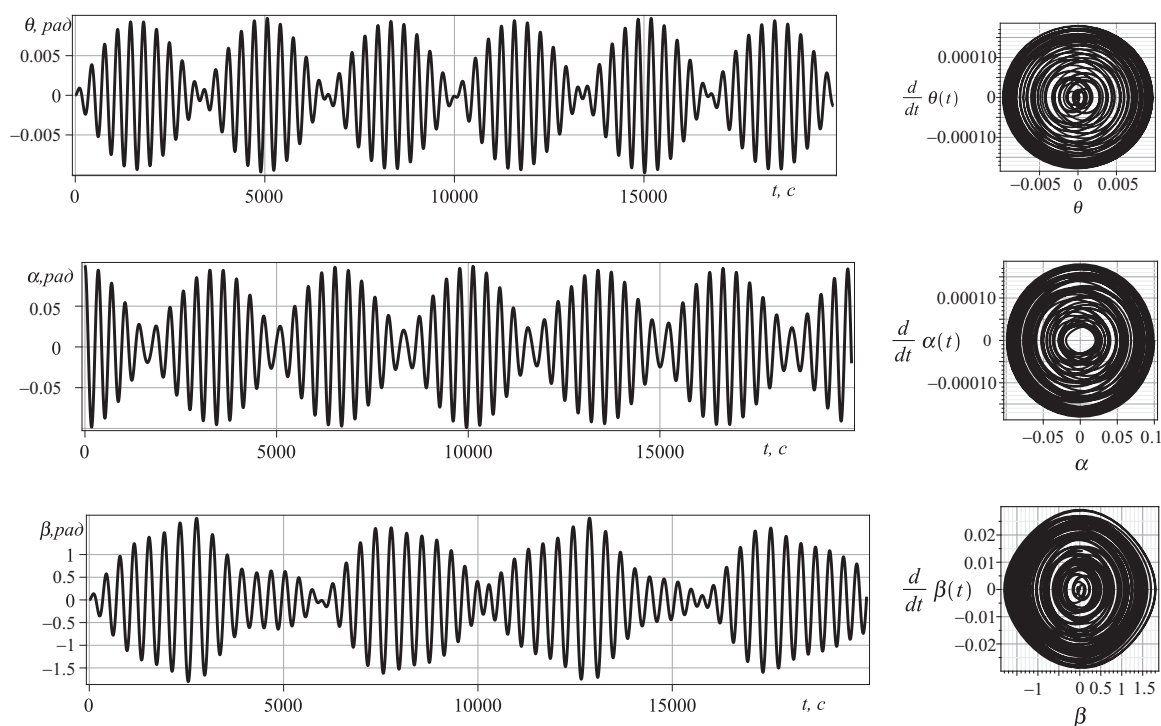


Рис. 3. Изменение углов отклонений при близких значениях трех собственных частот
 Fig. 3. Deviation angles changing in case of near natural frequencies

Если близость частот нарушается, то сохраняются регулярные колебания буксируемого аппарата, остальные углы изменяются незначительно. При колебаниях относительно второй равновесной конфигурации период колебаний существенно больше. При сравнительно небольших начальных отклонениях по углам ϑ и α наблюдаются регулярные колебания, практически независимые от колебаний остатков топлива (рис. 4)

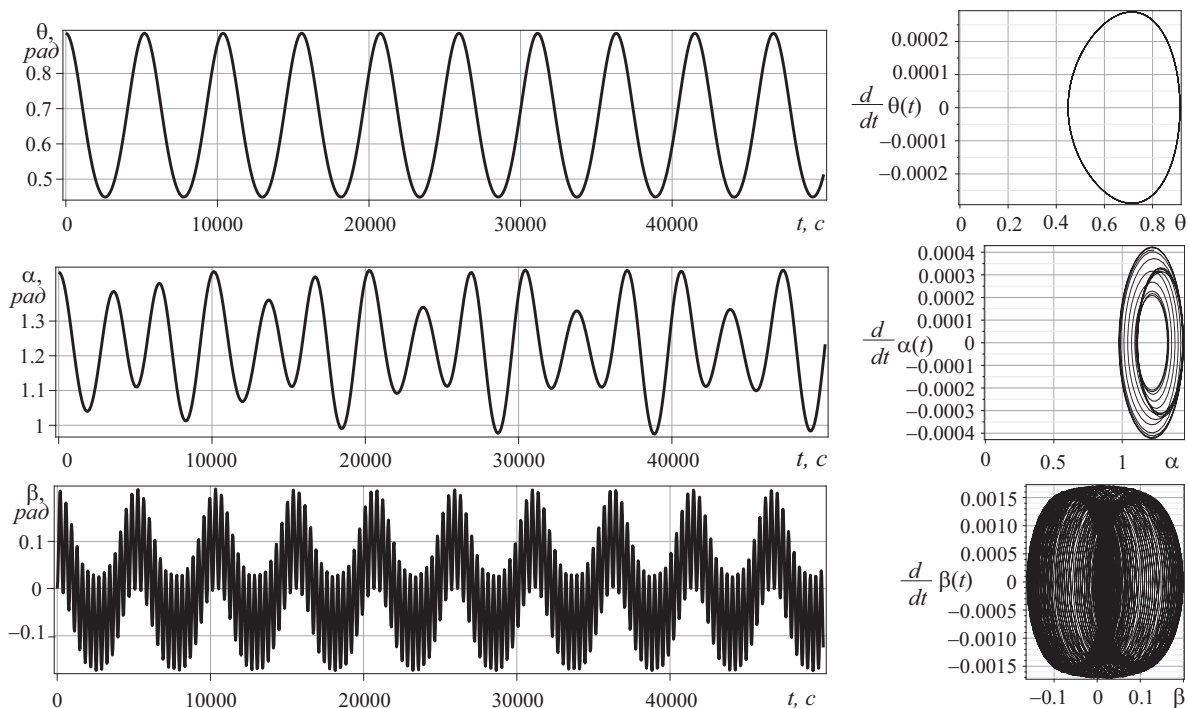


Рис. 4. Колебания во второй конфигурации при малых начальных отклонениях
Fig. 4. Oscillations in the second position variant with small deviations

Принципиальным отличием от первой конфигурации является возникновение хаотического движения при увеличении начальных отклонений от равновесных значений. Такой переход сопровождается существенным увеличением размаха колебаний. На рис. 5 приведены графики колебаний угловых координат и соответствующие им фазовые портреты относительно одной из равновесных конфигураций.

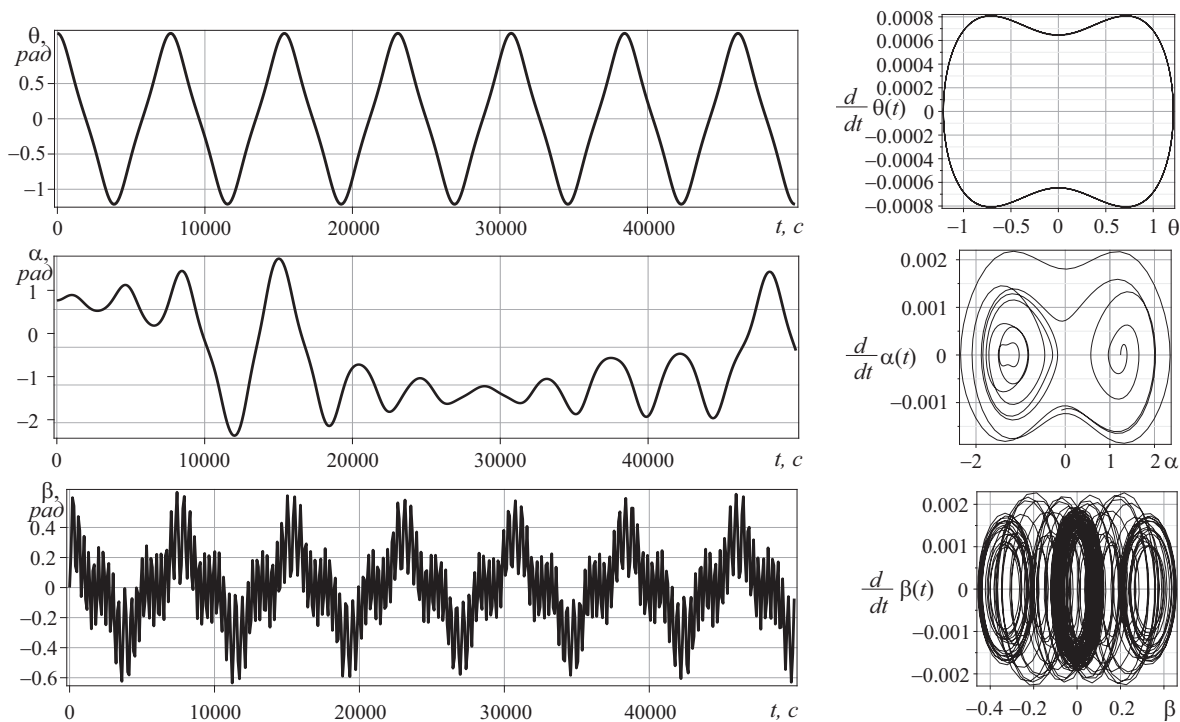


Рис. 5. Колебания во второй конфигурации при больших начальных отклонениях
Fig. 5. Oscillations in the second position variant with big deviations



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вывод и анализ уравнений движения космической тросовой системы позволил установить соотношение параметров системы, при которых возможно как одно, так и несколько равновесных положений космической тросовой системы. Анализ возникающих колебаний показал, что в случае первой равновесной конфигурации, которая является устойчивой при коротком тросе и сравнительно большом ускорении, возможно сближение собственных частот и увеличение амплитуд колебаний за счет перераспределения энергии. В конфигурации с отличными от нуля углами регулярные колебания при увеличении начальных отклонений могут переходить в хаотические с существенным увеличением амплитуд колебаний. Результаты работы могут быть полезны для анализа устойчивости движения космических тросовых систем, предназначенных для увода космического мусора с орбиты.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 16-19-10158).

Библиографический список

1. *Белецкий В. В., Левин Е. М.* Динамика космических тросовых систем. М. : Наука, 1990. 329 с.
2. *Aslanov V. S., Ledkov A. S.* Dynamics of the Tethered Satellite Systems. Elsevier, 2012. 356 p.
3. Динамика космических систем с тросовыми и шарнирными соединениями / А. П. Алпатов, В. В. Белецкий, В. И. Драновский и др. М. ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2007. 560 с.
4. *Асланов В. С.* Колебания тела с орбитальной тросовой системой // ПММ. 2007. Т. 71, вып. 6. С. 1027–1033.
5. *Aslanov V. S., Yudintsev V. V.* Dynamics, Analytical Solutions and Choice of Parameters for Towed Space Debris with Flexible Appendages // Advances in Space Research. 2015. Vol. 55. P. 660–667. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2014.10.034>
6. *Williams P., Hyslop A., Stelzer M., Kruijff M.* YYES2 optimal trajectories in presence of eccentricity and aerodynamic drag // Acta Astronautica. 2009. Vol. 64, iss. 7–8. P. 745–769. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2008.11.007>
7. *Bonnal C., Ruault J.-M., Desjean M.-C.* Active debris removal: Recent progress and current trends // Acta Astronautica. 2013. Vol. 85. P. 51–60. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2012.11.009>
8. *Jasper L., Schaub H.* Input Shaped Large Thrust Maneuver with a Tethered Debris Object // Acta Astronautica. 2014. Vol. 96. P. 128–137. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.11.005>
9. *Jasper L., Schaub H.* Tethered Towing Using Open-Loop Input-Shaping and Discrete Thrust Levels // Acta Astronautica. 2014. Vol. 105, iss. 1. P. 373–384. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.10.001>
10. *Kitamura S., Hayakawa Y., Kawamoto S.* A reorbiter for large GEO debris objects using ion beam irradiation // Acta Astronautica. 2014. Vol. 94, iss. 2. P. 725–735. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.07.037>
11. *Reyhanoglu M., Rubio Hervas J.* Nonlinear dynamics and control of space vehicles with multiple fuel slosh modes // Control Eng. Pract. 2012. Vol. 20, iss. 9. P. 912–918. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2012.05.011>



12. Rubio Hervas J., Reyhanoglu M. Thrust-vector control of a threeaxis stabilized upper-stage rocket with fuel slosh dynamics // Acta Astronautica. 2014. Vol. 98. P. 120–127. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.01.022>
13. Купреев С. А. Условия существования предельных циклов у динамической системы движения связанных объектов на эллиптической орбите // Тр. МАИ. 2016. № 88. С. 1–33. URL: http://trudymai.ru/upload/iblock/9c1/kupreev_gus_1.pdf (дата обращения 18.05.2018).
14. Маркеев А. П. Теоретическая механика : учебник для университетов. М. : ЧеРо, 1999. 572 с.
15. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М. : Машиностроение, 1968. 532 с.
16. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М. : Наука, 1978. 720 с.

Образец для цитирования:

Авраменко А. А., Асланов В. С. Исследование равновесных конфигураций космической тросовой системы при буксировке пассивного аппарата с остатками топлива // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т.18, вып. 3. С. 334–346. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-334-346>

Equilibrium Analysis of the Tethered Tug Debris System with Fuel Residuals

A. A. Avramenko, V. S. Aslanov

Alersandr A. Avramenko, <https://orcid.org/0000-0001-6798-4196>, Samara National Research University, 34, Moskovskoye Shosse, Samara, 443086, Russia, avramenko_a_a@mail.ru

Vladimir S. Aslanov, <https://orcid.org/0000-0003-4065-137X>, Samara National Research University, 34, Moskovskoye Shosse, Samara, 443086, Russia, aslanov_vs@mail.ru

The problem of tethered transportation of space debris is considered. The system consists of orbit tug, tether, and passive spacecraft with fuel residuals. The planar motion on circular orbit is studied in the orbital frame. Nonlinear motion equations are obtained by Lagrangian formalism. They consider action of the space tug-thrust and gravitational moments. Two variants of stable positions of relative equilibrium are defined. They depend on main parameters of the tethered system: aspect ratio and mass ratio. The equations of the first approximation for the each of the stable position variants are obtained. Their coefficients analysis give evidence of approachment all of the natural frequency of the system and permit to find corresponding conditions. The results of numerical simulation of the motion of the tethered system and their comparison with small oscillations determined by are presented. Proposed equations can be used to analyze the attitude motion of the tug–debris system and to determine the conventional parameters for safe tethered transportation of space debris.

Key words: space tethered system, space debris, equilibrium positions, orbit.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 16-19-10158).



References

1. Beletsky V. V., Levin E. M. *Dynamics of Space Tether Systems. Vol. 83: Advances in the Astronautical Sciences*. American Astronautical Society, 1993. 500 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1990. 329 p.)
2. Aslanov V. S., Ledkov A. S. *Dynamics of the Tethered Satellite Systems*. Elsevier, 2012. 350 p.
3. Alpatov A. P., Beletsky V. V., Dranovsky V. I., Zakrzhevsky A. E., Pirozhenko A.V., Troger G., Khoroshilov V. S. *Dinamika kosmicheskikh sistem s trosovymi i sharnirnymi soedineniyami* [Dynamics of Space Systems Joined by Tethers and Hings]. Moscow, Izhevsk, Research center "Regular and Chaotic Dynamics", Institute of Computer Science, 2007. 560 p. (in Russian)
4. Aslanov V. S. Oscillations of the Body with Orbit Tethered System. *J. Appl. Math. Mech.*, 2007, vol. 71, iss. 6, pp. 1027–1033.
5. Aslanov V. S., Yuditsev V. V. Dynamics, Analytical Solutions and Choice of Parameters for Towed Space Debris with Flexible Appendages. *Advances in Space Research*, 2015, vol. 55, pp. 660–667. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2014.10.034>
6. Williams P., Hyslop A., Stelzer M., Kruijff M. YYES2 optimal trajectories in presence of eccentricity and aerodynamic drag. *Acta Astronautica*, 2009, vol. 64, iss. 7–8, pp. 745–769. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2008.11.007>
7. Bonnal C., Ruault J.-M., Desjean M.-C. Active debris removal: Recent progress and current trends. *Acta Astronautica*, 2013, vol. 85, pp. 51–60. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2012.11.009>
8. Jasper L., Schaub H. Input Shaped Large Thrust Maneuver with a Tethered Debris Object. *Acta Astronautica*, 2014, vol. 96, pp. 128–137. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.11.005>
9. Jasper L., Schaub H. Tethered Towing Using Open-Loop Input- Shaping and Discrete Thrust Levels. *Acta Astronautica*, 2014, vol. 105, iss. 1, pp. 373–384. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.10.001>
10. Kitamura S., Hayakawa Y., Kawamoto S. A reorbiter for large GEO debris objects using ion beam irradiation. *Acta Astronautica*, 2014, vol. 94, iss. 2, pp. 725–735. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.07.037>
11. Reyhanoglu M., Rubio Hervas J. Nonlinear dynamics and control of space vehicles with multiple fuel slosh modes. *Control Eng. Pract.*, 2012, vol. 20, iss. 9, pp. 912–918. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2012.05.011>
12. Rubio Hervas J., Reyhanoglu M. Thrust-vector control of a threeaxis stabilized upper-stage rocket with fuel slosh dynamics. *Acta Astronautica*, 2014, vol. 98, pp. 120–127. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.01.022>
13. Kupreev S. A. The conditions of existence of limit cycles in dynamic motion system of related objects on an elliptical orbit. *Electronic journal „Trudy MAI“*, 2016, no. 88. Available at: <http://www.trudymai.ru/eng/published.php?ID=69696&eng=Y> (accessed 18 May 2018).
14. Markeev A. P. *Teoreticheskaya mekhanika : uchebnik dlya universitetov* [Theoretical Mechanics: A Textbook for Universities]. Moscow, CheRho, 1999. 572 p. (in Russian).
15. Mikishev G. N., Rabinovitch B. I. *Dynamics of the solid body with cavities partially filled the liquid*. Moscow, Mashinostroenie, 1968. 532 p. (in Russian).



16. Korn G., Korn T. *Mathematical Handbook for scientists and engineers*. New York, San Francisco, Toronto, London, Sydney, McGraw-Hill Book Company, 1968. 1130 p. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.19690490921> (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1978. 720 p.)

Cite this article as:

Avramenko A. A., Aslanov V. S. Equilibrium Analysis of the Tethered Tug Debris System with Fuel Residuals. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 334–346 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-334-346>
