



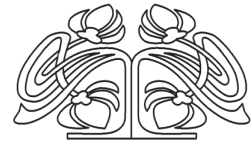
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 4

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал
2018 Том 18

ISSN 1816-9791 (Print)
ISSN 2541-9005 (Online)

Издается с 2005 года

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Механика

- Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Уафа Г. Н., Евдокимов В. С.** О стартовых землетрясениях при параллельных разломах литосферных плит 370
- Баженов В. Г., Осетров Д. Л., Рябов А. А.** Построение диаграмм деформирования металлов и сплавов при ударном сжатии образцов-таблеток с учетом сил трения 381
- Бауэр С. М., Воронкова Е. Б.** Потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия пологих сферических оболочек под действием внутреннего давления 390
- Беляев А. К., Зелинская А. В., Иванов Д. Н., Морозов Н. Ф., Наумова Н. В., Товстик П. Е., Товстик Т. П.** Приближенная теория колебаний многослойных анизотропных пластин 397
- Vatulyan A. O., Lyapin A. A., Kossovich E. L.** Studying of Elastoplastic Properties of Coal Specimens Using Indentation Technique [Ватульян А. О., Ляпин А. А., Коссович Е. Л. Исследование упругопластических свойств угольных пород на основе метода индентирования] 412
- Ватульян А. О., Плотников Д. К., Поддубный А. А.** О некоторых моделях индентирования функционально-градиентных покрытий 421
- Игумнов Л. А., Метрикин В. С.** О сложной динамике в простейших вибрационных системах с трением наследственного типа 433
- Karlpunov J. D., Prikazchikova L. A.** Low-Frequency Vibration Modes of Strongly Inhomogeneous Elastic Laminates [Каплунов Ю. Д., Приказчикова Л. А. Длинноволновые моды колебаний сильно неоднородных упругих слоистых конструкций] 447
- Ломакин Е. В., Щендригина О. П.** Напряженно-деформированное состояние в пластине с зависящими от вида напряженного состояния материальными свойствами 458
- Радаев Ю. Н.** Мгновенно-нерастяжимые директоры в кинематике трехмерных течений сред Кулона–Мора 467
- Радченко В. П., Цветков В. В.** Моделирование ползучести и длительной прочности толстостенных труб при комбинированном нагружении осевой силой, крутящим моментом и внутренним давлением 484
- Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д. В.** Осесимметричная задача Лемба для среды Коссера 496

Приложение

Personalia

- Радаев Ю. Н.** Профессор Леонид Юрьевич Коссович (к 70-летию со дня рождения) 507

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (группы научных специальностей: 01.01.00 – математика; 01.02.00 – механика; 05.13.00 – информатика, вычислительная техника и управление).

Журнал входит в международные базы данных Emerging Sources Citation Index, MathSciNet, zbMATH

Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-56162 от 15 ноября 2013 года

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год

Директор издательства

Бучко Ирина Юрьевна

Редактор

Крылова Елена Борисовна

Художник

Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист

Кочкаева Инна Анатольевна

Верстка

Степанова Наталия Ивановна

Технический редактор

Каргин Игорь Анатольевич

Корректор

Кочкаева Инна Анатольевна

Адрес учредителя, издателя и издательства:

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83

Тел.: +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89

E-mail: izvestiya@sgu.ru

Подписано в печать 30.11.18.

Формат 60x84 1/8.

Усл. печ. л. 18,13(19,5).

Тираж 500 экз. Заказ 156-Т.

Отпечатано в типографии Саратовского университета.

Адрес типографии:

410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2018



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <http://mmi.sgu.ru/dlya-avtogo>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования в журнале. В случае положительного решения об опубликовании статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <http://mmi.sgu.ru>.

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mmi@sgu.ru

Website: <http://mmi.sgu.ru/>

Ответственный секретарь серии:

Шевцова Юлия Владиславовна

CONTENTS

Scientific Part

Mechanics

- Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Uafa G. N., Evdokimov V. S.** Starting Earthquakes with the Parallel Faults of Lithospheric Plates 370
- Bazhenov V. G., Osetrov D. L., Ryabov A. A.** The Construction of the Deformation Diagrams of Metals and Alloys at Impact Compression of Tablet Specimens with Friction Forces Consideration 381
- Bauer S. M., Voronkova E. B.** On the Unsymmetrical Buckling of Shallow Spherical Shells under Internal Pressure 390
- Belyaev A. K., Zelinskaya A. V., Ivanov D. N., Morozov N. F., Naumova N. V., Tovstik P. E., Tovstik T. P.** Approximate Theory of a Laminated Anisotropic Plate Vibrations 397
- Vatulyan A. O., Lyapin A. A., Kossovich E. L.** Studying of Elastoplastic Properties of Coal Specimens Using Indentation Technique 412
- Vatulyan A. O., Plotnikov D. K., Poddubny A. A.** On Some Models of Indentation for Functionally-Graded Coatings 421
- Igumnov L. A., Metrikin V. S.** On the Complex Dynamics in Simplest Vibrational Systems with Hereditary-Type Friction 433
- Kaplunov J. D., Prikazchikova L. A.** Low-Frequency Vibration Modes of Strongly Inhomogeneous Elastic Laminates 447
- Lomakin E. V., Shchendrigina O. P.** Stress and Strain Fields in a Plate of Stress State Dependent Material Properties 458
- Radayev Yu. N.** Instantaneously not Elongated Directors in Three-Dimensional Kinematics of the Coulomb – Mohr Medium 467
- Radchenko V. P., Tsvetkov V. V.** Creep and Long-Term Strength Modeling for Thick-Walled Tubes under Combined Loading with Axial Force, Torsional Moment and Internal Pressure 484
- Tran Le Thai, Tarlakovskii D. V.** Axisymmetric Problem Lemba for the Cosserat Medium 496

Appendix

Personalia

- Radaev Yu. N.** Professor Leonid Yu. Kossovich (to the 70th Anniversary) 507



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Омск, Россия)

Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Пурки, Индия)

Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)

Индейцев Дмитрий Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Республика Беларусь)

Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Манжиров Александр Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Матвеенко Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, доктор физ.-мат. наук, акад. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Пархоменко Павел Павлович, доктор техн. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук (Долгопрудный, Московская обл., Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Рацев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ульяновск, Россия)

Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D., профессор (Киль, Великобритания)

Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Республика Беларусь)

Субботин Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Екатеринбург, Россия)

Харченко Вячеслав Сергеевич, доктор техн. наук, профессор (Харьков, Украина)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Янг Чуань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES.
SERIES: MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»**

Editor-in-Chief – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)

Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)

Dmitry A. Indeitsev (St. Petersburg, Russia)

Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)

Vyacheslav S. Kharchenko (Kharkiv, Ukraine)

August P. Khromov (Saratov, Russia)

Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)

Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)

Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)

Alexander V. Manzhirov (Moscow, Russia)

Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)

Nikita F. Morozov (St. Petersburg, Russia)

Semen R. Nasyrov (Kazan', Russia)

Pavel P. Parkhomenko (Moscow, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)

Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)

Alexander F. Rezchikov (Saratov, Russia)

Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)

Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)

Shoji IMATANI (Kyoto, Japan)

Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny, Moscow region, Russia)

Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)

Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)

Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)

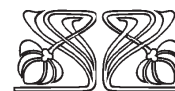
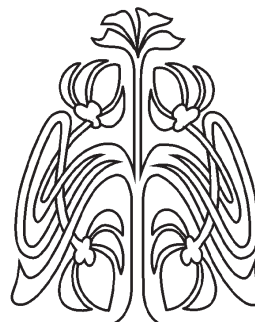
Yurii N. Subbotin (Ekaterinburg, Russia)

Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)

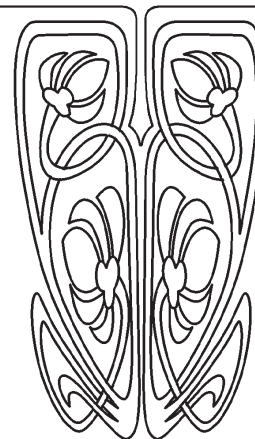
Vyacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)

Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)

Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)



**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**



МЕХАНИКА

УДК 501.1

О СТАРТОВЫХ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯХ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ РАЗЛОМАХ ЛИТОСФЕРНЫХ ПЛИТ

**В. А. Бабешко, О. В. Евдокимова, О. М. Бабешко,
Г. Н. Уафа, В. С. Евдокимов**

Бабешко Владимир Андреевич, доктор физико-математических наук, академик РАН, научный руководитель направления математики и механики Южного научного центра РАН, Россия, 344006, Ростов-на-Дону, Чехова, 41; заведующий кафедрой, Кубанский государственный университет, Россия, 350040, Краснодар, Ставропольская, 149, babeshko41@mail.ru

Евдокимова Ольга Владимировна, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, Южный научный центр РАН, Россия, 344006, Ростов-на-Дону, Чехова, 41, evdokimova.olga@mail.ru

Бабешко Ольга Мефодиевна, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Кубанский государственный университет, Россия, 350040, Краснодар, Ставропольская, 149, babeshko49@mail.ru

Уафа Галина Николаевна, инженер-исследователь, Южный научный центр РАН, Россия, 344006, Ростов-на-Дону, Чехова, 41, uafa70@mail.ru

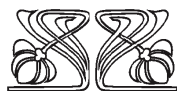
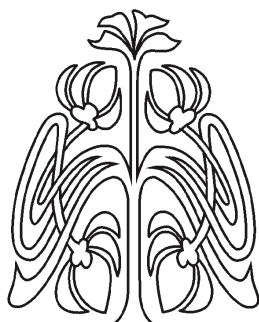
Евдокимов Владимир Сергеевич, лаборант, Южный научный центр РАН, Россия, 344006, Ростов-на-Дону, Чехова, 41, evdok_vova@mail.ru

На основе анализа моделей, описывающих подготовку стартовых землетрясений для различных типов нагрузок на литосферные плиты, проведен анализ возможностей возникновения землетрясений для случая параллельных типов разломов. Этот анализ позволяет одновременно выявлять подходы по их упреждению или предсказанию, то есть возможности снижения риска возникновения землетрясений. Исследование возникшей блочной структуры осуществляется применением топологического подхода. Граничная задача погружается в топологическую структуру и сводится к функциональным уравнениям. Применением автоморфизма получают псевдодифференциальные уравнения, которые анализируются. Доказано, что и в этом случае возможны стартовые землетрясения и получены соответствующие условия возникновения.

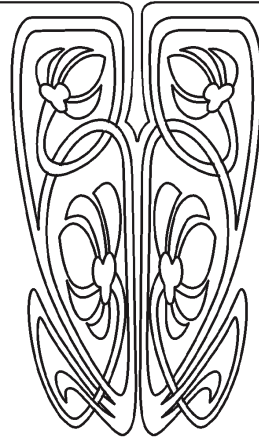
Ключевые слова: блочный элемент, факторизация, топология, методы интегральной и дифференциальной факторизации, внешние формы, блочные структуры, граничные задачи, сингулярная особенность.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-370-380>

© Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.,
Уафа Г. Н., Евдокимов В. С., 2018



**НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ**





ВВЕДЕНИЕ

Исследованиям прогноза землетрясений посвящено большое число публикаций отечественных и зарубежных ученых [1–20]. Выдающиеся отечественные ученые академики Г. А. Гамбурцев и М. А. Садовский высказали мнение, что для прогноза сейсмичности необходимо использовать механический подход. В настоящей работе продолжено исследование обнаруженного нового типа землетрясений, названных «стартовыми» [21–23]. Такое название им дано в связи с тем, что они происходят до того момента, когда встретившиеся литосферные плиты начинают действовать одна на другую [21–23]. Этот тип землетрясений можно прогнозировать. При достаточно полных сведениях о берегах разломов, их движениях и расположении, при имеющихся технических средствах, вибросейсмоисточниках и высокоточных GPS/ГЛОНАСС приемниках оказывается возможным определять место, время и интенсивность событий. Модель, которая принималась при проведении исследований, состояла в рассмотрении литосферных плит, моделируемых с учетом масштаба Земли, пластинами Кирхгофа, лежащими на деформируемом основании, на границе Конрада в предположениях как присутствия, так и отсутствия расстояния между берегами литосферных плит. В этой статье рассматривается случай наличия нескольких параллельных разломов литосферных плит. Они могут образовываться в результате давления со стороны астеносферы на литосферные плиты снизу плюмом, покинувшим конвективный поток в верхней мантии, который, изгибая их, привел к разлому поверхности на параллельные фрагменты. Зона уплотнения астеносферы в этой области может рассматриваться как деформируемое основание. С учетом явлений приливов, вызываемых движением Луны вокруг Земли, будем рассматривать гармонический процесс с частотой ω .

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается покрытие, лежащее на деформируемом основании, представляющее пластину Кирхгофа, имеющую несколько типов параллельных бесконечных по протяженности разломов таких, что разделяют покрытие на несколько фрагментов. Среди них один, правый, имеет бесконечную ширину, остальные — конечную ширину и их число равно N . В тех случаях, когда берега разломов не смыкаются, имеют место два их положения — когда присутствует отличное от нуля расстояние между ними и когда оно отсутствует. В первом случае берега литосферных плит удалены друг от друга и находятся на линейно деформируемом основании, во втором случае расстояние отсутствует. Считаем, что поверхность между берегами разлома свободна от напряжений, а на торцах плит действуют внешние силы, направленные по правилу внешних векторов. Граничные задачи рассматриваются в системе координат $x_1x_2x_3$ с началом в плоскости x_1x_2 , совпадающей со срединной плоскостью пластины, осью ox_3 , направленной вверх по нормали к пластине, осью ox_1 , направленной по касательной к границе разлома, осью ox_2 — по нормали к его границе. Плиты, представляющие фрагменты покрытия, занимают области Ω_n $|x_1| \leq \infty$, $c_{2n-1} \leq x_2 \leq c_{2n}$, $n = 1, 2, \dots, N$, $c_{2N} = \infty$, с левой $\partial\Omega_{2n-1}$ и правой $\partial\Omega_{2n}$ границами. Номера разломов следуют за номерами фрагментов покрытий и возможны два их состояния для разлома n : $c_{2n} - c_{2n+1} < 0$, $c_{2n} - c_{2n+1} = 0$. Ограничимся случаем лишь вертикальных воздействий на пластины, считая, что на торцах могут задаваться отличные от нуля изгибающие моменты и перерезывающие силы. Уравнение Кирхгофа для фрагментов b плит, $b = 1, 2, \dots, N$, занимающих области Ω_b при указанных вертикальных гармонических воздействиях напряжением $t_{3b}e^{-i\omega t}$ сверху и $g_{3b}e^{-i\omega t}$ снизу, после со-



кращения гармонической составляющей имеет вид [21–23]

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2)u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) \equiv \\
 & \equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} - \varepsilon_{43b} \right) u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) = 0, \quad (1) \\
 & \mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b}, \\
 & U_{3b} = \mathbf{F}_2 u_{3b}, \quad G_{3b} = \mathbf{F}_2 g_{3b}, \quad T_{3b} = \mathbf{F}_2 t_{3b}, \quad b = 1, 2, \dots, N, \\
 & M_b = -D_{b1} \left(\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} + \nu_b \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} \right) = f_{3b}(\partial \Omega_b), \quad D_{b1} = \frac{D_b}{H^2}, \quad D_{b2} = \frac{D_b}{H^3}, \\
 & Q_b = -D_{b2} \left(\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} + (2 - \nu_b) \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) = f_{4b}(\partial \Omega_b), \\
 & u_{3b} = f_{1b}(\partial \Omega_b), \quad \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} = f_{2b}(\partial \Omega_b), \quad D_b = \frac{E_b h_b^3}{12(1 - \nu_b^2)}, \\
 & \varepsilon_{43b} = \omega^2 \rho_b \frac{(1 - \nu_b^2) 12 H^4}{E_b h_b^2}, \quad \varepsilon_{53b} = \frac{(1 - \nu_b^2) 12 H^4}{E_b h_b^3}, \quad \varepsilon_6^{-1} = \frac{(1 - \nu) H}{\mu}.
 \end{aligned}$$

Связь между граничными напряжениями и перемещениями на поверхности упругой среды, на которой находятся плиты, определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 u_3(x_1, x_2) &= \varepsilon_6^{-1} \sum_{n=1}^N \iint_{\Omega_n} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) g_{3n}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad -\infty \leq x_1, x_2 \leq \infty, \\
 k(x_1, x_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (2) \\
 U_3(\alpha_1, \alpha_2) &= \varepsilon_6^{-1} K(\alpha_1, \alpha_2) \sum_{n=1}^N G_{3n}(\alpha_1, \alpha_2),
 \end{aligned}$$

где $K(\alpha_1, \alpha_2)$ — аналитическая функция двух комплексных переменных α_k , в частности, мероморфная, ее многочисленные примеры приведены в [24].

Здесь для пластин приняты обозначения: ν_b, ν — коэффициенты Пуассона блоков и основания соответственно; μ — модуль сдвига основания; E_b — модуль Юнга; h_b — толщина блока; ρ_b — плотность; ω — частота колебаний; g_{3b}, t_{3b} — значения контактных напряжений и внешних давлений, действующих вдоль оси x_3 в области Ω_b ; $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$ — двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно; M_b и Q_b — изгибающий момент и перерезывающая сила; $f_1(\partial \Omega_b)$ вертикальное перемещение на границе; $f_2(\partial \Omega_b)$ — угол поворота срединной плоскости вокруг оси x_1 в системе координат $x_1 o x_2$; h_b — толщина пластины; H — размерный параметр подложки, например, толщина слоя; u_{3b} — вертикальные перемещения под блочными элементами; u_{3b0} — вертикальные перемещения нижнего основания вне блочных элементов; u_3 — вертикальные перемещения нижнего основания по всей длине. Обозначения заимствованы из [23, 24].

2. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Рассматривая плиты и основание (1) как блочную структуру, состоящую из трех деформируемых блоков, применим для ее исследования метод блочного элемента.



Этот метод, как описано в [25], предполагает как первый шаг погружение средствами внешней алгебры граничной задачи в топологическую структуру. В результате строится функциональное уравнение граничной задачи для блочной структуры. Многошаговый алгоритм дальнейших исследований функционального уравнения, уже не имеющих никакого отношения к аппарату внешней алгебры, назван авторами внешним анализом в теории блочного элемента [25]. Он включает: дифференциальную факторизацию матриц-функций с элементами из нескольких комплексных переменных; реализацию автоморфизма, состоящую в вычислении форм-вычетов Лере, либо неполных функциональных уравнений Винера – Хопфа; построение псевдодифференциальных уравнений; извлечение из них интегральных уравнений, диктуемых конкретными граничными условиями граничной задачи; решение интегральных уравнений и получение интегрального представления граничной задачи в каждом блоке в форме «упакованного» блочного элемента. Наконец, «склею» решений каждого блока, состоящую в построении фактор-топологии некоторых топологических пространств, являющихся декартовыми произведениями топологических пространств носителей и решений. Применяя этап внешней алгебры, функциональное уравнение граничной задачи запишем в виде

$$R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv [(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 - \varepsilon_{43b}] U_{3b} = - \int_{\partial\Omega_b} \omega_b - \varepsilon_{53b} S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (3)$$

$$S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)(t_{3b} - g_{3b}), \quad b = \lambda, r.$$

Здесь ω_b — участвующие в представлении внешние формы [21–23], имеющие с учетом выбора системы координат вид

$$\omega_b(x_1, x_2) = e^{i(\alpha, x)} \left\{ - \left[\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} - i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} - \alpha_2^2 \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} + i\alpha_2^3 u_{3b} + 2 \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} - 2i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} \right] dx_1 + \left[\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^3} - i\alpha_1 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} - \alpha_1^2 \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_1} + i\alpha_1^3 u_{3b} \right] dx_2 \right\}, \quad b = 1, 2, \dots, N,$$

а в частном случае прямолинейной границы представимы в виде

$$\omega_b = e^{i(\alpha, x)} \left\{ - \left[i\alpha_2 M_b D_b^{-1} - Q_b D_b^{-1} - (\alpha_2^2 + \nu_b \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} + i\alpha_2 \left[\alpha_2^2 + (2 - \nu_b) \alpha_1^2 \right] u_{3b} \right] \right\} dx_1.$$

В формуле (3) при интегрировании, в случае плиты конечных размеров, граница $\partial\Omega_b$ правой плиты представляет собой два торца — левый и правый. Поскольку область, занятая плитой, рассматривается как топологическое многообразие с краем, то на границе вводятся локальные координаты, ориентация которых согласована с ориентацией внутренности многообразия.

В результате для каждого блока блочной системы получаются следующие псевдодифференциальные уравнения

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1) \left\langle \int_{\partial\Omega_{2n-1}} \left\{ i\alpha_{21-} D_n^{-1} M_n - D_n^{-1} Q_n - (\alpha_{21-}^2 + \nu_n \alpha_1^2) \frac{\partial u_{32n-1}}{\partial x_2} + i\alpha_{21-} \left[\alpha_{21-}^2 + (2 - \nu_n) \alpha_1^2 \right] u_{32n-1} \right\} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_{22-} - c_{2n-1})} dx_1 - \right.$$



$$\begin{aligned}
 & - \int_{\partial\Omega_{2n}} \left\{ i\alpha_{21-} D_n^{-1} M_n - D_n^{-1} Q_n - (\alpha_{21-}^2 + \nu_n \alpha_1^2) \frac{\partial u_{32n}}{\partial x_2} + \right. \\
 & \left. + i\alpha_{21-} [\alpha_{21-}^2 + (2 - \nu_n) \alpha_1^2] u_{32n} \right\} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_{22-} c_{2n})} dx_1 + \\
 & \left. + \varepsilon_{53n} [G_{3n}(\alpha_1, \alpha_{21-}) - T_{3n}(\alpha_1, \alpha_{21-})] \right\rangle = 0, \\
 \mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1) & \left\langle \int_{\partial\Omega_{2n-1}} \left\{ i\alpha_{22-} D_n^{-1} M_n - D_n^{-1} Q_n - (\alpha_{22-}^2 + \nu_n \alpha_1^2) \frac{\partial u_{32n-1}}{\partial x_2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + i\alpha_{22-} [\alpha_{22-}^2 + (2 - \nu_n) \alpha_1^2] u_{32n-1} \right\} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_{22-} c_{2n-1})} dx_1 - \right. \\
 & - \int_{\partial\Omega_{2n}} \left\{ \alpha_{22-} D_n^{-1} M_n - D_n^{-1} Q_n - (\alpha_{22-}^2 + \nu_n \alpha_1^2) \frac{\partial u_{32n}}{\partial x_2} + \right. \\
 & \left. + i\alpha_{22-} [\alpha_{22-}^2 + (2 - \nu_n) \alpha_1^2] u_{32n} \right\} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_{22-} c_{2n})} dx_1 + \\
 & \left. + \varepsilon_{53n} [G_{3n}(\alpha_1, \alpha_{22-}) - T_{3n}(\alpha_1, \alpha_{22-})] \right\rangle = 0.
 \end{aligned}$$

К ней добавляется такая же система псевдодифференциальных уравнений с заменой α_{21-} на α_{21+} и α_{22-} на α_{22+} .

Система псевдодифференциальных уравнений под номером N имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial\Omega_{2N-1}} \left\{ i\alpha_{21+} D_N^{-1} M_N - D_N^{-1} Q_N - (\alpha_{21+}^2 + \nu_N \alpha_1^2) \frac{\partial u_{32N-1}}{\partial x_2} + \right. \\
 & \left. + i\alpha_{21+} [\alpha_{21+}^2 + (2 - \nu_N) \alpha_1^2] u_{32N-1} \right\} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_{21+} c_{2N-1})} dx_1 + \\
 & \quad + \varepsilon_{53N} [G_{3N}(\alpha_1, \alpha_{21+}) - T_{3N}(\alpha_1, \alpha_{21+})], \\
 & \int_{\partial\Omega_{2N-1}} \left\{ i\alpha_{22+} D_N^{-1} M_N - D_N^{-1} Q_N - (\alpha_{22+}^2 + \nu_N \alpha_1^2) \frac{\partial u_{32N-1}}{\partial x_2} + \right. \\
 & \left. + i\alpha_{22+} [\alpha_{22+}^2 + (2 - \nu_N) \alpha_1^2] u_{32N-1} \right\} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_{22+} c_{2N-1})} dx_1 + \\
 & \quad + \varepsilon_{53N} [G_{3N}(\alpha_1, \alpha_{22+}) - T_{3N}(\alpha_1, \alpha_{22+})].
 \end{aligned}$$

В подынтегральных функциях приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{21-} &= -i\sqrt{(\alpha_1)^2 - \sqrt{\varepsilon_{b43}}}, & \alpha_{22-} &= -i\sqrt{(\alpha_1)^2 + \sqrt{\varepsilon_{b43}}}, \\
 \alpha_{21+} &= i\sqrt{(\alpha_1^r)^2 - \sqrt{\varepsilon_{b43}}}, & \alpha_{22+} &= i\sqrt{(\alpha_1^r)^2 + \sqrt{\varepsilon_{b43}}}.
 \end{aligned}$$

Уравнения для левой полубесконечной плиты остаются теми же, которые были получены ранее. Анализируя построенные псевдодифференциальные уравнения для случая наличия плиты ограниченной протяженности, можно видеть увеличение числа неизвестных, порождаемых дополнительной границей по сравнению со случаем



единственной границы у полуограниченной плиты. Исследования этого случая показывают, что наличие у плиты конечной длины еще одной границы не изменяет типа особенностей, как в случае удаленности берегов разлома, так и при сближении, однако влияет на значения коэффициентов при особенностях.

Используя подход, изложенный в [21–23], к псевдодифференциальным уравнениям с учетом формы областей Ω_b в виде полос бесконечной протяженности применим преобразование Фурье по координате x_1 .

Введем следующую систему обозначений:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{2n-1} &= \{y_{12n-1}, y_{22n-1}, y_{12n}, y_{22n}\}, \quad \mathbf{Z}_{2n-1} = \{z_{12n-1}, z_{22n-1}, z_{12n}, z_{22n}\}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ y_{1s} &= D_n^{-1} \mathbf{F}_1 M_s, \quad y_{2s} = D_n^{-1} \mathbf{F}_1 Q_s, \quad z_{1s} = \mathbf{F}_1 \frac{\partial u_{3s}}{\partial x_2}, \quad z_{2s} = \mathbf{F}_1 u_{3s}, \quad s = 1, 2, \dots, N, \\ \mathbf{F}_1 g &= \mathbf{F}_1(\alpha_1)g, \quad \mathbf{F}_2 g = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)g, \\ \mathbf{K}_{2n-1} &= \{k_{12n-1-}, k_{22n-1-}, k_{12n-1+}, k_{22n-1+}\}, \quad k_{1s-} = \varepsilon_{53s} \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{21-})(t_{3s} - g_{3s}), \\ k_{2s-} &= \varepsilon_{53s} \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{22-})(t_{3s} - g_{3s}), \quad k_{1s+} = \varepsilon_{53s} \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{21+})(t_{3s} - g_{3s}), \\ k_{2s+} &= \varepsilon_{53s} \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{22+})(t_{3s} - g_{3s}). \end{aligned}$$

В результате получим системы четырех алгебраических уравнений для каждого блочного элемента, которые в матричном виде имеют представление

$$\mathbf{A}_{2n-1} \mathbf{Y}_{2n-1} + \mathbf{B}_{2n-1} \mathbf{Z}_{2n-1} + \mathbf{K}_{2n-1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Рассмотрим тот случай, когда изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю, то есть торцы плит свободны от напряжений, $\mathbf{Y}_{2n-1} = 0$. В этом случае системы алгебраических уравнений решаются и решение представимо в виде

$$\mathbf{Z}_{2n-1} = -\mathbf{B}_{2n-1}^{-1} \mathbf{K}_{2n-1}.$$

Внося найденные решения во внешние формы (3), получим

$$U_{3b} = -R_b^{-1}(-i\alpha_{1b}, -i\alpha_{2b}) \left[\int_{\partial\Omega_b} \omega_b + \varepsilon_{53b} \mathbf{F}_2(g_{3b} - t_{3b}) \right], \quad b = 1, 2, \dots, N.$$

Сопрягая блочные элементы с основанием (1), (2), то есть строя фактор-топологии [21–23], приходим к системе функциональных уравнений вида

$$\begin{aligned} \sum_{b=1}^N U_{3b} + \sum_{b=0}^{N-1} U_{3b0} &= U_3, \\ -\sum_{b=1}^N R_b^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \left[\int_{\partial\Omega_b} \omega_b + \varepsilon_{53b}(G_{3b} - T_{3b}) \right] &= \varepsilon_6^{-1} K(\alpha_1, \alpha_2) \sum_{n=1}^N G_{3n}(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned}$$

С целью выделения параметров концентраций напряжений в рассматриваемой сложной блочной структуре в построенном функциональном уравнении последовательно будем выделять разломы, рассматривая их в индивидуальных локальных координатах x , направленных по x_2 с началом в центре разлома. В изучаемой граничной задаче возможны два положения берегов разломов: когда расстояние между берегами разломов отлично от нуля, обозначим его $2\theta > 0$, и когда отсутствует,



то есть $\theta = 0$. Обозначим в выбранной системе координат функцию левого блока $G_{32n-1}(\alpha_1, \alpha_2) = G^-(\alpha_1, \alpha_2)$, а правого блока — $G_{32n+1}(\alpha_1, \alpha_2) = G^+(\alpha_1, \alpha_2)$.

Тогда функциональные уравнения принимают вид [21–23]

$$\begin{aligned} & [\varepsilon_{532n-1}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} + \varepsilon_6^{-1}K(\alpha_1, \alpha_2)] G^+(\alpha_1, \alpha_2) = \\ & = - [\varepsilon_{532n+1}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} + \varepsilon_6^{-1}K(\alpha_1, \alpha_2)] G^-(\alpha_1, \alpha_2) + U_{3\theta}(\alpha_1, \alpha_2) + \\ & + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} [A_{2n-1}k_{12n-10} + B_{2n-1}k_{22n-10} + A_{2n+1}k_{12n+10} + B_{2n+1}k_{22n+10} + \\ & + \varepsilon_{532n-1}T^+(\alpha_1, \alpha_2) + \varepsilon_{532n+1}T^-(\alpha_1, \alpha_2)], \quad \theta > 0, \end{aligned}$$

$$U_{3\theta}(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\theta}^{\theta} u_3(x_1, x) e^{i(\alpha, x)} dx_1 dx,$$

$$\begin{aligned} & [\varepsilon_{532n+1}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} + \varepsilon_6^{-1}K_1(\alpha_1, \alpha_2)] G^+(\alpha_1, \alpha_2) = \\ & = - [\varepsilon_{532n-1}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} + \varepsilon_6^{-1}K_1(\alpha_1, \alpha_2)] G^-(\alpha_1, \alpha_2) + \\ & + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} [A_{2n-1}k_{12n-10} + B_{2n-1}k_{22n-10} + A_{2n+1}k_{12n+10} + B_{2n+1}k_{22n+10} + \\ & + \varepsilon_{532n-1}T^+(\alpha_1, \alpha_2) + \varepsilon_{532n+1}T^-(\alpha_1, \alpha_2)], \quad \theta = 0. \end{aligned}$$

Здесь $A_{2n-1}, B_{2n-1}, A_{2n+1}, B_{2n+1}$ — выражения сложного вида, которые ради краткости, опущены. Заметим, что представленные функциональные уравнения в качестве неизвестных имеют не только функции $G^+(\alpha_1, \alpha_2), G^-(\alpha_1, \alpha_2)$, но также и функционалы $G^+(\alpha_1, \alpha_{2+}), G^-(\alpha_1, \alpha_{2-}), G^+(\alpha_1, \alpha_{2+}), G^-(\alpha_1, \alpha_{2-})$, которые линейно входят в k_{sn0} и нуждаются в определении. Получили два разных функциональных уравнения Винера – Хопфа. Первое — обобщенное функциональное уравнение Винера – Хопфа в связи с присутствием функции $U_{3\theta}(\alpha_1, \alpha_2)$. Оно решается изложенным в [24] обращением системы двух интегральных уравнений второго рода с вполне непрерывными в некотором пространстве непрерывных с весом функций, которая имеет после преобразований вид

$$\begin{aligned} X^+ - \left\{ -\frac{M_1^+}{M_2^-} Y^- e^{-i2\alpha_2\theta} \right\}^+ &= \left\{ \frac{1}{M_2^-} \Phi e^{-i\alpha_2\theta} \right\}^+, \\ Y^- + \left\{ \frac{M_2^-}{M_1^+} X^+ e^{i2\alpha_2\theta} \right\}^- &= \left\{ \frac{1}{M_1^+} \Phi e^{i\alpha_2\theta} \right\}^-, \end{aligned}$$

$$M_1 = M_1^+ M_1^-, \quad M_2 = M_2^+ M_2^-, \quad M_2^+ G^+ = X^+, \quad M_1^- G^- = Y^-,$$

$$M_1 = [\varepsilon_{53\lambda}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} + \varepsilon_6^{-1}K(\alpha_1, \alpha_2)], \quad M_2 = [\varepsilon_{53r}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} + \varepsilon_6^{-1}K(\alpha_1, \alpha_2)].$$

Здесь приняты обозначения из работы [24].

После решения граничной задачи, определения функций $G^+(\alpha_1, \alpha_2)$ и $G^-(\alpha_1, \alpha_2)$, требуется найти значения функционалов $G^+(\alpha_1, \alpha_{2+})$ и $G^-(\alpha_1, \alpha_{2-})$, а также продифференцированные по второму параметру функционалы вида $G'_+(\alpha_1, \alpha_{2+}), G'_-(\alpha_1, \alpha_{2-})$. Для их определения строится система линейных алгебраических уравнений, описанная в [21–23].

Достаточно просто доказывается, что решение первого функционального уравнения для $\theta > 0$ приводит к следующим свойствам контактных напряжений между плитами и подложкой на краях в локальной системе координат:

$$\begin{aligned} \sigma_{32n-1}(x_1, x) &= \sigma_{12n-1}(x_1, x)(-x - \theta)^{-1/2}, \quad x < -\theta, \\ \sigma_{32n+1}(x_1, x) &= \sigma_{12n+1}(x_1, x)(x - \theta)^{-1/2}, \quad x > \theta \end{aligned} \tag{4}$$



для достаточно гладких t_{3b} . Второе функциональное уравнение является уравнением Винера – Хопфа. Обращение второго уравнения приводит при $x \rightarrow 0$ к следующим свойствам решений

$$g_{32n-1}(x_1, x) \rightarrow \sigma_{22n-1}(x_1, x_2)x^{-1}, \quad g_{32n+1}(x_1, x) \rightarrow \sigma_{22n+1}(x_1, x)x^{-1}. \quad (5)$$

Функции $\sigma_{nb}(x_1, x)$, $n = 1, 2$ непрерывны по обоим параметрам.

ВЫВОДЫ

Учет в функциональном уравнении всех остальных членов приводит лишь к изменению величин функций $\sigma_{nb}(x_1, x)$, $n = 1, 2$, и не влияет на характер особенностей. Имея достаточно детальное распределение параллельных разломов, механические и геометрические характеристики блоков блочной структуры с параллельными разломами, на основании разработанной модели можно прогнозировать наиболее вероятные зоны возможных землетрясений, анализируя формулы (4), (5) для разных разломов.

Благодарности. Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания Минобрнауки на 2018 г. (проект № 9.8753.2017/8.9), программы ЮНЦ РАН на 2018 г. (№ госрегистрации 01201354241), программ президиума РАН П-16 (проект № 00-18-21) и П-52 (проект № 00-18-29) и при поддержке грантов РФФИ (проекты № 16-41-230214, 16-41-230218, 16-48-230216, 17-08-00323, 18-08-00465, 18-01-00384, 18-05-80008).

Библиографический список

1. *Певнев А. К.* Пути к практическому прогнозу землетрясений. М. : ГЕОС, 2003. 154 с.
2. *Reid N. F.* The mechanism of the earthquake. The California Earthquake of April 18, 1906. Rep. of the State Investigation Commiss. Vol. 2, pt. 1. Washington, 1910. 56 p.
3. *Голицын Б. Б.* Избранные труды : в 2 т. Т. 2. М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1960. 465 с.
4. *Gutenberg B., Richter C.* Seismicity of the Earth and associated phenomena. Princeton Univ. Press, 1954. 310 p.
5. *Рихтер Ч.* Элементарная сейсмология. М. : Изд-во иностр. лит., 1963. 670 с.
6. *Гамбурцев Г. А.* Перспективный план исследований по проблеме «Изыскание и развитие прогноза землетрясений» // Развитие идей Г. А. Гамбурцева в геофизике. М. : Наука, 1982. С. 304–311.
7. *Садовский М. А., Болховитинов Л. Г., Писаренко В. Ф.* Деформирование геофизической среды и сейсмический процесс. М. : Наука, 1987. 104 с.
8. *Соболев Г. А.* Основы прогноза землетрясений. М. : Наука, 1993. 313 с.
9. *Кейлис-Борок В. А.* Динамика литосферы и прогноз землетрясений // Природа. 1989. № 12. С. 10–18.
10. Активная сейсмология с мощными вибрационными источниками / А. С. Алексеев, Н. И. Геза, Б. М. Глинский, А. Ф. Еманов, В. Н. Кашун, В. В. Ковалевский, А. К. Манштейн, Б. Г. Михайленко, В. С. Селезнев, С. В. Сердюков, А. Л. Собисевич, Л. Е. Собисевич, В. М. Соловьев, М. С. Хайретдинов, И. С. Чичинин, В. И. Юшин. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2004. 386 с.
11. *Geller R. J.* Earthquake prediction: A critical review // Geophysical Journal International. 1997. Vol. 131, iss. 3. P. 425–450. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1997.tb06588.x>
12. *Kagan Y. Y.* Are earthquake predictable? // Geophysical Journal International. 1997. Vol. 131, iss. 3. P. 505–525. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1997.tb06595.x>
13. *Keer R. A.* Earthquake prediction: Mexican quake shows one way to look for the big ones // Science. 1979. Vol. 203, iss. 4383. P. 860–862. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.203.4383.860>



14. *Main I. G., Meredith P. G.* Classification of earthquake precursors from a fracture mechanics model // *Tectonophysics*. 1989. Vol. 167, iss. 2–4. P. 273–283. DOI: [https://doi.org/10.1016/0040-1951\(89\)90078-4](https://doi.org/10.1016/0040-1951(89)90078-4)
15. *Mogi K.* Earthquake and fracture // *Tectonophysics*. 1967. Vol. 5, iss 1. P. 35–55. DOI: [https://doi.org/10.1016/0040-1951\(67\)90043-1](https://doi.org/10.1016/0040-1951(67)90043-1)
16. *Scholz C. H., Sykes L. R., Aggarwal Y. P.* Earthquake prediction: A physical basis // *Science*. 1973. Vol. 181, iss. 4102. P. 803–809. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.181.4102.803>
17. *Freed A. M.* Earthquake triggering by static, dynamic and postseismic stress transfer // *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*. 2005. Vol. 33. P. 335–367. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev.earth.33.092203.122505>
18. *Mitchell E., Fialko Y., Brown K. M.* Frictional properties of gabbro at conditions corresponding to slow slip events in subduction zones // *Geochem. Geophys. Geosyst.* 2015. Vol. 16. P. 4006–4020. DOI: <https://doi.org/10.1002/2015gc006093>
19. *Ide S., Berosa G. S.* Does apparent stress vary earthquake? // *Geophysical Research Letters*. 2001. Vol. 28, iss. 17. P. 3349–3352.
20. *Di Toro G., Han R., Hirose T., De Paola N., Nielsen S., Mizoguchi K., Ferri F., Cocco M., Shimamoto T.* Fault lubrication during earthquake // *Nature*. 2011. Vol. 471, iss. 7339. P. 494–498.
21. *Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M.* The problem of physical and mechanical precursors of an earthquake: Place, time, and intensity // *Doklady Physics*. 2016. Vol. 61, iss. 2. P. 92–97. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1028335816020099>
22. *Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M.* On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach // *Acta Mechanica*. 2018. Vol. 229, iss. 5. P. 2163–2175. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-017-2092-0>
23. *Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M.* A starting earthquake with harmonic effects // *Doklady Physics*. 2016. Vol. 61, iss. 11. P. 551–554. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1028335816110021>
24. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М. : Наука, 1979. 320 с.
25. *Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M.* The theory of the starting earthquake // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2016. № 1, ч. 2. С. 37–80. DOI: <https://doi.org/10.31429/vestnik-13-1-2-37-80>

Образец для цитирования:

Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Уафа Г. Н., Евдокимов В. С. О стартовых землетрясениях при параллельных разломах литосферных плит // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 370–380. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-370-380>

Starting Earthquakes with the Parallel Faults of Lithospheric Plates

V. A. Babeshko, O. V. Evdokimova, O. M. Babeshko, G. N. Uafa, V. S. Evdokimov

Vladimir A. Babeshko, <https://orcid.org/0000-0002-6663-6357>, Southern Scientific Centre RAS, Kuban State University, 149 Stavropolskaya St., Krasnodar 350040, Russia, babeshko41@mail.ru

Olga V. Evdokimova, <https://orcid.org/0000-0003-1869-5413>, Southern Scientific Centre RAS, 41 Chekhova St., Rostov-on-Don 344006, Russia, evdokimova.olga@mail.ru

Olga M. Babeshko, <https://orcid.org/0000-0003-1283-3870>, Kuban State University, 149 Stavropolskaya St., Krasnodar 350040, Russia, babeshko49@mail.ru



Galina N. Uafa, <https://orcid.org/0000-0003-4581-9987>, Southern Scientific Centre RAS, 41 Chekhova St., Rostov-on-Don 344006, Russia, uafa70@mail.ru
 Vladimir S. Evdokimov, <https://orcid.org/0000-0001-7824-6164>, Southern Scientific Centre RAS, 41 Chekhova St., Rostov-on-Don 344006, Russia, evdok_vova@mail.ru

The analysis of the models characterizing the preparation of starting earthquakes for different types of stresses on tectonic plates enabled to convey the analysis of a possibility of earthquakes for the case of the parallel faults, which simultaneously allows to figure ways of their prediction, i. e. permits to reduce earthquake risk. The investigation of the arisen block structure applied the topological approach. The boundary problem imbeds into the topological structure and transforms in the functional equations. Automorphism application leads to the pseudodifferential equations, that are analyzed. It was proved that the starting earthquake can still take place in this case and the relevant conditions are derived.

Key words: block element, factorization, topology, integral and differential factorization methods, exterior forms, block structures, boundary problems, singular peculiarity.

Acknowledgements: The results have been obtained in the framework of the national tasks of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 9.8753.2017/8.9), the Program of the Southern Scientific Centre RAS (state registration no. 01201354241), and the Programs P-16 and P-52 of the Presidium of the Russian Academy of Sciences (projects nos. 00-18-21, 00-18-29), and supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects nos. 16-41-230214, 16-41-230218, 16-48-230216, 17-08-00323, 18-08-00465, 18-01-00384, 18-05-80008).

References

1. Pevnev A. K. *Puti k prakticheskomu prognozu zemletriasenii* [Ways to practical earthquake prediction]. Moscow, GEOS Publ., 2003. 154 p. (in Russian).
2. Reid N. F. The mechanism of the earthquake. The California earthquake of April 18, 1906. *Rep. of the State Investigation Commiss.*, vol. 2, pt. 1. Washington, 1910. 56 p.
3. Golitsyn B. B. *Izbrannye trudy* [Selected works], vol. 2, Moscow, Izdatel'stvo AN SSSR, 1960. 465 p. (in Russian).
4. Gutenberg B., Richter C. *Seismicity of the Earth and associated phenomena*. Princeton Univ. Press, 1954, 310 p.
5. Rihter Ch. *Elementarnaia seismologiya* [Elementary seismology]. Moscow, Izdatel'stvo inostrannoi literatury, 1963. 670 p. (in Russian).
6. Gamburtsev G. A. Perspektivnyi plan issledovaniia po probleme „Izyskanie i razvitie prognoza zemletriasenii“ [Long-term plan of research on the problem „Research and development of earthquake prediction“]. *Razvitie idei G. A. Gamburtseva v geofizike* [Progress of G. A. Gamburtsev's ideas in geophysics]. Moscow, Nauka, 1982, pp. 304–311 (in Russian).
7. Sadovskii M. A., Bolkhovitinov L. G., Pisarenko V. F. *Deformirovanie geofizicheskoi sredy i seismicheskii protsess* [Deformation of geophysical environment and seismic process]. Moscow, Nauka, 1987. 104 p. (in Russian).
8. Sobolev G. A. *Osnovy prognoza zemletriasenii* [Fundamentals of earthquake prediction]. Moscow, Nauka, 1993. 313 p. (in Russian).
9. Keilis-Borok V. A. Dinamika litosfery i prognoz zemletriasenii [Dynamics of the lithosphere and earthquake prediction]. *Priroda* [Nature], 1989, no. 12, pp. 10–18 (in Russian).
10. Alekseev A. S., Geza N. I., Glinsky B. M., Emanov A. F., Kashun V. N., Kovalevskij V. V., Manshtejn A. K., Mihajlenko B. G., Seleznev V. S., Serdyukov S. V., Sobisevich A. L., Sobisevich L. E., Solov'ev V. M., Hajretdinov M. S., Chichinin I. S., Yushin V. I. *Aktivnaia seismologiya s moshchnymi vibratsionnymi istochnikami* [Active seismology with



- powerful vibrational sources. Collective monograph]. Novosibirsk, Izdatel'stvo SO RAN, 2004. 388 p. (in Russian).
11. Geller R. J. Earthquake prediction: A critical review. *Geophysical Journal International*, 1997, vol. 131, iss. 3, pp. 425–450. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1997.tb06588.x>
 12. Kagan Y. Y. Are earthquake predictable? *Geophysical Journal International*, 1997, vol. 131, iss. 3, pp. 505–525. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1997.tb06595.x>
 13. Keer R. A. Earthquake prediction: Mexican quake shows one way to look for the big ones. *Science*, 1979, vol. 203, iss. 4383, pp. 860–862. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.203.4383.860>
 14. Main I. G., Meredith P. G. Classification of earthquake precursors from a fracture mechanics model. *Tectonophysics*, 1989, vol. 167, iss. 2–4, pp. 273–283. DOI: [https://doi.org/10.1016/0040-1951\(89\)90078-4](https://doi.org/10.1016/0040-1951(89)90078-4)
 15. Mogi K. Earthquake and fracture. *Tectonophysics*, 1967, vol. 5, iss 1, pp. 35–55. DOI: [https://doi.org/10.1016/0040-1951\(67\)90043-1](https://doi.org/10.1016/0040-1951(67)90043-1)
 16. Scholz C. H., Sykes L. R., Aggarwal Y. P. Earthquake prediction: A physical basis. *Science*, 1973, vol. 181, iss. 4102, pp. 803–809. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.181.4102.803>
 17. Freed A. M. Earthquake triggering by static, dynamic and postseismic stress transfer. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 2005, vol. 33, pp. 335–367. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev.earth.33.092203.122505>
 18. Mitchell E., Fialko Y., Brown K. M. Frictional properties of gabbro at conditions corresponding to slow slip events in subduction zones. *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 2015, vol. 16, pp. 4006–4020. DOI: <https://doi.org/10.1002/2015gc006093>
 19. Ide S., Berosa G. S. Does apparent stress vary earthquake? *Geophysical Research Letters*, 2001, vol. 28, iss. 17, pp. 3349–3352.
 20. Di Toro G., Han R., Hirose T., De Paola N., Nielsen S., Mizoguchi K., Ferri F., Cocco M., Shimamoto T. Fault lubrication during earthquake. *Nature*, 2011, vol. 471, iss. 7339, pp. 494–498.
 21. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. The problem of physical and mechanical precursors of an earthquake: Place, time, and intensity. *Doklady Physics*, 2016, vol. 61, iss. 2, pp. 92–97. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1028335816020099>
 22. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach. *Acta Mechanica*, 2018, vol. 229, iss. 5, pp. 2163–2175. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-017-2092-0>
 23. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. A starting earthquake with harmonic effects. *Doklady Physics*, 2016, vol. 61, iss. 11, pp. 551–554. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1028335816110021>
 24. Vorovich I. I., Babeshko V. A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlia neklassicheskikh oblastei* [Dynamic mixed problems of the theory of elasticity for non-classical domains]. Moscow, Nauka, 1979. 320 p. (in Russian).
 25. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. The theory of the starting earthquake. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2016, no. 1, pt. 2, pp. 37–80. DOI: <https://doi.org/10.31429/vestnik-13-1-2-37-80>

Cite this article as:

Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Uafa G. N., Evdokimov V. S. Starting Earthquakes with the Parallel Faults of Lithospheric Plates. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 370–380 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-370-380>



УДК 539.3

ПОСТРОЕНИЕ ДИАГРАММ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ ПРИ УДАРНОМ СЖАТИИ ОБРАЗЦОВ-ТАБЛЕТОК С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ

В. Г. Баженов, Д. Л. Осетров, А. А. Рябов

Баженов Валентин Георгиевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории математического моделирования и идентификации свойств материалов Научно-исследовательского института механики, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, Россия, 603950, ГСП-1000, Нижний Новгород, просп. Гагарина, 23, bazhenov@mech.unn.ru

Осетров Дмитрий Львович, аспирант, младший научный сотрудник лаборатории математического моделирования и идентификации свойств материалов Научно-исследовательского института механики, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского Россия, 603950, ГСП-1000, Нижний Новгород, просп. Гагарина, 23, osetrovdmity@mail.ru

Рябов Александр Алексеевич, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное унитарное предприятие «Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики» (ФГУП «РФЯЦ — ВНИИЭФ»), Россия, 607188, Нижегородская обл., Саров, просп. Мира, 37, alex.ryabov@saec.ru

Численно и экспериментально исследовано влияние сил трения на динамическое деформирование упруговязкопластических образцов-таблеток. Установлены основные закономерности их формоизменения для металлов и сплавов. Предложен критерий формоизменения образцов-таблеток. Разработан новый метод идентификации коэффициентов сухого трения на контактных поверхностях в зависимости от формоизменения образцов-таблеток, основывающийся на численном моделировании осесимметричной динамической задачи и быстро сходящемся методе последовательных приближений. Теоретически с высокой степенью достоверности обосновано разделение задачи двухпараметрической идентификации на две задачи однопараметрической параметризации: задачу определения коэффициента трения и задачу построения истинной диаграммы динамического деформирования в данном эксперименте при найденном ранее коэффициенте трения. В итоге итерационным методом строятся динамические диаграммы деформирования с учетом сил трения и радиальной инерции. В известных приближенных методиках построения диаграмм деформирования с учётом сил трения и радиальной инерции коэффициенты трения предполагаются известными, тогда как способы их определения в экспериментах на ударное сжатие практически отсутствуют.

Ключевые слова: истинная диаграмма деформирования, коэффициент трения, силы трения, краевой эффект, ударное сжатие образцов-таблеток, формоизменение образцов-таблеток, численное моделирование.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-381-389>

ВВЕДЕНИЕ

Для моделирования динамических процессов в конструкциях необходимо знание динамических диаграмм деформирования, которое можно получить экспериментально методом прямого удара, или разрезного стержня Гопкинсона [1]. Динамические характеристики трения мало изучены ввиду сложности методик их определения.



Известно, что так называемое сухое трение быстро уменьшается в зависимости от тангенциальной скорости и давления. Обзор теоретических и экспериментальных исследований трения и его учета при ударном сжатии образцов-таблеток представлен в [1]. В итоге сделаны выводы, что оптимальное отношение высоты к радиусу таблетки S_{opt} может существенно меняться в зависимости от условий эксперимента и испытываемого материала. Рекомендованный рабочий диапазон определяется неравенством $0,6 < S_{opt} < 3$. Отметим, что известные численно-аналитические методики учёта сил трения и радиальной инерции предполагают знание коэффициента сухого трения (по Кулону) и однородность напряженно-деформированного состояния образцов - таблеток, что существенно ограничивает их применимость при построении динамических диаграмм деформирования [1].

В данной статье в результате численного и экспериментального исследования влияния сил трения на динамическое деформирование упруговязкопластических образцов-таблеток установлены основные закономерности их формоизменения для металлов и сплавов (09Г2С, 12Х18Н10Т, Свинца С1) в зависимости от отношения их высоты к радиусу. Предложен новый метод идентификации коэффициентов сухого трения (по Кулону) на каждой из контактных поверхностей в зависимости от формоизменений боковой поверхности образцов-таблеток, основывающийся на численном моделировании осесимметричной динамической задачи и быстро сходящемся методе последовательных приближений. Затем предложенным ранее [2] итерационным методом строятся динамические диаграммы деформирования с учетом сил трения и радиальной инерции.

1. ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ СИЛ ТРЕНИЯ НА ДИНАМИЧЕСКОЕ СЖАТИЕ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБРАЗЦОВ-ТАБЛЕТОК

Проведено численное моделирование процессов деформирования в системе ударник – образец – мерный стержень в осесимметричной постановке. На нижней границе опорного диска (мерного стержня) задавались нулевые граничные условия во времени — жесткая заделка. На верхней границе диска-ударника задавались нулевые тангенциальные перемещения и нормальная скорость, которая определяется из экспериментов на ударное сжатие по методике, описанной в [3, 4]. Между контактными границами дисков и образцов-таблеток задавались условия одностороннего контактного взаимодействия с учетом сухого трения по закону Кулона с коэффициентами трения 0, 0.1, 0.2, 0.3. При больших деформациях из-за искажения конечно-элементной сетки вблизи границ контактной области необходимо применять процедуру коррекции сетки в процессе деформирования, причем многократно. С этой целью воспользуемся средствами вычислительной системы LS-DYNA [5], в которой реализован лагранжев конечно-элементный метод для упруговязкопластической среды с применением теории течения с изотропным упрочнением. Сначала исследовалась роль коэффициента трения и степени деформации на напряженно-деформированное состояние образцов-таблеток из сталей 12Х18Н10Т и 09Г2С мало-чувствительных к скорости деформации, а затем свинца С1 сильно чувствительного к скорости деформации в диапазоне геометрических параметров образцов-таблеток $0,6 < S_{opt} < 3$. Диаграммы деформирования сталей 12Х18Н10Т и 09Г2С представлены в [6].

Истинные динамические диаграммы деформирования свинца задавались в виде $\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \sigma_T(\dot{\varepsilon}) + \sigma(\varepsilon)$, (т/см²), где $\sigma_T(\dot{\varepsilon}) = 4 \cdot 10^{-6} \dot{\varepsilon}^2 - 0,0004 \dot{\varepsilon}$, $\sigma(\varepsilon) = 5,5849\varepsilon + 2,063$.



Скорость перемещений на ударяемой поверхности задавалась таким образом, чтобы скорость осевых деформаций $\dot{\epsilon}_0 = \dot{u}/L$ в образце-таблетке без учета трения была постоянной ($\dot{u} = L_0 \dot{\epsilon}_0 e^{-\dot{\epsilon}_0 t}$, L_0, L — начальная и текущая высота образца-таблетки).

На рис. 1 представлены формоизменения и распределения интенсивностей истинных пластических деформаций в образце-таблетке ($L_0/R_0 = 2$, R_0 — начальный радиус образца) при условных деформациях осадки 50% и коэффициенте трения 0.3 для мало чувствительных к скорости деформаций материалов 09Г2С (рис. 1, а) и 12Х18Н10Т (рис. 1, б), а также вязкопластического свинца при средних скоростях осевых деформаций $\dot{\epsilon}_0 = 500$ 1/с (рис. 1, в) и $\dot{\epsilon}_0 = 1000$ 1/с (рис. 1, г).

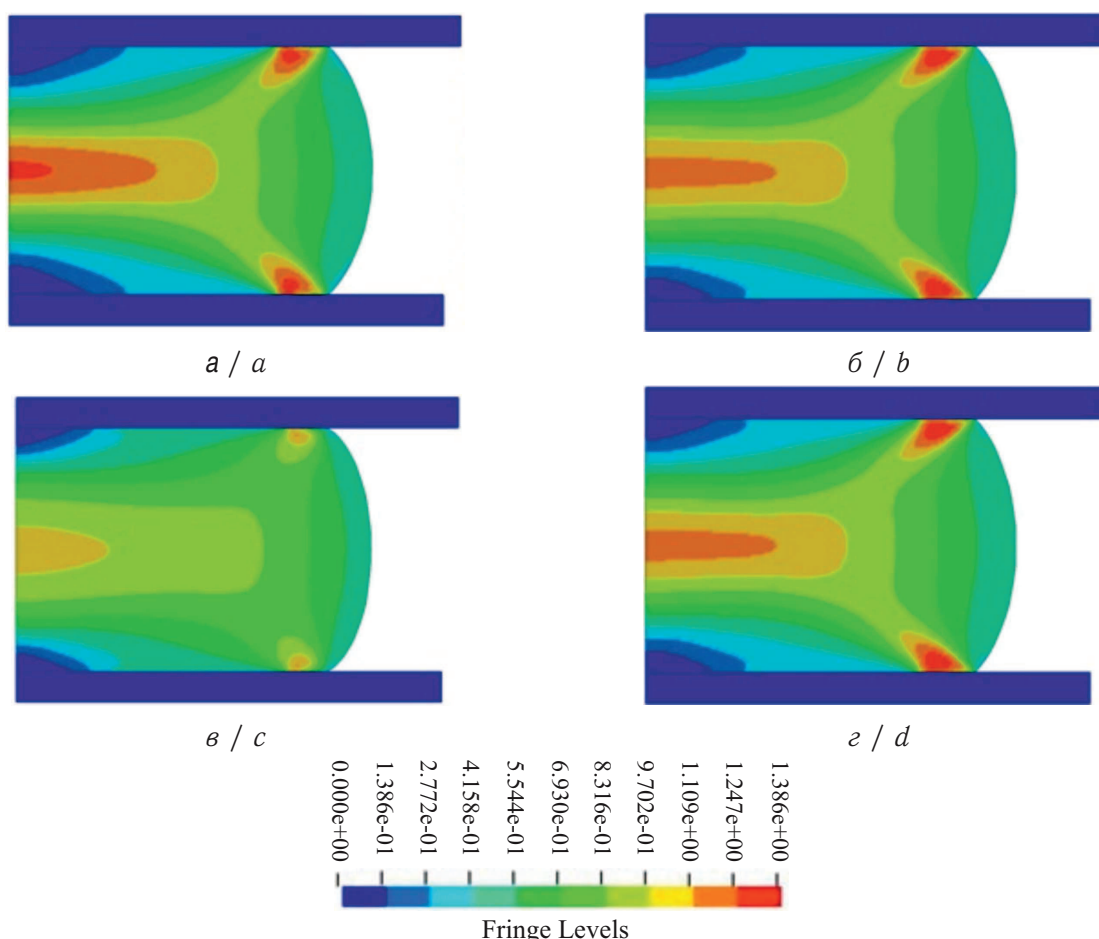


Рис. 1. Формоизменения образцов-таблеток ($L_0/R_0 = 2$) при осадке $u/L_0 = 0.5$ и соответствующие им распределения интенсивностей истинных деформаций для сталей 09Г2С (а), 12Х18Н10Т (б) и свинца при скоростях осевых деформаций $\dot{\epsilon}_0 = 500$ 1/с (в) и $\dot{\epsilon}_0 = 1000$ 1/с (г)

Fig. 1. The shape changing of the rablet specimens ($L_0/R_0 = 2$) at settlement $u/L_0 = 0.5$ and their corresponding distributions of true strain intensities for steels 09G2S (a), 12KH18N10T (b) and plumbum at axial strain rates $\dot{\epsilon}_0 = 500$ 1/c (c) and $\dot{\epsilon}_0 = 1000$ 1/c (d)

При учете трения НДС таблеток неоднородно. Неоднородность существенно возрастает при увеличении сил трения и степеней деформаций. Максимальные пластические деформации и осевые напряжения возникают в области, примыкающей к центру таблетки. По мере деформации эти области расширяются. Уровень осевых напряжений здесь в разы больше, чем вблизи границ таблетки. Максимальные сдвиговые напряжения и деформации возникают в области границ контакта «образец – ударник» и «образец – опорный стержень». Их уровень значительно меньше



максимальных осевых деформаций и напряжений. Максимальные радиальные напряжения развиваются вблизи оси таблетки и достигают значений одного порядка с осевыми напряжениями. Истинные пластические деформации при коэффициенте трения 0.3 превышают 100% при осадке 50%. Для вязкопластических материалов, чувствительных к скорости деформации, например свинца, с увеличением скорости удара и соответственно скорости деформаций роль трения возрастает из-за существенной неоднородности скоростей деформаций в образце-таблетке.

Формоизменение боковой поверхности образцов главным образом зависит от отношения L_0/R_0 , величины коэффициента трения и степени сжатия. Эти формоизменения можно охарактеризовать отношением h/L , где $h = R - (R_n + R_b)/2$, а $R(z)$ — радиус контура арки деформированного образца, R_n, R_b, L — минимальные нижний и верхний радиусы контура арки и высота деформированного образца соответственно.

На рис. 2 приведено относительное формоизменение арки h/L по высоте образца z/L (z — ось образца) при условных деформациях осадки 50% при коэффициенте трения 0.3 для образцов-таблеток $L_0/R_0 = 1$, $L_0/R_0 = 2$ и $L_0/R_0 = 3$. Там же приведены изменения максимальной высоты арки $h_{max} = R_{max} - (R_n + R_b)/2$ (R_{max} — максимальный радиус деформированного образца) от осадки образцов-таблеток (отношения изменения высоты деформированного образца u к первоначальной высоте недеформированного образца — L_0).

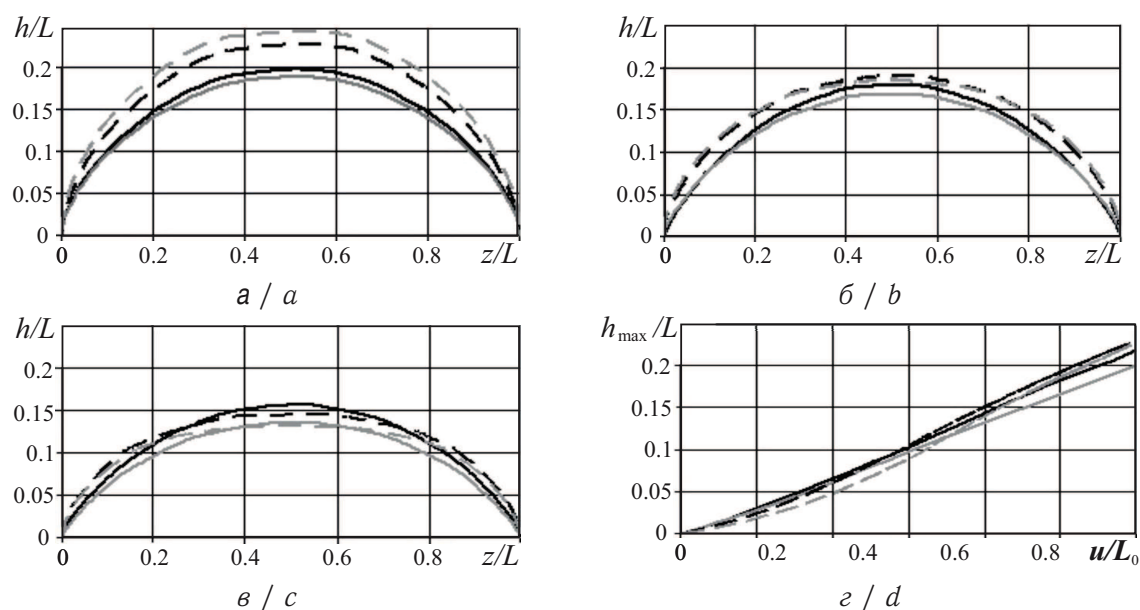


Рис. 2. Формоизменение боковой поверхности образцов (арок) $L_0/R_0 = 1$ (а), $L_0/R_0 = 2$ (б) и $L_0/R_0 = 3$ (в) от высоты образца z/L при условных деформациях осадки 50% и изменение максимальной высоты арки $L_0/R_0 = 2$ от осадки образца-таблетки u/L_0 (г) при коэффициенте трения 0.3 для сталей 09Г2С, 12Х18Н10Т (сплошные линии, черная и серая соответственно) и свинца при $\dot{\epsilon}_0 = 500$ 1/с и $\dot{\epsilon}_0 = 1000$ 1/с (пунктирные линии, черная и серая соответственно)

Fig. 2. The shape changing of the lateral surface of the specimens (arches) $L_0/R_0 = 1$ (a), $L_0/R_0 = 2$ (b) and $L_0/R_0 = 3$ (c) from the height of the specimen z/L with conditional strain of the draft 50% and change in the maximum arch height $L_0/R_0 = 2$ from tablet specimen settlement u/L_0 (d) at a coefficient of friction of 0.3 for steels 09G2S, 12KH18N10T (solid lines, black and gray respectively) and plumbum at $\dot{\epsilon}_0 = 500$ 1/s and $\dot{\epsilon}_0 = 1000$ 1/s (dashed lines, black and gray respectively)



Путем математического моделирования было исследовано влияние краевых эффектов на построение диаграмм деформирования по результатам испытания образцов-таблеток при отношениях $L_0/R_0 = 1$, $L_0/R_0 = 2$ и $L_0/R_0 = 3$ при коэффициентах трения 0.1 и 0.3. Построенные диаграммы деформирования представлены на рис. 3, а–г. На рис. 3, а, б изображены диаграммы для сталей 09Г2С при коэффициентах трения 0.1 и 0.3, а на рис. 3, в, г — для свинца ($\dot{\epsilon}_0 = 500$ 1/с) при коэффициентах трения 0.1 и 0.3, соответственно. Сплошными черными линиями изображены истинные диаграммы деформирования для стали 09Г2С (рис. 3, а, б) и свинца (рис. 3, в, г), а сплошными серыми, штриховыми и штрихпунктирными линиями — диаграммы, полученные для образцов $L_0/R_0 = 1$, $L_0/R_0 = 2$ и $L_0/R_0 = 3$ без учета сил трения.

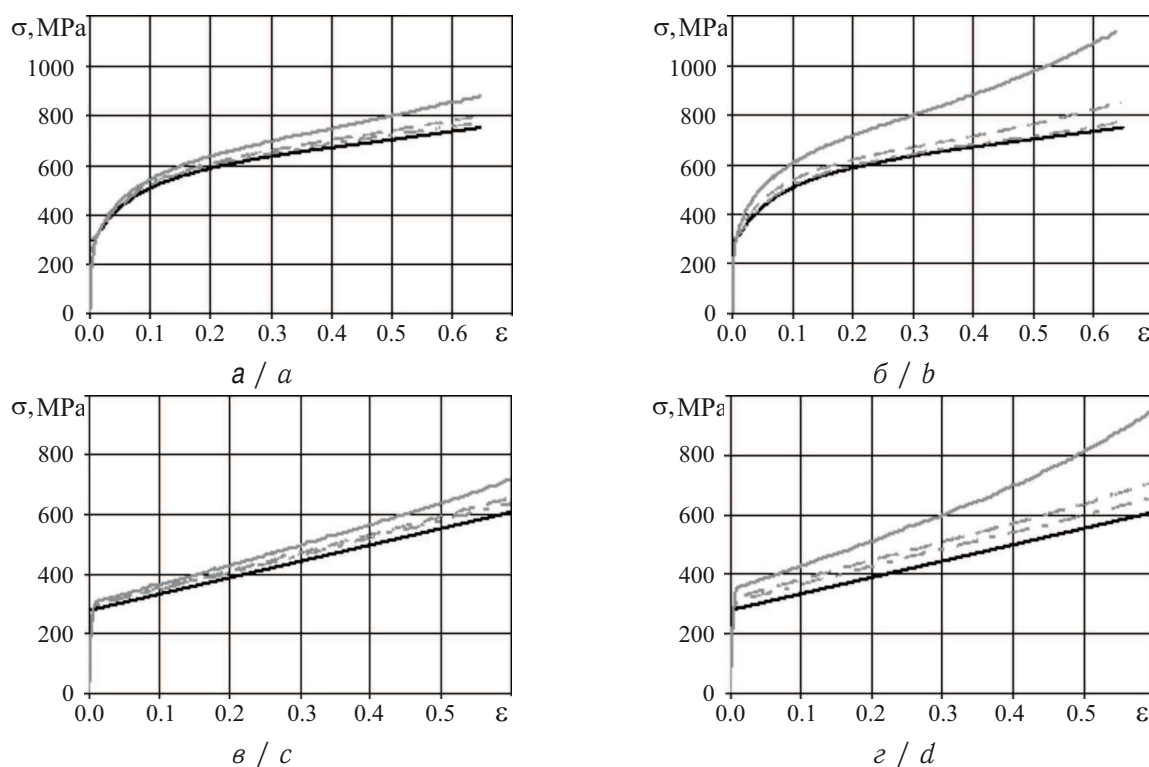


Рис. 3. Диаграммы деформирования, построенные с учетом и без учета сил трения, для стали 09Г2С (а, б) и свинца (в, г) при коэффициентах трения 0.1 (а, в) и 0.3 (б, г): сплошные черные линии — истинные диаграммы деформирования; сплошные серые линии, пунктирные и штрих-пунктирные — диаграммы, полученные без учета сил трения для образцов $L_0/R_0 = 1$, $L_0/R_0 = 2$ и $L_0/R_0 = 3$ соответственно

Fig. 3. The deformation diagrams constructed with and without friction forces consideration for steel 09G2S (a, b) and plumbum (c, d) at friction coefficients 0.1 (a, c) and 0.3 (b, d): solid black lines — true deformation diagrams, gray solid lines, dashed lines and dash-dot lines — diagrams obtained without friction force consideration for the specimens $L_0/R_0 = 1$, $L_0/R_0 = 2$ and $L_0/R_0 = 3$ respectively

Таким образом, неучет формоизменения образца при построении диаграмм деформирования может привести к существенным погрешностям, как это следует из анализа результатов, представленных на рис. 3. Роль краевых эффектов возрастает с увеличением коэффициента трения и уменьшением отношения L_0/R_0 . При размерах образца более $L_0/R_0 = 3$ влияние краевых эффектов незначительно при коэффициенте трения менее 0.3, что позволяет строить истинные диаграммы деформирования



с достаточной точностью без учета сил трения. Параметр бочкообразования — высота арки — мало зависит от диаграмм динамического деформирования упругопластических материалов, так как при деформациях более 1% они практически не сжимаемы, что определяет картину пластического течения и формоизменения образцов-таблеток. При использовании закона сухого трения Кулона сила трения прямо пропорциональна нормальному давлению, которое определяется диаграммой деформирования и степенью деформации. Поэтому имеет место однозначное соответствие между высотой арки и коэффициентом трения в процессе осадки образцов-таблеток из различных металлов с одинаковой первоначальной геометрией. В дальнейшем используем эту закономерность для оценки величин коэффициентов трения в динамических натуральных экспериментах при построении диаграмм деформирования.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ СУХОГО ТРЕНИЯ И ПОСТРОЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ДИАГРАММ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Первоначально диаграммы деформирования строятся при коэффициенте трения равным нулю, при однородном напряженно-деформированном состоянии. Затем осуществляется итерационный процесс определения коэффициентов трения с найденной диаграммой деформирования. В процессе итераций корректируются коэффициенты трения на нижней и верхней поверхностях образцов-таблеток посредством интерполяции (экстраполяции) по разности высот арок в расчете и эксперименте до сходимости. В начальном приближении коэффициент трения задается равным 0.15. Число итераций обычно не превышает трех при погрешности в определении высоты арки менее 1%. Далее производится уточнение динамических диаграмм деформирования. Диаграммы деформирования строятся для максимальных в объеме образца-таблетки значений интенсивностей напряжений и деформаций, синхронизированных с изменением осевых сил и условных осевых деформаций по алгоритму, изложенному в [2–4, 7].

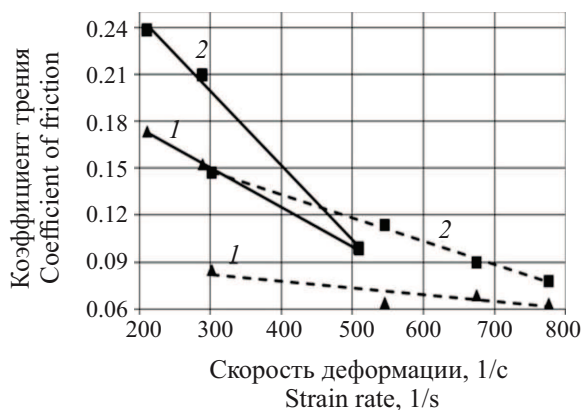


Рис. 4. Изменение коэффициентов трения от скорости деформации $\dot{\epsilon} = \dot{u}/L$ для стали 09Г2С (пунктирные линии) и свинца (сплошные линии): 1 — на нижней поверхности, 2 — на верхней поверхности

Fig. 4. The change in friction coefficients from the strain rate $\dot{\epsilon} = \dot{u}/L$ for steel 09G2S (dashed lines) and plumbum (solid lines): 1 — on the lower surface, 2 — on the upper surface

При значительных различиях в диаграммах деформирования, построенных без учета и с учетом сил трения, производится уточнение коэффициентов трения и т.д.

На рис. 4 приведены зависимости коэффициентов трения на нижней и верхней поверхностях от скорости деформации при ударном нагружении образцов-таблеток для стали 09Г2С ($R_0 = 0.5$ см, $L_0/R_0 = 3$) и свинца С1 ($R_0 = 2$ см, $L_0/R_0 = 1$), полученные из экспериментов на газодинамической копровой установке по приведенному выше алгоритму. Коэффициенты трения для нижней и верхней контактных поверхностей корректировались одновременно в каждой итерации в соответствии с формоизменениями нижней и верхней частей образцов-таблеток. Высоты полуарок определялись по формуле $h^* = R_{\max} - R^*$, где $R^* = R_n$ или $R^* = R_b$.



С увеличением скорости деформации полученные коэффициенты трения уменьшаются, что соответствует известной физической закономерности. На рис. 5 приведена полученная численным моделированием относительная ошибка δ в определении диаграмм деформирования без учета сил трения для 09Г2С и свинца (при скорости деформации $\dot{\epsilon} = \dot{u}/L = 500$ 1/с) от степени деформации при коэффициенте трения 0.2 и размерах образца $L_0/R_0 = 1$, $L_0/R_0 = 2$ и $L_0/R_0 = 3$ (кривые 1, 2 и 3 соответственно). Ошибка определяется главным образом величиной коэффициента трения и размерами образца. При этом величина ошибки в построении диаграмм деформирования для материалов чувствительных к скорости деформаций выше, чем для малочувствительных. С увеличением степени деформации погрешности неучета трения возрастают.

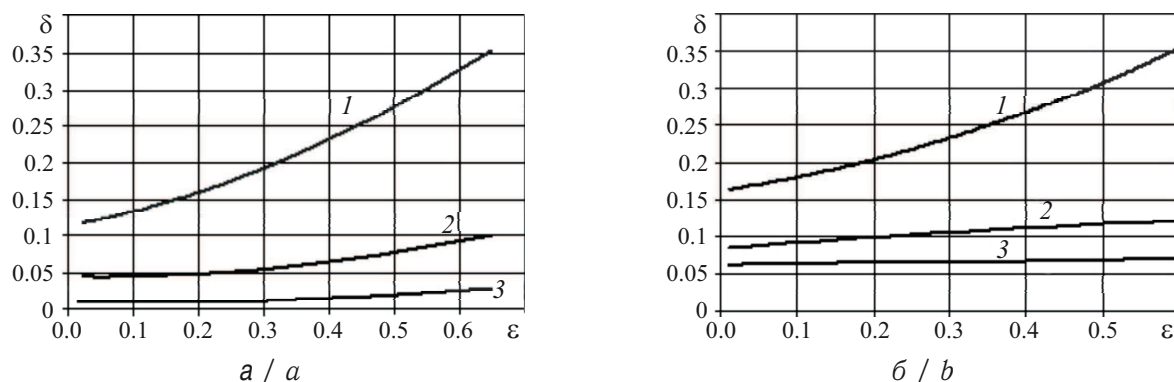


Рис. 5. Относительные ошибки δ в определении диаграмм деформирования без учета сил трения от степени деформации ϵ при коэффициенте трения 0.2 и размерах образцов $L_0/R_0 = 1$, $L_0/R_0 = 2$ и $L_0/R_0 = 3$ (кривые 1, 2, 3 соответственно) для стали 09Г2С (а) и свинца при скорости деформации $\dot{\epsilon} = \dot{u}/L = 500$ 1/с (б)

Fig. 5. Relative errors δ in the definition of deformation diagrams without friction forces consideration on the degree of deformation ϵ at a friction coefficient of 0.2 and the specimens size $L_0/R_0 = 1$, $L_0/R_0 = 2$ and $L_0/R_0 = 3$ (curves 1, 2, 3, respectively) for steel 09G2S (a) and plumbum at the strain rate $\dot{\epsilon} = \dot{u}/L = 500$ 1/s (b)

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-08-00972а).

Библиографический список

1. Klepaczko J. R. Advanced experimental techniques in materials testing // New experimental methods in material dynamics and impact. Trends in Mechanics of Materials. Vol. 3 / eds. W. K. Nowacki, J. R. Klepaczko. Warsaw : INB ZTUREK, 2001. P. 223–266.
2. Способ определения деформационных и прочностных свойств материалов при больших деформациях и неоднородном напряженно-деформированном состоянии : пат. 2324162 Рос. Федерация : МПК G01N3/00 / Баженов В. Г., Зефилов С. В., Крамарев Л. Н., Осетров С. Л., Павленкова Е. В. ; заявитель и патентообладатель Научно-исследовательский институт механики Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского», RU № 2006115805/28(017160) ; заявл. 06.05.2006 ; опубл. 10.08.2008, Бюл. № 13.
3. Баженов В. Г., Баранова М. С., Павленкова Е. В. Развитие и верификация метода прямого удара для идентификации вязкопластических характеристик материалов в экспериментах на газодинамической копровой установке // Проблемы прочности и пластичности. Н. Новгород, 2009. Вып. 71. С. 184–192.



4. Баженов В. Г., Баранова М. С., Павленкова Е. В. Методика восстановления волнового процесса в мерном стержне по показаниям двух датчиков деформаций // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 6, ч. 1. С. 154–157.
5. LS-DYNA Keyword User's Manual. Vol. 1: Livermore Software Technology Corporation (LSTC). 2007. Version 971. URL: http://lstc.com/pdf/ls-dyna_971_manual_k.pdf (дата обращения: 13.08.2018).
6. Баженов В. Г., Баранова М. С., Осетров Д. Л. Влияние трения на усилия ударного сжатия и формоизменения упруговязкопластических образцов-таблеток // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2016. № 3(29). С. 85–92.
7. Баженов В. Г., Зефиоров С. В., Осетров С. Л. Экспериментально-расчетный метод построения истинных диаграмм деформирования при больших деформациях на основе испытаний на твердость // Докл. АН. 2006. Т. 407, № 2. С. 183–185.

Образец для цитирования:

Баженов В. Г., Осетров Д. Л., Рябов А. А. Построение диаграмм деформирования металлов и сплавов при ударном сжатии образцов-таблеток с учетом сил трения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 381–389. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-381-389>

The Construction of the Deformation Diagrams of Metals and Alloys at Impact Compression of Tablet Specimens with Friction Forces Consideration

V. G. Bazhenov, D. L. Osetrov, A. A. Ryabov

Valentin G. Bazhenov, <https://orcid.org/0000-0002-0077-7704>, Research Institute for Mechanics of Lobachevsky State University, 23 Gagarin Ave., Nizhni Novgorod 603950, Russia, bazhenov@mech.unn.ru

Dmitry L. Osetrov, <https://orcid.org/0000-0001-9703-8504>, Research Institute for Mechanics of Lobachevsky State University, 23 Gagarin Ave., Nizhni Novgorod 603950, Russia, osetrovdmity@mail.ru

Alexander A. Ryabov, <https://orcid.org/0000-0001-6133-0108>, Federal State Unitary Enterprise "Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics", 37 Mira Ave., Nizhny Novgorod region, Sarov 607188, Russia, alex.ryabov@saec.ru

The influence of friction forces on the dynamic deformation of elastoviscoplastic tablet specimens was numerically and experimentally investigated. The main dependencies of their shape changing for metals and alloys have been established. A criterion of the shape changing of tablet specimens is proposed. A new method for identifying of the coefficients of dry friction at contact surfaces, depending on shape changing of the tablet specimens, based on numerical modeling of an axisymmetric dynamic problem and a rapidly convergent method of successive approximations was developed. The division of the two-parameter identification problem into two problems of one-parameter parameterization is theoretically justified with a high degree of reliability: the problem of determining of the friction coefficient and the problem of construction of the true diagram of dynamic deformation in this experiment with the friction coefficient found earlier. As a result, the dynamic deformation diagrams with frictional forces and radial inertia consideration are constructed using the iterative method. In known approximation methods of construction of the deformation diagrams with frictional forces and radial inertia consideration, friction coefficients are assumed to be known, whereas methods for their determination in experiments with impact compression are practically unavailable.

Key words: true deformation diagram, friction coefficient, friction force, edge effect, impact compression of tablet specimens, shape changing of tablet specimens, numerical simulation.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-08-00972a).



References

1. Klepaczko J. R. Advanced experimental techniques in materials testing. *New experimental methods in material dynamics and impact. Trends in Mechanics of Materials*, vol. 3; Eds. W. K. Nowacki, J. R. Klepaczko. Warsaw, INB ZTUREK, 2001, pp. 223–266.
2. Method for determining of the deformation and strength properties of materials for high strains and inhomogeneous stress-strain state : Pat. 2324162 Russian Federation, MPK G01N3/00 / Bazhenov V. G., Zefirov S. V., Kramarev L. N., Osetrov S. L., Pavlenkova E. V.; Patent Applicant and Patent Holder : Research Institute for Mechanics of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod. RU no. 2006115805/28 (017160). Patent Filing Date 06.05.2006. Patent Publication Date 10.08.2008. Bull. no. 13 (in Russian).
3. Bazhenov V. G., Baranova M. S., Pavlenkova E. V. Razvitie i verifikatsiia metoda priamogo udara dlia identifikatsii viazkoplasticheskikh kharakteristik materialov v eksperimentakh na gazodinamicheskoi koprovoi ustanovke [Development and verification of the direct impact method for identifying viscoplastic properties of materials in experiments on a gas dynamic vertical test stand]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Ductility]. N. Novgorod, 2009, iss. 71, pp. 184–192 (in Russian).
4. Bazhenov V. G., Baranova M. S., Pavlenkova E. V. A technique of wave process restoration in a measuring rod by the readings of two strain gauges. *Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod*, 2011, no. 6, pt. 1, pp. 154–157 (in Russian).
5. LS-DYNA Keyword User's Manual. Vol. 1. Livermore Software Technology Corporation (LSTC). 2007. Version 971. Available at: http://lstc.com/pdf/ls-dyna_971_manual_k.pdf (accessed 13 October 2018).
6. Bazhenov V. G., Baranova M. S., Osetrov D. L. Influence of friction on the shock compression forces and forming of viscoelasticplastic tablets-specimens. *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2016, no. 3(29), pp. 85–92 (in Russian).
7. Bazhenov V. G., Zefirov S. V., Osetrov S. L. Experimental and computing method for constructing true deformation diagrams at large strains on the basis of tests for hardness. *Doklady Physics*, 2006, vol. 51, iss. 3, pp. 118–121. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1028335806030050>

Cite this article as:

Bazhenov V. G., Osetrov D. L., Ryabov A. A. The Construction of the Deformation Diagrams of Metals and Alloys at Impact Compression of Tablet Specimens with Friction Forces Consideration. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 381–389 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-381-389>



УДК 539.3,519.6

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМ РАВНОВЕСИЯ ПОЛОГИХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

С. М. Бауэр, Е. Б. Воронкова

Бауэр Светлана Михайловна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9, s.bauer@spbu.ru

Воронкова Ева Боруховна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования энергетических систем, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9, e.voronkova@spbu.ru

В работе рассматривается устойчивость осесимметричных форм равновесия неоднородных пологих сферических оболочек и кольцевых пластин, нагруженных нормальным давлением. Внешний край оболочки или пластины закреплен от поворотов, но точки края свободно смещаются в радиальном и окружном направлении. Внутренний край кольцевой пластины может свободно смещаться в направлении оси пластины, но не поворачиваться. Предлагается, что несимметричная составляющая решения системы носит периодический характер и численным методом определяется наименьшее значение нагрузки, при которой появляются волны в окружном направлении. Исследовано влияние пологости оболочки, отверстия в центре пластины и степени неоднородности материала на величину критической нагрузки и форму потери устойчивости.

Ключевые слова: пологая сферическая оболочка, кольцевая пластина, потеря устойчивости, неоднородность.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-390-396>

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании больших прогибов пологих оболочек и пластин, нагруженных симметричной нагрузкой, приходится сталкиваться с образованием складок, вызванных потерей устойчивости осесимметричной формы равновесия. Для пластины, нагруженной нормальным давлением, решение, соответствующее несимметричным формам равновесия, полученное методом Галеркина, предложено Д. Ю. Пановым и В. И. Феодосьевым в [1]. Позже было показано, что при определении больших осесимметричных деформаций круглых пластин недостаточно при применении процедуры Галеркина использовать приближение, зависящее только от одного параметра [2]. Строгое доказательство существования несимметричного решения для симметрично нагруженной пластины провел Н. Ф. Морозов в [3], а единственность такого решения доказана W. O. Pieschocki в [4].

Значения критической нагрузки, при которой происходит переход от симметричной формы равновесия к неосесимметричной, для пологой сферической панели под действием внешнего давления найдены численно в [5], а для круглой пластины при различных условиях закрепления и нагружения численно определены в [6].

В настоящей работе рассматривается задача о потере устойчивости осесимметричной формы равновесия неоднородной пологой сферической оболочкой и кольцевой



пластины, модуль упругости которых изменяется при движении от центра пластины к ее краю. Такая пластина может быть простейшей моделью решетчатой пластины диска зрительного нерва человека [7]. Исследуется влияние пологости оболочки и неоднородности материала пластины на величину критической нагрузки.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим пологую сферическую оболочку, нагруженную равномерно распределенным внутренним давлением (рис. 1). Материал сферической панели полагается изотропным, модуль упругости меняется при удалении от центра панели к ее краю.

Система уравнений деформации полой сферической панели в безразмерном виде имеет вид, аналогичный [8]

$$\begin{aligned} g_1(r)\Delta\Delta w + g_1'(r)L_1^+(w) + g_1''(r)L_2^+(w) &= \\ &= p + L(w, F) - A\Delta F, \\ g_2(r)\Delta\Delta F + g_2'(r)L_1^-(F) + g_2''(r)L_2^-(F) &= \\ &= -L(w, w)/2 + A\Delta w, \\ ()' &= \partial()/\partial r, \quad (\dot{ }) = \partial()/\partial \theta, \quad A = \beta a^2/Rh. \end{aligned} \quad (1)$$

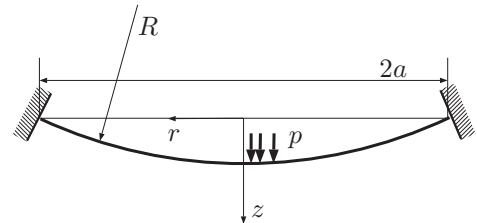


Рис. 1. Сферическая полая оболочка
Fig. 1. Spherical shallow shell

Здесь $w(r, \theta)$, $F(r, \theta)$ — неизвестные безразмерные нормальный прогиб и функция усилий; a , R , h , ν — радиус панели в плане, радиус кривизны срединной поверхности, толщина и коэффициент Пуассона материала пластины; $\beta^2 = 12(1 - \nu^2)$; r , θ — введенные полярные координаты $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$; $g_1(r)$ — достаточно гладкая функция, определяющая закон изменения модуля упругости панели; $g_2(r) = 1/g_1(r)$; Δ — оператор Лапласа, L , L_i^\pm , ($i = 1, 2$) — дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} L(x, y) &= x''(y'/r + \ddot{y}/r^2) + y''(x'/r + \ddot{x}/r^2) - 2(\dot{x}/r)'(\dot{y}/r)', \\ L_1^\pm(y) &= 2y''' + (2 \pm \nu)y''/r + 2(\dot{y})'/r^2 - y'/r^2 - 3\ddot{y}/r^3, \\ L_2^\pm(y) &= y'' \pm \nu(y'/r + \ddot{y}/r^2). \end{aligned}$$

Система (1) описывает деформацию круглой неоднородной пластины, нагруженной нормальным давлением, если параметр A , характеризующий пологость панели, положить равным нулю ($A = 0$) [8]. При замене в (1) знаков перед слагаемыми, содержащими параметр A , на противоположные система будет описывать деформацию панели под действием внешнего давления.

Безразмерные величины связаны с размерными соотношениями:

$$r = \frac{r^*}{a}, \quad w = \beta \frac{w^*}{h}, \quad p = \beta^3 \frac{p^* a^4}{E_{av} h^4}, \quad F = \beta^2 \frac{F^*}{E_{av} h^3},$$

где E_{av} — среднее значение модуля упругости, вычисленное как

$$E_{av} = \frac{1}{2\pi RH} \int_0^{2\pi} \int_0^a E(r)r dr d\theta, \quad E(r) = E_0 f(r),$$

$H = R - \sqrt{R^2 - a^2}$ — стрела подъема оболочки, $f(r)$ — достаточно гладкая, положительная на отрезке $[0, R]$ функция, и $g_1(r) = E_0 f(r)/E_{av}$.



Положим, что внешний край панели закреплен от поворотов, но точки края свободно смещаются в радиальном и окружном направлении, то есть полагаем, что растягивающее и сдвигающие усилия равны нулю при $r = 1$:

$$w = w' = F'/r + \ddot{F}/r^2 = - \left(\dot{F}/r \right)' = 0. \quad (2)$$

Учитывая ограниченность искомых решений, считаем, что $w' = F' = 0$ в центре панели (при $r = 0$).

Для круглой пластины (при $A = 0$) граничные условия (2) сохраняются. Для кольцевой пластины одним из возможных вариантов закрепления внутреннего края ($r = \delta$) может быть свободное перемещение точек края в радиальном и окружном направлении при ограничении поворотов. Тогда необходимо положить равным нулю поперечное реактивное усилие, складывающееся из поперечной силы и производной от крутящего момента. В терминах нормального перемещения w и функции усилий F граничные условия запишутся с следующим виде:

$$\begin{aligned} r = \delta, \quad w' = - \left(\dot{F}/r \right)' = 0, \\ g_1(r) \left((\Delta w)' + \frac{1-\nu}{r} (\ddot{w}/r)' \right) + g_1'(r) L_2^+(w) = 0, \\ g_2(r) \left((\Delta F)' + \Delta F/r - \frac{1+\nu}{r^2} (\ddot{F} + F)' \right) + g_2'(r) L_2^-(F) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Бифуркация сферической панели в неосесимметричное состояние возможна при возрастании нагрузки до критического значения $p = p_{cr}$ [3]. При меньших значениях давления p система (1)–(2) имеет только симметричное решение.

Аналогично [5, 6] представим решение в виде

$$w(r, \theta) = w_s(r) + w_n(r) \cos n\theta, \quad F(r, \theta) = F_s(r) + F_n(r) \cos n\theta, \quad (4)$$

где функции w_s, F_s описывают докритическое симметричное решение, а функции $w_{ns}(r, \theta) = w_n(r) \cos n\theta, F_{ns}(r, \theta) = F_n(r) \cos n\theta$ — закритическое состояние пластины (здесь n — число волн в окружном направлении, образовавшихся после потери устойчивости).

После разделения переменных (4) исходная система (1)–(2) распадается на две: нелинейную для нахождения симметричного решения $w_s(r), F_s(r)$ и линейную систему уравнений относительно $w_n(r), F_n(r)$, так как функции w_{ns}, F_{ns} полагаются малыми сразу после перехода пластины в неосесимметричное состояние. Для каждого числа волн в окружном направлении n будем искать такие значения нагрузки p_n , при которых существуют отличные от нуля функции $w_n(r), F_n(r)$. Критической нагрузкой выберем $p_{cr} = \min_n p_n$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Были проведены серии расчетов для неоднородной пологой сферической панели при изменении модуля упругости пластины по экспоненциальному закону $E = E_0 e^{-qr}$. Параметры E_0 и q выбирались так, чтобы среднее значения модуля упругости панели E_{av} оставалось постоянным.



Существование сжимающих напряжений в окрестности контура пологой оболочки создает предпосылки для перехода панели в неосесимметричное состояние [3]. На рис. 2 для пологой неоднородной сферической оболочки ($A = 2.5$, $E = E_0 e^{-0.5r}$) показано, как меняется интенсивность сжимающих напряжений, а также ширина зоны, в которой они возникают при возрастании нагрузки.

Эти данные согласуются с результатами [8] для неоднородной круглой пластины. В табл. 1 для однородной пологой сферической панели приведены найденные наименьшее значение нагрузки p_{cr} и соответствующие им волновые числа n . Значения критической нагрузки для однородной круглой пластины ($A = 0$) приведены по [8].

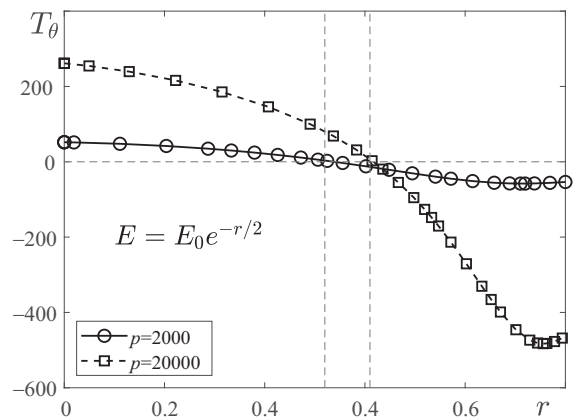


Рис. 2. Безразмерное окружное усилие для неоднородной панели, загруженной внутренним давлением ($A = 2.5$, $E = E_0 e^{-0.5r}$)
 Fig. 2. Dimensionless circumferential stress resultant for a heterogeneous panel loaded with internal pressure ($A = 2.5$, $E = E_0 e^{-0.5r}$)

Таблица 1 / Table 1

Критическая нагрузка для однородной пологой сферической панели ($A = 0$ соответствует круглой пластине)
 Critical load for a homogeneous shallow spherical panel ($A = 0$ corresponds to a circular plate)

A	0	0.5	1	2	3	4
p_{cr}	64522	65763	67394	70361	73633	77110
n	14	14	14	15	16	16

Бифуркация сферической панели в неосесимметричное состояние происходит при бóльшей нагрузке, чем для круглой пластины. При этом с ростом параметра A увеличивается волновое число n , соответствующее критической нагрузке.

С ростом неоднородности критическая нагрузка, при которой осесимметричная форма равновесия теряет устойчивость, может снижаться в 6 раз (рис. 3), а число образовавшихся при переходе в неосесимметричное состояние волн в окружном направлении увеличивается по сравнению с однородной оболочкой.

Заметим, что для кольцевых пластин при увеличении радиуса центрального отверстия потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия происходит с образованием меньшего числа складок в окружном направлении (см. табл. 2).

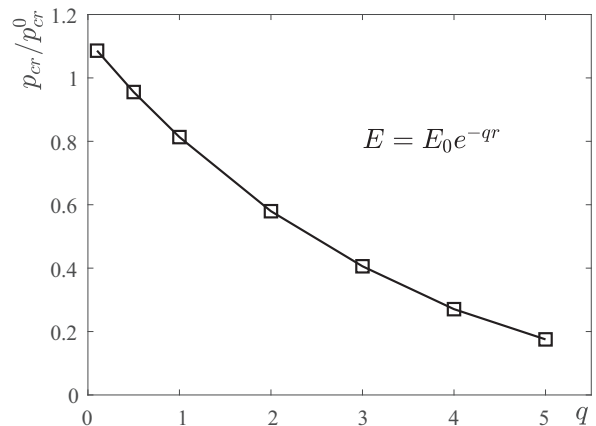


Рис. 3. Изменение критической нагрузки при изменении степени неоднородности панели q . $A = 2.5$, p_0 — критическая нагрузка для однородной круглой пластины

Fig. 3. The change of the critical load when the degree of heterogeneity of the panel q changes. $A = 2.5$, p_0 — critical load for a uniform circular plate



Таблица 2 / Table 2

Критическая нагрузка для однородной кольцевой пластины ($\delta = 0$ соответствует сплошной пластине)

Critical load for a homogeneous annular plate ($\delta = 0$ corresponds to a circular plate)

δ	0	0.05	0.1	0.15
p_{cr}/p_{cr}^0	1	1.03	1.08	1.15
n	14	13	12	12

Как показано в [2, 5, 6], потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия локализована вблизи внешнего края полошой оболочки и связана с появлением в окрестности внешнего края сжимающих окружных усилий. Этим объясняется влияние на критическую нагрузку свойств пластины в окрестности внешнего края.

Пологая оболочка, нагруженная внутренним давлением, может быть простейшей моделью решетчатой пластины (РП)

диска зрительного нерва человека [2]. РП является неоднородной: за счет строения ее жесткость существенно снижается к краю. Учитывая связь размерных и безразмерных, находим, что критическое давление $p_{cr} = 72166$ для панели с радиусом основания $a = 1$ мм, радиусом кривизны панели $R = 12$ мм, толщиной $h = 0.1$ мм, $E_{av} = 0.3$ МПа, $\nu = 0.49$ ($A = 2.5$), при котором возможна бифуркация в неосесимметричное состояние, соответствует 78,6 КПа, или 590 мм рт. ст. С учетом неоднородных свойств образование складок по краю оболочки возможно уже при 90 мм рт. ст. ($q = 5$).

В ряде работ отмечается возможность кратковременного подъема внутриглазного давления до 100 мм рт. ст. [10]. Таким образом, появление отеков и складок по краю РП [9] может быть объяснено потерей устойчивости осесимметричных форм равновесия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе численным методом исследована потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия неоднородных пологих сферических оболочек и кольцевых пластин. Найдено критическое давление, при котором возможна бифуркация панели/пластины в неосесимметричное состояние. Показано, что при уменьшении жесткости оболочки к краю переход в неосесимметричное состояние происходит при существенно меньшей нагрузке, чем для оболочки постоянной жесткости, но с образованием большего числа волн.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ (проект № 14.Z50.31.0046).

Библиографический список

1. Панов Д. Ю., Феодосьев В. И. О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах // ПММ. 1948. Т. 12, вып. 4. С. 389–406.
2. Феодосьев В. И. Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем // ПММ. 1963. Т. 27, № 2. С. 265–274.
3. Морозов Н. Ф. К вопросу о существовании несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластины, нагруженной симметричной нагрузкой // Изв. вузов. Математика. 1961. № 2. С. 126–129.
4. Piechocki W. J. On the non-linear theory of thin elastic spherical shells // Arch. Mech. 1969. № 21. P. 81–101.
5. Nai-Chien Huang. Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical shells // J. Appl. Mech. 1964. № 31. P. 447–457. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3629662>



6. *Cheo L. S., Reiss E. L.* Unsymmetrical wrinkling of circular plates // *Quart. Appl. Math.* 1971. № 31. P. 75–91. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/99710>
7. *Бауэр С. М., Воронкова Е. Б.* Модели теории оболочек и пластин в задачах офтальмологии // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1.* 2014. Т. 1(59), вып. 3. С. 438–458.
8. *Бауэр С. М., Воронкова Е. Б.* О потере устойчивости симметричных форм равновесия круглых пластин под действием нормального давления // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1.* 2012. Вып. 1. С. 80–85.
9. *Coleman D. J., Trokel S.* Direct-recorded intraocular pressure variations in a human subject // *Arch Ophthalmol.* 1969. Vol. 82, № 5. P. 637–640. DOI: <https://doi.org/10.1001/archophth.1969.00990020633011>
10. *Нестеров А. П.* Основные принципы диагностики первичной открытоугольной глаукомы // *Вестн. офтальмологии.* 1998. № 2. С. 3–6.

Образец для цитирования:

Бауэр С. М., Воронкова Е. Б. Потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия пологих сферических оболочек под действием внутреннего давления // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2018. Т. 18, вып. 4. С. 390–396. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-390-396>

On the Unsymmetrical Buckling of Shallow Spherical Shells under Internal Pressure

S. M. Bauer, E. B. Voronkova

Svetlana M. Bauer, <https://orcid.org/0000-0003-3732-2110>, St. Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg 199034, Russia, s.bauer@spbu.ru

Eva B. Voronkova, <https://orcid.org/0000-0002-3065-4473>, St. Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg 199034, Russia, e.voronkova@spbu.ru

This work is devoted to the numerical study of unsymmetrical buckling of shallow spherical shells and annular plates with varying mechanical characteristics subjected to internal pressure. We suppose that the edge of the shell is clamped but moving freely in the shell's plane. For the annular plate a roller support is considered for the inner edge of the plate, i.e. the edge that can slide along the figure axes without changing the slope. The unsymmetric part of the solution is sought in terms of multiples of the harmonics of the angular coordinate. A numerical method is employed to obtain the lowest load value, which leads to the appearance of waves in the circumferential direction. The effect of material inhomogeneity on the buckling load is examined. It is shown that if the elasticity modulus decreases away from the center of a plate, the critical pressure for unsymmetric buckling is sufficiently lower than for a plate with constant mechanical properties.

Key words: shallow spherical shell, annular plate, unsymmetrical buckling, inhomogeneity.

Acknowledgements: This research was supported by the Government of Russia (project no. 14.Z50.31.0046).

References

1. *Panov D. Yu., Feodos'ev V. I.* On the equilibrium and stability loss of shallow shells under large deflection. *Prikl. Mat. Mekh.* [J. Appl. Math. Mech.], 1948, vol. 12, iss. 4, pp. 389–406 (in Russian).



2. Feodos'ev V. I. On a method of solution of the nonlinear problems of stability of deformable systems. *J. Appl. Math. Mech.*, 1963, vol. 27, iss. 2, pp. 392–404. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(63\)90008-X](https://doi.org/10.1016/0021-8928(63)90008-X)
3. Morozov N. F. On the existence of a non-symmetric solution in the problem of large deflections of a circular plate with a symmetric load. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1961, no. 2, pp. 126–129 (in Russian).
4. Piechocki W. J. On the non-linear theory of thin elastic spherical shells. *Arch. Mech.*, 1969, no. 21, pp. 81–101.
5. Nai-Chien Huang. Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical shells. *J. Appl. Mech.*, 1964, no. 31, pp. 447–457. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3629662>
6. Cheo L. S., Reiss E. L. Unsymmetrical wrinkling of circular plates. *Quart. Appl. Math.*, 1971, no. 31, pp. 75–91. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/99710>
7. Bauer S. M., Voronkova E. B. Models of shells and plates in the problems of ophthalmology. *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*, 2014, vol. 47, iss. 3, pp. 123–139. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1063454114030029>
8. Bauer S. M., Voronkova E. B. On unsymmetrical buckling of circular plates under normal pressure. *Vestnik St. Petersburg University. Ser. 1.*, 2012, iss. 1, pp. 80–85 (in Russian).
9. Coleman D. J., Trokel S. Direct-recorded intraocular pressure variations in a human subject. *Arch Ophthalmol*, 1969, vol. 82, no. 5, pp. 637–640. DOI: <https://doi.org/10.1001/archopht.1969.00990020633011>
10. Nesterov A. P. Basic principles of open angle glaucoma diagnostic. *Vestnik of ophthalmology*, 1998, no. 2, pp. 3–6 (in Russian).

Cite this article as:

Bauer S. M., Voronkova E. B. On the Unsymmetrical Buckling of Shallow Spherical Shells under Internal Pressure. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 390–396 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-390-396>



УДК 539.3

ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ МНОГОСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

А. К. Беляев, А. В. Зелинская, Д. Н. Иванов,
Н. Ф. Морозов, Н. В. Наумова, П. Е. Товстик, Т. П. Товстик

Беляев Александр Константинович, доктор физико-математических наук, профессор, директор, Институт проблем машиноведения РАН, Россия, 199178, Санкт-Петербург, Васильевский остров, Большой просп., 61, 13augen@mail.ru

Зелинская Анна Владимировна, аспирант кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Иванов Денис Николаевич, научный сотрудник кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Морозов Никита Федорович, доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН, заведующий кафедрой теории упругости математико-механического факультета, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Наумова Наталья Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9, n.v.naumova@spbu.ru

Товстик Петр Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики математико-механического факультета, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9, peter.tovstik@mail.ru

Товстик Татьяна Петровна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории мехатроники, Институт проблем машиноведения РАН, Россия, 199178, Санкт-Петербург, Васильевский остров, Большой просп., 61, t_tovstik@mail.ru

Исследуются колебания многослойных пластин. Предложена двумерная асимптотическая модель второго порядка точности по отношению к малому параметру тонкостенности, учитывающая эффект как поперечного сдвига, так и растяжения нормальных волокон. Эта модель может быть использована для пластины из моноклинного материала, неоднородного в направлении толщины. В частности, модель применима для многослойной пластины, состоящей из ортотропных слоев с произвольной ориентацией ортотропии. Предполагается, что упругие и инерционные свойства пластины в тангенциальных направлениях постоянны. Основным достижением работы является вывод постоянных коэффициентов у полученной двумерной системы дифференциальных уравнений. Если в нулевом приближении эти коэффициенты могут быть найдены с использованием гипотез Кирхгофа – Лява о прямой нормали, то для достижения второго порядка точности приходится использовать более сложный алгоритм. Обсуждается вопрос об уточнении, которое вносит учет поперечного сдвига для многослойной пластины с чередующимися мягкими и жесткими слоями. Более детально исследуется бесконечная в тангенциальных направлениях пластина, для которой решение существенно упрощается в связи с тем, что отпадает необходимость в удовлетворении граничных условий, и решение может быть представлено через гармонические в тангенциальных направлениях функции. Для гармонического решения получена оценка погрешности двумерной модели путем сравнения с численным решением трехмерной задачи теории упругости, которая в данном случае сводится к одномерной в направлении толщины задаче.



В гармоническом приближении исследуются свободные и вынужденные колебания, а также задача распространения длинных изгибных волн деформации. Для них найдена зависимость скорости распространения волны от направления.

Ключевые слова: анизотропная многослойная пластина, двухмерная модель второго порядка точности, изгибные колебания и волны в пластине.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-397-411>

ВВЕДЕНИЕ

Построению двухмерных приближенных моделей тонких анизотропных пластин и оболочек посвящены многочисленные исследования (см. например, [1–4]). Для трансверсально изотропного материала двухмерные модели второго порядка точности получены и исследованы в работах [5–9]. Уточненные двухмерные модели важны при большом уровне неоднородности в направлении толщины, в частности, для многослойных пластин с чередующимися жесткими и мягкими слоями. Для таких пластин двухмерные модели, основанные на гипотезах Кирхгофа – Лява, приводят к большим ошибкам.

В работе [10] на базе асимптотических разложений [7–9] получена двухмерная модель для пластины с общей анизотропией материала (описываемой 21-м модулем упругости). Эта модель приводит к системе 8-го дифференциального порядка и подобна модели Кирхгофа–Лява с эквивалентными модулями упругости. Эта модель удерживает только главные члены в асимптотических разложениях по параметру толщины, не учитывает эффекта поперечного сдвига и поэтому неприменима для расчета многослойных пластин с чередующимися жесткими и мягкими слоями. В работе [11] для балки в случае анизотропии общего вида (с 6-ю модулями упругости) выведены уравнения второго порядка точности. Эти уравнения использованы для решения задачи о распространении продольных изгибных волн. В работе [12] уравнения второго порядка точности выведены для пластины из моноклинного неоднородного по толщине материала. Для однородного моноклинного материала в работе [13] построены старшие асимптотические приближения.

В настоящей работе рассматривается многослойная пластина, состоящая из ортотропных слоев с произвольной ориентацией направлений ортотропии. Рассматриваемая пластина — это пластина из моноклинного материала с кусочно-постоянными модулями упругости. Приводится первое асимптотическое приближение, построенное в работе [10] для анизотропии общего вида, а затем второе приближение, построенное в кратком сообщении [12]. В общем случае полученные уравнения второго приближения весьма громоздки, поэтому мы ограничиваемся случаем, в котором модули упругости симметричны относительно среднего слоя пластины. В этом случае уравнения существенно упрощаются, и возможно раздельное рассмотрение тангенциальных и изгибных деформаций и колебаний. Более подробно рассматриваются изгибные колебания бесконечной пластины, для которой решения представимы в виде гармонических по тангенциальным координатам функций. С целью оценки точности моделей проводится сравнение результатов, найденных по первому и второму асимптотическим приближениям, с точным решением трехмерной задачи. Установлено, что ошибка асимптотических приближений существенно зависит от уровня неоднородности пластины в направлении толщины. В первом приближении исследуется распространение длинных изгибных волн и найдена зависимость скорости волны от направления ее распространения и от других параметров.



1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Рассматривается многослойная пластина, состоящая из n ортотропных слоев постоянной толщины h_k ($k = 1, \dots, n, h = \sum h_k$). В основной декартовой системе координат $x_1, x_2, x_3 = z$ в линейном приближении уравнения равновесия, описывающие свободные колебания пластины, имеют вид

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0, \quad f_i = \rho \omega^2 u_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где σ_{ij} — напряжения, ρ — плотность материала, ω — частота колебаний, u_i — проекции перемещений.

Деформации определяем по формулам

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Пусть k -й слой лежит в пределах $z_{k-1} \leq x_3 \leq z_k$, причем $z_0 = -h/2, z_k = z_{k-1} + h_k$. Для k -го слоя соотношения упругости, связанные с направлениями его ортотропии, в матричной форме записываются в виде [4]

$$\hat{\sigma}^{(k)} = bs \hat{E}^{(k)} \cdot \hat{\varepsilon}^{(k)}, \quad z_{k-1} \leq z \leq z_k, \quad (3)$$

где

$$\hat{\sigma}^{(k)} = (\hat{\sigma}_{11}^{(k)}, \hat{\sigma}_{22}^{(k)}, \hat{\sigma}_{33}^{(k)}, \hat{\sigma}_{23}^{(k)}, \hat{\sigma}_{13}^{(k)}, \hat{\sigma}_{12}^{(k)})^T, \quad \hat{\varepsilon}^{(k)} = (\hat{\varepsilon}_{11}^{(k)}, \hat{\varepsilon}_{22}^{(k)}, \hat{\varepsilon}_{33}^{(k)}, \hat{\varepsilon}_{23}^{(k)}, \hat{\varepsilon}_{13}^{(k)}, \hat{\varepsilon}_{12}^{(k)})^T,$$

$$\hat{E}^{(k)} = \begin{pmatrix} \hat{E}_{11}^{(k)} & \hat{E}_{12}^{(k)} & \hat{E}_{13}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{E}_{12}^{(k)} & \hat{E}_{22}^{(k)} & \hat{E}_{23}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{E}_{13}^{(k)} & \hat{E}_{23}^{(k)} & \hat{E}_{33}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{E}_{44}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{E}_{55}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{E}_{66}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Значок « T » означает транспонирование, а значок « $\hat{}$ » отмечает, что соотношения (3) записаны во вспомогательной системе координат, связанной с направлением ортотропии слоя.

Через α_k обозначим угол между осью x_1 основной системы координат и осью \hat{x}_1 вспомогательной системы. Тогда соотношения (3) в основной системе координат дают

$$\sigma^{(k)} = \mathbf{E}^{(k)} \cdot \varepsilon^{(k)}, \quad z_{k-1} \leq z \leq z_k, \quad (4)$$

где матрица $\mathbf{E}^{(k)}$ описывает моноклинный материал:

$$\mathbf{E}^{(k)} = \begin{pmatrix} E_{11}^{(k)} & E_{12}^{(k)} & E_{13}^{(k)} & 0 & 0 & E_{16}^{(k)} \\ E_{12}^{(k)} & E_{22}^{(k)} & E_{23}^{(k)} & 0 & 0 & E_{26}^{(k)} \\ E_{13}^{(k)} & E_{23}^{(k)} & E_{33}^{(k)} & 0 & 0 & E_{36}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & E_{44}^{(k)} & E_{45}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{45}^{(k)} & E_{55}^{(k)} & 0 \\ E_{16}^{(k)} & E_{26}^{(k)} & E_{36}^{(k)} & 0 & 0 & E_{66}^{(k)} \end{pmatrix},$$



а модули $E_{ij}^{(k)}$ выражаются через модули $\hat{E}_{ij}^{(k)}$ по формулам [4]:

$$\begin{aligned} E_{11}^{(k)} &= \hat{E}_{11}^{(k)} c_k^4 + 2 \left(\hat{E}_{12}^{(k)} + 2\hat{E}_{66}^{(k)} \right) c_k^2 s_k^2 + \hat{E}_{22}^{(k)} s_k^4, \\ E_{12}^{(k)} &= \hat{E}_{12}^{(k)} c_k^4 + \left(\hat{E}_{11}^{(k)} + \hat{E}_{22}^{(k)} - 4\hat{E}_{66}^{(k)} \right) c_k^2 s_k^2 + \hat{E}_{12}^{(k)} s_k^4, \quad E_{13}^{(k)} = \hat{E}_{13}^{(k)} c_k^2 + \hat{E}_{23}^{(k)} s_k^2, \\ E_{16}^{(k)} &= \left(\hat{E}_{11}^{(k)} - \hat{E}_{12}^{(k)} - 2\hat{E}_{66}^{(k)} \right) c_k^3 s_k + \left(2\hat{E}_{66}^{(k)} + \hat{E}_{12}^{(k)} - \hat{E}_{22}^{(k)} \right) c_k s_k^3, \\ E_{22}^{(k)} &= \hat{E}_{22}^{(k)} c_k^4 + 2 \left(\hat{E}_{12}^{(k)} + 2\hat{E}_{66}^{(k)} \right) c_k^2 s_k^2 + \hat{E}_{11}^{(k)} s_k^4, \quad E_{23}^{(k)} = \hat{E}_{23}^{(k)} c_k^2 + \hat{E}_{13}^{(k)} s_k^2, \\ E_{26}^{(k)} &= \left(\hat{E}_{12}^{(k)} - \hat{E}_{22}^{(k)} + 2\hat{E}_{66}^{(k)} \right) c_k^3 s_k + \left(\hat{E}_{11}^{(k)} - \hat{E}_{12}^{(k)} - 2\hat{E}_{66}^{(k)} \right) c_k s_k^3, \quad E_{33}^{(k)} = \hat{E}_{33}^{(k)}, \\ E_{36}^{(k)} &= \left(\hat{E}_{13}^{(k)} - \hat{E}_{23}^{(k)} \right) c_k s_k, \quad E_{44}^{(k)} = \hat{E}_{44}^{(k)} c_k^2 + \hat{E}_{55}^{(k)} s_k^2, \quad E_{45}^{(k)} = \left(\hat{E}_{55}^{(k)} - \hat{E}_{44}^{(k)} \right) c_k s_k, \\ E_{55}^{(k)} &= \hat{E}_{55}^{(k)} c_k^2 + \hat{E}_{44}^{(k)} s_k^2, \quad E_{66}^{(k)} = \left(\hat{E}_{11}^{(k)} + \hat{E}_{22}^{(k)} - 2\hat{E}_{12}^{(k)} - 2\hat{E}_{66}^{(k)} \right) c_k^2 s_k^2 + \hat{E}_{66}^{(k)} (c_k^4 + s_k^4), \end{aligned}$$

где $c_k = \cos \alpha_k$, $s_k = \sin \alpha_k$.

Следовательно получен моноклинный материал с кусочно-постоянными модулями упругости E_{ij} .

Предполагается, что модули упругости E_{ij} и плотность ρ не зависят от x_1 , x_2 и являются симметричными функциями z ($E_{ij}(-z) = E_{ij}(z)$, $\rho(-z) = \rho(z)$). В частности, эти функции могут не зависеть от z .

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Введем безразмерные переменные (со значком « $\tilde{}$ »)

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2, u_1, u_2, u_3\} &= l\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, w\}, \quad \{E_{ij}, \sigma_{ij}\} = E\{\tilde{E}_{ij}, \tilde{\sigma}_{ij}\}, \\ z = h\tilde{z}, \quad z_k = h\tilde{z}_k, \quad \mu &= \frac{h}{l}, \quad l = \frac{\rho_0 \omega^2 l^2}{E}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho(z)}{\rho_0}, \quad \rho_0 = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x_3) dx_3. \end{aligned} \quad (5)$$

где l и E — типичные значения длины тангенциальных волн и модулей упругости, μ — малый параметр толщины, λ — искомый параметр частоты, ρ_0 — средняя плотность материала. В дальнейшем значок « $\tilde{}$ » опускаем.

Как и в работе [10], введем обозначения

$$\begin{aligned} \sigma_t &= (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})^T, \quad \sigma_n = (\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33})^T, \\ \varepsilon_t &= (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})^T, \quad \varepsilon_n = (\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33})^T, \end{aligned}$$

разделяющие тангенциальные и трансверсальные напряжения и деформации, и перепишем соотношения упругости (4) в виде

$$\sigma_t = \mathbf{A} \cdot \varepsilon_t + \mathbf{B} \cdot \varepsilon_n, \quad \sigma_n = \mathbf{B}^T \cdot \varepsilon_t + \mathbf{C} \cdot \varepsilon_n, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \{A_{ij}\} &= \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{26} \\ E_{16} & E_{26} & E_{66} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \{B_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E_{13} \\ 0 & 0 & E_{23} \\ 0 & 0 & E_{36} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C} = \{C_{ij}\} &= \begin{pmatrix} E_{44} & E_{45} & 0 \\ E_{45} & E_{55} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Пусть σ_t , σ_s , σ_n — характерные значения тангенциальных напряжений σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} , трансверсальных напряжений сдвига σ_{13} , σ_{23} и нормальных напряжений σ_{33} соответственно. Из уравнений (1) и соотношения $h/l = \mu \ll 1$ we следуют оценки

$$\sigma_s \sim \mu\sigma_t, \quad \sigma_n \sim \mu\sigma_s \sim \mu^2\sigma. \quad (7)$$

Исключая трансверсальные деформации ε_n из соотношений (6), получаем:

$$\sigma_t = \mathbf{A}^* \cdot \varepsilon_t + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \sigma_n, \quad \varepsilon_n = \mathbf{C}^{-1} \cdot \sigma_n - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^T \cdot \varepsilon_t, \quad (8)$$

где $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T$. Пренебрегая напряжениями σ_n , получаем приближенные соотношения упругости $\sigma_t = \mathbf{A}^* \cdot \varepsilon_t$, содержащие только тангенциальные напряжения и деформации. Эти соотношения приводят к уравнениям первого приближения, построенным в работе [10]. Здесь мы ищем более точные уравнения.

Уравнения (1), (2) и (8) в безразмерных переменных дают систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= \mu\varepsilon_{33}, \\ \frac{\partial u_k}{\partial z} &= -\mu(p_k w - \varepsilon_{k3}), \quad p_k = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \\ \frac{\partial \sigma_{k3}}{\partial z} &= -\mu(p_1 \sigma_{1k} + p_2 \sigma_{2k} + l\rho u_k) \equiv g_k, \quad k = 1, 2, \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} &= -\mu(p_1 \sigma_{13} + p_2 \sigma_{23} + l\rho w) \equiv g_3. \end{aligned} \quad (9)$$

Основные неизвестные функции в системе (9) суть u_1 , u_2 , w , σ_{13} , σ_{23} , σ_{33} . Деформации ε_{i3} и напряжения σ_{1i} , σ_{2i} должны быть найдены из соотношений (8), причем $\varepsilon_t = (p_1 u_1, p_2 u_2, p_1 u_2 + p_2 u_1)^T$.

Предполагая, что лицевые плоскости пластины свободны, ищем решение системы (9), удовлетворяющее граничным условиям:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0, \quad z = \pm 1/2. \quad (10)$$

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Правые части уравнений (9) малы, поэтому ищем решение этих уравнений методом итераций, последовательно решая уравнения (9). В первом приближении $u_i = \sigma_{i3} = 0$. Тогда первое уравнение (9) дает $w = w^0(x_1, x_2)$, причем функция w^0 подлежит определению. Из второго уравнения (9) получаем:

$$u_k(x_1, x_2) = u_k^0(x_1, x_2) - \mu p_k z w^0, \quad k = 1, 2. \quad (11)$$

В общем случае (см. [10]) $u_k^0 \neq 0$, однако при рассмотрении изгибных колебаний симметричной по толщине пластины t будет $u_k^0 = 0$. Из соотношений (8) находим

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(0)} &= -z L_{11} w^0, \quad L_{11} = A_{11}^* p_1^2 + A_{12}^* p_2^2 + 2A_{13}^* p_1 p_2, \\ \sigma_{22}^{(0)} &= -z L_{22} w^0, \quad L_{22} = A_{12}^* p_1^2 + A_{22}^* p_2^2 + 2A_{23}^* p_1 p_2, \\ \sigma_{12}^{(0)} &= -z L_{12} w^0, \quad L_{12} = A_{13}^* p_1^2 + A_{23}^* p_2^2 + 2A_{33}^* p_1 p_2, \end{aligned}$$

что соответствует модели Кирхгофа – Лява для обобщенных модулей упругости \mathbf{A}^* .



Введем обозначения \mathbf{I} , \mathbf{I}_0 для интегральных операторов с переменным верхним пределом и \mathbf{I}_a — для оператора осреднения по формулам:

$$\mathbf{I}(Z) = \int_{-1/2}^z Z(z) dz, \quad \mathbf{I}_0(Z) = \int_0^z Z(z) dz, \quad \mathbf{I}_a(Z) = \int_{-1/2}^{1/2} Z(z) dz.$$

Для произвольной функции $Z(z)$ справедливо тождество

$$\mathbf{I}_a \mathbf{I}(Z) = (1/2) \mathbf{I}_a(Z) - \mathbf{I}_a(z Z),$$

проверяемое интегрированием по частям.

Третье уравнение (9) дает

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(0)} &= \mu^2 \mathbf{I}(N_1 z) w^0, \quad \sigma_{23}^{(0)} = \mu^2 \mathbf{I}(N_2 z) w^0, \\ N_1 &= p_1 L_{11} + p_2 L_{12} = A_{11}^* p_1^3 + 3A_{13}^* p_1^2 p_2 + (A_{12}^* + 2A_{33}^*) p_1 p_2^2 + A_{23}^* p_2^3, \\ N_2 &= p_1 L_{12} + p_2 L_{22} = A_{13}^* p_1^3 + (A_{12}^* + 2A_{33}^*) p_1^2 p_2 + 3A_{23}^* p_1 p_2^2 + A_{22}^* p_2^3. \end{aligned} \quad (12)$$

Граничные условия (10) $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ при $z = 1/2$ выполнены в силу симметрии пластины и равенства $\mathbf{I}_a(A_{ij}^* z) = 0$.

Последнее уравнение (9) дает

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(0)} &= -\mu \mathbf{I}(p_1 \sigma_{13} + p_2 \sigma_{23} + l \rho w) = -(\mu^3 \mathbf{I}(\mathbf{I}(Qz)) + \mu \lambda \mathbf{I}(\rho)) w_0, \\ Q &= p_1 N_1 + p_2 N_2 = A_{11}^* p_1^4 + 4A_{13}^* p_1^3 p_2 + (2A_{12}^* + 4A_{33}^*) p_1^2 p_2^2 + 4A_{23}^* p_1 p_2^3 + A_{22}^* p_2^4. \end{aligned} \quad (13)$$

Граничное условие $\sigma_{33}^{(0)}(1/2) = 0$ приводит к уравнению для параметра частоты $\lambda = \lambda_0$ в первом приближении

$$\lambda_0 = \mu^2 D_0, \quad D_0 = \alpha_{11} q_1^4 + 4\alpha_{13} q_1^3 q_2 + (2\alpha_{12} + 4\alpha_{33}) q_1^2 q_2^2 + 4\alpha_{23} q_1 q_2^3 + \alpha_{22} q_2^4, \quad (14)$$

где

$$\alpha_{ij} = -\mathbf{I}_a(\mathbf{I}(z A_{ij}^*)) = \mathbf{I}_a(z^2 A_{ij}^*), \quad \mathbf{I}_a(\rho) = 1.$$

Величина λ_0 получена после формальной замены операторов дифференцирования p_k на волновые числа $i q_k$, $k = 1, 2$. В парагр. 5 и 7 приводится подробное обсуждение соответствующей формы колебаний.

Итак, первое приближение построено.

4. ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Продолжим итерации, начиная с первого уравнения (9) и удерживая члены порядка μ^2 по сравнению с первым приближением. Первые два уравнения (9) содержат трансверсальные деформации. Из соотношений (8) находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{13}^{(0)} &= \frac{E_{55} \sigma_{13}^{(0)} - \hat{E}_{45} \sigma_{23}^{(0)}}{\Delta_4} = \mu^2 (G_{11} \mathbf{I}(N_1 z) + G_{12} \mathbf{I}(N_2 z)) w^0, \\ \varepsilon_{23}^{(0)} &= \frac{-E_{45} \sigma_{13}^{(0)} + \hat{E}_{44} \sigma_{23}^{(0)}}{\Delta_4} = \mu^2 (G_{12} \mathbf{I}(N_1 z) + G_{22} \mathbf{I}(N_2 z)) w^0, \\ \varepsilon_{33}^{(0)} &= \mu N_3 z w^0, \quad N_3 = \frac{E_{13} p_1^2 + E_{23} p_2^2 + 2E_{36} p_1 p_2}{E_{33}}. \end{aligned}$$



Здесь $\Delta_4 = E_{44}E_{55} - E_{45}^2$, а через G_{ij} обозначены обратные модули упругости (или податливости) поперечного сдвига:

$$G_{11} = \frac{E_{55}}{\Delta_4}, \quad G_{12} = -\frac{E_{45}}{\Delta_4}, \quad G_{22} = \frac{E_{44}}{\Delta_4}.$$

Последовательно получаем:

$$w = w^{(1)} + \mu^2 \mathbf{I}_0(N_3 z) w^0, \quad (15)$$

где $w^{(1)}(x_1, x_2)$ — неизвестная функция.

Имеем:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\mu p_1 z w^{(1)} - \mu^3 p_1 \mathbf{I}_0(\mathbf{I}_0(N_3 z)) w^0 + \mu I_0(\varepsilon_{13}^{(0)}), \\ u_2 &= -\mu p_3 z w^{(1)} - \mu^3 p_2 \mathbf{I}_0(\mathbf{I}_0(N_3 z)) w^0 + \mu I_0(\varepsilon_{23}^{(0)}). \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= -\mu \mathbf{I}(M_{11} u_1 + M_{12} u_2) + \mu^2 \lambda p_1 \mathbf{I}(\rho z) w_0, \\ \sigma_{23} &= -\mu \mathbf{I}(M_{12} u_1 + M_{22} u_2) + \mu^2 \lambda p_1 \mathbf{I}(\rho z) w_0, \\ M_{11} &= A_{11}^* p_1^2 + 2A_{13}^* p_1 p_2 + A_{33}^* p_2^2, \quad M_{22} = A_{33}^* p_1^2 + 2A_{13}^* p_1 p_2 + A_{22}^* p_2^2, \\ M_{12} &= A_{13}^* p_1^2 + (A_{12}^* A_{33}^*) p_1 p_2 + A_{23}^* p_2^2, \\ \sigma_{33} &= -\mu \mathbf{I}(p_1 \sigma_{13} + p_2 \sigma_{23} + l \rho w) = \\ &= \mu^2 \mathbf{I}(\mathbf{I}(N_1 u_1 + N_2 u_2)) - \mu l \mathbf{I}(\rho w) - \mu^3 l (p_1^2 + p_2^2) \mathbf{I}(\mathbf{I}_0(\rho z)) w_0. \end{aligned}$$

Величину λ находим из граничного условия $\sigma_{33}(1/2) = 0$. Интегрируя по частям и учитывая, что функции $u_1(z)$, $u_2(z)$ — четные, а функция $w(z)$ — нечетная, получаем:

$$\sigma_{33}(1/2) = -\mu^2 \mathbf{I}_a((N_1 u_1 + N_2 u_2)z) - \mu l \mathbf{I}_a(\rho w) + \mu^3 l J(p_1^2 + p_2^2) w^0 = 0, \quad (17)$$

где $J = \mathbf{I}_a(z^2 \rho)$ — момент инерции поперечного сечения.

Подставляя в уравнение (17) выражения (15) и (16) для функций w , u_1 , u_2 , получаем уравнение второго порядка точности для изгибных гармонических колебаний:

$$(\mu^2 D_0 + \mu^4 D_s w + \mu^4 D_z) w - l(R_0 - \mu^2 R_J - \mu^2 R_z) w = 0, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} D_0 &= \mathbf{I}_a(Qz^2), \quad D_s = -\mathbf{I}_a(n_1^2 G_{44} + 2n_1 n_2 G_{45} + n_2^2 G_{55}), \quad n_k = \mathbf{I}(N_k z), \quad k = 1, 2, \\ D_z &= -\mathbf{I}_a(Qz \mathbf{I}_0 \mathbf{I}_0(N_3 z)), \quad R_0 = 1, \quad R_J = J(p_1^2 + p_2^2), \quad R_z = -\mathbf{I}_a(\rho \mathbf{I}_0(N_3 z)). \end{aligned}$$

Напомним, что $p_k(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_k}$, $k = 1, 2$. В уравнении (18) главный оператор D_0 — это дифференциальный оператор 4-го порядка, описывающий изгиб моноклинной пластины в первом приближении. Он может быть получен в рамках гипотез Кирхгофа – Лява с использованием модифицированных модулей упругости A_{ij}^* . Операторы 6-го порядка D_s и D_z описывают влияние деформаций поперечного сдвига и растяжения нормальных волокон. Единичный оператор R_0 описывает поперечную инерцию нерастяжимых нормальных волокон. Операторы второго порядка R_J и R_z описывают инерцию вращения нормальных волокон и инерцию их растяжения. Величины $\mu^4 D_z w$ по сравнению с $\mu^2 D_0 w$ и величины $\mu^2 R_J$, $\mu^2 R_z$ по сравнению с R_0 при $\mu \ll 1$



малы и могут быть опущены. Если жесткость некоторых слоев мала по сравнению с жесткостью остальных слоев, тогда модули поперечной податливости на сдвиг G_{ij} , $i, j = 4, 5$, оказываются большими и величина $\mu^4 D_j w$ может оказаться не малой по сравнению с $\mu^2 D_0 w$.

Для $\mu \ll 1$ (т.е. для тонких пластин или, что то же самое, для длинных волн) мы рекомендуем (вместо равенства (18)) использовать более простое равенство:

$$(\mu^2 D_0 + \mu^4 D_s)w - \lambda w = 0, \quad (19)$$

учитывающее влияние поперечного сдвига и не учитывающее остальные слагаемые второго порядка малости.

5. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ (9) В ПЕРИОДИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Ищем неизвестные функции системы (9) в виде

$$\begin{aligned} \{w, \varepsilon_{jk}, \sigma_{jk}, \varepsilon_{33}, \sigma_{33}\}(x_1, x_2, z) &= \{\tilde{w}, \tilde{\varepsilon}_{jk}, \tilde{\sigma}_{jk}, \tilde{\varepsilon}_{33}, \tilde{\sigma}_{33}\}(z) \exp(iq_1 x_1 + iq_2 x_2), \quad j, k = 1, 2, \\ \{u_k, \varepsilon_{k3}, \sigma_{k3}\}(x_1, x_2, z) &= i\{\tilde{u}_k, \tilde{\varepsilon}_{k3}, \tilde{\sigma}_{k3}\}(z) \exp(iq_1 x_1 + iq_2 x_2), \quad k = 1, 2, \quad i = \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

где $p_k = iq_k$, $k = 1, 2$. Тогда для фиксированных значений волновых чисел q_1, q_2 система (9) становится системой обыкновенных дифференциальных уравнений с основными вещественными неизвестными функциями $w, u_1, u_2, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$. В дальнейшем значок « $\tilde{}$ » опускаем.

В предположении, что лицевые плоскости свободны, ищем решение, удовлетворяющее граничным условиям:

$$\sigma_{k3}(\pm 1/2) = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (20)$$

Для симметричной по толщине пластины ($E_{ij}(-z) = E_{ij}(z)$, $\rho(-z) = \rho(z)$) система (9) описывает тангенциальные и изгибные колебания по отдельности. Для изгибных колебаний функции $w, \sigma_{12}, \sigma_{23}$ — четные, а функции u_1, u_2, σ_{33} — нечетные.

Для изгибных колебаний симметричных пластины граничные условия (20) можно заменить на условия

$$u_1(0) = u_2(0) = \sigma_{33}(0) = 0, \quad \sigma_{13}(1/2) = \sigma_{23}(1/2) = \sigma_{33}(1/2) = 0. \quad (21)$$

Система (9) содержит неизвестные ε_{k3} ($k = 1, 2, 3$), σ_{jk} ($j, k = 1, 2$), которые должны быть выражены через основные неизвестные:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{13} &= G_{44}\sigma_{13} + G_{45}\sigma_{23}, \quad \varepsilon_{23} = G_{45}\sigma_{13} + G_{55}\sigma_{23}, \\ \varepsilon_{33} &= (\sigma_{33} + q_1 u_1 E_{13} + q_2 u_2 E_{23} + (q_1 u_2 + q_2 u_1) E_{36}) / E_{33}, \\ \sigma_t &= \mathbf{A}^* \cdot \varepsilon_t, \quad A_{jk}^* = A_{jk} - B_{j3} B_{k3} / E_{36}, \quad -\varepsilon_t = (q_1 u_1, q_2 u_2, q_1 u_2 + q_2 u_1)^T. \end{aligned}$$

Чтобы найти собственные значения λ , численно решаем три задачи Коши для системы (9) с начальными условиями:

$$\begin{aligned} u_1^{(k)}(0) &= u_2^{(k)}(0) = \sigma_{33}^{(k)}(0) = 0, \quad k = 1, 2, 3; \\ w^{(1)}(0) &= 1, \quad \sigma_{13}^{(1)}(0) = 0, \quad \sigma_{23}^{(1)}(0) = 0, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} w^{(2)}(0) &= 0, & \sigma_{13}^{(2)}(0) &= 1, & \sigma_{23}^{(2)}(0) &= 0, \\ w^{(3)}(0) &= 0, & \sigma_{13}^{(3)}(0) &= 0, & \sigma_{23}^{(3)}(0) &= 1. \end{aligned}$$

Тогда первый корень уравнения

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \sigma_{13}^{(1)}(1/2) & \sigma_{23}^{(1)}(1/2) & \sigma_{33}^{(1)}(1/2) \\ \sigma_{13}^{(2)}(1/2) & \sigma_{23}^{(2)}(1/2) & \sigma_{33}^{(2)}(1/2) \\ \sigma_{13}^{(3)}(1/2) & \sigma_{23}^{(3)}(1/2) & \sigma_{33}^{(3)}(1/2) \end{vmatrix} = 0$$

дает наименьшее собственное значение $\lambda = \lambda_e$, которое мы считаем точным.

Для периодического решения формула (19) дает

$$(\mu^2 \tilde{D}_0 - \mu^4 \tilde{D}_s)w - \lambda w = 0, \quad \tilde{D}_0(q_1, q_2) = D_0(p_1, p_2), \quad \tilde{D}_s(q_1, q_2) = -D_s(p_1, p_2), \quad (22)$$

где \tilde{D}_0 и \tilde{D}_s — суть постоянные величины. По формуле (22) находим приближенное значение λ_a параметра частоты λ :

$$\lambda_a = \lambda_0(1 - \delta_s), \quad \lambda_0 = \mu^2 \tilde{D}_0, \quad \delta_s = \frac{\mu^2 \tilde{D}_s}{\tilde{D}_0}, \quad (23)$$

где величина λ_0 дает первое приближение, а параметр δ_s учитывает влияние поперечного сдвига. Согласно работам [7–9], особенно в случае, когда величина δ_s не мала, формулу (23) целесообразно заменить более точной формулой:

$$\lambda_a = \frac{\lambda_0}{(1 + \delta_s)}, \quad (24)$$

которая применима также при $\delta_s \sim 1$.

6. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим изгибные колебания симметричной по толщине пластины, состоящей из пяти слоев одинаковой толщины. Первый, третий и пятый слои ортотропны. Третий (средний) слой повернут на угол $\alpha = \pi/2$ по отношению к двум другим слоям. Второй и четвертый слои изотропны, и мы будем менять их жесткость в широких пределах. Модули упругости слоев, входящие в формулы (6), в безразмерном виде представлены в табл. 1, где через N обозначен номер слоя.

Таблица 1 / Table 1

Модули упругости слоев / Elastic moduli of layers

N	E_{11}	E_{22}	E_{33}	$E_{12} = E_{13} = E_{23}$	$E_{44} = E_{55} = E_{66}$
1,5	12.0	2.0	2.0	0.59	0.69
2,4	1.1	1.1	1.1	0.33	0.38
3	1.0	11.0	1.0	0.30	0.35

Массовая плотность всех слоев $\rho = 1$, волновые числа взяты равными $q_1 = 0.6$, $q_2 = 0.4$ и параметр толщины $\mu = 0.1$.

Для модулей упругости второго и четвертого слоев рассматриваем четыре варианта. Для первого варианта модули упругости даны в табл. 1. Модули упругости



остальных вариантов получаются умножением модулей первого варианта на $\eta = 0.1$, $\eta = 0.01$ и $\eta = 0.001$. По формулам парагр. 5 получаем нижеприведенные результаты.

В табл. 2 для 4 вариантов параметра η , служащего мерой относительной жесткости второго и четвертого слоев, представлены соответствующие значения частотного параметра λ и величина сдвигового параметра δ_s . Здесь λ_e — точное значение, найденное в результате численного интегрирования системы (9), λ_0 — первое асимптотическое приближение, λ_a — уточненное приближение, найденное по формуле (24). Во втором и в четвертом столбцах приведены относительные погрешности приближенных величин λ_0 и λ_e по сравнению с точным значением λ_e .

Таблица 2 / Table 2

Зависимость частотного параметра от отношения η модулей упругости
Dependence of the frequency parameter on the ratio of the elastic moduli η

1	2	3	4	5	6	7
η	λ_e	λ_0	$\varepsilon(\%)$	λ_a	$\varepsilon(\%)$	δ_s
1	0.002211	0.002229	0.9	0.002212	0.0	0.0079
0.1	0.001985	0.002073	4.5	0.001986	0.1	0.044
0.01	0.001482	0.002058	38.5	0.001459	1.6	0.41
0.001	0.000511	0.002056	303.0	0.000405	20.9	4.07

Из представленных и им подобных результатов можно заключить, что

(I) первое приближение, основанное на модели Кирхгофа – Лява, дает приемлемые результаты только для многослойных пластин, модули упругости которых имеют один порядок ($\eta \leq 10$);

(II) второе приближение, учитывающее поперечный сдвиг, применимо, если модули упругости слоев изменяются в широких пределах ($\eta \leq 100$);

(III) второе приближение приводит к ошибке, существенно меньшей, чем у первого приближения; в обоих случаях погрешность ε растет вместе со сдвиговым параметром δ_s ;

(IV) в случае весьма большого различия ($\eta \geq 1000$) в жесткостях слоев двумерные модели неприменимы.

В исходных обозначениях частота ω равна

$$\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho_0 l^2}} l, \quad \frac{1}{l^2} = 2\pi \left(\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right), \quad q_1^2 + q_2^2 = 1,$$

где L_1 и L_2 — длины волн в направлениях x_1, x_2 и E — модуль Юнга второго слоя при $\eta = 1$.

Здесь исследована зависимость $\lambda(\eta)$ (см. табл. 2). В общем случае величина λ зависит от других параметров $\mu, q_1, q_2, \rho(z)$ и от модулей упругости слоев.

7. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН И ЧАСТОТЫ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Распространение длинных изгибных волн по симметричной пластине в безразмерной форме описывается соотношениями:

$$\{w, u_1, u_2\}(x_1, x_2, z, t) = \{w, iu_1, iu_2\}(z)e^{iY}, \quad Y = q_1 x_1 + q_2 x_2 - vt, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (25)$$

В предположении, что $q_1^2 + q_2^2 = 1$, вектор $\mathbf{n} = (q_1, q_2)$ описывает направление распространения волны, а v — ее скорость.



После подстановки выражений (25) в уравнения (9) получаем:

$$v = \omega = \sqrt{\lambda}, \tag{26}$$

и как приближенное выражение (24), так и численный алгоритм п. 5 могут быть использованы для вычисления скорости v .

Для симметричной функции все неизвестные функции вещественны. Для несимметричной пластины неизвестные функции комплексны и их мнимые части дают форму волны

$$w = w(z) \cos Y, \quad u_k = u_k(s) \cos(Y + \pi/2 + \alpha_k), \quad k = 1, 2, \tag{27}$$

где α_k — начальные фазы. Для симметричной пластины $\alpha_k = 0$. В работе [11] рассматривается распространение волн для несимметричной (по толщине) балки, для которой $\alpha_k \neq 0$.

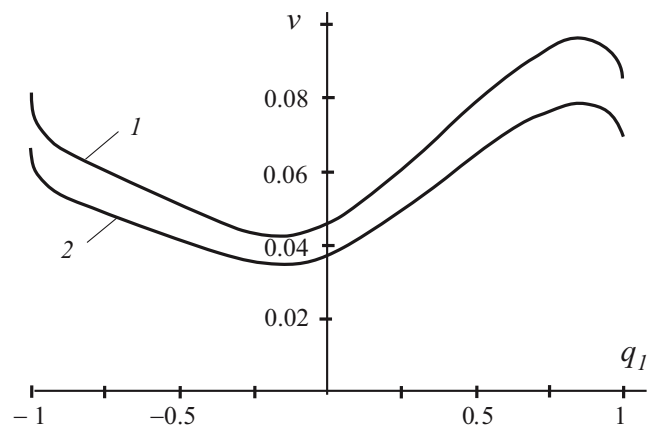
В качестве примера рассмотрим однослойную однородную балку из моноклинного материала с параметрами $\mu = 0.1$, $\rho_0 = 1$ и модулями упругости, входящими в соотношения (6)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 3 & 2.5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для симметричной пластины зависимость $v(q_1)$ скорости распространения волны от направления показана на рисунке (кривая 1). Зависимость получена из соотношения $v = \mu\sqrt{D_0}$, соответствующего первому приближению. Для сравнения (см. кривую 2) рассмотрим несимметричную пластину из функционально градиентного материала с модулями упругости, зависящими от z : $\tilde{\mathbf{A}}^* = (1 - 2z)\mathbf{A}^*$. В этом случае зависимость $v(q_1)$ вычисляется по формуле $v = \mu\sqrt{D_0 - D_*}$, где слагаемое D_* , приведенное в работе [10], учитывает несимметрию пластины в направлении толщины.



Рассмотрим формы колебаний

$$w_1(x_1, x_2) = w_0 \sin q_1 x_1 \sin q_2 x_2, \\ w_2(x_1, x_2) = w_0 \sin(-q_1 x_1) \sin q_2 x_2.$$

Нормальные прогибы, соответствующие этим формам, идентичны. Чтобы объяснить этот эффект, заметим, что тангенциальные перемещения, соответствующие этим частотам, различны (в силу формул (9) $u_k = -\mu q_k z w$).

Функции $v(q_1)$ для симметричной (1) и для несимметричной (2) пластины

Functions $v(q_1)$ for symmetric (1) and for asymmetric (2) plates



Для иллюстрации рассмотрим в первом приближении вынужденные колебания пластины под действием силы $f_3(x_1, x_2, t) = f_3^0 \sin q_1 x_1 \sin q_2 x_2 e^{i\omega t}$. Используя тождество

$$\sin q_1 x_1 \sin q_2 x_2 = \frac{1}{2} (e^{i(q_2 x_2 - q_1 x_1)} - e^{i(q_2 x_2 + q_1 x_1)}),$$

получаем решение

$$w_1(x_1, x_2, t) = \frac{f_3^0}{2} \left(\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \sin q_1 x_1 \sin q_2 x_2 \sin \omega t,$$

содержащее две резонансных частоты $\omega_1 = \mu \sqrt{D_0(-q_1, q_2)}$ и $\omega_2 = \mu \sqrt{D_0(q_1, q_2)}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для исследования колебаний многослойной анизотропной пластины построена двухмерная асимптотическая модель второго порядка точности, учитывающая поперечный сдвиг и обжатие нормали. Погрешность модели оценена путем сравнения с точным решением трехмерной задачи в случае гармонических колебаний. Установлено, что погрешность модели существенно зависит от степени неоднородности пластины по толщине. При слабой неоднородности возможно использование первого асимптотического приближения, основанного на гипотезах Кирхгофа – Лява с использованием модифицированных модулей упругости. При умеренной неоднородности рекомендуется использовать второе приближение, причем учитывать поперечный сдвиг и пренебрегать обжатием нормали.

В первом приближении исследовано распространение длинных изгибных волн в бесконечной пластине и найдена скорость волны в зависимости от направления ее распространения. Частоты изгибных колебаний находятся из того же дисперсионного уравнения, что и скорость распространения волны. Обнаружена интересная особенность частот собственных колебаний: одна и та же форма изгибных колебаний реализуется при двух различных частотах колебаний.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16.51.52025 МНТ-а, 16.01.00580-а).

Библиографический список

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М. : Наука, 1974. 448 с.
2. Родионова В. А., Титаев Б. Ф., Черных К. Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб. : Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1996. 280 с.
3. Аголюян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. : Наука, 1997. 414 с.
4. Reddy J. N. Mechanics of laminated composite plates and shells. CRC Press, 2004. 306 p.
5. Vetukov Y., Kuzin A., Krommer M. Asymptotic splitting of the three-dimensional problem of elasticity for non-homogeneous piezoelectric plates // Int. J. of Solids and Structures. 2011. Vol. 48, iss. 1. P. 12–23. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.09.001>
6. Schnieder P., Kienzler R. An algorithm for the automatization of pseudo reductions of PDE systems arising from the uniform-approximation technique // Shell-like structures. Non-classical theories and applications. Berlin : Springer, 2011. P. 377–390.
7. Tovstik P. E., Tovstik T. P. Generalized Timoshenko – Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction // ZAMM. 2017. Vol. 97, iss. 3. P. 296–308. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201600052>



8. *Tovstik P. E., Tovstik T. P.* An elastic plate bending equation of second-order accuracy // *Acta Mech.* 2017. Vol. 228, iss. 10. P. 3403–3419. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1880-x>
9. *Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Обобщенная модель Тимошенко – Рейсснера для многослойных пластин // *Изв. РАН. МТТ.* 2016. № 5. С. 22–35.
10. *Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Двухмерная модель пластины из анизотропного неоднородного материала // *Изв. РАН. МТТ.* 2017. № 2. С. 32–45.
11. *Товстик П. Е., Товстик Т. П., Наумова Н. В.* Длинноволновые колебания и волны в анизотропной балке // *Вестн. СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия.* 2017. Т. 4(62), вып. 2. С. 323–335. DOI: <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.216>
12. *Morozov N. F., Belyaev A. K., Tovstik P. E., Tovstik T. P.* Two-dimensional equations of the second order accuracy for a multi-layered plate with orthotropic layers // *Doklady Physics.* 2018. Vol. 63, № 11. P. 471–475.
13. *Schnieider P., Kienzler R.* A Reissner-type plate theory for monoclinic material derived by extending the uniform-approximation technique by orthogonal tensor decompositions of *n*th-order gradients // *Meccanica.* 2017. Vol. 52, iss. 9. P. 2143–2167. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-016-0573-1>

Образец для цитирования:

Беляев А. К., Зелинская А. В., Иванов Д. Н., Морозов Н. Ф., Наумова Н. В., Товстик П. Е., Товстик Т. П. Приближенная теория колебаний многослойных анизотропных пластин // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2018. Т. 18, вып. 4. С. 397–411. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-397-411>

Approximate Theory of a Laminated Anisotropic Plate Vibrations

**A. K. Belyaev, A. V. Zelinskaya, D. N. Ivanov, N. F. Morozov,
N. V. Naumova, P. E. Tovstik, T. P. Tovstik**

Alexander K. Belyaev, <https://orcid.org/0000-0002-5934-8138>, Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, 61 Bolshoj Pr., V. O., St. Petersburg 199178, Russia, 13augen@mail.ru

Anna V. Zelinskaya, Saint Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya Nab., St. Petersburg 199034, Russia,

Denis N. Ivanov, <https://orcid.org/0000-0003-1358-3981>, Saint Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya Nab., St. Petersburg 199034, Russia

Nikita F. Morozov, <http://orcid.org/0000-0003-3890-522X>, Saint Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya Nab., St. Petersburg 199034, Russia

Natalia V. Naumova, <https://orcid.org/0000-0003-1918-093X>, Saint Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya Nab., St. Petersburg 199034, Russia, n.v.naumova@spbu.ru

Petr E. Tovstik, <https://orcid.org/0000-0002-2100-7936>, Saint Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya Nab., St. Petersburg 199034, Russia, peter.tovstik@mail.ru

Tatyana P. Tovstik, <https://orcid.org/0000-0001-8944-2347>, Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, 61 Bolshoj Pr., V. O., St. Petersburg 199178, Russia, t_tovstik@mail.ru



The multi-layered plate vibration is investigated. A two-dimensional asymptotic model of the second order accuracy with respect to the small thickness parameter is proposed with account for the transverse shear and the normal fibre extension. The model is appropriate for a monoclinic plate described by 13 elastic moduli which is heterogeneous in the thickness direction. In particular, the model can be applied to a multi-layered plate consisting of orthotropic layers of arbitrary orientation. In this case the elastic moduli are piece-wise constant functions. The elastic and inertia properties of plate are assumed to be constant in the tangential directions. The main achievement of this work is derivation of the equivalent constant coefficients of 2D system of partial differential equations of the second order accuracy. In the first approximation these coefficients can be found based on the Kirchhoff – Love hypotheses on the straight normal, while a more complex asymptotic algorithm is used for second approximation. For a multi-layered plate the influence of transverse shear with alternating hard and soft layers is discussed. More attention is given to a plate which is infinite in the tangential directions. The solution is shown to be essentially simplified since no boundary condition is needed and the solution can be expressed in terms of functions which are harmonic in the tangential directions. For this solution the error of 2D model is estimated by comparison with the numerical solution of the three-dimensional problem of elasticity theory, since for harmonic case it is reduced to one-dimensional equations in the thickness direction. Free and forced bending vibration and long-length bending wave propagation are investigated under harmonic approximation. In general case two different natural frequencies are shown to correspond to a fixed bending mode. The dependence of wave velocity on the wave propagation direction is found out.

Key words: anisotropic multi-layered plate, 2D model of the second order accuracy, bending vibrations and waves in a plate.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects nos. 16.51.52025 MNT-a, 16.01.00580-a).

References

1. Ambartsumyan S. A. *Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek* [General theory of anisotropic shells]. Moscow, Nauka, 1974. 448 p. (in Russian).
2. Rodionova V. A., Titaev B. A., Chernykh K. F. *Prikladnaya teoriya anizotropnykh plastin i obolochek* [Applied theory of anisotropic plates and shells]. St. Petersburg, St. Petersburg Univ. Publ., 1996. 280 p. (in Russian).
3. Agolovyan L. A. *Asimptoticheskaya teoriya anizotropnykh plastin i obolochek* [Asymptotic theory of anisotropic plates and shells]. Moscow, Nauka, 1997. 414 p. (in Russian).
4. Reddy J. N. *Mechanics of laminated composite plates and shells*. CRC Press, 2004. 306 p.
5. Vetukov Y., Kuzin A., Krommer M. Asymptotic splitting of the three-dimensional problem of elasticity for non-homogeneous piezoelectric plates. *Int. J. of Solids and Structures*, 2011, vol. 48, iss. 1, pp. 12–23. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.09.001>
6. Schnieder P., Kienzler R. An algorithm for the automatization of pseudo reductions of PDE systems arising from the uniform-approximation technique. *Shell-like structures. Non-classical theories and applications*. Berlin, Springer, 2011, pp. 377–390.
7. Tovstik P. E., Tovstik T. P. Generalized Timoshenko – Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction. *ZAMM*, 2017, vol. 97, iss. 3, pp. 296–308. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201600052>
8. Tovstik P. E., Tovstik T. P. An elastic plate bending equation of second-order accuracy. *Acta Mech.*, 2017, vol. 228, iss. 10, pp. 3403–3419. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1880-x>



9. Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P. Generalized Timoshenko – Reissner model for a multi-layer plate. *Mechanics of Solids*, 2016, vol. 51, no. 5, pp. 527–537. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654416050034>
10. Tovstik P. E., Tovstik T. P. Two-dimensional model of a plate made of an anisotropic inhomogeneous material. *Mechanics of Solids*, 2017, vol. 52, no. 2, pp. 144–154. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654417020042>
11. Tovstik P. E., Tovstik T. P., Naumova N. V. Long-wave vibrations and waves in anisotropic beam. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), iss. 2, pp. 323–335. DOI: <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.216>
12. Morozov N. F., Belyaev A. K., Tovstik P. E., Tovstik T. P. Two-dimensional equations of the second order accuracy for a multi-layered plate with orthotropic layers. *Doklady Physics*, 2018, vol. 63, no. 11, pp. 471–475.
13. Schneider P., Kienzler R. A Reissner-type plate theory for monoclinic material derived by extending the uniform-approximation technique by orthogonal tensor decompositions of nth-order gradients. *Meccanica*, 2017, vol. 52, iss. 9, pp. 2143–2167. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-016-0573-1>

Cite this article as:

Belyaev A. K., Zelinskaya A. V., Ivanov D. N., Morozov N. F., Naumova N. V., Tovstik P. E., Tovstik T. P. Approximate Theory of a Laminated Anisotropic Plate Vibrations. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 397–411 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-397-411>



Studying of Elastoplastic Properties of Coal Specimens Using Indentation Technique

A. O. Vatulyan, A. A. Lyapin, E. L. Kossovich

Alexander O. Vatulyan, <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>, Institute of Mathematics, Mechanics, and Computer Science named after of I. I. Vorovich, Southern Federal University, 105/42 Bolshaya Sadovaya St., Rostov on Don 344006, Russia, vatulyan@math.rsu.ru

Alexander A. Lyapin, <http://orcid.org/0000-0001-8573-721X>, Institute of Mathematics, Mechanics, and Computer Science named after of I. I. Vorovich, Southern Federal University, 105/42 Bolshaya Sadovaya St., Rostov on Don 344006, Russia, lyapin@sfnu.ru

Elena L. Kossovich, <http://orcid.org/0000-0002-3358-6533>, National University of Science and Technology „MISIS“, 4 Leninskii Ave., Moscow 119991, Russia, e.kossovich@misis.ru

A numerical study on elastoplastic properties in problem of coals specimen nanoindentation by Berkovich pyramid is presented. The stress-strain state of specimen during indentation is calculated using finite element method including complex elastoplastic behaviour on the basis of Drucker-Prager model. The effective axisymmetrical indenter of cone shape is introduced and used for the simulation. The influence of basic geometrical and material parameters of the solid model on the indentation curve is studied. In addition, some new form of indentation curve approximation is proposed. For all the results calculated, the sets of approximation parameters are given. Using modern nanoindentation equipment the number of real experiments were performed and comparison with the mathematical model is presented.

Key words: coal, nanoindentation, material characterization, finite element method, elastoplastic.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-412-420>

INTRODUCTION

The indentation technique for elastic bodies has been used for more than a hundred years and is an effective tool for measuring the various material properties of solids of different nature. Currently, a large number of industrial companies have been using this method in production and expertise, developing and manufacturing of more and more modern indentation equipment that allows controlling a number of experiment parameters: temperature, humidity, and surface quality of the test sample. The method is based on simultaneous measurement of the indentation force and the displacement of the indenter to construct a „ $P-h$ “ (loading-unloading) curve — the basic information for further studying of the material parameters. The determination of the material contact hardness was initially introduced in [1], as the value proportional to the ratio of pressing force and the square of the indentation zone radius. To date, various forms of an indenter are used [2], including irregular forms, such as pyramids of various shapes, cones, and indenters with a smooth surface, such as sphere, cylinder [3]. Following the definition of the contact hardness, for the indifference of the experiment to the shape of indenter, the corresponding parameters must satisfy the requirement of equality of the footprint area under a similar load.

In 1992, the technique was published [4] to measure the hardness of a material on the basis of an indentation experiment, which was subsequently tested and implemented by a multitude of scientists in their studies on the mechanical properties at nano- or microlevels. The main result is the demonstration of a fact that the unloading curve is not linear even at the initial stages, and the proposed technique, taking into account the curvature of the unloading path, allows to determine the material parameters with an accuracy of 5 percent.



It is necessary to distinguish materials investigated by the method of indentation within according to their nature. The matter is that materials of the coal or rocks types are largely different in their mechanical properties in comparison, for example, with metals. This difference lies in the various properties of the material behaviour under hydrostatic pressure. In particular, metals do not reach the zone of plasticity in the space of principal stresses under hydrostatic loading, in contrast to rock-like structures, including coals. This difference can be described by various forms of the yield surface: for such materials like metals, the surface is presented by a cylinder for the Mises model, while for the soil and rock materials it is presented by a cone, and the mechanical properties of such materials could be described by the Mohr – Coulomb model. During Berkovich pyramid indentation in the area of a tip the hydrostatic pressure is formed. Thus, for the correct description of the deformation process of rocks and coals in particular, it is necessary to use the Mohr – Coulomb model.

Significant number of works have been devoted to the identification of mechanical properties for coal rocks [5–8]. By its nature and process of formation, coal is an extremely complex material that has many peculiarities such as anisotropy, rheology, the presence of internal stresses, inhomogeneous properties, fracturing and many others. These significantly complicate the measurement of mechanical properties, because appropriate techniques for conducting the experiment, processing the obtained data, and mathematical models should consider the entire set of factors. Thus, the study of mechanical properties of coal rocks is an extremely unordinary and promising task.

The finite element method allows taking into account the complex geometry of the problem and simultaneously describes realistic physical and mechanical properties of the material in the time of stress-strain state calculation. In the article, the physical model of the sample and the indentation process are realized using ANSYS package. The model geometry describes 1/6 of the Berkovich pyramid, taking into account the planes of symmetry, and the body of the test sample in the form of a prism, with a volume sufficient to disregard the influence of the sample boundaries. In the indentation zone, the mesh size is significantly reduced to achieve sufficient accuracy of the results.

To simulate both bodies, the finite element of SOLID186 type with a 20-node structure is used, which describes changes in the displacement fields, taking into account quadratic behaviour. Each node has three degrees of freedom: displacements along x , y , and z , respectively. The element supports various physical properties of the material, including plasticity and viscoelasticity.

The material properties of the test sample are described by the classical Drucker – Prager model [9], which is applicable to granular materials such as soil, stone, concrete and other materials whose elastoplastic properties depend on hydrostatic pressure. The model uses the approximation of the yield surface in the form of a cone according to the Drucker – Prager law:

$$f(I_1, J_2) = aI_1 + \sqrt{J_2} - b, \quad (1)$$

where: I_1 is hydrostatic-dependent first principal invariants of stress, a characterizes the dependence on hydrostatic pressure, J_2 is the non-zero principal invariant of the deviatoric stress, b is critical stress value.

Deformation of the indenter is described in terms of the linear elastic model with Young's modulus parameter of 865 GPa, Poisson's ratio of 0.17.

1. APPROXIMATION OF CURVES AND EFFECT OF MODEL PARAMETERS

The 3D model for studying the indentation process, even with symmetry taken into account, requires a significant time for calculation. In this case, one can use the simplification of the pyramidal indenter with a similar cone-like, which satisfies the requirement of the equal area of the tip print [10]. For the conical form of the indenter, an axisymmetric model can be constructed that will significantly reduce the calculation time [11]. The results of simulation for the three-dimensional model of the Berkovich pyramid and the axisymmetric model of a conical indenter with the tip angle of 71.8 degrees demonstrated very close values. Thus, the geometry of an effective indenter is chosen and subsequent investigations of the problem will be carried out based on an axisymmetric model.

According to [12], the unloading curves can be approximated by a power-law dependence of the pressing force on the depth, and for various materials the parameters of such power-law approximations are found and published.

In the process of coals testing by the nanoindentation method with the Berkovich pyramid, anomalous cases were observed, when the unloading curve passed above the loading one (see Fig. 1). The fact that work performed while unloading is greater

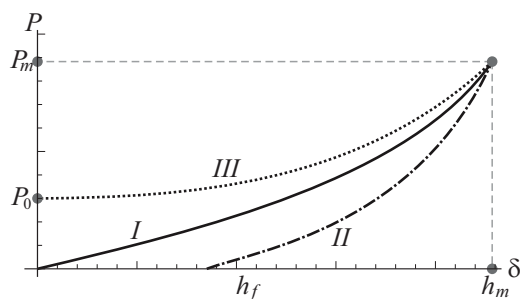


Fig. 1. Structure of the indentation diagram, curve *I* — loading, curve *II* — unloading, curve *III* — abnormal unloading

that while loading part could be explained by some layer delamination due to a local buckling process in the near-surface zone at low loads [13].

In addition, the loading curve also contains sufficient information and can be the subject of research. Thus, we introduce several approximations for the loading, unloading and „anomalous“ unloading curves.

Let us bear in mind that the curves at maximum indentation force $P = P_m$ give the depth of indentation h_m . Taking this into account, one can reduce the number

of unknown parameters from 4 to 2, since P_m and h_m parameters, generally speaking, are known from the experiment. Thus, the approximation functions of the loading and unloading curves can be represented in the form:

$$\begin{aligned}
 P_I(h) &= P_m \left(\frac{h}{h_m} \right)^n, & P_{II}(h) &= P_m \left(\frac{h - h_f}{h_m - h_f} \right)^m, \\
 P_{III}(h) &= (P_m - P_0) \left(\frac{h}{h_m} \right)^l + P_0.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Note that the unknown parameters (n, m, l) of such an approximation are dimensionless, which is physically correct.

Let us now analyse the influence of mechanical and geometric parameters on the results of indentation. As a test sample, we will use the characteristics of fused silica, which is the most commonly used in identification experiments and has known stable characteristics [14].

We give further data on the effect of the Young's modulus parameter on the indentation curve. For the initial values of the problem parameters, we take the following: $E_0 = 73 \text{ GPa}$, $\nu_0 = 0.17$, $R_0 = 20 \text{ nm}$, $a_0 = 0.821$, $b_0 = 4 \text{ GPa}$.



Fig. 2 shows various indentation curves for several values of Young’s modulus, all other parameters of the problem are fixed.

It can be seen, that the influence affects both the loading curve and the unloading part, with the changes starting from the very beginning of the loading process. Along the unloading part, the tangent line coefficient changes from the beginning. Such coefficient is an important parameter used in processing the results of indentation. We also note that the unloading curves intersect at one point, which can also be the subject of a separate analysis.

The corresponding parameters of the approximation functions are given in the Table 1.

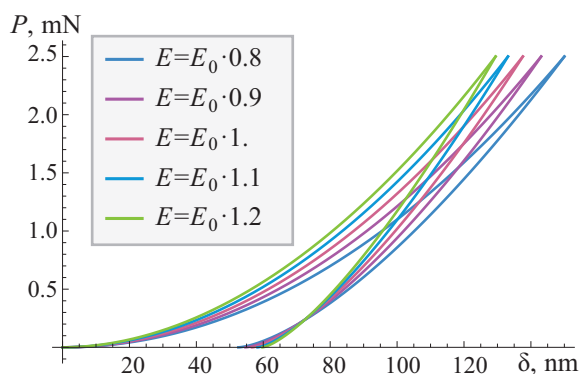


Fig. 2. Influence of Young’s modulus on the indentation curve

Table 1

Approximation parameters of the indentation curves for different values of the Young’s modulus

E (GPa)	n	m	h_m (nm)	P_m (mN)	h_f (nm)
58.4	1.99	1.43	151.13	2.5	54.55
65.7	1.99	1.41	143.9	2.5	56.51
73	2.013	1.41	137.54	2.5	57.685
80.3	2.016	1.39	132.42	2.5	58.78
87.6	2.01	1.38	128.2	2.5	59.82

Poisson’s ratio is the characteristic of the test sample, which must be known in advance before performing the indentation experiment. Fig. 3 shows the results of numerical simulation for various values of the Poisson’s ratio. It can be seen, that the parameter of the tangent line to the initial unloading section is practically not affected by the Poisson’s ratio — the unloading curves are displaced in parallel to each other. At the same time, loading parts differ from each other and can serve as information for determining the value of this parameter.

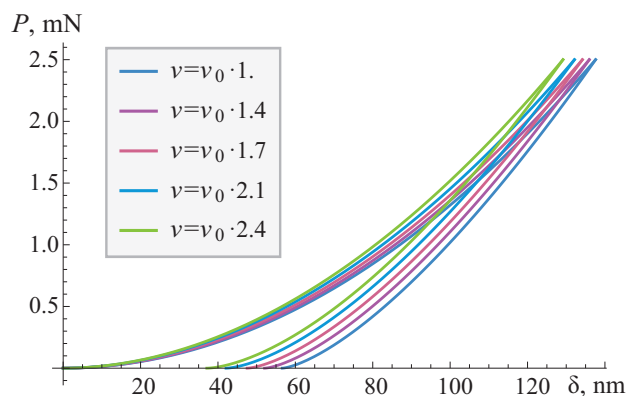


Fig. 3. Influence of Poisson’s ratio on the indentation curve

The corresponding parameters of the approximation functions are given in the Table 2.

Note that after a large number of identification experiments, the indenter tip wears out, which leads to the formation of a rounding in the vicinity of the vertex. Fig. 4 shows the influence of the radius of indenter tip on the loading curves. The effect manifests itself both in the loading and unloading parts.



Table 2

Approximation parameters of the indentation curves for different values of the Poisson's ratio

ν	n	m	h_m (nm)	P_m (mN)	h_f (nm)
0.17	2.014	1.41	137.54	2.5	57.68
0.23	2.014	1.44	135.6	2.5	53.19
0.29	2.01	1.48	133.47	2.5	48.61
0.35	1.99	1.51	131.13	2.5	44.31
0.41	1.98	1.55	128.53	2.5	40.01

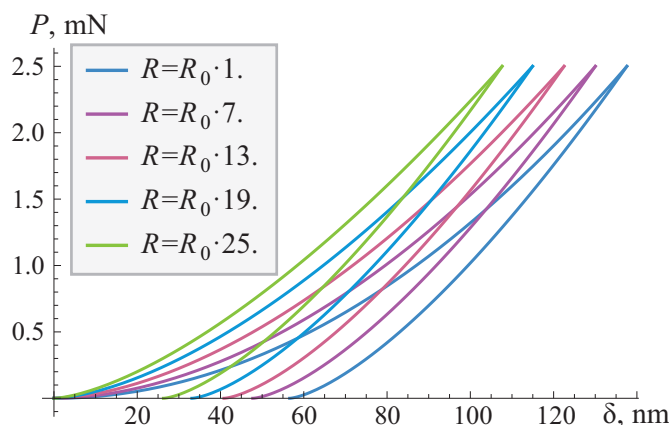


Fig. 4. Influence of the indenter tip radius on the indentation curve

The corresponding parameters of the approximation functions are given in the Table 3.

Table 3

Approximation parameters of the indentation curves for different values of the indenter tip radius

R (nm)	n	m	h_m (nm)	P_m (mN)	h_f (nm)
20	2.01	1.40	137.54	2.5	57.68
140	1.86	1.41	130.06	2.5	50.20
260	1.72	1.41	122.58	2.5	42.40
380	1.60	1.43	115.21	2.5	34.34
500	1.51	1.44	107.8	2.5	26.88

The parameters of the plastic model also have a significant effect on the shape of the indentation curve (Fig. 5). At the initial section of the curve, the effect is insufficient (plastic deformations have not yet spread from the vertex of the indenter), with increasing indentation the difference rises, the unloading curves differ in lesser manner and mainly differ only in the value of the residual deformation, depending on the specific parameter, but the tangential coefficients at the beginning of the unloading segments differ slightly.

The corresponding parameters of the approximation functions for the plasticity parameters a and b are given in the Table 4 and Table 5.

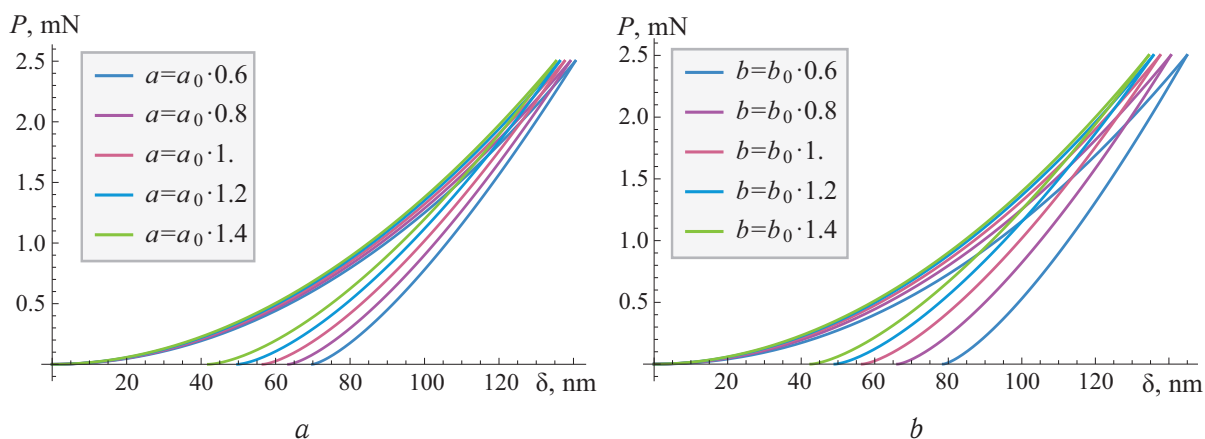


Fig. 5. Influence of the plasticity parameter a and b on the indentation curve

Table 4

Approximation parameters of the indentation curves for different values of the plasticity parameter a

a	n	m	h_m (nm)	P_m (mN)	h_f (nm)
0.4926	1.97	1.32	142.4	2.5	72.08
0.6568	1.99	1.36	139.7	2.5	64.82
0.821	2.013	1.41	137.54	2.5	57.68
0.9852	2.015	1.45	135.89	2.5	50.89
1.1494	2.011	1.52	134.59	2.5	43.53

Table 5

Approximation parameters of the indentation curves for different values of the plasticity parameter b

b (GPa)	n	m	h_m (nm)	P_m (mN)	h_f (nm)
0.49	2.08	1.37	146.69	2.5	80.92
0.66	2.03	1.41	142.11	2.5	68.52
0.82	1.99	1.44	137.54	2.5	57.68
0.99	1.97	1.45	135.18	2.5	49.99
1.1	1.96	1.47	133.7	2.5	43.54

Thus, the influence analysis for various elasto-plastic parameters on indentation curves is carried out, approximations of various types of loading and unloading curves are presented.

2. COMPARISON OF RESULTS FOR NUMERICAL SIMULATION WITH EXPERIMENTAL DATA ON NANOINDENTATION OF COAL SPECIMENS

A group of experiments was conducted on indentation of coal samples of various types. The specimens are thin sections of brown and hard coal and one, which includes both vitrinite and a large number of liptinite inclusions. The measurements were carried out using Hysitron Tribo Indentor TI 700 UBI instrument. The surface of the samples, prepared for indentation, was oriented perpendicularly to the bedding.

The micro-components identification was carried out with the preliminary use of microscopy in transmitted light, as well as microscopy in reflected light. The indentation



areas on the instrument were determined by comparing the areas (micro-components) selected on microscopes with the image obtained with the built-in scanning probe microscope.

The maximal load during the measurements was selected in such a way so to achieve statistically reliable results (elastic moduli) on the vitrinite micro-components. The selection process consisted in selecting an optically homogeneous region and applying the grid with a $10\text{-}\mu\text{m}$ pitch, different forces were set in each of the grid nodes, varying within certain limits ($500\text{--}5000\ \mu\text{N}$ or $5000\text{--}12000\ \mu\text{N}$).

The finite element model contains a number of parameters that must be selected to ensure the similarity of the theoretical indentation curve and experimental one. Fig. 6 shows the results of comparing the model and real data. A good coincidence of the results at the loading part was achieved, while the model and experiment unloading parts are slightly different. Such a difference can be related to the more complex physical and mechanical properties of coal rocks than those represented by a given mathematical model.

The experimental data correspond to thin vitrinite cross-section, the direction of the section is perpendicular to the bedding, the maximum load is 2.5 mN . By the least squares method the approximation parameters of the indentation curve for the coal sample $n = 1.72$, $m = 2.43$ were determined.

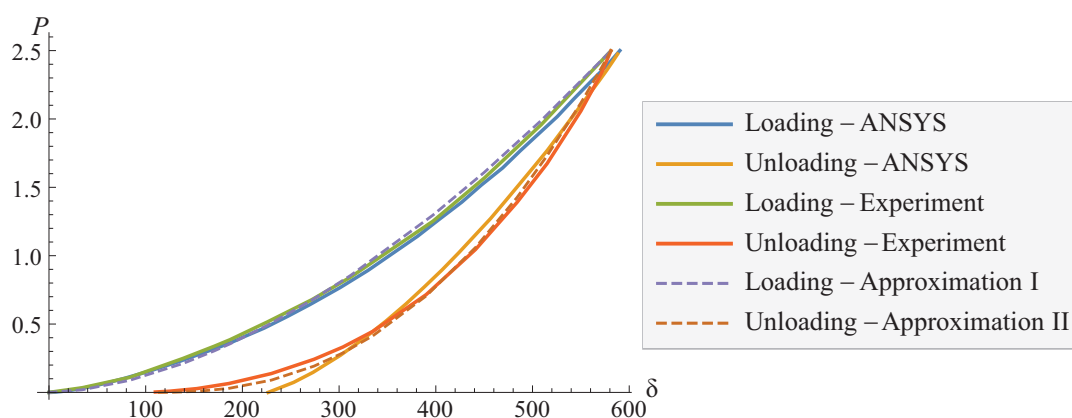


Fig. 6. Comparison of simulation results with experimental data and approximation functions given by (2)

Parameters of the mathematical model: radius of the indenter tip $R = 1200\text{ nm}$, Young's modulus of the sample $E = 2.7\text{ GPa}$, Poisson's ratio $\nu = 0.37$, parameters of the Drucker – Prager elastoplastic model $a = 0.721$, $b = 0.14\text{ GPa}$.

CONCLUSION

Thus, the finite element model of the nanoindentation process for a coal sample is constructed taking into account the material elastoplastic properties described by the Drucker – Prager model; a number of numerical experiments were carried out; the influence of the elastoplastic and geometric parameters of the model on the loading curve of the sample is studied. With the use of modern experimental equipment, a number of full-scale experiments on the indentation of coal sections was carried out, the curves obtained are approximated by the model curves for determining the parameters of the computational model. The results demonstrated adequate convergence of the model and experiment, but also require the introduction of additional physical properties into the



model for a more detailed description of all the phenomena during the process of coal specimens indentation.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 16-17-10217).

References

1. Meyer E. Untersuchungen über Härteprüfung und Härte. *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure*, 1908, vol. 52, pp. 645–654.
2. Chang A. C., Liu B. H. Modified flat-punch model for hyperelastic polymeric and biological materials in nanoindentation. *Mechanics of Materials*, 2018, vol. 118, pp. 17–21. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2017.12.010>
3. Zhankun Sun, Fuguo Li, Jun Cao, Xinkai Ma, Jinghui Li. Study on concavity-convexity transition of loading curve for spherical indentation. *Mechanics of Materials*, 2017, vol. 114, pp. 107–118. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2017.07.006>
4. Oliver W. C., Pharr G. M. An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments. *J. Mater. Res.*, 1992, vol. 7, iss. 6, pp. 1564–1583. DOI: <https://doi.org/10.1557/JMR.1992.1564>
5. Das B. The effect of load on Vicker's indentation hardness of coal. *International Journal of Rock Mechanics and Mining. Sciences & Geomechanics Abstracts*, 1972, vol. 9, iss. 6, pp. 783–788. DOI: [https://doi.org/10.1016/0148-9062\(72\)90036-8](https://doi.org/10.1016/0148-9062(72)90036-8)
6. Kossovich E., Epshtein S., Dobryakova N., Minin M., Gavrilova D. Mechanical properties of thin films of coals by nanoindentation. In: Karev V., Klimov D., Pokazeev K. (eds.) *PM-MEEP 2017: Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes*. Springer Geology. Springer, Cham, 2018, pp. 45–50. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-77788-7_6
7. Kossovich E. L., Epshtein S. A., Shkuratnik V. L., Minin M. G. Perspectives and problems of modern depth-sensing indentation techniques application for diagnostics of coals mechanical properties. *Gornyi Zhurnal*, 2017, no. 12, pp. 25–30 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.17580/gzh.2017.12.05>
8. Kossovich E., Dobryakova N., Epshtein S., Belov D. Mechanical properties of coal microcomponents under continuous indentation. *Journal of Mining Science*, 2016, vol. 52, iss. 5, pp. 906–912. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1062739116041382>
9. Drucker D. C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1952, vol. 10, no. 2, pp. 157–165.
10. Hernot X., Bartier O., Mauvoisin G., Collin J.-M. A universal formulation for indentation whatever the indenter geometry. *Mechanics of Materials*, 2015, vol. 81, pp. 101–109. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2014.11.006>
11. Shim S., Oliver W., Pharr G. A critical examination of the berkovich vs. conical indentation based on 3d finite element calculation. *MRS Proceedings*, 2004, vol. 841, R9.5. DOI: <https://doi.org/10.1557/PROC-841-R9.5>
12. Oliver W. C., Pharr G. M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology. *J. Mater. Res.* 2004, vol. 19, iss. 1, pp. 3–20. DOI: <https://doi.org/10.1557/jmr.2004.19.1.3>
13. Vatul'yan A. O., Kossovich E. L., Plotnikov D. K. Some specific characteristics of indentation of cracked layered structures. *Mechanics of Solids*, 2017, vol. 52, iss. 4, pp. 429–434. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654417040094>
14. Gadelrab K. R., Bonilla F. A., Chiesa M. Densification modeling of fused silica under nanoindentation. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 2012, vol. 358, iss. 2, pp. 392–398. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jnoncrysol.2011.10.011>



Cite this article as:

Vatulyan A. O., Lyapin A. A., Kossovich E. L. Studying of Elastoplastic Properties of Coal Specimens Using Indentation Technique. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 412–420. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-412-420>

УДК 539.37

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ УГОЛЬНЫХ ПОРОД НА ОСНОВЕ МЕТОДА ИНДЕНТИРОВАНИЯ

А. О. Ватульян, А. А. Ляпин, Е. Л. Коссович

Ватульян Александр Ованесович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия, 344006, Ростов-на-Дону, Б. Садовая, 105/42, vatulyan@math.rsu.ru
Ляпин Александр Александрович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия, 344006, Ростов-на-Дону, Б. Садовая, 105/42, lyapin@sfedu.ru
Коссович Елена Леонидовна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, НИИЛ «Физико-химии углей» НИТУ «МИСиС», Россия, 119991, Москва, Ленинский просп., 4, e.kossovich@isis.ru

Проведено исследование упругопластических свойств образца на основе метода наноиндентирования пирамидой Берковича. Напряженно-деформированное состояние образца в процессе индентирования определено на основе метода конечного элемента с учетом упругопластического поведения материала, описываемого моделью Друкера – Прагера. Введена эффективная форма индентора в виде конуса, раствор которого был определен из анализа трехмерной и осесимметричной задач. Изучено влияние основных геометрических и материальных параметров упругой модели на форму кривой нагружения. Предложены законы аппроксимации кривых индентирования, параметры которых определены и представлены для всех вычислительных экспериментов. С применением современного экспериментального оборудования проведены эксперименты по индентированию реальных образцов угля, проведено сравнение с вычислительной моделью.

Ключевые слова: уголь, наноиндентирование, определение свойств материала, метод конечного элемента, упругопластичность.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-17-10217).

Образец для цитирования:

Vatulyan A. O., Lyapin A. A., Kossovich E. L. Studying of Elastoplastic Properties of Coal Specimens Using Indentation Technique [Ватульян А. О., Ляпин А. А., Коссович Е. Л. Исследование упругопластических свойств угольных пород на основе метода индентирования] // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 412–420. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-412-420>



УДК 539.3

О НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ ИНДЕНТИРОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПОКРЫТИЙ

А. О. Ватульян, Д. К. Плотников., А. А. Поддубный

Ватульян Александр Ованесович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия, 344006, Ростов-на-Дону, Б. Садовая, 105/42, vatulyan@math.rsu.ru
Плотников Дмитрий Константинович, аспирант кафедры теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия, 344006, Ростов-на-Дону, Б. Садовая, 105/42, dplotnikov@sfedu.ru

Поддубный Алексей Андреевич, аспирант кафедры теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия, 344006, Ростов-на-Дону, Б. Садовая, 105/42, poddubny_sfedu@mail.ru

В работе представлен ряд приближенных моделей деформирования неоднородной упругой полосы, отражающих особенности распределения свойств неоднородной структуры по толщине. В основе моделей лежат гипотезы о характере изменения компонент поля перемещений, позволяющие рассматривать произвольные законы неоднородности: непрерывные, а также разрывные или имеющие сильную градиентность. Построены решения контактной задачи для разных законов неоднородности. Проведен сравнительный анализ моделей, выполнено сравнение результатов решений с решением, построенным на основе конечно-элементной модели.

Ключевые слова: индентирование, покрытие, функционально-градиентный материал, неоднородная полоса.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-421-432>

ВВЕДЕНИЕ

При производстве различных изделий с целью улучшения их эксплуатационных характеристик широко применяется нанесение покрытий. Защитные и упрочняющие покрытия используются при изготовлении деталей машин, различных элементов инженерных конструкций, режущего инструмента, медицинских приборов и обеспечивают возможность создания изделий повышенной прочности, износостойкости, трещиностойкости, позволяют добиться улучшения трибологических свойств, характеристик теплопроводности, возможности эксплуатации в экстремальных температурных условиях и др. [1].

В настоящее время одним из наиболее широко применяемых и быстро развивающихся типов покрытий являются покрытия из функционально-градиентных материалов. Отличительной особенностью таких покрытий является переменный состав и изменение свойств с глубиной покрытия. Существует множество разнообразных способов нанесения градиентных покрытий на подложку: вакуумное напыление (физическое осаждение из паровой фазы), химическое осаждение из паровой фазы, импульсное лазерное напыление, электрофоретическое осаждение и др. [1, 2].

Эффективность применения градиентных покрытий зависит от знания свойств получаемой неоднородной структуры, поэтому важным этапом в разработке покрытий



является контроль их характеристик. Отметим, что для определения приповерхностных свойств различных материалов, в том числе покрытий, широко применяются методы индентирования [3, 4].

Как правило, исследование контактных задач основано на решении интегрального уравнения с нерегулярным ядром [5]. При исследовании задач о контактном взаимодействии для неоднородных структур ядро интегрального уравнения не может быть найдено в аналитическом виде и строится либо численно, либо на основе приближенных моделей. В [6] разработан численно-аналитический метод построения и решения интегральных уравнений контактных задач теории упругости для непрерывно-неоднородного слоя и полупространства. В [7] представлен численно-аналитический метод решения контактной задачи для функционально-градиентного покрытия, лежащего на упругом полупространстве.

Другим способом исследования контактных задач является построение упрощенных моделей, позволяющих строить ядра интегральных уравнений в аналитическом виде. В [8] проведен асимптотический анализ решения задачи о равновесии однородной упругой полосы в предположении о малости толщины полосы. На его основе построен ряд приближенных моделей контактного взаимодействия для тел с тонкими покрытиями и прослойками. Решение контактных задач на основе построенных моделей приводит к исследованию некоторых операторных уравнений.

В [9] исследована контактная задача для неоднородной упругой полосы, построена приближенная модель, в основе которой лежат гипотезы о линейном изменении компонент вектора перемещений по толщине полосы. Построено в аналитическом виде решение контактной задачи для произвольных непрерывных законов неоднородности.

В настоящей работе предложены некоторые подходы к исследованию задач о контактном взаимодействии для неоднородных сред. Представлен ряд моделей деформирования неоднородной упругой полосы, свойства которой могут изменяться как непрерывно, так и разрывным образом, осуществлен сравнительный анализ.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В рамках плоской постановки рассмотрим задачу о контактном взаимодействии жесткого штампа параболической формы с неоднородной упругой полосой толщины h , жестко сцепленной с недеформируемым основанием. Свяжем с полосой прямоугольную систему координат (x_1, x_3) с началом в основании полосы, ось x_3 направлена вверх. Коэффициенты Ламе являются произвольными положительными функциями координаты x_3 : $\lambda = \lambda(x_3)$, $\mu = \mu(x_3)$.

Уравнения равновесия и определяющие соотношения плоской задачи имеют вид

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad i, j = 1, 3, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda(x_3) u_{k,k} \delta_{ij} + 2\mu(x_3) \varepsilon_{ij}, \quad (3)$$

где u_i — компоненты вектора перемещений, δ_{ij} — символ Кронекера.

Считая, что трение между контактными поверхностями штампа и полосы отсут-



ствуем, сформулируем граничные условия задачи:

$$u_1(x_1, 0) = u_3(x_1, 0) = 0, \quad \sigma_{13}(x_1, h) = 0, \quad (4)$$

$$\sigma_{33}(x_1, h) = 0, \quad |x_1| > a, \quad u_3(x_1, h) = \delta - \frac{1}{2R}x_1^2, \quad |x_1| \leq a, \quad (5)$$

где a — размер площадки контакта, δ и R — внедрение и радиус кривизны параболического штампа соответственно.

Также должно быть выполнено условие равновесия штампа:

$$P = \int_{-a}^a \sigma_{33}(x_1, h) dx_1. \quad (6)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу о действии нормальной нагрузки, локализованной на отрезке $[-a, a]$, на верхнюю границу полосы:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(x_1, h) &= p_*, \\ p_* &= p(x_1) \quad |x_1| \leq a, \quad p_* = 0 \quad |x_1| > a. \end{aligned} \quad (7)$$

Для удобства обезразмерим задачу, введя безразмерные параметры следующим образом:

$$\begin{aligned} x_i &= \xi_i h, \quad u_i = \hat{u}_i h, \quad \sigma_{ij} = \mu_0 \hat{\sigma}_{ij}, \\ a &= \beta h, \quad r = Rh, \quad \delta = \delta_* h, \\ \lambda &= \mu_0 f_1, \quad \mu = \mu_0 f_2, \quad p = \mu_0 q, \end{aligned} \quad (8)$$

где μ_0 — характерное значение модуля сдвига полосы, например $\mu_0 = \max_{0 \leq x_3 \leq h} \mu(x_3)$.

2. МОДЕЛЬ 1

В [9] представлена приближенная модель деформирования неоднородной упругой полосы. В основе модели лежит предположение о линейном характере изменения компонент вектора перемещений по вертикальной координате, а именно

$$\hat{u}_1 = \xi_3 u(\xi_1), \quad \hat{u}_3 = \xi_3 w(\xi_1). \quad (9)$$

Гипотезы (9) удовлетворяют граничным условиям при $\xi_3 = 0$, функции $u(\xi_1)$ и $w(\xi_1)$ представляют собой перемещения верхней границы полосы. С помощью вариационного принципа Лагранжа построено операторное уравнение, связывающее вертикальное смещение верхней границы полосы с нормальной нагрузкой

$$b_2 w^{IV} - b_1 w'' + b_0 w = -a_1 q'' + a_0 q \quad (10)$$

и стыковые условия на границе области контакта

$$\begin{aligned} u_-(\pm\beta) &= u_+(\pm\beta), \quad u'_-(\pm\beta) = u'_+(\pm\beta), \\ w_-(\pm\beta) &= w_+(\pm\beta), \quad w'_-(\pm\beta) = w'_+(\pm\beta), \end{aligned} \quad (11)$$

где индексами «−» и «+» обозначены решения в области контакта и вне ее; параметры a_i, b_i зависят от законов неоднородности полосы [9].



Решение уравнения (10) должно удовлетворять условиям (11), а также условиям

$$w \rightarrow 0 \quad (|\xi_1| \rightarrow \infty), \quad q = 0 \quad (|\xi_1| > \beta), \quad w = \delta_* - \frac{1}{2r} \xi_1^2 \quad (|\xi_1| \leq \beta). \quad (12)$$

Пользуясь симметрией задачи, построим решение только для значений $\xi_1 > 0$. В области $\xi_1 > \beta$ примем $q = 0$ и решение дифференциального уравнения относительно неизвестной функции w , убывающее при $\xi_1 \rightarrow \infty$, имеет вид

$$w(\xi_1) = C_1 e^{-\lambda_1(\xi_1 - \beta)} + C_2 e^{-\lambda_2(\xi_1 - \beta)}, \quad \lambda_{1,2} = \left[\frac{1}{2b_2} \left(b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_0 b_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

Полагая в соотношении (10) $w = \delta_* - \frac{1}{2r} \xi_1^2$ в зоне контакта $0 \leq \xi_1 \leq \beta$, получим с учетом четности контактное напряжение в виде

$$q(\xi_1) = C_3 \operatorname{ch}(k\xi_1) + B_1 \xi_1^2 + B_0, \quad (14)$$

где

$$B_0 = \frac{1}{ra_1 k^2} \left(b_1 - \frac{b_0}{k^2} + b_0 \delta_* r \right), \quad B_1 = -\frac{b_0}{2ra_1 k^2}, \quad k^2 = \frac{a_0}{a_1}.$$

Из стыковых условий (11) найдем неизвестные C_1, C_2, C_3 , а также установим связь между величиной площадки контакта и глубиной внедрения штампа. Связь между силой, действующей на штамп, и глубиной внедрения определяется из условия равновесия штампа. В аналитическом виде окончательно получим:

$$\delta_* = r^{-1} \left(F_1(\beta) + \frac{1}{2} \beta^2 \right), \quad P = r^{-1} \left(F_2(\beta) + p_1 \beta^3 + p_0 \beta \right), \quad (15)$$

где приняты обозначения

$$F_1(\beta) = \frac{\beta s_2 \operatorname{cth} k \beta + \beta s_1 + s_0}{c_1 \operatorname{cth} k \beta + c_2}, \quad F_2(\beta) = -\frac{2 \beta^2 b_0 s_2 \operatorname{cth} k \beta + \beta^2 b_0 s_0 + \beta s_3 + s_4}{a_0 (c_1 \operatorname{cth} k \beta + c_2)}$$

$$p_0 = 2 \frac{b_2 - b_1}{a_0}, \quad p_1 = -\frac{2 b_0}{3 a_0},$$

причем коэффициенты c_i, s_i зависят от a_i, b_i .

Отметим, что найденное контактное давление не обращается в ноль на границе области контакта. Такое поведение наблюдается для некоторых приближенных моделей, рассмотренных в [8].

3. МОДЕЛЬ 2

Модель, представленная в предыдущем параграфе, основана на линейных по толщине гипотезах и достаточно адекватно описывает деформирование непрерывно-неоднородной полосы, однако такой подход не позволяет учесть возможный разрывный характер законов неоднородности полосы. Рассмотрим другую модель деформирования неоднородной полосы. В качестве гипотез о характере компонент поля перемещений примем следующие:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= \psi_1(\xi_3) u(\xi_1), & \hat{u}_3 &= \psi_3(\xi_3) w(\xi_1), \\ \psi_1(\xi_3) &= g_1(\xi_3)/g_1(1), & \psi_3(\xi_3) &= g_3(\xi_3)/g_3(1), \end{aligned} \quad (16)$$

$$g_1(\xi_3) = \int_0^{\xi_3} \frac{1}{f_2} d\xi_3, \quad g_3(\xi_3) = \int_0^{\xi_3} \frac{1}{f_1 + 2f_2} d\xi_3.$$



Принятые гипотезы асимптотически удовлетворяют уравнениям равновесия, когда величина области контакта велика по сравнению с толщиной полосы. Отметим, что гипотезы (16) содержат параметры Ламе и, таким образом, законы неоднородности полосы влияют на характер изменения перемещений по толщине. Например, в случае однородной полосы компоненты вектора перемещений представляют собой линейные по ξ_3 функции и совпадают с (9); для полосы, состоящей из нескольких однородных слоев, перемещения являются кусочно-линейными по толщине.

Воспользуемся приближенным подходом, изложенным в [8]. Введем безразмерный функционал потенциальной энергии:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (A_{11}u'^2 + 2(A_{12}u'w + A_{21}uw') + A_{20}w^2 + A_{10}u^2 + A_{22}w'^2) dx_1 - \int_{-\beta}^{\beta} qw dx_1, \quad (17)$$

где коэффициенты A_{ij} определяются формулами

$$\begin{aligned} A_{10} &= \int_0^1 f_2 \psi_1'^2 d\xi_3, & A_{11} &= \int_0^1 (f_1 + 2f_2) \psi_1^2 d\xi_3, & A_{12} &= \int_0^1 f_1 \psi_1 \psi_3' d\xi_3, \\ A_{20} &= \int_0^1 (f_1 + 2f_2) \psi_3'^2 d\xi_3, & A_{21} &= \int_0^1 f_2 \psi_1' \psi_3 d\xi_3, & A_{22} &= \int_0^1 f_2 \psi_3^2 d\xi_3. \end{aligned} \quad (18)$$

По структуре функционал (17) совпадает с функционалом для модели 1 [8], и все выкладки, проведенные в парагр. 2, справедливы и для модели с гипотезами (16), а коэффициенты операторного уравнения задаются выражениями

$$\begin{aligned} a_0 &= A_{10}, & a_1 &= A_{11}, & b_0 &= A_{10}A_{20}, \\ b_1 &= A_{10}A_{22} + A_{11}A_{20} - (A_{12} - A_{21})^2, & b_2 &= A_{11}A_{22}. \end{aligned} \quad (19)$$

4. МОДЕЛЬ 3

Вычислительные эксперименты для моделей 1 и 2 показали, что значения горизонтальной компоненты перемещения \hat{u}_1 на порядок меньше, чем \hat{u}_3 , поэтому можно рассмотреть более простую модель [10], в которой принято

$$\hat{u}_1 = 0, \quad \hat{u}_3 = \psi_3(\xi_3)w(\xi_1). \quad (20)$$

Функционал потенциальной энергии с учетом (20) упрощается и принимает вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (A_{20}w^2 + A_{22}w'^2) dx_1 - \int_{-\beta}^{\beta} qw dx_1. \quad (21)$$

Аналогично предыдущим пунктам получим операторное уравнение и стыковые условия:

$$-A_{22}w'' + A_{20}w = q, \quad (22)$$



$$w_-(\pm\beta) = w_+(\pm\beta), \quad w'_-(\pm\beta) = w'_+(\pm\beta). \quad (23)$$

Связь внедрения и площадки контакта для данной модели имеет вид

$$\delta(\beta) = \frac{1}{2r} \left(\beta^2 + \frac{2}{m}\beta \right), \quad m^2 = \frac{A_{20}}{A_{22}}, \quad (24)$$

зависимость безразмерной силы от величины области контакта дается формулой

$$P_*(\beta) = \frac{2}{r} \left(-\frac{1}{3}A_{20}\beta^3 + \frac{1}{m}A_{20}\beta^2 + A_{22}\beta \right). \quad (25)$$

5. МОДЕЛЬ 4

Приведенные выше приближенные модели достаточно адекватны, когда упругие характеристики полосы изменяются непрерывным образом. Однако наибольший интерес представляют собой задачи для покрытий, свойства которых терпят разрывы. Модель 1 предполагает линейное изменение перемещений по всей толщине полосы и не позволяет корректно описать структуру с разрывными свойствами. В модели 2 нарушается стыковка по компонентам напряжений в точках разрыва свойств полосы.

Исследуем задачу для полосы, состоящей из двух полос (полоса 1 и 2). Свойства каждой из полос могут изменяться произвольным гладким образом по толщинной координате, однако будем считать, что при переходе через границу раздела параметры Ламе полосы имеют разрыв. Для двухслойной полосы безразмерный функционал потенциальной энергии запишем в виде

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \frac{1}{2} \int_{S_1} \hat{\sigma}_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dS_1 + \frac{1}{2} \int_{S_2} \hat{\sigma}_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dS_2 - \int_{-\beta}^{\beta} q \hat{u}_3(\xi_3, 1) d\xi_1. \quad (26)$$

В качестве гипотез о характере компонент поля перемещений примем кусочно-линейные законы:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1^{(1)} &= \frac{\xi_3}{h_1} u(\xi_1), & \hat{u}_3^{(1)} &= \frac{\xi_3}{h_1} w(\xi_1), \\ \hat{u}_1^{(2)} &= -\frac{\xi_3 - 1}{h_2} u(\xi_1) + \frac{\xi_3 - h_1}{h_2} U(\xi_1), & \hat{u}_3^{(2)} &= -\frac{\xi_3 - 1}{h_2} w(\xi_1) + \frac{\xi_3 - h_1}{h_2} W(\xi_1), \end{aligned} \quad (27)$$

где h_1, h_2 — толщины полос, отнесенные к общей толщине полосы. Функции $u(\xi_1)$ и $w(\xi_1)$ являются безразмерными смещениями на границе слоев при $\xi_3 = h_1$, а $U(\xi_1)$ и $W(\xi_1)$ — безразмерные компоненты перемещения верхней границы полосы при $\xi_3 = 1$.

Потребуем выполнения условий сопряжения на границе полос для компонент вектора напряжений $\hat{\sigma}_{13}, \hat{\sigma}_{33}$

$$\hat{\sigma}_{13}^{(1)} |_{\xi_3=h_1} = \hat{\sigma}_{13}^{(2)} |_{\xi_3=h_1}, \quad \hat{\sigma}_{33}^{(1)} |_{\xi_3=h_1} = \hat{\sigma}_{33}^{(2)} |_{\xi_3=h_1},$$

что дает соотношения

$$U = \left(1 + \frac{h_2}{h_1} G_1 \right) u - h_2 (1 - G_1) w', \quad W = h_2 G_2 u' + \left(1 + \frac{h_2}{h_1} G_3 \right) w. \quad (28)$$



$$G_1 = \frac{f_2^{(1)}}{f_2^{(2)}} \Big|_{\xi_3=h_1}, \quad G_2 = \frac{f_1^{(1)} - f_1^{(2)}}{f_1^{(2)} + 2f_2^{(2)}} \Big|_{\xi_3=h_1}, \quad G_3 = \frac{f_1^{(1)} + 2f_2^{(1)}}{f_1^{(2)} + 2f_2^{(2)}} \Big|_{\xi_3=h_1},$$

$\hat{\lambda}_i, \hat{\mu}_i, i = 1, 2$ — безразмерные параметры Ламе полос 1 и 2.

Исключив из (27) с учетом (28) функции U, W , получим в полосе 2 следующие представления:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1^{(2)} &= \left[1 + \frac{1}{h_1} (\xi_3 - h_1) G_1 \right] u - (\xi_3 - h_1) (1 - G_1) w', \\ \hat{u}_3^{(2)} &= (\xi_3 - h_1) G_2 u' + \left[1 + \frac{1}{h_1} (\xi_3 - h_1) G_3 \right] w. \end{aligned} \tag{29}$$

После подстановки соотношений (27), (29) и интегрирования по толщинной координате получим, что функционал (26) примет вид

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (A_{10}u^2 + A_{11}u'^2 + A_{12}u''^2 + 2A_{13}q_*u' + 2A_{14}u''u + A_{20}w^2 + A_{21}w'^2 + \\ &+ A_{22}w''^2 + 2A_{23}q_*w + 2A_{24}w''w + 2A_{31}u'w + 2A_{32}uw' + 2A_{33}u'w'' + 2A_{34}u''w') d\xi_1, \end{aligned}$$

где параметры A_{ij} — некоторые интегральные характеристики законов неоднородности, например

$$A_{10} = \frac{1}{h_1^2} \left(G_1^2 \int_{h_1}^1 f_2^{(2)} d\xi_3 + \int_0^{h_1} f_2^{(1)} d\xi_3 \right), \quad A_{12} = G_2^2 \int_{h_1}^1 f_2^{(2)} (\xi_3 - h_1)^2 d\xi_3.$$

С помощью вариационного принципа Лагранжа, варьируя упрощенный функционал, получим систему двух дифференциальных уравнений четвертого порядка с постоянными коэффициентами, связывающую компоненты смещения на границе полос с нагрузкой на верхней границе:

$$\begin{aligned} A_{12}u^{IV} + (A_{34} - A_{33})w''' + (2A_{14} - A_{11})u'' + (A_{32} - A_{31})w' + A_{10}u &= A_{13}q', \\ A_{22}w^{IV} - (A_{34} - A_{33})u''' + (2A_{24} - A_{21})w'' - (A_{32} - A_{31})u' + A_{20}w &= -A_{23}q. \end{aligned}$$

Применяя преобразование Фурье, установим связь между трансформантами компонент перемещений и нагрузкой в виде

$$\tilde{u} = K_u(\alpha)\tilde{q}, \quad \tilde{w} = K_w(\alpha)\tilde{q}.$$

Воспользовавшись соотношениями (28), построим передаточную функцию для данной задачи:

$$\tilde{W} = K(\alpha)\tilde{q}, \quad K(\alpha) = \frac{a_3\alpha^6 + a_2\alpha^4 + a_1\alpha^2 + a_0}{b_4\alpha^8 + b_3\alpha^6 + b_2\alpha^4 + b_1\alpha^2 + b_0},$$

и операторное уравнение, связывающее вертикальное смещение на верхней границе с нагрузкой:

$$b_4W^{(8)} - b_3W^{(6)} + b_2W^{(4)} - b_1W'' + b_0W = -a_3q^{(6)} + a_2q^{(4)} - a_1q'' + a_0q. \tag{30}$$



На основе операторного уравнения (30) можно сформулировать интегральное уравнение контактной задачи:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\beta}^{\beta} k(\eta - \xi_1) q(\eta) d\eta = -\delta_* + \frac{1}{2r} \xi_1^2, \quad (31)$$

причем ядро интегрального уравнения (31) представимо в форме интеграла Фурье:

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha) e^{i\alpha t} d\alpha, \quad t = \eta - \xi_1,$$

или в виде

$$k(t) = 2\pi i \sum_{k=1}^4 R_k e^{iz_k |t|}, \quad (32)$$

где z_k — полюса рациональной функции $K(\alpha)$, лежащие в верхней полуплоскости, и $R_k = \operatorname{Res}_{\alpha=z_k} K(\alpha)$.

Аналогичным изложенному в парагр. 2 образом строится решение операторного уравнения в контактной зоне и вне области контакта. В силу громоздкости это решение не приведено.

6. СРАВНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ МОДЕЛЕЙ

Ниже приведены результаты вычислительных экспериментов для описанных в работе моделей, а также проведено сравнение приближенных решений с решениями, построенными на основе конечно-элементной (КЭ) модели для прямоугольника конечной длины $2l$ с соотношением $h/l = 0.2$. Решения на основе метода конечных элементов (МКЭ) построены с помощью КЭ пакета ANSYS. Контактная задача решена для непрерывных (модели 1–3) и разрывных (модели 2, 4) законов неоднородности. В КЭ модели непрерывные законы неоднородности смоделированы путем создания многослойного тела (10 слоев) с различными значениями параметров Ламе в слоях.

На рис. 1 представлено сравнение результатов решения контактной задачи для непрерывных законов неоднородности. В качестве примера выбран закон $f_2 = 0.25(1 + 3\xi_3^3)$, $f_1 = 1.63f_2$, что соответствует значению коэффициента Пуассона $\nu = 0.31$. Вычисления производились для $r = 10$.

Приближенные модели дают завышенное значение силы при одинаковом внедрении и большие значения деформации по сравнению с МКЭ. Кривые вертикального смещения для моделей 1–3 отличаются незначительно, однако модель 1 дает существенно большее завышение силы по сравнению с моделями 2, 3. На рис. 1, а видно, что приближенные модели не отражают эффекта возвышения поверхности вблизи контактной зоны. Отметим, что для приведенного примера результаты решения контактной задачи для моделей 2 и 3 практически совпадают, что говорит о целесообразности использования более простых моделей, не учитывающих компоненту перемещения \hat{u}_1 для полосы с непрерывно изменяющимися свойствами.

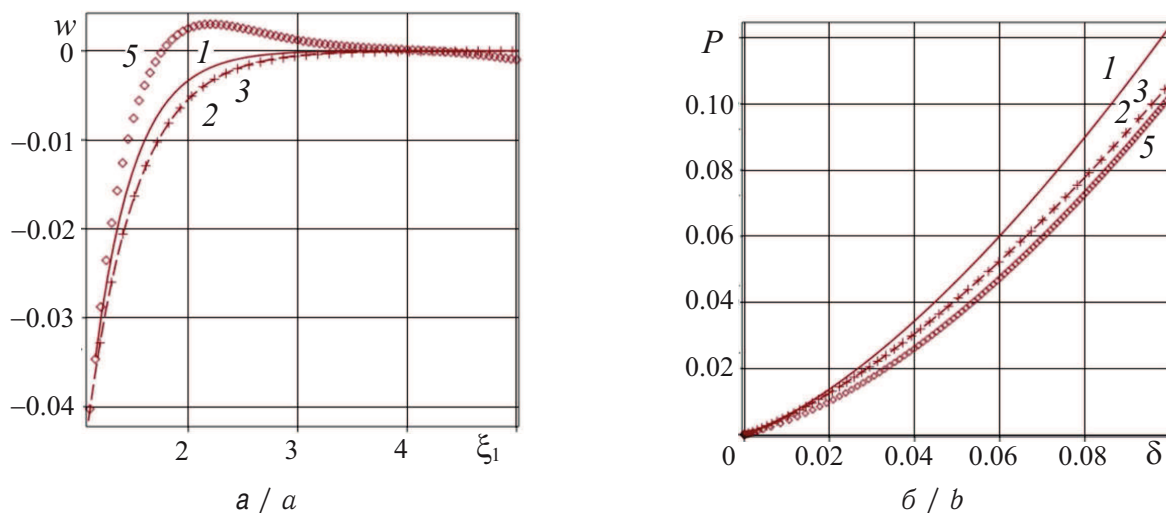


Рис. 1. Вертикальное смещение верхней границы (а) и зависимость «сила-внедрение» (б) для непрерывных законов неоднородности. На рис. 1–3 номера кривых 1–4 соответствуют номерам приближенных моделей, кривая 5 — конечно-элементной модели
 Fig. 1. Vertical displacement of the upper border (a) and dependence „Force-Indentation“ (b) for continuous laws of heterogeneity. In Fig. 1–3 numbers of curves 1–4 correspond to the numbers of approximate models, curve 5 to the finite element model

На рис. 2 приведены результаты решения контактной задачи для полосы, состоящей из двух полос. Каждая из полос имеет постоянные свойства по толщине. Вычислительный эксперимент проведен для следующих значений параметров: $G_1 = 0.1$, $\nu = 0.31$, $r = 10$. Решение контактной задачи на основе модели 4 показывает хорошее соответствие с решением МКЭ.

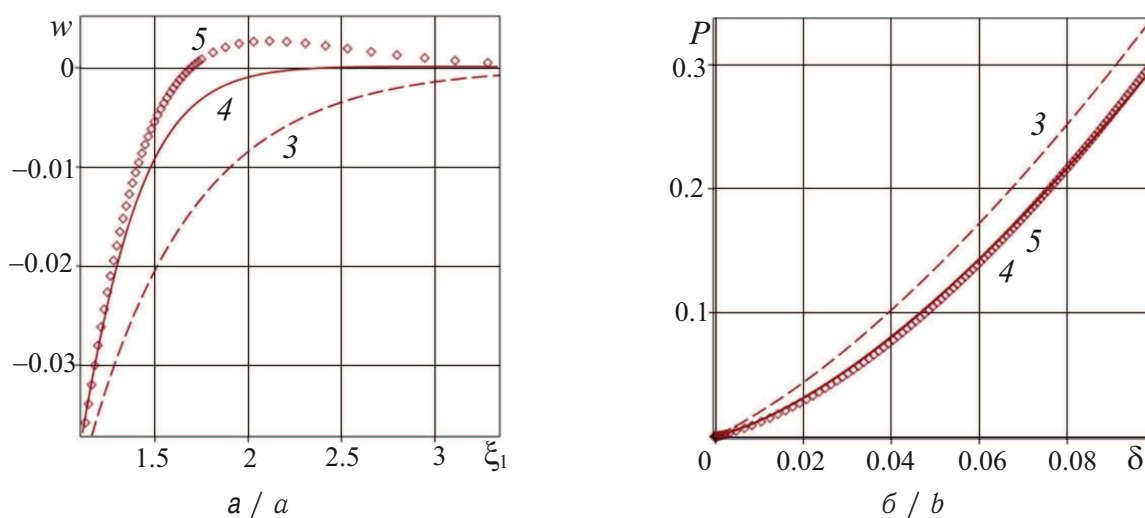


Рис. 2. Вертикальное смещение верхней границы (а) и зависимость «сила-внедрение» (б) для разрывных законов неоднородности
 Fig. 2. Vertical displacement of the upper border (a) and dependence „Force-Indentation“ (b) for discontinuous laws of heterogeneity

На рис. 3 представлено распределение контактного давления под штампом. Отметим, что приближенная модель дает локальный максимум в распределении контактного давления вблизи границы контактной области. В серии расчетов варьировалось и отношение h/l , все представленные выше выводы справедливы и для больших значений вплоть до $h/l = 1$. Представленные приближенные модели позволяют рассматривать контактные задачи как для непрерывно-неоднородной полосы, так и для полосы со свойствами, изменяющимися разрывным образом по вертикальной координате, и могут служить основой для решения обратных задач.

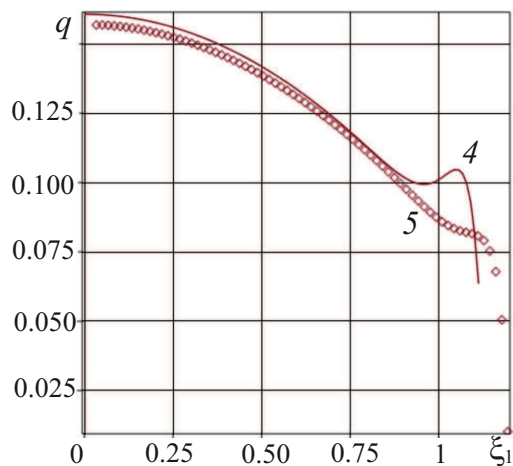


Рис. 3. Контактное давление под штампом
Fig. 3. Contact pressure under punch

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-11-00069).

Библиографический список

1. Grainger S., Blunt. J. Engineering Coatings: Design and Application. Woodhead Publ. Ltd, UK, 1998. 336 p.
2. Naebe M., Shirvanimoghaddam K. Functionally graded materials: A review of fabrication and properties // Applied Materials Today. 2016. Vol. 5. P. 223–245. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apmt.2016.10.001>
3. Головин Ю. И. Наноиндентирование и механические свойства твердых тел в субмикроразмерах, тонких поверхностных слоях и пленках // Физика твердого тела. 2008. Т. 50, вып. 12. С. 2113–2142.
4. Oliver W. C., Pharr G. M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology // J. Mater. Res. 2004. Vol. 19, № 1. P. 3–20. DOI: <https://doi.org/10.1557/jmr.2004.19.1.3>.
5. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М. : Наука, 1974. 456 с.
6. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред / С. М. Айзикович, В. М. Александров, А. В. Белоконь, Л. И. Кренин, И. С. Трубочник. М. : Физматлит, 2006. 240 с.
7. Волков С. С., Васильев А. С., Айзикович С. М., Селезнев Н. М., Леонтьева А. В. Напряженно-деформированное состояние упругого мягкого функционально-градиентного покрытия при внедрении сферического индентора // Вестн. ПНИПУ. Механика. 2016. № 4. С. 20–34. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.4.02>
8. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М. : Наука, 1983. 488 с.
9. Ватульян А. О., Плотников Д. К. Об индентировании неоднородной полосы // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2017. № 3. С. 22–29.
10. Ватульян А. О., Коссович Е. Л., Плотников Д. К. О некоторых особенностях индентирования трещиноватых слоистых структур // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 4. С. 94–100.



Образец для цитирования:

Ватульян А. О., Плотников Д. К., Поддубный А. А. О некоторых моделях индентирования функционально-градиентных покрытий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 421–432. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-421-432>

On Some Models of Indentation for Functionally-Graded Coatings

A. O. Vatulyan, D. K. Plotnikov, A. A. Poddubny

Alexander O. Vatulyan, <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>, Institute of Mathematics, Mechanics, and Computer Science named after of I. I. Vorovich, Southern Federal University, 105/42 Bolshaya Sadovaya St., Rostov on Don 344006, Russia, vatulyan@math.rsu.ru

Dmitry V. Plotnikov, <https://orcid.org/0000-0002-2989-1949>, Institute of Mathematics, Mechanics, and Computer Science named after of I. I. Vorovich, Southern Federal University, 105/42 Bolshaya Sadovaya St., Rostov on Don 344006, Russia, dplotnikov@sfnu.ru

Alexey A. Poddubny, <https://orcid.org/0000-0002-5565-420X>, Institute of Mathematics, Mechanics, and Computer Science named after of I. I. Vorovich, Southern Federal University, 105/42 Bolshaya Sadovaya St., Rostov on Don 344006, Russia, poddubny_sfnu@mail.ru

The paper presents approximate models of deformation for an inhomogeneous elastic strip. Approximate models reflect the distribution features of the inhomogeneous structure properties over the thickness. The models are based on hypotheses about the nature of the change in the components of the displacement field, which allows to consider arbitrary laws of heterogeneity: continuous, as well as discontinuous or having a strong gradient. Solutions of the contact problem for different inhomogeneity laws are constructed. Comparative analysis of the models is carried out. The results of the solutions are compared with the solution based on the FE model.

Key words: coating, functionally graded material, indentation, inhomogeneous strip.

Acknowledgements: This work was partially supported by the Russian Science Foundation (project no. 18-11-00069).

References

1. Grainger S., Blunt. J. *Engineering Coatings: Design and Application*. Woodhead Publ. Ltd, UK, 1998. 336 p.
2. Naebe M., Shirvanimoghaddam K. Functionally graded materials: A review of fabrication and properties. *Applied Materials Today*, 2016, vol. 5, pp. 223–245. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apmt.2016.10.001>
3. Golovin Yu. I. Nanoindentation and mechanical properties of solids in submicrovolumes, thin near-surface layers, and films: A Review. *Physics of the Solid State*, 2008, vol. 50, iss. 12, pp. 2205–2236. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063783408120019>
4. Oliver W. C., Pharr G. M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology. *J. Mater. Res.*, 2004, vol. 19, no. 1, pp. 3–20. DOI: <https://doi.org/10.1557/jmr.2004.19.1.3>
5. Vorovich I. I., Alexandrov V. M., Babeshko V. A. *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti*. [Non-classical mixed problems in elasticity theory]. Moscow, Nauka, 1974. 456 p. (in Russian).



6. *Kontaktnie zadachi teorii uprugosti dlya neodnorodnih sred* [Contact problems of theory of elasticity for inhomogeneous media] / S. M. Aizikovich, V. M. Aleksandrov, A. V. Belokon, L. I. Krenev, I. S. Trubchik. Moscow, Fizmatlit, 2006. 240 p. (in Russian).
7. Volkov S. S., Vasilev A. S, Aizikovich S. M., Seleznev N. M., Leonteva A .V. Stress-strain state of an elastic soft functionally graded coating during the indentation of a spherical indenter. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 4, pp. 20–34 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.4.02>
8. Alexandrov V. M., Mhitaryan S. M. *Kontaktnie zadachi dlya tel s tonkimi pokritiyami i podlozhkami* [Contact problems for bodies with thin coatings and layers]. Moscow, Nauka, 1983. 488 p. (in Russian).
9. Vatulyan A. O., Plotnikov D. K. On indentation of heterogeneous strip. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2017, no. 3, pp. 22–29 (in Russian).
10. Vatul'yan A. O., Kossovich E. L., Plotnikov D. K. Some specific characteristics of indentation of cracked layered structures. *Mechanics of Solids*, 2017, no. 4, pp. 429–434. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654417040094>

Cite this article as:

Vatulyan A. O., Plotnikov D. K., Poddubny A. A. On Some Models of Indentation for Functionally-Graded Coatings. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 421–432 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-421-432>



УДК 534.014

О СЛОЖНОЙ ДИНАМИКЕ В ПРОСТЕЙШИХ ВИБРАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ С ТРЕНИЕМ НАСЛЕДСТВЕННОГО ТИПА

Л. А. Игумнов, В. С. Метрикин

Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук, директор Научно-исследовательского института механики, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, Россия, 603950, Нижний Новгород, просп. Гагарина, 23, Igumnov@mech.unn.ru

Метрикин Владимир Семенович, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, Россия, 603950, Нижний Новгород, просп. Гагарина, 23, v.s.metrikin@mail.ru

В настоящей работе исследуется динамика ряда вибрационных систем с учетом сил сухого трения наследственного типа и ограничителя колебаний. Взаимодействие ограничителя колебаний и вибрационной системы происходит согласно гипотезе Ньютона. Разработана общая математическая модель систем, представляющая собой сильно нелинейную неавтономную систему с переменной структурой. Изучение динамики математической модели проводится численно-аналитическим способом с использованием математического аппарата метода точечных отображений. Особенность в подходе исследования состоит в том, что точечное отображение формируется не классическим способом (отображение поверхности Пуанкаре в себя), а по временам относительного покоя вибрационной системы, что значительно облегчило сам процесс построения точечного отображения и его детального изучения. Наличие плавающих границ пластинок скользящих движений потребовало создания оригинального подхода в построении точечного отображения и интерпретации полученных результатов. С помощью разработанной методики исследования и созданного программного продукта изучена структура фазового портрета математической модели в зависимости от характеристик сил трения скольжения и покоя, а также от типа и места расположения ограничителя. По характеру изменения бифуркационных диаграмм удалось выяснить основные закономерности процесса перестроек режимов движения (возникновение периодических режимов движения произвольной сложности и возможный переход к хаосу через процесс удвоения периода) при изменении параметров вибрационной системы (амплитуда и частота периодического воздействия, формы функциональной зависимости, описывающей изменение величины коэффициента трения относительного покоя). В работе также проведено сравнение результатов с учетом и без учета ограничителя колебаний.

Ключевые слова: математическая модель, трение наследственного типа, функция последования, относительный покой, неподвижная точка, хаос.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-433-446>

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что в большинстве случаев силы трения играют чисто демпфирующую роль, благодаря чему происходит затухание свободных колебаний, уменьшаются амплитуды вынужденных колебаний, расширяются области устойчивости и т.д. Однако для целого ряда динамических систем эти силы выступают как дестабилизирующий фактор, т.е. учет в системе даже малых сил трения порождает неустойчивые состояния равновесия [1–6]. Именно к таким системам можно отнести фрикционные



автоколебательные системы (ФАС). Фрикционные автоколебания связаны с неустойчивостью процесса трения при относительно малых скоростях скольжения и являются одним из наиболее распространенных видов механических автоколебаний. Об этом впервые экспериментально и теоретически было указано еще в работах А. Ю. Ишлинского и И. В. Крагельского (см. [1] и приведенную в ней библиографию), а затем в многочисленных исследованиях отечественных [2–6] и зарубежных исследователей [7–11]. Проблема моделирования и исследования динамических систем при учете сил сухого трения до сих пор остается актуальной.

Провоцируемые трением самовозбуждающиеся колебания, получившие название фрикционных автоколебаний, имеют огромное значение в инженерной практике. Они, как правило, приводят к избыточному износу оборудования, поломкам, нежелательному шуму и вибрациям, а также другим неблагоприятным эффектам. Встречаются они повсеместно. Для целого ряда машин и механизмов характерна работа при относительно малых скоростях скольжения в условиях неустойчивого трения. Примерами механизмов и технических приспособлений, где проблема фрикционных автоколебаний играет большую роль, являются буровые установки, тормозные устройства, подшипники скольжения, механизмы фрикционного сцепления. Большую роль эта проблема, и в особенности связанные с такими колебаниями вибрации, играет также в станкостроении [12–19].

Вибрации в станках влияют на точность и качество обработки изделий, а также на их надежность и производительность. Автоколебания в станках возникают при установочных перемещениях рабочих элементов станка и в процессе обработки изделия. Вибрации в процессе обработки ограничивают допустимые режимы, нарушают точность установки, ухудшают точность обработки, приводят к неровностям и другим дефектам. Любые вибрации приводят к избыточному износу деталей станка и увеличивают вероятность поломки. Также нежелательным является повышенный шум, создаваемый вибрациями.

Другая сфера деятельности, где самовозбуждающиеся колебания не только встречаются, но и играют большую роль, — это нефтедобыча [?]. В процессе бурения в буре могут возникать разные виды вибраций. Наиболее разрушительными из них являются вибрации, возникающие в результате фрикционных автоколебаний, создаваемых трением бура о стенки скважины в нижней его части, и автоколебаний, создаваемых трением долота (наконечника бура) о дно скважины. Такие вибрации могут приводить к износу и поломке бура, а также повреждать стенки скважины, затрудняя контроль над направлением бурения. В случае поломки бура может потребоваться замена бурового оборудования. Учитывая, что всё чаще бурение нефтяных скважин проводится во всё более труднодоступных местах, это может быть довольно проблематично и дорого. Помимо этого замена бура при поломке требует извлечения бура, очистки скважины от обломков бура, что само по себе может быть нетривиальной задачей, и спуска бура обратно в скважину прежде чем бурение может быть возобновлено. Нетрудно видеть, что такая операция требует значительных затрат времени.

По этим причинам автоколебания были удостоены детального внимания ученых. Модель груза на движущейся ленте для изучения фрикционных автоколебаний была предложена еще Ван-дер-Полем в 1930 г. Впоследствии многие варианты этой модели были рассмотрены для изучения поведения различных физических систем и аспектов динамики автоколебательных систем (см. [6–10] и приведенную в них



литературу). В частности, были рассмотрены различные модели трения скольжения. Одна вариация, которая не получила достаточного внимания, — это вариация с моделью трения покоя, при которой коэффициент трения относительного покоя считается не постоянным, а зависимым от длительности относительного покоя [1–5].

Факт зависимости коэффициента трения покоя известен экспериментальной науке уже давно и именно в связи с фрикционными колебаниями. Этот факт был одним из стимулов в развитии науки о трении. Впервые эту тему поднял Боуден [19], обнаружив экспериментально явление скачкообразного перемещения соприкасающихся поверхностей. Он попытался объяснить это явление свариванием неровностей соприкасающихся поверхностей в точках контакта, периодически возникающим при их скольжении. Это спровоцировало активное обсуждение в научной литературе природы этого явления и его возможных объяснений.

А. Ю. Ишлинский и И. В. Крагельский [1] на основании известных на то время исследований выдвинули предположение, что скачкообразное перемещение соприкасающихся поверхностей должно объясняться зависимостью коэффициента трения относительного покоя от времени контакта двух тел. В более поздних работах (например, [20]), Крагельский дал подробное описание возможного механизма зависимости силы коэффициента трения покоя от времени и вывод формулы зависимости на основе предложенного механизма.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Опубликование в [1] А. Ю. Ишлинским и И. В. Крагельским гипотезы о том, что коэффициент трения относительного покоя при движении двух трущихся тел не является постоянной величиной, а зависит от времени их «предыдущего» совместного движения с одинаковыми скоростями, привлекло внимание учёных, правда, с большой временной задержкой, занимающихся исследованием систем с трением (см. [2–4] и приведённую в них библиографию). В этих работах на примере простейших нелинейных автономных динамических систем приведён ряд новых результатов. Было показано, что по сравнению с известными исследованиями систем с постоянным КТОП в системах с переменным КТОП существуют сколь угодно сложные периодические и стохастические режимы движения. Динамические вибрационные системы, схемы которых совпадают со схемами, изученными в работах [2–4], рассматривались и зарубежными учеными (см. [7–11] и приведённую в них библиографию), однако в них не была использована гипотеза А. Ю. Ишлинского и И. В. Крагельского о наследственности КТОП. В этих работах использовали классическую модель трения покоя.

Физическая система (рис. 1), послужившая основой для составления математической модели, представляет собой тело массы m , прикрепленное к неподвижной опоре посредством пружины с коэффициентом жесткости k и находящееся на движущейся шероховатой очень длинной ленте с постоянной скоростью V_0 , [1, 3, 4]. Сила трения между телом и лентой — кусочно-гладкая функция относительной скорости $\dot{x} - V_0$, разрывная при $\dot{x} = V_0$. Математическую модель исследуемой системы можно записать в виде [3, 4]

$$m\ddot{x} = -kx - f_*P \operatorname{sgn}(\dot{x} - V_0), \quad \dot{x} \neq V_0, \\ k|x| \leq f(t_k)P, \quad \dot{x} = V_0,$$

где P — сила давления на контакт, f_* — коэффициенты трения скольжения; $f(t_k)$ — коэффициент трения относительного покоя. Предполагается, согласно работе [1],

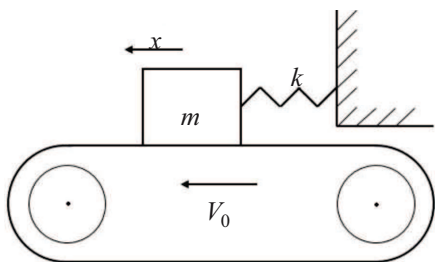


Рис. 1. Простейшая схема вибрационной системы без ограничителя колебаний

Fig. 1. Simplest scheme of a vibrational system without a vibration limiter

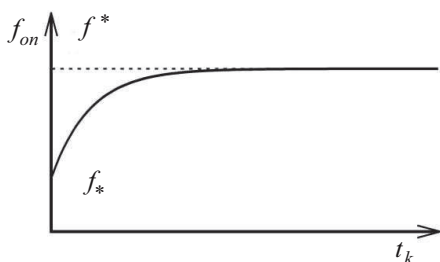


Рис. 2. Качественный вид функциональной зависимости КТОП от времени относительного покоя тела с лентой

Fig. 2. Qualitative form of the functional dependence of CFRR on the duration of relative rest time of the body with the belt

диаграмма, где по оси абсцисс отложены значения параметра ε^* , а по оси ординат даны значения времен относительного покоя тела с лентой при движении изображающей точки по полупрямой $L(\xi \geq -1, \dot{\xi} = \theta)$ ($\theta = 1.6$).

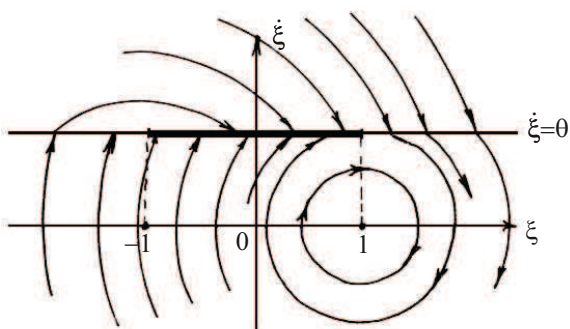


Рис. 3. Фазовый портрет простейшей вибрационной системы

Fig. 3. Phase portrait of the simplest vibrational system

что коэффициент трения относительного покоя $f(t_k)$ является монотонно возрастающей функцией времени относительного покоя тела и ленты (рис. 2). Пусть коэффициент трения скольжения f_* постоянен.

В безразмерном времени $\tau = \omega t$, координате $\xi = kx/(f_*P)$ и параметре $\varepsilon^* = (f^* - f_*)/f_*$, характеризующим форму коэффициента трения относительного покоя, уравнения движения перепишутся в виде

$$\ddot{\xi} = -\xi - \text{sgn}(\xi - \theta), \quad \dot{\xi} \neq 0, \quad (1)$$

$$|\xi| \leq 1 + \varepsilon(\tau_k), \quad \dot{\xi} = 0. \quad (2)$$

Здесь $\theta = \frac{V_0 \sqrt{mk}}{f_* P}$, $\varepsilon(\tau_k) = \frac{f(t^* \tau_k / \varepsilon^*) - f_*}{f_*}$.

Качественный вид разбиения на траектории фазовой плоскости $\xi\dot{\xi}$ уравнений (1), (2) приведен на рис. 3.

Из поведения траекторий следует, что прямая $\dot{\xi} = \theta$ содержит отрезок скользящих движений $|\xi| \leq 1$, $\dot{\xi} = \theta$, а также часть плоскости, где происходят незатухающие колебания при наличии трения. В работах [3, 4] показано, что в такой простейшей, на первый взгляд, динамической системе при учете трения наследственного типа существуют сколь угодно сложные периодические и стохастические режимы движения.

Так, на рис. 4 представлена бифуркационная

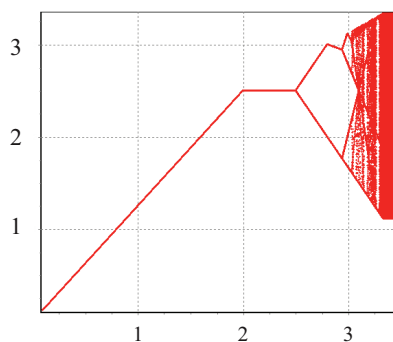


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма по параметру ε^* для простейшей вибрационной системы

Fig. 4. Bifurcation diagram for the parameter ε^* for the simplest vibrational system



Из рис. 4 следует, что сначала с ростом ε^* существуют периодические движения тела с одним длительным контактом тела с лентой (относительный покой), величина которого растет, затем имеется интервал, где величина длительного контакта с ростом ε^* остается неизменной, и затем наблюдается известный процесс удвоения периода (движения с двумя длительными контактами, четырьмя и т. д.), приводящий, как и ожидалось, к хаотическому движению тела. Характеристика КТОП принималась в виде кусочно-линейной функции вида

$$\varepsilon(\tau_k) = \begin{cases} \tau_k, & 0 < \tau_k < \varepsilon^*, \\ \varepsilon^*, & \tau_k \geq \varepsilon^*. \end{cases}$$

Рассмотрим физическую схему, представленную на рис. 5. Такая схема может представлять при некоторых идеализациях схемы различных механизмов, таких как устройства для бурения глубоких нефтяных скважин [?], для сверления глубоких отверстий [12–18], для различных строительных производств [6] и др.

Груз закреплен пружиной жёсткости k к неподвижной опоре рис. 5. На груз действует сила трения и периодическая внешняя сила $f(t)$. Движение груза по направлению движения ленты ограничено стенкой, находящейся на расстоянии a от положения равновесия груза при неподвижной ленте. Системы такого вида с небольшими вариациями хорошо известны и многие ее вариации хорошо изучены. Известно, что простейшая система такого вида без внешней силы и без стенки имеет один устойчивый предельный цикл в ее фазовом пространстве. Вариации такой системы с альтернативными моделями трения относительного покоя получили мало внимания в научной литературе. Здесь также предполагается, что коэффициент трения скольжения f_* является постоянной величиной, а коэффициент трения относительного покоя согласно гипотезе А. Ю. Ишлинского и И. В. Крагельского [1] есть непрерывная монотонно возрастающая функция времени t_k длительного контакта (совпадение скоростей массы и ленты) этих тел (см. рис. 2). В качестве математической модели сил трения в работе выбрано трение Кулона – Амонтона. Удар о стенку принимается мгновенным, с коэффициентом восстановления скорости R .

Математическую модель рассматриваемой системы (см. рис. 5) можно записать в виде

$$m\ddot{x} + kx = f(t) - f_*P \operatorname{sgn}(\dot{x} - V(t)), \quad \dot{x} \neq V(t), \quad x < a, \quad (3)$$

$$|kx - f(t) + m\dot{V}(t)| \leq f_{on}(t_k)P, \quad \dot{x} = V(t), \quad x < a, \quad (4)$$

$$\dot{x}^+ = -R\dot{x}^-, \quad x = a, \quad \dot{x}^- > 0, \quad (5)$$

где первое уравнение описывает закон движения тела с учётом коэффициента трения скольжения f_* и со скоростью, отличной от скорости ленты, второе неравенство устанавливает соотношение сил, при выполнении которого происходит движение тела со

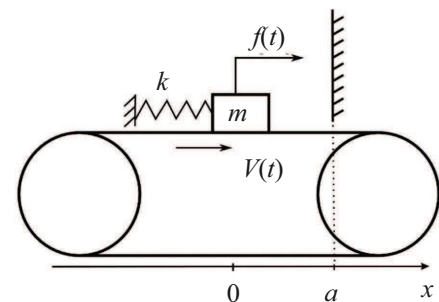


Рис. 5. Простейшая схема вибрационной системы с ограничителем колебаний и внешним возбуждением тела и ленты

Fig. 5. Simplest scheme with a vibration limiter and external perturbation of the body with the belt



скоростью, равной скорости ленты с учётом формы КТОП — $f_{on}(\tau_k)$ (см. рис. 2). Третье уравнение описывает модель удара груза о стенку. Здесь скорость тела — непосредственно до и после ударного взаимодействия.

Вводя безразмерные время $\tau = \omega t$, переменную $\xi = kx/f_*P$ и параметры $\theta = V(t)\sqrt{km}/f_*P$, $\omega = \sqrt{k/m}$, систему (3)–(5) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \xi + \operatorname{sgn} \dot{\xi} - \theta &= F(\tau), \quad \dot{\xi} \neq \theta, \quad \xi < b, \\ |\xi - F(\tau) + \dot{\theta}| &\leq 1 + \varepsilon_k, \quad \dot{\xi} = \theta, \quad \xi < b, \\ \dot{\xi}^+ &= -R\xi^-, \quad \xi = b, \quad \dot{\xi}^- > 0, \end{aligned}$$

где $b = ka/f_*P$, $\varepsilon(\tau) = (f_{on}(\tau) - f_*)/f_*$, $\varepsilon_k = \varepsilon(\tau_k)$, а $F(\tau) = f(\tau/\omega)/f_*P$ — безразмерная внешняя сила.

2. СТРУКТУРА ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Так как система неавтономна и описывается дифференциальным уравнением второго порядка с переменной структурой, то её состоянием является тройка $\{\xi, \dot{\xi}, \tau\}$, а фазовое пространство соответственно трехмерное. Траектории в нём могут существовать только в полупространстве $\xi \leq b$. Фазовое пространство поверхностью ($\dot{\xi} = \theta$) также разделено на подпространства $\Phi_1(\xi, \dot{\xi} > \theta, \tau)$ и $\Phi_2(\xi, \dot{\xi} < \theta, \tau)$, поведение фазовых траекторий в которых описывается соответственно уравнениями

$$\ddot{\xi} + \xi = F(\tau) - 1, \quad \text{при } \dot{\xi} > \theta, \tag{6}$$

$$\ddot{\xi} + \xi = F(\tau) + 1, \quad \text{при } \dot{\xi} < \theta. \tag{7}$$

Можно показать, что на поверхности Π существует пластинка скользящих движений [21, 22] Π_c , ограниченная кривыми Γ_1 и Γ_2 :

$$\Gamma_1 : \begin{cases} \xi = 1 + F(\tau), \\ \dot{\xi} = \theta, \end{cases} \quad \Gamma_2 : \begin{cases} \xi = -1 + F(\tau), \\ \dot{\xi} = \theta. \end{cases}$$

При попадании изображающей точки на поверхность Π_c её движение будет изменяться по закону

$$\xi(\tau) = \theta(\tau - \tau_p) + \xi_p, \quad \dot{\xi}(\tau) = \theta,$$

где $\{\xi_p, \tau_p\} \in \Pi_c$, $\tau \geq \tau_p$.

Качественный вид поведения фазовых траекторий в фазовом пространстве системы, включая участки, когда скорости ленты и тела равны (длительные относительные «остановки» (ДОО)), приведён на рис. 6. Из этого рисунка видно, что в фазовом пространстве системы возможен тип траекторий без ДОО, для которых выполняется неравенство $\dot{\xi} < \theta$. В работе в дальнейшем принято $F(t) = A \cos(\Omega t)$. Безразмерная функциональная зависимость КТОП $\varepsilon(\tau_k)$ от времени τ_k длительного контакта принималась в виде монотонно не убывающей кусочно-непрерывной функции вида

$$\varepsilon(\tau_k) = \begin{cases} \varepsilon_* \tau_k, & \tau_k \leq \varepsilon, \\ \varepsilon_*, & \tau_k \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Исходя из того, что уравнения (6), (7) линейны, их общие решения будут записываться, как известно, в виде

$$\begin{cases} \xi_i(\tau) = C_{2i-1} \cos(\tau) + C_{2i} \sin(\tau) + (-1)^i + \xi_F(\tau), \\ \dot{\xi}_i(\tau) = -C_{2i-1} \sin(\tau) + C_{2i} \cos(\tau) + \dot{\xi}_F(\tau), \end{cases} \quad (-1)^i \dot{\xi} < (-1)^i \theta(\tau), \quad i = 1, 2,$$



$$C_{2i-1} = (\xi_i - \xi_F(\tau_i) + (-1)^{i+1}) \cos \tau_i - (\dot{\xi}_i + \dot{\xi}_F(\tau_i)) \sin \tau_i + \xi_F(\tau) + (-1)^i,$$

$$C_{2i} = (\dot{\xi}_i + \dot{\xi}_F(\tau_i)) \cos \tau_i + (\xi_i + \xi_F(\tau_i) + (-1)^{i+1}) \sin \tau_i + \dot{\xi}_F(\tau),$$

где $\xi_F(\tau) = \frac{A}{1 + \Omega^2} \cos(\Omega\tau)$.

Так как изображающая точка почти всегда попадает на пластинку скользящих движений, динамику системы можно исследовать с помощью изучения свойств точечного отображения границы Γ_1 (Γ_2) в себя, либо свойств числовой последовательности, элементы которой равны временам τ_k , $k = 1, 2, 3 \dots$ ДОО, как показано на рис. 7, где стрелками в плоскости Π_c обозначены траектории изображающей точки при ДОО.

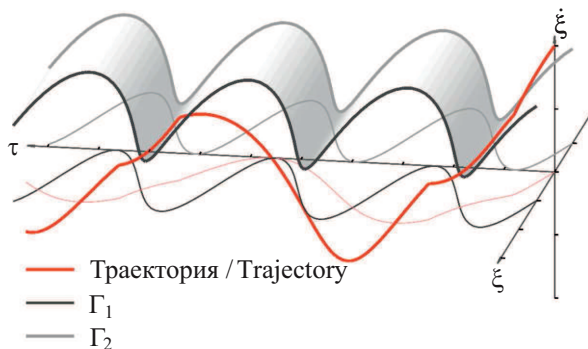


Рис. 6. Фазовый портрет простейшей схемы вибрационной системы с ограничителем колебаний и внешним возбуждением тела и ленты

Fig. 6. Phase portrait of the simplest scheme of a vibrational system with a vibration limiter and external perturbation of the body and the belt

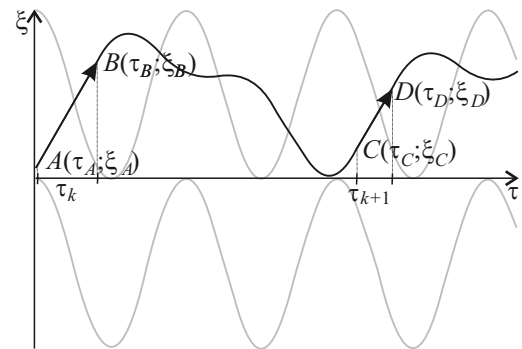


Рис. 7. Зависимости от времени траекторий движений тела в моменты времени относительного покоя тела иленты

Fig. 7. Trajectories of the body motion during the relative rest time of the body and the belt as a function of time

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Для исследования динамики рассматриваемой системы с использованием функции последования разработан программный продукт на платформе Java, позволяющий при различных значениях параметров системы производить расчеты и построения в трехмерном фазовом пространстве фазовых траекторий, вид функции последования, бифуркационных диаграмм и др.

На рис. 8 изображены бифуркационные диаграммы, демонстрирующие эффект стенки на поведение системы. Горизонтальная ось обозначает изменяемый параметр, вертикальная — время совместного движения тела с лентой. На рис. 8, а изображена бифуркационная диаграмма системы без стенки. При её построении внешняя сила была выбрана постоянной, равной нулю, а скорость ленты — следующей функцией $\theta(t) = 1.41 + 0.1 \cos(\Omega t)$. Параметр кусочно-линейной функции КТОП равен 3, координаты начальной точки $\{0, 5, 0\}$ ($\{\xi, \dot{\xi}, \tau\}$). Рис. 8, б, в отличаются от рис. 8, а только присутствием стенки. На обеих диаграммах (см. рис. 8, б, в) значение коэффициента R выбрано 0.5, а координата стенки соответственно — 4.025 и 4.05.



Диаграмма 8, *г* демонстрирует влияние изменения координаты стенки на одно из сечений диаграммы на рис. 8, *а*. На рис. 8, *г* все параметры совпадают с параметрами, выбранными для рис. 8, *а*, значение Ω выбрано 3.22.

На рис. 8, *д*, *е* изображены диаграммы по координате стенки и коэффициенту восстановления скорости при ударе соответственно для одних и тех же значений параметров. Скорость ленты была выбрана постоянно равной 1. Вид функции внешней силы $F(t) = 0.25 \cos(2t)$, параметр кусочно-линейной функции КТОП равен 3, координата начальной точки $\{0, 5, 0\}$, координата стенки 2, коэффициент $R = 0.5$.

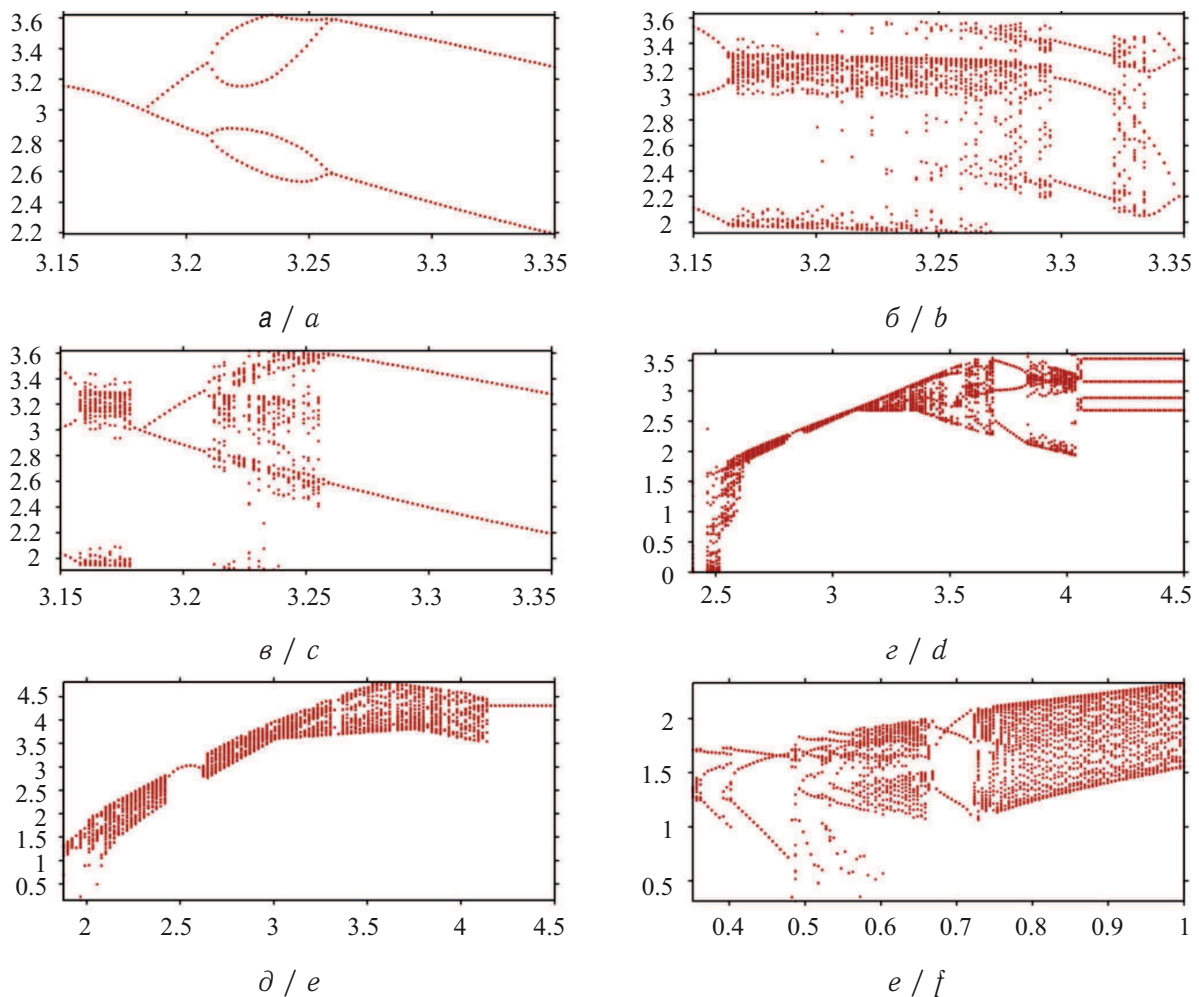


Рис. 8. Бифуркационные диаграммы для: *а* — постоянной внешней силы и периодически изменяющейся скорости ленты; *б*, *в* — постоянной внешней силы и периодически изменяющейся скорости ленты при наличии ограничителя колебаний, равного 4.025 и 4.05 соответственно; *г* — относительного расстояния ограничителя колебаний; *д* — координаты ограничителя колебаний при $R = 0.5$; *е* — коэффициента восстановления при ударе тела об ограничитель колебаний

Fig. 8. Bifurcation diagrams for: *a* — constant external force and periodically changing velocity of the belt; *b*, *c* — constant external force and periodically changing velocity of the belt in the presence of a vibration limiter equal to 4.025 and 4.05, respectively; *d* — relative distance to the vibration limiter; *e* — coordinate of the vibration limiter for $R = 0.5$; *f* — recovery factor after the impact of the body against the vibration limiter



На рис. 9 изображены фазовые портреты и диаграммы Ламерея для двух наборов значений параметров, соответствующих двум сечениям диаграммы рис. 8, *e*. Диаграммы Ламерея построены по временам совместного движения тела с лентой. Рис. 9, *a*, *б* соответствуют следующим значениям параметров: параметр ε_* (КТОП) равен 3, скорость ленты постоянна и равна 1, внешняя сила переменная $F(t) = 0.25 \cos(2t)$, координата начальной точки $\{0, 5, 0\}$, координата стенки 2, коэффициент $R = 0.7$. Рис. 9, *в* и *г* отличаются только коэффициентом R , который равен $R = 0.75$. Из этих рисунков видно, что при значении коэффициента $R = 0.7$ система имеет устойчивый предельный цикл с тремя остановками вида ОНВОНВОНВ, т.е. вслед за первой остановкой «О» следует удар о стенку «Н» и затем участок «В» в полупространстве $\dot{\xi} < \theta$, после чего следуют еще два аналогичных витка ОНВ, и затем цикл повторяется. При значении коэффициента 0.75 поведение системы хаотично.

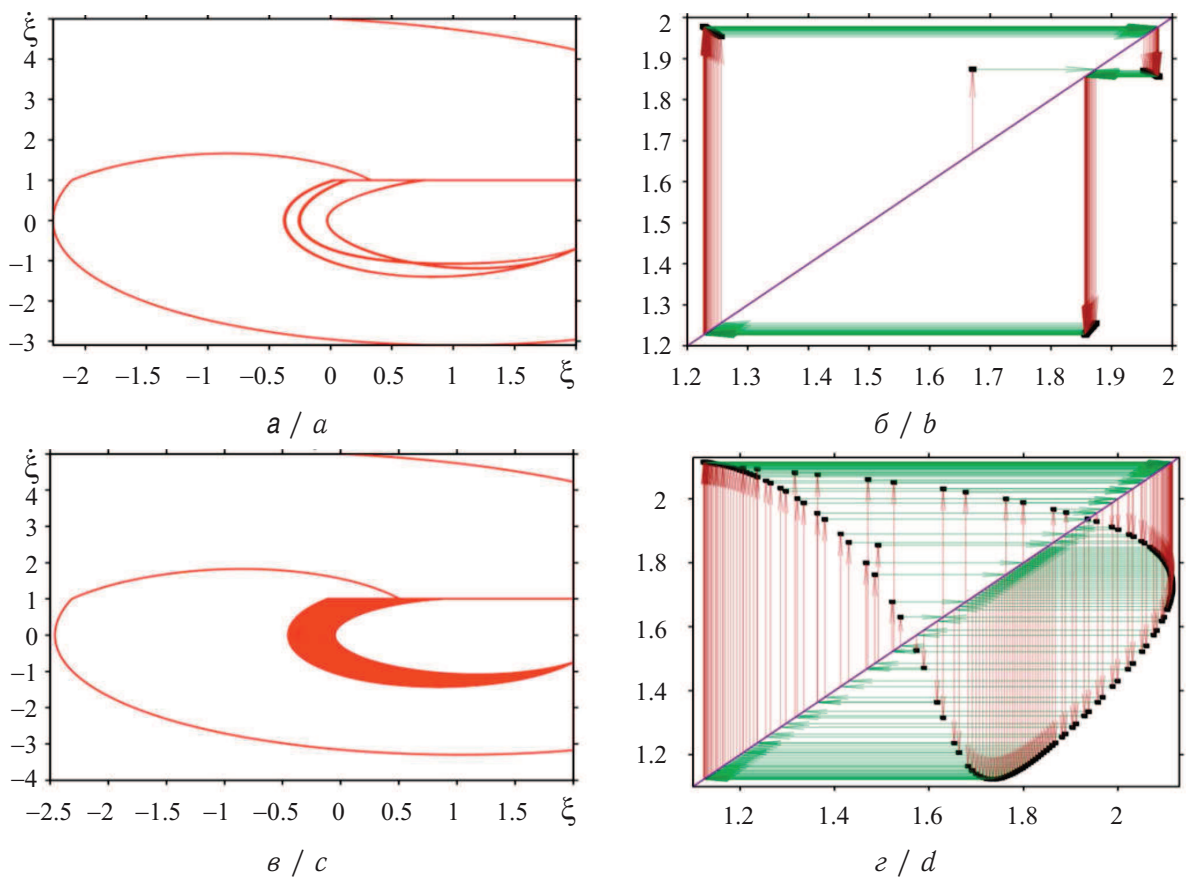


Рис. 9. Фазовые траектории и диаграммы Ламерея для двух значений коэффициента восстановления скорости при ударе $R = 0.7$ (*a*, *б*) и $R = 0.75$ (*в*, *г*)

Fig. 9. Phase trajectories and Lameray diagrams for two values of the velocity recovery factor after the impact $R = 0.7$ (*a*, *b*) and $R = 0.75$ (*c*, *d*)

Аналогично поддаются изучению и остальные участки бифуркационных диаграмм, представленных на рис. 10. Это позволяет установить, что при различных значениях параметров поведение системы может существенно различаться, демонстрируя такие явления, как хаос и бифуркация.

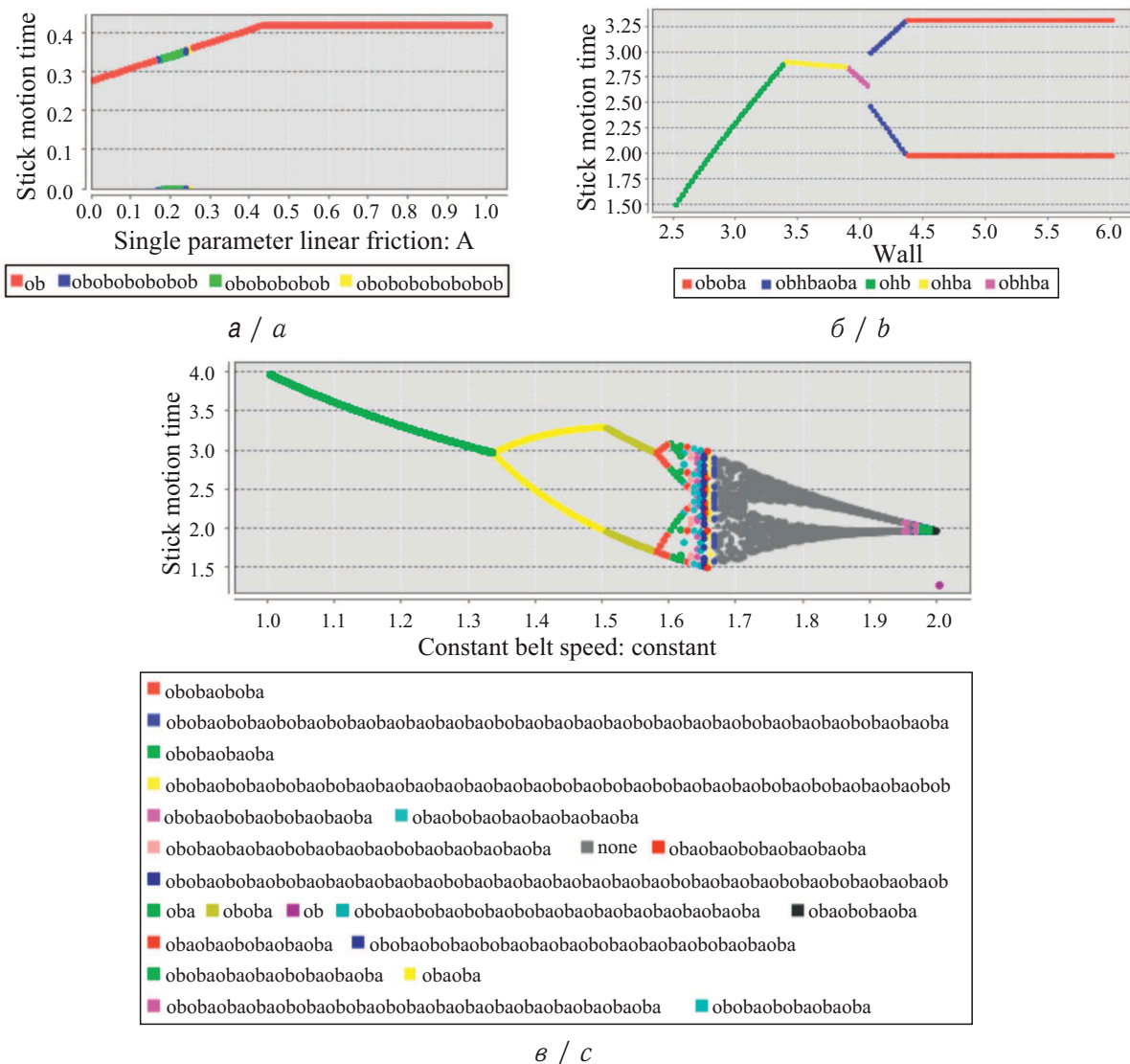


Рис. 10. Бифуркационные диаграммы: a — по амплитуде внешней силы; b — по относительному расстоянию ограничителя; v — по скорости ленты
 Fig. 10. Bifurcation diagrams: a — for the amplitude of external force; b — for the relative distance to the limiter; c — for the velocity of the belt

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014—2020 годы» (соглашение № 14.578.21.0246, уникальный идентификатор RFMEFI57817X0246).

Библиографический список

1. Ишлинский А. Ю., Крагельский И. В. О скачках при трении // Журнал теоретической физики. 1944. Т. 14, вып. 4/5. С. 276–282.
2. Каценевский Л. Я. Стохастические автоколебания при сухом трении // Инженерно-физический журнал. 1984. Т. 47, № 1. С. 143–147.
3. Ветюков М. М., Доброславский С. В., Нагаев Р. Ф. Автоколебания в системе с характеристикой сухого трения наследственного типа // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 1. С. 23–28.



4. Метрикин В. С., Нагаев Р. Ф., Степанова В. В. Периодические и стохастические автоколебания в системе с сухим трением наследственного типа // ПММ. 1996. Т. 60, вып. 5. С. 859–864.
5. Зайцев М. В., Метрикин В. С. К теории неавтономной динамической системы с трением наследственного типа // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2012. № 3, ч. 1. С. 141–146.
6. Ветюков М. М., Платовских М. Ю. Фрикционные автоколебания в системе с одной и двумя степенями свободы // Современные проблемы механики и ее преподавания в вузе : тр. Всерос. науч.-метод. конф. СПб. : Военно-космическая акад. им. А. Ф. Можайского, 2015. Т. 1. С. 58–63.
7. Leine R. I., van Campen D. H., de Kraker A. Stick-Slip Vibrations Induced by Alternate Friction Models // Nonlinear Dynamics. 1998. Vol. 16, iss. 1. P. 41–54. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1008289604683>
8. van de Vrande B. L., van Campen D. H., de Kraker A. An Approximate Analysis of Dry-Friction-Induced Stick-Slip Vibrations by a Smoothing Procedure // Nonlinear Dynamics. 1999. Vol. 19, iss. 2. P. 157–169. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1008306327781>
9. Leine R. I., van Campen D. H. Discontinuous fold bifurcations in mechanical systems // Archive of Applied Mechanics. 2002. Vol. 72, iss. 2–3. P. 138–146. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-001-0190-9>
10. Leine R. I., van Campen D. H. Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems // European Journal of Mechanics A/Solids. 2006. Vol. 25, iss. 4. P. 595–616. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.04.004>
11. Luo G. W., Lv X. H., Ma L. Periodic-impact motions and bifurcations in dynamics of a plastic impact oscillator with a frictional slider // European Journal of Mechanics A/Solids. 2008. Vol. 27, iss. 6. P. 1088–1107. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2008.02.005>
12. Уткин Н. Ф., Кижняев Ю. И., Плужников С. К. Обработка глубоких отверстий. Л. : Машиностроение, 1988. 269 с.
13. Кузнецова Т. И., Макаров Б. Г., Немцев Б. А. О гашении автоколебаний при глубоком сверлении // Колебания и устойчивость механических систем. 1981. Вып. 5. С. 114–118.
14. Минков М. Л. Технология изготовления глубоких и точных отверстий. М. : Машиностроение, 1965. 176 с.
15. Троицкий Н. Д. Глубокое сверление. Л. : Машиностроение, 1971. 176 с.
16. Потягайло М. В. Изготовление глубоких и точных отверстий. М. ; Л. : Машгиз, 1947. 108 с.
17. Городецкий Ю. И. Создание математических моделей сложных автоколебательных систем в станкостроении // Автоматизация проектирования / под общ. ред. акад. В. А. Трапезникова. М. : Машиностроение, 1986. Вып. 1. С. 203–221.
18. Кудинов В. А. Динамика станков. М. : Машиностроение, 1967. 359 с.
19. Bowden F. P., Leben L. The Nature of Sliding and the Analysis of Friction // Proceedings of the Royal Society. 1939. Vol. 109, № 938. P. 1939. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1939.0004>
20. Крагельский И. В. Трение и износ. М. : Машиностроение, 1968. 480 с.
21. Фейгин М. И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. М. : Наука, 1994. 285 с.
22. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М. : Наука, 1972. 471 с.



Образец для цитирования:

Игумнов Л. А., Метрикин В. С. О сложной динамике в простейших вибрационных системах с трением наследственного типа // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 433–446. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-433-446>

On the Complex Dynamics in Simplest Vibrational Systems with Hereditary-Type Friction

L. A. Igumnov, V. S. Metrikin

Leonid A. Igumnov, <https://orcid.org/0000-0003-3035-0119>, Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, 23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia, Igumnov@mech.unn.ru

Vladimir S. Metrikin, <https://orcid.org/0000-0002-9749-5390>, Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, 23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia, v.s.metrikin@mail.ru

The dynamics of a number of vibrational systems, accounting for the forces of hereditary-type dry friction and a vibration limiter, are studied in the paper. The interaction between the vibration limiter and the vibrational system is assumed to obey Newton's hypothesis. A general mathematical model has been developed, which is a strongly nonlinear non-autonomous system with a variable structure. The dynamics of the mathematical model is studied numerically-analytically, using the mathematical apparatus of the point mapping method. The special feature of the studying approach is that a point map is not formed in a classical way (mapping Poincare surface into itself), but based on times of the relative rest of the vibrational system, which considerably simplified both the point mapping process and its detailed analysis. The presence of floating boundaries of plates of sliding motion required an original approach to point mapping and interpreting the results obtained. The developed investigation methodology and software product were used to study the phase-plane portrait of the mathematical model as a function of the characteristics of sliding friction forces and rest, as well as of the type and position of the limiter. Based on the character of the bifurcation diagrams variation, it was possible to find the main laws of the motion regimes alteration process (the occurrence of periodic motion regimes of arbitrary complexity and possible transition to chaos via the period-doubling process) with the changing parameters of the vibrational system (the amplitude and frequency of the periodic effect, forms of the functional relation describing the variation of the friction coefficient value of relative rest. The results obtained with and without accounting for a vibration limiter are also compared in the paper.

Key words: mathematical model, hereditary-type friction, Poincare function, relative rest, fixed point, chaos.

Acknowledgements: This work was supported by the Federal Targeted Program for Research and Development in Priority Areas of Development of the Russian Scientific and Technological Complex for 2014–2020 (under the contract no. 14.578.21.0246, unique identifier RFME-FI57817X0246).

References

1. Ishlinsky A. Yu., Kragelsky I. V. O skachkah pri trenii [About horse racing]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Journal Technical Physics], 1944, vol. 14, iss. 4–5, pp. 276–282 (in Russian).
2. Kashchenevsky L. Ya. Stokhasticheskie avtokolebaniya pri suhom trenii [Stochastic self-oscillations with dry friction]. *Inzhenerno-fizicheskij zhurnal* [Journal of Engineering Physics], 1984, vol. 47, no. 1, pp. 143–147 (in Russian).



3. Vetiukov M. M., Dobroslavsky S. V., Nagaev R. F. Avtokolebaniya v sisteme s harakteristikoj suhogo treniya nasledstvennogo tipa [Self-oscillations in the system with the characteristic of dry friction hereditary type]. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1990, no. 1, pp. 23–28 (in Russian).
4. Metrikin V. S., Nagaev R. F., Stepanova V. V. Periodic and stochastic self-excited oscillations in a system with hereditary-type dry friction. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1996, vol. 60, iss. 5, pp. 845–850. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0021-8928\(96\)00105-0](https://doi.org/10.1016/s0021-8928(96)00105-0)
5. Zaytsev M. V., Metrikin V. S. On the Theory of a Nonautonomous Dynamical System with Hereditary-Type Dry Friction. *Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod*, 2012, no. 3, pt. 1, pp. 141–146 (in Russian).
6. Vetyukov M. M., Platovskih M. Yu. Frikcionnye avtokolebaniya v sisteme s odnoj i dvumya stepenyami svobody [Friction self-oscillations in a system with one and two degrees of freedom]. In: *Sovremennye problemy mekhaniki i ee prepodavaniya v vuze* [Contemporary problems of mechanics and its teaching in high school] : Proc. of All-Russia Scientific and Methodical Conf. St. Petersburg, A. F. Mozhaisky Military Space Academy, 2015, vol. 1, pp. 58–63 (in Russian).
7. Leine R. I., van Campen D. H., de Kraker A. Stick-Slip Vibrations Induced by Alternate Friction Models. *Nonlinear Dynamics*, 1998, vol. 16, iss. 1, pp. 41–54. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1008289604683>
8. van de Vrande B. L., van Campen D. H., de Kraker A. An Approximate Analysis of Dry-Friction-Induced Stick-Slip Vibrations by a Smoothing Procedure. *Nonlinear Dynamics*, 1999, vol. 19, iss. 2, pp. 157–169. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1008306327781>
9. Leine R. I., van Campen D. H. Discontinuous fold bifurcations in mechanical systems. *Archive of Applied Mechanics*, 2002, vol. 72, iss. 2–3, pp. 138–146. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-001-0190-9>
10. Leine R. I., van Campen D. H. Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2006, vol. 25, iss. 4, pp. 595–616. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.04.004>
11. Luo G. W., Lv X. H., Ma L. Periodic-impact motions and bifurcations in dynamics of a plastic impact oscillator with a frictional slider. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2008, vol. 27, iss. 6, pp. 1088–1107. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2008.02.005>
12. Utkin N. F., Kizhniaev Yu. I., Pluzhnikov S. K. *Obrabotka glubokih otverstij* [Deep hole machining]. Leningrad, Mashinostroenie, 1988. 269 p. (in Russian).
13. Kuznetsova T. I., Makarov B. G., Germans B. A. O gashenii avtokolebanij pri glubokom sverlenii [On the suppression of self-oscillations with deep drilling]. *Kolebaniya i ustojchivost' mekhanicheskikh sistem* [Oscillations and stability of mechanical systems], 1981, iss. 5, pp. 114–118 (in Russian).
14. Minkov M. L. *Tekhnologiya izgotovleniya glubokih i tochnyh otverstij* [Manufacturing technology for deep and precise holes]. Moscow, Mashinostroenie, 1965. 176 p. (in Russian).
15. Troitskiy N. D. *Glubokoe sverlenie* [Deep drilling]. Leningrad, Mashinostroenie, 1971. 176 p. (in Russian).
16. Potyagajlo M. V. *Izgotovlenie glubokih i tochnyh otverstij* [Making deep and precise holes]. Moscow, Leningrad, Mashgiz, 1947. 108 p. (in Russian).
17. Gorodetskiy Yu. I. Sozdanie matematicheskikh modelej slozhnyh avtokolebatel'nyh sistem v stankostroenii [Creation of mathematical models of complex auto-oscillatory systems in machine-tool construction]. *Avtomatizaciya proektirovaniya* [Automation design]. Ed. V. A. Trapeznikov. Moscow, Mashinostroenie, 1986, iss. 1, pp. 203–221. (in Russian).



18. Kudinov V. A. *Dinamika stankov* [Machine dynamics]. Moscow, Mashinostroenie, 1967. 359 p. (in Russian).
19. Bowden F. P, Leben L. The Nature of Sliding and the Analysis of Friction. *Proceedings of the Royal Society*, 1939, vol. 109, no. 938, pp. 1939. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1939.0004>
20. Kragilsky I. V. *Trenie i iznos* [Friction and wear]. Moscow, Mashinostroenie, 1968. 480 p. (in Russian).
21. Feigin M. I. *Vynuzhdennye kolebaniya sistem s razryvnymi nelinejnostyami* [Forced oscillations of systems with discontinuous nonlinearities]. Moscow, Nauka, 1994. 285 p. (in Russian).
22. Neymark Yu. I. *Metod tochechnyh otobrazhenij v teorii nelinejnyh kolebanij* [The method of point mappings in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka, 1972. 471 p. (in Russian).

Cite this article as:

Igumnov L. A., Metrikin V. S. On the Complex Dynamics in Simplest Vibrational Systems with Hereditary-Type Friction. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 433–446 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-433-446>



Low-Frequency Vibration Modes of Strongly Inhomogeneous Elastic Laminates

J. D. Kaplunov, L. A. Prikazchikova

Julius D. Kaplunov, <https://orcid.org/0000-0001-7505-4546>, School of Computing and Mathematics, Keele University, Keele, Staffordshire, ST5 5BG, UK, j.kaplunov@keele.ac.uk

Ludmila A. Prikazchikova, <https://orcid.org/0000-0001-9051-2103>, School of Computing and Mathematics, Keele University, Keele, Staffordshire, ST5 5BG, UK, l.prikazchikova@keele.ac.uk

The dynamic behaviour of thin multi-layered structures, composed of contrasting “strong” and “weak” layers, is considered. An asymptotic procedure for analysing the lowest cutoffs is developed. A polynomial frequency equation is derived, along with the linear equations for the associated eigenforms corresponding to displacement variation across the thickness. For a five-layered laminate with clamped faces two term expansions for eigenfrequencies and eigenforms are compared with those obtained from the exact solution of the original problem for thickness resonances.

Key words: asymptotic, high-contrast, thin elastic structure, thickness fluctuations, low frequency, cutoff.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-447-457>

INTRODUCTION

The classical theory for thin homogeneous elastic structures governing bending, extensional and torsional-shear vibration modes, e.g. see [1–3], is asymptotically consistent over the low-frequency range. Obviously, it does not take into consideration any of high-frequency modes with the cut-off frequencies related to thickness resonances. At the same time, currently available refined formulations incorporating the lowest high-frequency modes ([4, 5] and reference therein) do not appear to be uniformly asymptotically valid, as noted for example in [6]. These observations are also true for layered structures not demonstrating a substantial contrast in material and geometric properties of the layers, e.g. [7]. However, multi-parametric analysis of strongly vertical inhomogeneous three-layered plates in [6], see also [8] and [9], indicates that for certain combination of problem parameters the lowest thickness shear resonance frequency becomes asymptotically small, resulting in an extra low-frequency vibration mode in comparison with the traditional layout. Four scenarios studied in [6] correspond to the practically important setups of sandwich structures, laminated glass, photovoltaic panels and precipitator plates utilised in gas filters, see [10–13].

In this paper we extend the framework of the cited publication [6] on thin strongly inhomogeneous plates to multi-layered structures with arbitrary number of layers. For the sake of definiteness, the upper and lower faces are supposed to be clamped. For homogeneous plates, such boundary conditions do not support low-frequency vibrations [14, 15]. Below we consider layers of two different types, namely, “strong” and “weak” ones, adapting the ratio of their stiffnesses and densities as a single small parameter, such that the wave speeds in strong and weak components are of the same order. In addition, we do not impose any special restriction on the thicknesses of the layers, apart from the assumption that all of them are also of the same asymptotic order. The consideration is restricted to the evaluation of thickness resonances.

The paper is organised as follows. The problem is formulated in Section 1. The general asymptotic procedure is developed in Section 2. A polynomial equation is derived for the



leading order values of the thickness resonances along with linear algebraic equations for the associated eigenforms. As might be expected, the order of the aforementioned equation coincides with the number of strong layers undergoing almost rigid body motion [9]. In this case the weaker layers are subject to nearly homogeneous thickness deformation. The results of Section 2 are specified in the next Section 3 for a five-layered laminate. A correction to the leading order approximation is also calculated, in order to illustrate small deviations from rigid body motions and homogeneous deformations. Numerical results are discussed in the last section.

1. STATEMENT OF THE PROBLEM

Consider a thin elastic laminate composed of n alternating strong and weak layers of thickness h_i , $i = 1, \dots, n$, see Fig. 1. Denote Young moduli, Poisson ratios and densities of the layers by E_m , ν_m and ρ_m with $m = 1$ and $m = 2$ corresponding to weak and strong layers, respectively. Thus, $E_1 \ll E_2$ and also, for the sake of definiteness, we assume that $E_1/E_2 \sim \rho_1/\rho_2$.

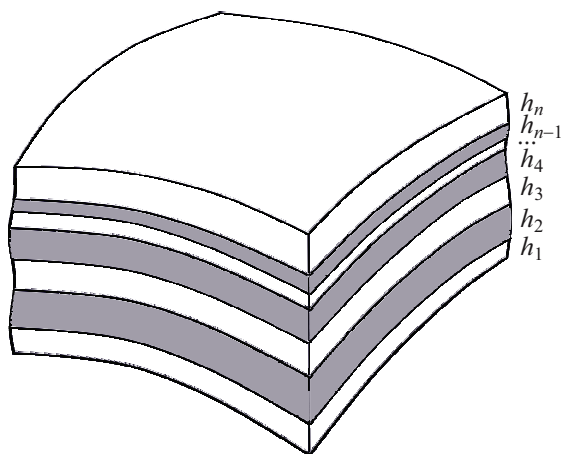


Fig. 1. Multi-layered laminate with n alternating weak and strong layers

The consideration below is oriented to harmonic vibrations with angular frequency ω of a laminate with fixed faces over the low frequency range

$$\omega \ll \frac{1}{h_i} \sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad m = 1, 2. \tag{1}$$

The main focus is on the effect of elastic contrast, since low frequency vibrations is not a feature of homogeneous structures with fixed faces, see [14]. We restrict ourselves to the evaluation of the cutoffs of low-frequency modes arising near the thickness resonances of a flat plate clamped along the faces of weak outer layers.

We start from the equations [2]

$$\frac{E_m}{2(1 + \nu_m)\kappa_m} \frac{d^2 v_{3i}}{dz^2} + \rho_m \omega^2 v_{3i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad m = 1, 2,$$

where

$$\kappa_m = \sqrt{\frac{1 - 2\nu_m}{2 - 2\nu_m}}$$

and

$$\frac{E_m}{2(1 + \nu_m)} \frac{d^2 v_{ki}}{dz^2} + \rho_m \omega^2 v_{ki} = 0, \quad k = 1, 2,$$

for stretch and shear thickness vibrations, respectively, with v_{ki} and v_{3i} denoting tangential and transverse displacements. The continuity conditions along interfaces are written as

$$v_{3i} = v_{3j}, \quad \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)\kappa_1} \frac{dv_{3i}}{dz} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_2)\kappa_2} \frac{dv_{3j}}{dz},$$



or

$$v_{ki} = v_{kj}, \quad k = 1, 2,$$

$$\frac{E_1}{2(1 + \nu_1)} \frac{dv_{ki}}{dz} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_2)} \frac{dv_{kj}}{dz},$$

where $j = i + 1$ for a “weak-strong” interface and $j = i - 1$ for a “strong-weak” one. In addition, along fixed faces $z = 0$ and $z = h_1 + h_2 + \dots + h_n$

$$v_{k1} = v_{31} = v_{kn} = v_{3n} = 0, \quad k = 1, 2.$$

The equations above can be re-written in the form

$$D_m \frac{d^2 u_i}{dz^2} + \rho_m \omega^2 u_i = 0, \tag{2}$$

with

$$u_i = u_j,$$

$$D_1 \frac{du_i}{dz} = D_2 \frac{du_j}{dz} \tag{3}$$

and

$$u_1 = u_n = 0 \tag{4}$$

at $z = 0$ and $z = h_1 + h_2 + \dots + h_n$, where $u_i = v_{3i}$ and $D_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)\rho_m}$ for stretch vibrations and $u_i = v_{ki}$ and $D_m = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)}$ for shear vibrations.

The formulated boundary value problem can be treated asymptotically over low-frequency range (1), due to the contrast properties of the layers.

2. ASYMPTOTIC PROCEDURE

First, re-write the equations in the previous section in dimensionless local coordinates $Z_i = z/h_i$ and frequencies $\Omega_i = \omega h_i/c_m$ with $c_m = \sqrt{D_m/\rho_m}$, $i = 1, 2, \dots, n$ and $m = 1, 2$, having

$$\frac{d^2 u_i}{dZ_i^2} + \Omega_i^2 u_i = 0. \tag{5}$$

The frequency parameters corresponding to both weak or strong i -th and j -th layers are related to each other as

$$\Omega_i = L_j^i \Omega_j, \tag{6}$$

where $L_j^i = h_i/h_j$. At the same time, for i -th weak layer and j -th strong one

$$\Omega_i = c L_j^i \Omega_j, \tag{7}$$

where $c = c_2/c_1$. Boundary conditions (4) become

$$u_1|_{Z_1=0} = u_n|_{Z_n=b_n+1} = 0, \tag{8}$$

where

$$b_1 = 0 \quad \text{and} \quad b_i = \frac{1}{h_i} \sum_{n=0}^{i-1} h_n, \quad i = 2, \dots, n,$$

such that $b_i \leq Z_i \leq b_i + 1$.



Continuity conditions (3) along interfaces take the form

$$u_i|_{Z_i=b_i+1} = u_{i+1}|_{Z_{i+1}=b_{i+1}} \tag{9}$$

and

$$\frac{du_i}{dZ_i} \Big|_{Z_i=b_i+1} = \varepsilon^p L_{i+1}^i \frac{du_{i+1}}{dZ_{i+1}} \Big|_{Z_{i+1}=b_{i+1}}, \tag{10}$$

where $p = 1$ if i -th layer is strong, and $p = -1$ if it is weak. Here small parameter ε is introduced as the ratio

$$\varepsilon = \frac{D_1}{D_2} \ll 1.$$

As it has been already mentioned, we also assume that $\rho_1/\rho_2 \sim \varepsilon$. In this case we have $\Omega_1^2 \sim \Omega_2^2 \sim \dots \sim \Omega_n^2 \sim \varepsilon$ over low frequency range (1). Similarly to [9], we expand frequencies Ω_i and displacements u_i in the asymptotic series

$$\Omega_i^2 = \varepsilon (\Omega_{i0}^2 + \varepsilon \Omega_{i1}^2 + \dots)$$

and

$$u_i = u_{i0} + \varepsilon u_{i1} + \dots$$

At leading order, we have from equation (5) for strong layers

$$\frac{d^2 u_{i0}}{dZ_i^2} = 0, \tag{11}$$

subject to the Neumann boundary conditions

$$\frac{du_{i0}}{dZ_i} \Big|_{Z_i=b_i} = \frac{du_{i0}}{dZ_i} \Big|_{Z_i=b_{i+1}} = 0.$$

As a result, we arrive at uniform variation across the thickness

$$u_{i0} = C_{i,0} = \text{const}, \tag{12}$$

corresponding to rigid body motion.

Next, we proceed with equations (11) for weak layers. For inner weak layers we have

$$u_{i0}|_{Z_i=b_i} = C_{i-1,0}, \quad u_{i0}|_{Z_i=b_{i+1}} = C_{i+1,0},$$

while for outer ones

$$u_{10}|_{Z_1=0} = u_{n0}|_{Z_n=b_{n+1}} = 0.$$

Thus, we obtain for eigenforms

$$\begin{aligned} u_{10} &= C_{2,0} Z_1, \\ &\vdots \\ u_{i0} &= C_{i-1,0} + (C_{i+1,0} - C_{i-1,0})(Z_i - b_i), \\ &\vdots \\ u_{n0} &= C_{n-1,0}(b_n + 1 - Z_n). \end{aligned} \tag{13}$$



At next order, we start again with the equations for strong layers following from (5). They are

$$\frac{d^2 u_{i1}}{dZ_i^2} + \Omega_{i0}^2 u_{i0} = 0. \tag{14}$$

The associated boundary conditions, derived from (10) and (12), become

$$\begin{aligned} \left. \frac{du_{i1}}{dZ_i} \right|_{Z_i=b_i} &= L_{i-1}^i (C_{i,0} - C_{i-2,0}), \\ \left. \frac{du_{i1}}{dZ_i} \right|_{Z_i=b_{i+1}} &= L_{i+1}^i (C_{i+2,0} - C_{i,0}). \end{aligned} \tag{15}$$

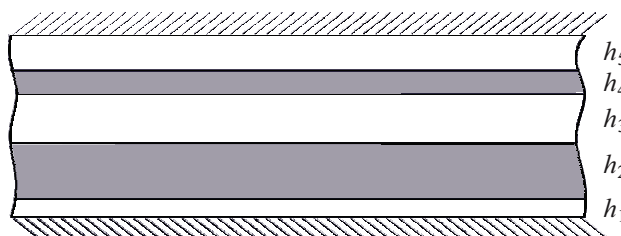
The compatibility of equations (14) and boundary conditions (15) results in the relations

$$\begin{aligned} C_{2,0} \Omega_{20}^2 &= L_1^2 C_{2,0} - L_3^2 (C_{4,0} - C_{2,0}), \\ &\vdots \\ C_{i,0} \Omega_{i0}^2 &= L_{i-1}^i (C_{i,0} - C_{i-2,0}) - L_{i+1}^i (C_{i+2,0} - C_{i,0}), \\ &\vdots \\ C_{n-1,0} \Omega_{n-1,0}^2 &= L_n^{n-1} C_{n-1,0} + L_{n-2}^{n-1} (C_{n-1,0} - C_{n-3,0}). \end{aligned} \tag{16}$$

The latter together with formulae $\Omega_{i0} = L_j^i \Omega_{j0}$, see (6), can be used to determine unknown constants $C_{i,0}$ and, therefore, leading order eigenfrequencies as will be demonstrated below for a five-layered laminate. In addition, next order corrections to eigenfrequencies and eigenforms will be derived.

3. FIVE-LAYERED LAMINATE

Consider a five-layered laminate with alternating weak and strong layers clamped along the faces of outer weak layers, see Fig. 2.



First, we have from (16) for two strong components

$$\begin{aligned} C_{2,0} \Omega_{20}^2 &= L_1^2 C_{2,0} - L_3^2 (C_{4,0} - C_{2,0}), \\ C_{4,0} \Omega_{40}^2 &= L_5^4 C_{4,0} + L_3^4 (C_{4,0} - C_{2,0}), \end{aligned}$$

Fig. 2. Five-layered laminate with clamped faces composed of two strong and three weak layers

with $\Omega_{40} = L_2^4 \Omega_{20}$. These equations yield

$$\Omega_{20}^2 = (L_4^2)^2 (L_5^4 + L_3^4(1 - k)), \tag{17}$$

together with the relation

$$C_{2,0} = k C_{4,0}, \tag{18}$$

with parameter k defined as

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4L_2^4 (L_3^4)^2}}{2L_3^4}, \quad b = L_1^4 L_2^4 + L_2^4 L_3^4 - L_3^4 - L_5^4.$$



Then, we obtain from (13) and (18) for leading order eigenforms

$$\begin{aligned} u_{10} &= C_{4,0}kZ_1, & u_{20} &= C_{4,0}k, & u_{30} &= C_{4,0}(k + (1 - k)(Z_3 - b_3)), \\ u_{40} &= C_{4,0}, & u_{50} &= C_{4,0}(1 + b_5 - Z_5). \end{aligned} \quad (19)$$

Next, we have from boundary value problem (14)–(15) for the first order correction to strong layer displacements

$$u_{i1} = A_{i,1}Z_i^2 + B_{i,1}Z_i + C_{i,1}, \quad i = 2, 4, \quad (20)$$

where

$$\begin{aligned} A_{2,1} &= -\frac{1}{2}C_{4,0}k\Omega_{20}^2, & B_{2,1} &= C_{4,0}k(L_1^2 + \Omega_{20}^2b_2), \\ A_{4,1} &= -\frac{1}{2}C_{4,0}\Omega_{20}^2(L_2^4)^2, & B_{4,1} &= C_{4,0}(\Omega_{20}^2(L_2^4)^2(b_4 + 1) - L_5^4). \end{aligned}$$

For weak layers the first order correction is determined from equations (14) subject to the boundary conditions

$$\begin{aligned} u_{11}|_{Z_1=0} &= 0, & u_{11}|_{Z_1=1} &= u_{21}|_{Z_2=b_2}, \\ u_{31}|_{Z_3=b_3} &= u_{21}|_{Z_2=b_2+1}, & u_{31}|_{Z_3=b_3+1} &= u_{41}|_{Z_4=b_4}, \\ u_{51}|_{Z_5=b_5} &= u_{41}|_{Z_4=b_4+1}, & u_{51}|_{Z_5=b_5+1} &= 0. \end{aligned}$$

As a result, we arrive at

$$u_{i1} = F_{i,1}Z_i^3 + G_{i,1}Z_i^2 + H_{i,1}Z_i + K_{i,1}, \quad i = 1, 3, 5, \quad (21)$$

where

$$\begin{aligned} F_{1,1} &= -\frac{1}{6}C_{4,0}\Omega_{20}^2(L_2^1)^2c^2k, & G_{1,1} &= 0, \\ F_{3,1} &= \frac{1}{6}C_{4,0}\Omega_{20}^2(L_2^3)^2c^2(k - 1), & G_{3,1} &= \frac{1}{2}C_{4,0}\Omega_{20}^2(L_2^3)^2c^2(b_3(1 - k) - k), \\ F_{5,1} &= \frac{1}{6}C_{4,0}\Omega_{20}^2(L_2^5)^2c^2, & G_{5,1} &= -\frac{1}{2}C_{4,0}\Omega_{20}^2(L_2^5)^2c^2(b_5 + 1). \end{aligned}$$

Then, setting one of the constants equal to zero, namely $C_{4,1} = 0$, and applying Dirichlet boundary conditions for weak layers we obtain for the rest of the constants

$$\begin{aligned} H_{1,1} &= A_{2,1}b_2^2 + B_{2,1}b_2 - F_{1,1} + C_{2,1}, \\ H_{3,1} &= A_{4,1}b_4^2 + B_{4,1}b_4 - A_{2,1}(b_2 + 1)^2 - B_{2,1}(b_2 + 1) - F_{3,1}(3b_3^2 + 3b_3 + 1) - \\ &\quad - G_{3,1}(2b_3 + 1) - C_{2,1}, \\ H_{5,1} &= -A_{4,1}(b_4 + 1)^2 - B_{4,1}(b_4 + 1) - F_{5,1}(3b_5^2 + 3b_5 + 1) - G_{5,1}(2b_5 + 1) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} K_{1,1} &= 0, & K_{3,1} &= A_{4,1}b_4^2 + B_{4,1}b_4 - F_{3,1}(b_3 + 1)^3 - G_{3,1}(b_3 + 1)^2 - H_{3,1}(b_3 + 1), \\ & & K_{5,1} &= -F_{5,1}(b_5 + 1)^3 - G_{5,1}(b_5 + 1)^2 - H_{5,1}(b_5 + 1), \end{aligned}$$

where $C_{2,1}$ is still unknown.



Now, we consider vibrations of strong layers at second order, starting from the equations

$$\frac{d^2 u_{i2}}{dZ_i^2} + \Omega_{i0}^2 u_{i1} + \Omega_{i1}^2 u_{i0} = 0, \quad i = 2, 4, \tag{22}$$

subject to the boundary conditions

$$\begin{aligned} \left. \frac{du_{i2}}{dZ_i} \right|_{Z_i=b_i} &= L_{i-1}^i \left. \frac{du_{i-11}}{dZ_{i-1}} \right|_{Z_{i-1}=b_{i-1}+1}, \\ \left. \frac{du_{i2}}{dZ_i} \right|_{Z_i=b_i+1} &= L_{i+1}^i \left. \frac{du_{i+11}}{dZ_{i+1}} \right|_{Z_{i+1}=b_{i+1}}. \end{aligned} \tag{23}$$

The compatibility condition for the last boundary value problem leads to

$$\begin{aligned} \Omega_{21}^2 = \frac{1}{6k} &\left(2A_{2,1}^* (-3b_2^2 \Omega_{20}^2 + 3L_1^2 b_2^2 + 3L_3^2 b_2^2 - 3b_2 \Omega_{20}^2 + 3L_3^2 + 6L_3^2 b_2 - \Omega_{20}^2) - \right. \\ &- 6A_{4,1}^* L_3^2 b_4^2 + 3B_{2,1}^* (-2b_2 \Omega_{20}^2 + 2L_1^2 b_2 + 2L_3^2 b_2 - \Omega_{20}^2 + 2L_3^2) - 6B_{4,1}^* L_3^2 b_4 + \\ &\left. + 6C_{2,1}^* (-\Omega_{20}^2 + L_1^2 + L_3^2) + 12F_{1,1}^* L_1^2 + 6F_{3,1}^* L_3^2 (3b_3 +) + 6G_{3,1}^* L_3^2 \right), \end{aligned} \tag{24}$$

where

$$\begin{aligned} C_{2,1}^* = \frac{C_{2,1}}{C_{4,0}} &= -\frac{1}{6} \frac{1}{L_1^4 L_2^4 + L_2^4 L_3^4 + L_3^4 k - (L_2^4)^2 \Omega_{20}^2} \times \\ &\times \left(2A_{2,1}^* (3L_1^4 L_2^4 b_2^2 + 3L_2^4 L_3^4 b_2^2 - 3b_2^2 \Omega_{20}^2 (L_2^4)^2 - 3b_2 \Omega_{20}^2 (L_2^4)^2 + 6L_2^4 L_3^4 b_2 - \right. \\ &- \Omega_{20}^2 (L_2^4)^2 + 3L_3^4 b_2^2 k + 3L_2^4 L_3^4 + 6L_3^4 b_2 k + 3L_3^4 k) + 2A_{4,1}^* (3b_4^2 k \Omega_{20}^2 (L_2^4)^2 + \\ &+ 3b_4 k \Omega_{20}^2 (L_2^4)^2 - 3L_2^4 L_3^4 b_4^2 + k \Omega_{20}^2 (L_2^4)^2 - 3L_3^4 b_4^2 k - 3L_5^4 b_4 k - 6L_5^4 b_4 k - 3L_5^4 k) - \\ &- 3B_{2,1}^* (2b_2 \Omega_{20}^2 (L_2^4)^2 + 2L_1^4 L_2^4 b_2 + 6L_2^4 L_3^4 b_2 - \Omega_{20}^2 (L_2^4)^2 + 2L_2^4 L_3^4 + 2L_3^4 b_2 k + 2L_3^4 k) + \\ &+ 3B_{4,1}^* (k \Omega_{20}^2 (L_2^4)^2 + 2b_4 k \Omega_{20}^2 (L_2^4)^2 - 2L_2^4 L_3^4 b_4 - 2L_3^4 b_4 k - 2L_5^4 b_4 k - 2L_5^4 k) + \\ &+ 12F_{1,1}^* L_1^4 L_2^4 + 6F_{3,1}^* (3L_2^4 L_3^4 b_3 + L_2^4 L_3^4 - 3L_3^4 b_3 k - 2L_3^4 k) - 6F_{5,1}^* (3L_5^4 b_5 k + L_5^4 k) + \\ &\left. + 6G_{3,1}^* (L_2^4 L_3^4 - L_3^4 k) - 6G_{5,1}^* L_5^4 k \right) \end{aligned}$$

and all the constants with \star are obtained from their counterparts through division by $C_{4,0}$.

4. NUMERICAL RESULTS

Consider a five-layered laminate studied in the previous section with the layers of same thickness h , i.e. $h_i = h, i = 1, 2, \dots, 5$. Then, we have from (17) and (24) for eigenfrequencies, and from (19), (20), and (21) for eigenform at $k = 1$ and $k = -1$, respectively

$$\Omega_2^2 = \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon}{6} (5c^2 + 2) + \dots \right), \tag{25}$$



with

$$\begin{aligned}
 u_1 &= Z_1 + \frac{\varepsilon}{6} Z_1 (-Z_1^2 c^2 + c^2 + 24) + \dots, \\
 u_2 &= 1 + \frac{\varepsilon}{2} (-Z_2^2 + 4Z_2 + 5) + \dots, \\
 u_3 &= 1 + \frac{\varepsilon}{2} (-c^2 Z_3^2 + 5c^2 Z_3 - 6c^2 + 9) + \dots, \\
 u_4 &= 1 - \frac{\varepsilon}{2} Z_4 (Z_4 - 6) + \dots, \\
 u_5 &= -Z_5 + 5 + \frac{\varepsilon}{6} (c^2 Z_5^3 - 15c^2 Z_5^2 - 24Z_5 + 74Z_5 c^2 - 120c^2 + 120) + \dots
 \end{aligned} \tag{26}$$

and

$$\Omega_2^2 = \varepsilon \left(3 - \frac{\varepsilon}{2} (3c^2 + 2) + \dots \right), \tag{27}$$

with

$$\begin{aligned}
 u_1 &= -Z_1 + \frac{\varepsilon}{2} Z_1 (Z_1^2 c^2 - c^2 - 40) + \dots, \\
 u_2 &= -1 + \frac{\varepsilon}{2} (3Z_2^2 - 8Z_2 - 35) + \dots, \\
 u_3 &= 2Z_3 - 5 + \frac{\varepsilon}{2} (-2c^2 Z_3^3 + 15c^2 Z_3^2 - 37c^2 Z_3 + 78Z_3 + 30c^2 - 195) + \dots, \\
 u_4 &= 1 - \frac{\varepsilon}{2} Z_4 (3Z_4 - 22) + \dots, \\
 u_5 &= -Z_5 + 5 + \frac{\varepsilon}{2} (c^2 Z_5^3 - 15c^2 Z_5^2 + 74Z_5 c^2 - 40Z_5 - 120c^2 + 200) + \dots
 \end{aligned} \tag{28}$$

The eigenfrequencies, calculated from one-term and two-term asymptotic formulae, see (25) and (27), versus their exact values, for which $\det M = 0$ in (30), are presented in the Table. Here and below $\varepsilon = 0.01$ and $c = 1$.

Comparison of exact and approximate eigenfrequencies

k	$\Omega_2^2 = \varepsilon \Omega_{20}^2$	$\Omega_2^2 = \varepsilon (\Omega_{20}^2 + \varepsilon \Omega_{21}^2)$	exact value Ω_2^2
1	0.01	0.009883	0.009884
-1	0.03	0.02975	0.02975

Fig. 3 demonstrates a good agreement between two-term expansions (26) and (28) and exact solution (29) for both $k = \pm 1$. In this figure the exact eigenforms are normalized by constant U_{24} ($U_{24} \approx C_{40}$), see Appendix.

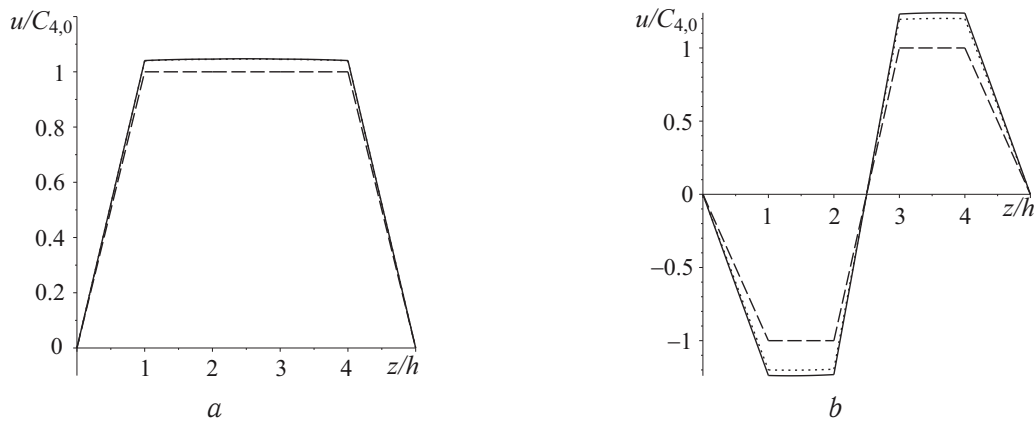


Fig. 3. Asymptotic expansions (26), $k = 1$ (a) and (28), $k = -1$ (b) of the eigenforms of a regular five-layered laminate at $\varepsilon = 0$ (dashed line) and $\varepsilon = 0.01$, $c = 1$ (dotted line) together with exact solution (29) (solid line)



5. CONCLUDING REMARKS

The developed methodology seems to be the initial stage in analysing low-frequency vibrations of strongly inhomogeneous multi-layered structures. The next step, following the evaluation of low-frequency thickness resonances, is concerned with the derivation of multi-mode polynomial approximations of the original dispersion relations, similarly to [6]. The final expected outcome should involve two-dimensional equations of motion supplied with appropriate boundary conditions at the edges. The proposed approach may be easily extended to layered anisotropic and pre-stressed structures, previously investigated only for homogeneous and non-contrast configurations, e.g. see [16–18]. Certainly, various generalisations dealing with another scaling for problem parameters are also possible.

Acknowledgements: This work was supported by the grant J2-9224 from the Slovenian Research Agency and also by Program OP20.00362 EVA4GREEN. L. A. Prikazchikova acknowledges support by the Faculty Award by Keele University, UK.

APPENDIX

The solution of equations (5) for a five-component laminate can be written as

$$u_i = U_{i1} \sin(\Omega_i Z_i) + U_{i2} \cos(\Omega_i Z_i), \quad i = 1, \dots, 5, \quad (29)$$

where U_{i1} and U_{i2} are constants. On substituting (29) into continuity conditions (9), (10) and boundary conditions (8), we arrive at the eigenvalue problem

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (30)$$

where $\mathbf{U} = (U_{11}, U_{12}, U_{21}, U_{22}, U_{31}, U_{32}, U_{41}, U_{42}, U_{51}, U_{52})^T$, is an eigenvector and \mathbf{M} is a 10×10 matrix with non-zero components given by

$$\begin{aligned} M_{12} &= 1, & M_{21} &= \sin(\Omega_1), & M_{22} &= \cos(\Omega_1), & M_{23} &= -\sin(\Omega_2 b_2), & M_{24} &= -\cos(\Omega_2 b_2), \\ M_{33} &= \sin(\Omega_2(b_2 + 1)), & M_{34} &= \cos(\Omega_2(b_2 + 1)), & M_{35} &= -\sin(\Omega_3 b_3), & M_{36} &= -\cos(\Omega_3 b_3), \\ M_{45} &= \sin(\Omega_3(b_3 + 1)), & M_{46} &= \cos(\Omega_3(b_3 + 1)), & M_{47} &= -\sin(\Omega_4 b_4), & M_{48} &= -\cos(\Omega_4 b_4), \\ M_{57} &= \sin(\Omega_4(b_4 + 1)), & M_{58} &= \cos(\Omega_4(b_4 + 1)), & M_{59} &= -\sin(\Omega_5 b_5), & M_{510} &= -\cos(\Omega_5 b_5), \\ & & M_{69} &= \sin(\Omega_5(b_5 + 1)), & M_{610} &= \cos(\Omega_5(b_5 + 1)), \\ M_{71} &= \Omega_1 \cos(\Omega_1) \varepsilon, & M_{72} &= -\Omega_1 \sin(\Omega_1) \varepsilon, & M_{73} &= -L_2^1 \cos(\Omega_2 b_2) \Omega_2, & M_{74} &= L_2^1 \sin(\Omega_2 b_2) \Omega_2, \\ M_{83} &= \Omega_2 \cos(\Omega_2(b_2 + 1)), & M_{84} &= -\Omega_2 \sin(\Omega_2(b_2 + 1)), & M_{85} &= -L_3^2 \cos(\Omega_3 b_3) \Omega_3 \varepsilon, \\ M_{86} &= L_3^2 \sin(\Omega_3 b_3) \Omega_3 \varepsilon, & M_{95} &= \Omega_3 \cos(\Omega_3(b_3 + 1)) \varepsilon, & M_{96} &= -\Omega_3 \sin(\Omega_3(b_3 + 1)) \varepsilon, \\ M_{97} &= -L_4^3 \cos(\Omega_4 b_4) \Omega_4, & M_{98} &= L_4^3 \sin(\Omega_4 b_4) \Omega_4, & M_{107} &= \Omega_4 \cos(\Omega_4(b_4 + 1)), \\ M_{108} &= -\Omega_4 \sin(\Omega_4(b_4 + 1)), & M_{109} &= -L_5^4 \cos(\Omega_5 b_5) \Omega_5 \varepsilon, & M_{1010} &= L_5^4 \sin(\Omega_5 b_5) \Omega_5 \varepsilon. \end{aligned}$$

References

1. Kossovich L. Yu. *Nestacionarnye zadachi teorii uprugih tonkih obolochek* [Nonstationary problems in the theory of elastic thin shells]. Saratov, Saratov Univ. Press, 1986 (in Russian).
2. Kaplunov J. D., Kossovich L. Y., Nolde E. V. *Dynamics of thin walled elastic bodies*. Academic Press, 1998.



3. Beresin V. L., Kossovich L. Y., Kaplunov J. D. Synthesis of the dispersion curves for a cylindrical shell on the basis of approximate theories. *Journal of sound and vibration*, 1995, vol. 186, no. 1, pp. 37–53. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0432>
4. Le K. C. *Vibrations of shells and rods*. Berlin, Springer, 1999.
5. Berdichevsky V. Л. *Variacionnyye principy mekhaniki sploshnoj sredy* [Variational Principles of Continuum Mechanics]. Moscow, Nauka, Glav. red. fiz.-mat. lit., 1983 (in Russian).
6. Kaplunov J., Prikazchikov D. A., Prikazchikova L. A. Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate. *International Journal of Solids and Structures*, 2017, vol. 113–114, pp. 169–179. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.01.042>
7. Kossovich L. Yu., Shevtsova Yu. V. Asymptotic approximations of three-dimensional dynamic equations of elasticity theory in case of two-layered plates. *Problems of strenght and plasticity*, 2005, vol. 76, pp. 102–111 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2005-67-1-102-110>
8. Prikazchikova L., Ece Aydın Y., Erbaş B., Kaplunov J. Asymptotic analysis of an anti-plane dynamic problem for a three-layered strongly inhomogeneous laminate. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1177/1081286518790804>
9. Kaplunov J., Prikazchikov D., Sergushova O. Multi-parametric analysis of the lowest natural frequencies of strongly inhomogeneous elastic rods. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, vol. 366, pp. 264–276. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.12.008>
10. Vinson J. R. *The behavior of sandwich structures of isotropic and composite materials*. CRC Press, 1999.
11. Ivanov I. V. Analysis, modelling, and optimization of laminated glasses as plane beam. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, vol. 43, no. 22–23, pp. 6887–6907. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.02.014>
12. Schulze S.-H., Pander M., Naumenko K., Altenbach H. Analysis of laminated glass beams for photovoltaic applications. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, vol. 49, pp. 2027–2036. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.03.028>
13. Lee P., Chang N. Harmonic waves in elastic sandwich plates. *Journal of Elasticity*, 1979, vol. 9, pp. 51–69. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00040980>
14. Kaplunov J. D. Long-wave vibrations of a thinwalled body with fixed faces. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1995, vol. 48, no. 3, pp. 311–327. DOI: <https://doi.org/10.1093/qjmam/48.3.311>
15. Kaplunov J. D., Nolde E. V. Long-wave vibrations of a nearly incompressible isotropic plate with fixed faces. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 2002, vol. 55, no. 3, pp. 345–356. DOI: <https://doi.org/10.1093/qjmam/55.3.345>
16. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Rogerson G. A. Direct asymptotic integration of the equations of transversely isotropic elasticity for a plate near cut-off frequencies. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 2000, vol. 53, no. 2, pp. 323–341.
17. Nolde E. V., Rogerson G. A. Long wave asymptotic integration of the governing equations for a pre-stressed incompressible elastic layer with fixed faces. *Wave Motion*, 2002, vol. 36, no. 3, pp. 287–304. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0165-2125\(02\)00017-3](https://doi.org/10.1016/S0165-2125(02)00017-3)
18. Rogerson G. A., Sandiford K. J., Prikazchikova L. A. Abnormal long wave dispersion phenomena in a slightly compressible elastic plate with non-classical boundary conditions. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2007, vol. 42, no. 2, pp. 298–309. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2007.01.005>

Cite this article as:

Kaplunov J. D., Prikazchikova L. A. Low-Frequency Vibration Modes of Strongly Inhomogeneous Elastic Laminates. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 447–457. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-447-457>



УДК 539.3

ДЛИННОВОЛНОВЫЕ МОДЫ КОЛЕБАНИЙ СИЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СЛОИСТЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Ю. Д. Каплунов, Л. А. Приказчикова

Каплунов Юлий Давидович, доктор физико-математических наук, профессор, Школа компьютерных наук и математики, Университет г. Киль, Киль, Стаффордшир, ST5 5BG, Великобритания, j.kaplunov@keele.ac.uk

Приказчикова Людмила Анатольевна, кандидат физико-математических наук, Школа компьютерных наук и математики, Университет г. Киль, Киль, Стаффордшир, ST5 5BG, Великобритания, l.prikazchikova@keele.ac.uk

В статье изучается динамика тонких многослойных конструкций с контрастными «мягкими» и «жесткими» слоями. Разработана асимптотическая процедура для анализа малых частот среза. Получено полиномиальное частотное уравнение, а также линейные уравнения для собственных форм толщинных колебаний. В случае пятислойной пластины с зажатыми лицевыми поверхностями выведены двухчленные асимптотические разложения для собственных частот и форм, которые сопоставляются с точным решением исходной задачи о свободных толщинных колебаниях.

Ключевые слова: асимптотика, контраст, слоистые упругие конструкции, толщинные колебания, малые частоты, срез.

Благодарности. Статья выполнена при финансовой поддержке Словенского исследовательского агентства (проект № J2-9224) и программы OP20.00362 EVA4GREEN. Работа Л. А. Приказчиковой выполнена при финансовой поддержке премии факультета Университета Киль, Великобритания.

Образец для цитирования:

Kaplunov J. D., Prikazchikova L. A. Low-Frequency Vibration Modes of Strongly Inhomogeneous Elastic Laminates [Каплунов Ю. Д., Приказчикова Л. А. Длинноволновые моды колебаний сильно неоднородных упругих слоистых конструкций] // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 447–457. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-447-457>



УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ПЛАСТИНЕ С ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВИДА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАТЕРИАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Е. В. Ломакин, О. П. Щендригина

Ломакин Евгений Викторович, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории пластичности, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1, evlomakin@yandex.ru

Щендригина Олеся Павловна, студент кафедры теории пластичности, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1, Ol.Shendrigina@mail.ru

В работе проведен анализ свойств определяющих соотношений, предложенных для описания поведения материалов, диаграммы деформирования которых зависят от вида внешних воздействий. При этом появляются различные формы нелинейности, связанные с зависимостью свойств материалов от вида напряженного состояния, нелинейностью диаграмм деформирования, взаимосвязью процессов сдвигового и объемного деформирования. Исследовано влияние этих форм нелинейности на распределение напряжений и деформаций в круглой пластине при различных граничных условиях. Проведены расчеты полей напряжений и деформаций для конструкционного графита и сравнение с результатами расчетов для классического физически нелинейного материала, свойства которого инварианты к виду внешних нагрузок. Установлены условия, накладываемые на параметры материальных функций, обеспечивающие единственность решения краевых задач.

Ключевые слова: нелинейная теория упругости, определяющие соотношения, параметр вида напряженного состояния, чувствительность свойств к виду внешних воздействий.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-458-466>

ВВЕДЕНИЕ

Деформированные свойства многих материалов зависят от вида внешних воздействий. Данное явление характерно для большинства гетерогенных материалов, и степень такой зависимости определяется структурными особенностями материалов. Анализ результатов экспериментальных исследований свидетельствует о том, что для данных материалов отсутствует единая диаграмма зависимости эквивалентного напряжения от эквивалентной деформации, а также проявляется взаимосвязь сдвигового и объемного деформирования.

Под зависимостью деформационных свойств материалов от вида внешних воздействий обычно понимается различие модулей упругости при одноосном растяжении и одноосном сжатии, которое получило название разномодульности [1–13]. Следует отметить, что диаграммы деформирования материалов обладают некоторой нелинейностью даже при малых деформациях, и определение модуля упругости по таким диаграммам приводит к соответствующей погрешности. Поскольку диаграммы деформирования при растяжении и сжатии разные, то под разномодульностью обычно понимается различие в значениях некоторых секущих модулей при линейной аппроксимации слабо нелинейных диаграмм деформирования [8]. Следует также отметить, что одноосное растяжение и одноосное сжатие — это всего лишь два частных вида



из множества возможных видов напряженных состояний, и если свойства различаются для двух частных видов нагружения или деформирования, то, естественно, они отличны и для других видов напряженного состояния. Это подтверждается результатами экспериментальных исследований свойств конструкционных графитов, бетона, чугуна, теплозащитных материалов, горных пород, композитных материалов и многих других [14, 15]. Поэтому при описании деформирования данных материалов необходимо использовать параметры вида напряженного состояния, один из которых представляет собой отношение гидростатической компоненты напряжений $\sigma = \sigma_{ii}/3$ к эквивалентному напряжению $\sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}}$, где $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$. Параметр $\xi = \sigma/\sigma_0$ характеризует в среднем соотношение между нормальными и касательными напряжениями в точке сплошной среды [16].

Эффект чувствительности механических характеристик материалов к виду внешних воздействий или виду напряженного состояния можно проиллюстрировать на основе анализа результатов экспериментальных исследований свойств чугуна и конструкционного графита [15]. На рис. 1 приведены эквивалентные диаграммы деформирования серого чугуна СЧ15-32, полученные на основе испытаний трубчатых образцов при действии осевой нагрузки и крутящего момента, где $\epsilon_0 = \sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}}$ — эквивалентная деформация, $e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\epsilon\delta_{ij}$ — девиатор деформаций, $\epsilon = \epsilon_{kk}$ — объемная деформация в случае малых деформаций. Кривая 1 соответствует одноосному растяжению ($\xi = 1/3$), кривая 3 — чистому сдвигу ($\xi = 0$), кривая 6 — одноосному сжатию ($\xi = -1/3$). Кривые 2, 4 и 5 получены в условиях пропорционального нагружения при различных значениях отношения осевой нагрузки и крутящего момента, им соответствуют следующие значения параметра ξ : 0.232, -0.064, -0.126.

На рис. 2 приведены эквивалентные диаграммы деформирования, получен-

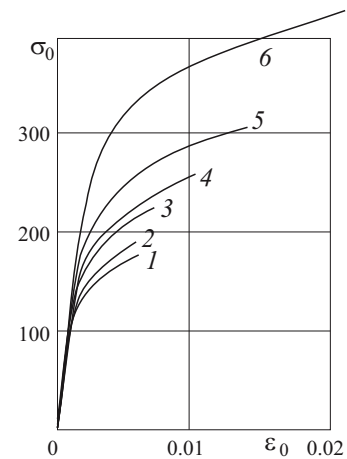


Рис. 1. Эквивалентные диаграммы деформирования чугуна СЧ 15-32: 1 — одноосное растяжение, 3 — чистый сдвиг, 6 — одноосное сжатие, 2, 4, 5 — пропорциональное нагружение с параметром $\xi = 0.232, -0.064, -0.126$

Fig. 1. Equivalent deformation diagrams of cast iron 15-32: 1 — uniaxial tension; 3 — pure shear; 6 — uniaxial compression; 2, 4, 5 — proportional loading with parameter $\xi = 0.232, -0.064, -0.126$

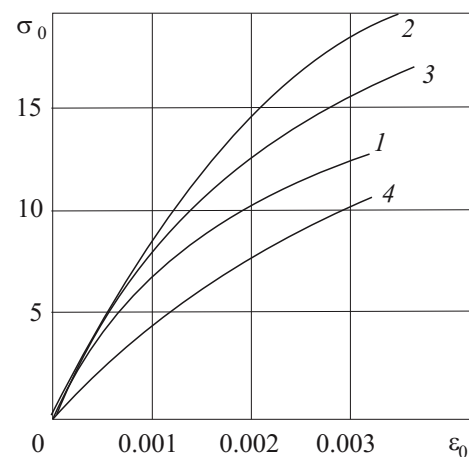


Рис. 2. Эквивалентные диаграммы деформирования конструкционного графита АРВ: 1 — одноосное растяжение, 2 — одноосное сжатие, 3 — сдвиг, 4 — равномерное двухосное растяжение

Fig. 2. Equivalent strain diagrams of structural graphite АРВ: 1 — uniaxial tension; 2 — uniaxial compression; 3 — shear; 4 — proportional biaxial tension



ные на основе испытаний трубчатых образцов графита АРВ в условиях одноосного растяжения (1), одноосного сжатия (2), сдвига (3), равномерного двухосного растяжения (4), при котором параметр $\xi = 2/3$. Таким образом, вместо «единой кривой» зависимости $\sigma_0 \sim \varepsilon_0$ имеется серия криволинейных диаграмм деформирования. Для графита нелинейность диаграмм значительно меньше, чем для чугуна, и они допускают использование линейной аппроксимации в определенном диапазоне деформаций, но начальный наклон диаграмм практически одинаковый.

1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Для условий активного нагружения можно ввести потенциал деформаций, описывающий зависимость механических свойств материалов от вида напряженного состояния [14]

$$\Phi = \frac{1}{2}(A + B\xi^2)\sigma_0^2 + [1 + \varkappa(\xi)]g(\sigma_0), \quad A = \frac{2(1 + \nu)}{3E}, \quad B = \frac{3(1 - 2\nu)}{E}. \quad (1)$$

Первое слагаемое в (1) совпадает с потенциалом для линейноупругого тела, а второе характеризует нелинейность диаграмм деформирования. Наиболее распространенное выражение для функции $g(\sigma_0)$ – это степенная зависимость, $g(\sigma_0) = k\sigma_0^n/n$. Дифференцируя выражение (1) по напряжениям, получаем уравнения связи между деформациями и напряжениями, которые имеют следующий вид:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} [A + \lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}] S_{ij} + \frac{1}{3} [B + \Lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}] \sigma \delta_{ij}, \quad (2)$$

$$\lambda(\xi) = 1 + \varkappa - \frac{\varkappa'(\xi)\xi}{n}, \quad \Lambda(\xi) = \frac{\varkappa'(\xi)}{\xi n}.$$

Функции $\lambda(\xi)$ и $\Lambda(\xi)$ и их производные связаны соотношениями:

$$\lambda(\xi) + \xi^2 \Lambda(\xi) = 1 + \varkappa(\xi), \quad \lambda'(\xi) + \xi^2 \Lambda'(\xi) = (n - 2)\xi \Lambda(\xi). \quad (3)$$

В отсутствии зависимости деформационных свойств материалов от вида напряженного состояния функция $\varkappa(\xi) \equiv 0$ и определяющие соотношения (2) совпадают с соотношениями деформационной теории пластичности.

Используя (2), можно получить выражения для эквивалентной деформации и объемной деформации

$$\varepsilon_0(\xi) = [A + \lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}] \sigma_0, \quad \varepsilon = [B + \Lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}] \sigma. \quad (4)$$

Из выражений (4) можно получить соотношение, связывающее эквивалентную и объемную деформации:

$$\varepsilon = \frac{B + \Lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}}{A + \lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}} \xi \varepsilon_0.$$

Последнее соотношение означает, что в рассматриваемых материалах процессы объемного и сдвигового деформирования взаимосвязаны. В условиях пропорционального нагружения параметр ξ постоянный, но принимает разные значения для разных видов нагружения. Функция $\lambda(\xi) = (\varepsilon_0 - A\sigma_0)(k\sigma_0^{n-2})^{-1}$ характеризует расхождение между диаграммами зависимости эквивалентного напряжения от эквивалентной деформации для разных условий пропорционального нагружения. При этом функцию



$\Lambda(\xi)$ можно определить из второго соотношения (3), которое представляет собой дифференциальное уравнение для $\Lambda(\xi)$ при известной функции $\lambda(\xi)$, которая может быть определена на основе результатов экспериментальных исследований. Решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$\Lambda(\xi) = \left(- \int \frac{\lambda'(\xi)}{\xi^n} d\xi + C_0 \right) \xi^{n-2}. \quad (5)$$

Условия единственности решения задач с использованием определяющих соотношений (2) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{(A + B\xi^2)\sigma_0^2}{2} + \frac{1}{n} [\lambda(\xi) + \xi^2\Lambda(\xi)] k\sigma_0^n &> 0, \\ A + [(n-1)\lambda(\xi) - \xi\lambda'(\xi)] k\sigma_0^{n-2} &> 0, \\ B + [\Lambda(\xi) - \xi\Lambda'(\xi)] k\sigma_0^{n-2} - \frac{[\lambda'(\xi)k\sigma_0^{n-2}]^2}{A + [(n-1)\lambda(\xi) - \xi\lambda'(\xi)] k\sigma_0^{n-2}(\xi)} &> 0. \end{aligned}$$

В тех случаях, когда нелинейность диаграмм деформирования незначительная и допускает их линейную аппроксимацию в определенном диапазоне деформаций, показатель n функции $g(\sigma_0)$ равен 2, соотношения (2) упрощаются и могут быть представлены в виде

$$\varepsilon_{ij}(\xi) = \frac{3}{2}\omega(\xi)S_{ij} + \frac{1}{3}\Omega(\xi)\delta_{ij}, \quad (6)$$

где $\omega(\xi) = -\frac{\lambda'(\xi)(A + B\xi^2)\xi}{2} + A[1 + \lambda(\xi)]$, $\Omega(\xi) = \frac{\lambda'(\xi)(A + B\xi^2)}{2\xi} + B[1 + \lambda(\xi)]$.

Соотношения (6) представляют собой вариант определяющих соотношений, который позволяет учесть различие моделей упругости не только при одноосном растяжении и одноосном сжатии, но и в более полной мере описать зависимость деформационных свойств материалов от создаваемого при нагружении вида напряженного состояния. При этом $\omega(\xi) = \varepsilon_0/\sigma_0$ и вместо серии криволинейных диаграмм получается серия прямолинейных диаграмм зависимости между эквивалентным напряжением и эквивалентной деформацией.

2. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЕ

Рассмотрим кольцевую пластину при заданных граничных условиях на внутреннем радиусе a и внешнем радиусе b . Напряженно-деформированное состояние в такой пластине будет обобщенно плоским с осевой симметрией. Радиальная и окружная деформации выражаются через радиальное перемещение $u(r)$ по формулам $\varepsilon_{rr}(r) = du(r)/dr$, $\varepsilon_{\phi\phi}(r) = u(r)/r$. Для решения задачи имеем уравнение совместности деформаций и уравнение равновесия:

$$\frac{d\varepsilon_{\phi\phi}(r)}{dr} + \frac{\varepsilon_{\phi\phi}(r) - \varepsilon_{rr}(r)}{r} = 0, \quad \frac{d\sigma_{rr}(r)}{dr} + \frac{\sigma_{rr}(r) - \sigma_{\phi\phi}(r)}{r} = 0.$$

Пусть пластина изготовлена из материала с зависимостью свойств от вида напряженного состояния. Внутренний радиус ($r = a$) пластины жестко зафиксирован, т. е. $u_{rr}(a) = 0$, а на внешнем радиусе ($r = b$) действует равномерно распределенное по всей окружности и направленное по радиусу напряжение q . Поскольку состояния связи между напряжениями и деформациями нелинейные вследствие наличия



в них параметра ξ , то уравнения получаются нелинейными и при их интегрировании необходимо использовать численные методы. Найдем численное решение для напряжений и деформаций в каждой точке пластины.

Приведенные на рис. 2 диаграммы нелинейны даже при очень малых деформациях, поэтому при определении деформационных свойств материала обычно используется линейная аппроксимация слабо нелинейных диаграмм деформирования в определенном диапазоне деформаций. Для графита АРВ модули упругости и коэффициенты Пуассона определялись при значении продольной деформации 0.001. При такой аппроксимации модуль упругости и коэффициент Пуассона при одноосном растяжении $E^+ = 5.1 \cdot 10^3$ МПа, $\nu^+ = 0.2$, а при одноосном сжатии $E^- = 7.83 \cdot 10^3$ МПа, $\nu^- = 0.35$. На основе анализа экспериментальных данных установлено, что функция $\omega(\xi)$ в определяющих соотношениях (5) также может быть аппроксимирована линейной зависимостью $\omega(\xi) = A + C\xi$ с коэффициентом $C/A = 0.45$ [8], тогда $\Omega(\xi) = B + \frac{C}{\xi}$. Во всех уравнениях и определяющих соотношениях перейдем к безразмерным величинам, отнеся радиальную координату к внутреннему радиусу a пластины, а вместо напряжения введем безразмерную величину $A\sigma_{ij}$. В случае линейной аппроксимации диаграмм деформирования определяющие соотношения примут вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \left(\frac{C}{A}\xi + 1 \right) \tilde{S}_{ij} + \frac{1}{3} \left(\frac{C}{A\xi} + \frac{B}{A} \right) \tilde{\sigma}\delta_{ij},$$

где \tilde{S}_{ij} и $\tilde{\sigma}$ — это обезразмеренные величины. Далее знак над напряжениями опущен.

Для графита при $C/A = 0.45$ распределения напряжений и деформаций представлены на рис. 3.

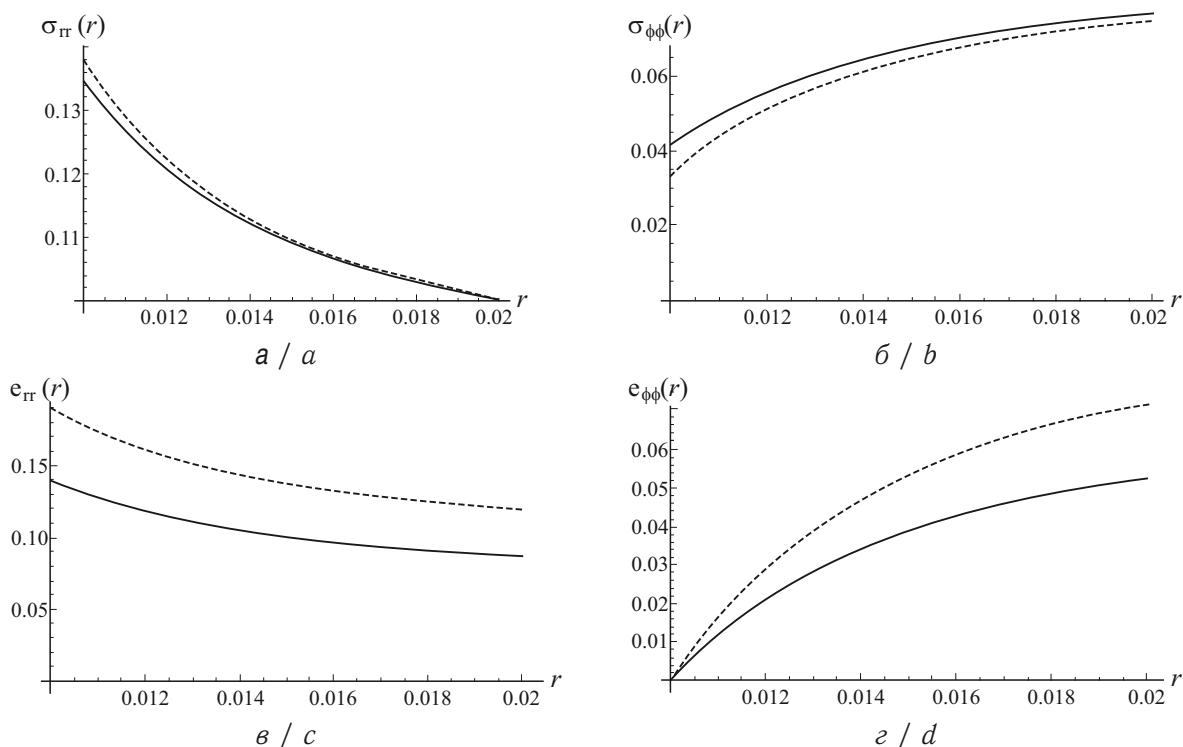


Рис. 3. Распределения напряжений и деформаций в пластине ($C = 0.45$ — пунктирная линия, $C = 0$ — сплошная линия): a — радиальное напряжение; b — окружное напряжение; c — радиальные деформации; d — окружные деформации

Fig. 3. The distributions of stresses and strains in the plate ($C = 0.45$ dotted line, $C = 0$ solid line): a — radial stress; b — circumferential stress; c — radial deformations; d — circumferential deformations



Кроме того, проведены расчеты для $C/A = 0$, то есть для случая, когда зависимостью свойств материала от вида напряженного состояния пренебрегают.

Сравнение результатов расчетов для данных значений параметра C/A позволяет сделать некоторые выводы относительно степени влияния зависимости деформационных свойств материалов от вида напряженного состояния на распределения напряжений и деформаций в рассмотренном частном случае пластины. Результаты расчетов свидетельствуют о том, что пренебрежение данной зависимостью может привести к существенной погрешности результатов расчетов. Для графита в отличие от классического решения ($C/A = 0$) составляет 8% для радиального и 27% для окружного напряжений. Для деформаций это отличие более заметно и составляет 26% для радиальной и 28% для окружной деформации. При этом параметр вида напряженного состояния ξ меняется в пределах от 0.46 до 0.64. В тех случаях, когда диапазон изменения этого параметра больше, эффект будет более значительным.

ВЫВОД

Приведенные в работе результаты экспериментальных исследований свидетельствуют о том, что расхождение диаграмм деформирования материалов при разных условиях нагружения может быть весьма существенным. Сформулированные ранее авторами соотношения, связывающие напряжения и деформации, хорошо описывают эффект зависимости диаграмм деформирования от вида напряженного состояния и позволяют получать достоверные результаты о напряженно-деформированном состоянии в телах. Рассмотрены различные варианты определяющих соотношений, в том числе и для случая слабо нелинейных диаграмм, допускающих их линейную аппроксимацию в выбранном диапазоне деформаций. Этот вариант соотношений использован при анализе напряжений и деформаций в пластине. Расчеты проведены на основе значений характеристик, определенных для конструкционного графита АРВ. При этом обнаружено достаточно заметное различие в величинах напряжений и деформаций по сравнению с решением задачи для материала, свойства которого инвариантны к виду внешних воздействий, которое достигало 28%. Следует отметить, что результаты расчетов существенным образом зависят от диапазона изменения параметра вида напряженного состояния при решении конкретных задач и чем шире этот диапазон, тем более значительно влияние эффекта зависимости свойств материалов от вида напряженного состояния.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 17-01-00318, 17-51-52001).

Библиографический список

1. *Ambartsumyan S. A.* Elasticity Theory of Different Modulus. Translated by Wu R. Beijing, China Railway Publishing House, 1986.
2. *Jones R. M.* Buckling of circular cylindrical shells with different moduli in tension and compression // AIAA J. 1971. Vol. 9, № 1. P. 53–61. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.6124>



3. Bert C. W. Models for fibrous composites with different properties in tension and compression // J. Eng. Mater. Technol. 1977. Vol. 99, iss. 4. P. 344–349. DOI: <https://doi.org/doi:10.1115/1.3443550>
4. Vijayakumar K., Rao K. P. Stress-strain relations for composites with different stiffnesses in tension and compression // Comput. Mech. 1987. Vol. 2, iss. 3. P. 167–175. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00571022>
5. Ye Z., Yu H., Yao W. A new elasticity and finite element formulation for different Young's modulus when tension and compression loadings // J. of Shanghai Univ. 2001. Vol. 5, iss. 2. P. 89–92. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11741-001-0001-0>
6. Patel B. P., Khan K., Nath Y. A new constitutive model for bimodular laminated structures: Application to free vibrations of conical/cylindrical panels // Composite Structures. 2014. Vol. 110. P. 183–191. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.11.008>
7. Timoshenko S. Strength of Materials. Pt. II: Advanced Theory and Problems. Lancaster, PA : D. Van Nostrand Company, Inc., 1941. 510 p.
8. Lomakin E. V. Difference in the modules of composite materials // Mech. Compos. Mater. 1981. Vol. 17, № 1. P. 18–24. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00604877>
9. Khan K., Patel B. P., Nath Y. Vibration analysis of bimodulus laminated cylindrical panels // J. Sound Vibrations. 2009. Vol. 321, iss. 1–2. P. 166–183. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.09.017>
10. Khan K., Patel B. P., Nath Y. Free and forced vibration characteristics of bimodular composite laminated circular cylindrical shells // Composite Structures. 2015. Vol. 126. P. 386–397. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.02.022>
11. Du Z., Guo X. Variational principles and the related bounding theorems for bimodulus materials // J. Mech. Phys. Solids. 2014. Vol. 73. P. 83–211. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2014.08.006>
12. Querin O. M., Victoria M., Marti P. Topology optimization of truss-like continua with different material properties in tension and compression // Struct. Multidisc. Optim. 2010. Vol. 42, iss. 1. P. 25–32. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00158-009-0473-2>
13. Liu S., Qiao H. Topology optimization of continuum structures with different tensile and compressive properties in bridge layout design // Struct. Multidisc. Optim. 2011. Vol. 43, iss. 3. P. 369–380. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00158-010-0567-x>
14. Lomakin E. V. Constitutive relations of deformation theory for dilatant media // Mech. Solids. 1991. Vol. 26, № 6. P. 66–75.
15. Белякова Т. А., Ломакин Е. В. Упругопластическое деформирование дилатирующей среды вблизи вершины трещины в условиях плоского напряженного состояния // Изв. РАН. МТТ. 2004. Т. 39, № 1. С. 81–87.
16. Новожилов В. В. О физическом смысле инвариантов напряжения, используемых в теории пластичности // ПММ. 1952. Т. 16, № 5. С. 617–619.

Образец для цитирования:

Ломакин Е. В., Щендригина О. П. Напряженно-деформированное состояние в пластине с зависящими от вида напряженного состояния материальными свойствами // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 458–466. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-458-466>



Stress and Strain Fields in a Plate of Stress State Dependent Material Properties

E. V. Lomakin, O. P. Shchendrigina

Evgeniy V. Lomakin, <https://orcid.org/0000-0002-8716-5363>, Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia, evlomakin@yandex.ru

Olesia P. Shchendrigina, <https://orcid.org/0000-0001-5559-6014>, Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia, Ol.Shendrigina@mail.ru

The paper analyzes the properties of the constitutive relations proposed to describe the behavior of materials whose deformation diagrams depend on the type of external forces. In this case, various forms of nonlinearity arise, related to the dependence of the properties of materials on the type of the stressed state, the nonlinearity of the deformation diagrams, and the relationship between the shear and volume deformation processes. The influence of these forms of nonlinearity on the distribution of stresses and strains in a circular plate under different boundary conditions is investigated. The stress and strain fields were calculated for structural graphite and they are compared with the results of calculations for a classical physically nonlinear material whose properties are invariant to the form of external forces. The conditions imposed on the parameters of material functions that ensure the uniqueness of the solution of boundary value problems are established.

Key words: nonlinear theory of elasticity, constitutive relations, stress state parameter, susceptibility of properties to the type of external forces.

Acknowledgements: This work was supported by Russian Foundation for Basic Research (projects nos. 17-01-00318, 17-51-52001)..

References

1. Ambartsumyan S. A. *Elasticity Theory of Different Modulus*. Translated by Wu R. Beijing, China Railway Publishing House, 1986.
2. Jones R. M. Buckling of circular cylindrical shells with different moduli in tension and compression. *AIAA J.*, 1971, vol. 9, no. 1, pp. 53–61. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.6124>
3. Bert C. W. Models for fibrous composites with different properties in tension and compression. *J. Eng. Mater. Technol.*, 1977, vol. 99, iss. 4, pp. 344–349. DOI: <https://doi.org/doi:10.1115/1.3443550>
4. Vijayakumar K., Rao K. P. Stress-strain relations for composites with different stiffnesses in tension and compression. *Comput. Mech.*, 1987, vol. 2, iss. 3, pp. 167–175. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00571022>
5. Ye Z., Yu H., Yao W. A new elasticity and finite element formulation for different Young's modulus when tension and compression loadings. *J. of Shanghai Univ.*, 2001, vol. 5, iss. 2, pp. 89–92. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11741-001-0001-0>
6. Patel B. P., Khan K., Nath Y. A new constitutive model for bimodular laminated structures: Application to free vibrations of conical/cylindrical panels. *Composite Structures*, 2014, vol. 110, pp. 183–191. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.11.008>
7. Timoshenko S. *Strength of Materials. Pt. II: Advanced Theory and Problems*. Lancaster, PA., D. Van Nostrand Company, Inc., 1941. 510 p.
8. Lomakin E. V. Difference in the modules of composite materials. *Mech. Compos. Mater.*, 1981, vol. 17, no. 1, pp. 18–24. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00604877>



9. Khan K., Patel B. P., Nath Y. Vibration analysis of bimodulus laminated cylindrical panels. *J. Sound Vibrations*, 2009, vol. 321, iss. 1–2, pp. 166–183. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.09.017>
10. Khan K., Patel B. P., Nath Y. Free and forced vibration characteristics of bimodular composite laminated circular cylindrical shells. *Composite Structures*, 2015, vol. 126, pp. 386–397. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.02.022>
11. Du Z., Guo X. Variational principles and the related bounding theorems for bi-modulus materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 2014, vol. 73, pp. 83–211. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2014.08.006>
12. Querin O. M., Victoria M., Marti P. Topology optimization of truss-like continua with different material properties in tension and compression. *Struct. Multidisc. Optim.*, 2010, vol. 42, iss. 1, pp. 25–32. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00158-009-0473-2>
13. Liu S., Qiao H. Topology optimization of continuum structures with different tensile and compressive properties in bridge layout design. *Struct. Multidisc. Optim.*, 2011, vol. 43, iss. 3, pp. 369–380. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00158-010-0567-x>
14. Lomakin E. V. Constitutive relations of deformation theory for dilatant media. *Mech. Solids*, 1991, vol. 26, no. 6, pp. 66–75.
15. Belyakova T. A., Lomakin E. V. Elastoplastic deformation of a dilatant medium subjected to a plane stress state near a crack tip. *Mech. Solids*, 2004, vol. 39, no. 1, pp. 81–87.
16. Novozhilov V. V. On the physical meaning of stress invariants used in the theory of plasticity. *PMM*, 1952, vol. 16, no. 5, pp. 615–619 (in Russian).

Cite this article as:

Lomakin E. V., Shchendrigina O. P. Stress and Strain Fields in a Plate of Stress State Dependent Material Properties. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 458–466 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-458-466>



УДК 539.374

МГНОВЕННО-НЕРАСТЯЖИМЫЕ ДИРЕКТОРЫ В КИНЕМАТИКЕ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ СРЕД КУЛОНА – МОРА

Ю. Н. Радаев

Радаев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН, Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Рассматриваются трехмерные течения идеально-пластических сред, подчиняющихся критерию текучести Кулона – Мора. С прикладной точки зрения речь идет о моделировании состояний и достаточно медленных процессов движения сыпучих неплотносвязанных сред. Основой математического моделирования выступает представление об асимптотических директорах симметричного тензора напряжений и приращения (инкремента) тензора деформации, а также об ортогональных им направлениях (ориентированных вдоль мгновенно-нерастяжимых директоров), расположенных в плоскости ортогональной главной оси инкремента тензора деформации, соответствующей промежуточному главному приращению деформации. В асимптотических осях получены канонические диадные представления для тензора напряжений и приращения тензора деформации. Проанализированы уравнения ассоциированного закона течения, которые затем используются при изучении кинематики необратимого течения. Показано, что дилатация оказывается всегда положительной (кроме случая, когда среда Кулона – Мора вырождается в идеально-пластическую среду без внутреннего трения, подчиняющуюся критерию текучести Треска). Установлено, что в процессе течения сред Кулона – Мора материальные волокна, ориентированные вдоль мгновенно-нерастяжимых директоров, мгновенно не удлиняются и не укорачиваются. Получено диадное представление приращения тензора деформации в терминах мгновенно-нерастяжимых директоров.

Ключевые слова: пластичность, текучесть, течение, критерий Кулона – Мора, приращение тензора деформации, ассоциированный закон течения.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-467-483>

1. ВВОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Сыпучие среды состоят из множества отдельных однородных частиц, которые могут взаимодействовать друг с другом. Такие среды способны сопротивляться исключительно сжимающим нормальным напряжениям и не оказывают никакого сопротивления растягивающим. В настоящее время в механике сыпучих сред используются две основные математические модели: сплошная (континуальная) и зернистая (дискретная). Во втором случае среда считается состоящей из соприкасающихся твердых зерен правильной формы, например, сферической или многогранной и обычно называется гранулированной средой. В первом случае, сыпучие среды (их состояния и течения) прекрасно моделируются однородной изотропной сплошной средой и характеризуются подвижностью составляющих их частиц, способностью в известных пределах сохранять свою форму, отсутствием сопротивления растяжению, а также зависимостью сдвиговых напряжений от нормальных сжимающих напряжений. Среда Кулона – Мора, характеризующаяся взаимным трением элементов, традиционно рассматривается как важнейшее обобщение модели идеально-пластического поведения сплошных деформируемых сред.



В настоящей работе предложена континуальная схема моделирования сжимаемых течений сред Кулона – Мора, а также обобщенных пластических тел Прандтля, основанная на представлении об асимптотических направлениях тензора напряжений и приращения тензора деформации; т.е. будет использоваться представление о сыпучей среде как об изотропном континууме, элементы которого подвергаются воздействию сил внутреннего трения и сцепления. По этой причине при исследовании ее напряженного состояния естественно также воспользоваться понятием о непрерывно распределенных на двумерных элементах внутренних силах и классической концепцией напряжений. Следовательно, можно вести речь о нормальном и касательном напряжениях, действующих на данной двумерной элементарной площадке. В механике сыпучих сред, так же как и в теории идеально-пластического тела, для анализа напряженного состояния широко применяются графические построения. Наиболее известными из них следует признать круговые графики напряжений, так называемые круги Мора (см., например, [1]).

При моделировании механического поведения деформируемых сред механика континуума должна учитывать возможные функциональные или дифференциальные связи, ограничивающие деформации и напряжения. Такие связи существенно влияют на аналитические представления деформации, передающиеся через двумерные плоские элементы силовых воздействий (внутренних напряжений). Весьма показательной в этом смысле является модель идеально-пластического тела [2–9]: в состоянии пластического течения главные нормальные напряжения связаны некоторым «конечным» уравнением (так называемым условием пластичности), а главные приращения тензора деформации образуют нулевую сумму (условие несжимаемости течения).

Все сказанное относится также к моделям неплотносвязанных сред, в частности, песку или сухому грунту, которые служат обобщением представлений об идеально-пластическом теле и составляют теорию идеально сыпучих сред. Например, в теории Мора (O. Mohr, 1900 г.) в состоянии скольжения идеально сыпучего материала постоянным принимается отношение наибольшего и наименьшего главных нормальных напряжений. Именно развивая подобного рода теории, Прандтль (L. Prandtl) в 1921 г. пришел к понятию обобщенного идеально-пластического тела; деформация такого тела начинается и продолжается неопределенно долго, если максимальное касательное напряжение достигает предельного значения, зависящего от средней величины (полусуммы) наибольшего и наименьшего главных нормальных напряжений. Стоит заметить, что течения обобщенного идеально-пластического тела являются сжимаемыми. В частности, в процессе течения среды Кулона – Мора дилатация не может принимать отрицательных значений, т. е. среда либо разрыхляется, либо она остается несжимаемой.

2. ТРЕХМЕРНЫЙ ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ И ЕГО АСИМПТОТИЧЕСКИЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Во всех формулировках математической теории пластичности и теории сыпучих сред, как правило, используются специальные представления тензора напряжений и соответствующие формы дивергентного уравнения равновесия [5, 9]. Так, в теориях, основанных на критерии Кулона – Мора, условие начала течения представляет собой набор линейных соотношений, связывающих между собой главные нормальные напряжения, причем «промежуточное» главное напряжение никак не влияет на это условие. Критерий Кулона – Мора, следовательно, связывает максимальное и минимальное главные напряжения. Можно показать, что он выражается также через каса-



тельное и нормальное напряжения, действующие на элементарном плоском элементе, вдоль которого осуществляется скольжение. Если все главные нормальные напряжения являются сжимающими, то применимость указанного критерия подтверждается в экспериментах с образцами горных пород и грунтов. Важными особенностями критерия Кулона – Мора выступает простота его математической формулировки, ясность его физического содержания и выраженный конвенциональный характер. Кроме того, в механике разрушения критерий Кулона – Мора часто трактуется с точки зрения прочности твердых тел, и в этом смысле выступает как один из критериев прочности.

Обозначим через σ трехмерный тензор напряжений Коши. Симметрия тензора напряжений обеспечивает возможность его канонического спектрального представления:

$$\sigma = \sigma_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \sigma_2 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \sigma_3 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad (1)$$

где \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} — ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений σ ; σ_1 , σ_2 , σ_3 — главные нормальные напряжения (собственные значения тензора напряжений). Собственные векторы указывают направления главных осей напряжений.

В механике идеально-пластических и обобщенных идеально-пластических тел особую роль играют промежуточное главное нормальное напряжение и максимальное (минимальное) главное нормальное напряжение. Занумеруем главные оси тензора напряжений так, чтобы для актуального напряженного состояния соответствующие главные нормальные напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 расположились бы в порядке убывания:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (2)$$

Каноническое разложение (1) для тензора напряжений σ хорошо известно и достаточно широко используется в современной механике деформируемого твердого тела в различных вопросах, связанных с анализом напряженного состояния тела в данной точке [1]. Однако можно установить новые важные представления тензора напряжений σ , которые отличаются от канонического (1), но, тем не менее, обладают чрезвычайно простой алгебраической структурой [10]. Для этого требуется ввести два новых направления в плоскости, ортогональной собственному вектору \mathbf{m} . Этот вектор соответствует «промежуточному» главному нормальному напряжению σ_2 (intermediate principal stress).

С помощью алгебраического тензорного разбиения единицы

$$\mathbf{I} = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad (3)$$

где \mathbf{I} — единичный тензор, исключаем в спектральном представлении (1) тензорную диаду, образованную собственным вектором \mathbf{m} :

$$\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} = \mathbf{I} - \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad (4)$$

следовательно, для тензора напряжений получим:

$$\sigma = \sigma_2 \mathbf{I} + 2\tau_{\max} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3} \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right). \quad (5)$$

Обозначая далее

$$g_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3}, \quad g_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3},$$



формулу (5) перепишем в следующем виде:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2 \mathbf{I} + 2\tau_{\max} (g_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - g_2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}). \quad (6)$$

В плоскости, ортогональной собственному вектору \mathbf{m} , выполним линейное преобразование векторов \mathbf{l} , \mathbf{n} согласно

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos \iota)}} (\mathbf{l}' + \mathbf{n}'), \\ \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos \iota)}} (-\mathbf{l}' + \mathbf{n}'), \end{aligned} \quad (7)$$

где ι — угол между единичными векторами \mathbf{l}' , \mathbf{n}' . В отличие от пары собственных \mathbf{l} , \mathbf{n} директоры \mathbf{l}' , \mathbf{n}' , вообще говоря, не ортогональны друг другу. Можно заметить, что собственный вектор \mathbf{l} всегда делит пополам угол между директорами \mathbf{l}' , \mathbf{n}' . Если смотреть на плоскость, ортогональную второму главному направлению, со стороны оперения вектора \mathbf{m} , то асимптотический директор \mathbf{l}' получается в результате поворота собственного вектора \mathbf{l} на угол $\iota/2$ по ходу часовой стрелки, а асимптотический директор \mathbf{n}' — поворотом на тот же самый угол, но против хода часовой стрелки.

Оказывается, что угол ι можно подобрать так, чтобы тензор напряжений содержал только смешанные диады, образованные новыми векторами \mathbf{l}' , \mathbf{n}' . В этом случае директоры \mathbf{l}' , \mathbf{n}' будут указывать асимптотическое направление симметричного тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$. Достаточно положить [10]

$$\cos \iota = \frac{\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3}$$

или

$$\cos \iota = -\mu, \quad (8)$$

где μ есть параметр Лоде (W. Lode)

$$\mu = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}. \quad (9)$$

В силу своего определения абсолютное значение параметра Лоде не может превосходить единицу

$$-1 \leq \mu \leq 1, \quad (10)$$

откуда следует, что уравнение (8) всегда разрешимо относительно угла ι .

Несложные вычисления, выполненные с привлечением (8), позволяют последовательно получить сначала

$$\frac{g_1}{1 + \cos \iota} + \frac{g_2}{1 - \cos \iota} = 4 \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)}{(1 - \mu^2)(\sigma_1 - \sigma_3)^2},$$

а затем —

$$\frac{g_1}{1 + \cos \iota} + \frac{g_2}{1 - \cos \iota} = 4 \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}{(1 + \mu)^2 (\sigma_1 - \sigma_3)^2} = 1.$$

В итоге приходим к формуле¹ для тензора напряжений в смешанных диадах асимптотических директоров [10]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2 \mathbf{I} + \tau_{\max} (\mathbf{l}' \otimes \mathbf{n}' + \mathbf{n}' \otimes \mathbf{l}') \quad (11)$$

¹Приводимые здесь формула и схема ее вывода пригодны для любого симметричного тензора второго ранга и, в частности, для приращения тензора деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$.



или

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2 \mathbf{I} + 2\tau_{\max} \text{sym}(\mathbf{l} \otimes \mathbf{n}), \quad (12)$$

пригодной, вообще говоря, для всех трехмерных напряженных состояний.

Заметим, что «промежуточное» главное напряжение σ_2 вычисляется как

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \cos \iota \tau_{\max} \quad (13)$$

или

$$\sigma_2 = s - \cos \iota \tau_{\max}, \quad (14)$$

где

$$s = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (15)$$

есть точно «медианное» напряжение (mean stress).

«Крайние» главные напряжения $\sigma_{1,3}$ (major and minor principal stresses) могут быть вычислены по следующей формуле:

$$\sigma_{1,3} = \sigma_2 \pm \tau_{\max}(1 \mp \mu).$$

Отношение «крайних» главных напряжений определяется согласно

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{\sigma_2 + \tau_{\max}(1 - \mu)}{\sigma_2 - \tau_{\max}(1 + \mu)}.$$

Уравнение равновесия с учетом данных выше представлений можно получить в следующей форме:

$$\begin{aligned} \nabla \sigma_2 + \mathbf{l}(\mathbf{n} \cdot \nabla) \tau_{\max} + \mathbf{n}(\mathbf{l} \cdot \nabla) \tau_{\max} - \tau_{\max} \sin \iota \nabla \iota + \\ + \tau_{\max}(\mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{l}) - \mathbf{l} \times (\nabla \times \mathbf{n}) - \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{l})) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь ∇ обозначает трехмерный дифференциальный оператор Гамильтона (наблудитель Гамильтона).

Заменяя в полученном уравнении «промежуточное» главное напряжение σ_2 согласно (14), приходим к следующему равенству:

$$\begin{aligned} \nabla s - \cos \iota \nabla \tau_{\max} + \mathbf{l}(\mathbf{n} \cdot \nabla) \tau_{\max} + \mathbf{n}(\mathbf{l} \cdot \nabla) \tau_{\max} + \\ + \tau_{\max}(\mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{l}) - \mathbf{l} \times (\nabla \times \mathbf{n}) - \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{l})) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (17)$$

3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ И ТЕЧЕНИЯ СЫПУЧИХ СРЕД. УСЛОВИЕ КУЛОНА – МОРА

Моделирование механического поведения идеально-пластических тел в значительной степени опирается на анализ локального напряженного состояния. Нас будут интересовать трехмерные напряженные состояния в заданной точке, касательные и нормальные напряжения, действующие на двумерный плоский элемент, ориентация которого в трехмерном пространстве определяется единичным нормальным вектором $\boldsymbol{\nu}$. Противоположные ориентации $\boldsymbol{\nu}$ и $-\boldsymbol{\nu}$ определяют один и тот же плоский элемент. Концепция внутренних напряжений подразумевает оперирование с вектором напряжений \mathbf{t} , который ассоциируется с двумерным плоским элементом и в силу этого зависит от его ориентации, т. е. от директора $\boldsymbol{\nu}$:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\boldsymbol{\nu}).$$



Фундаментальный результат Коши, как известно, устанавливает, что вектор напряжений \mathbf{t} линейно зависит от директора $\boldsymbol{\nu}$:

$$\mathbf{t}(\boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

Введем касательное и нормальное напряжения:

$$t_{\perp} = t_{\perp}(\boldsymbol{\nu}) = \sqrt{\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} - t_{\parallel}^2}, \quad t_{\parallel} = t_{\parallel}(\boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{t}, \quad (18)$$

также функционально зависящие от единичного директора $\boldsymbol{\nu}$. Согласно данным определениям в любом случае $t_{\perp} \geq 0$; $t_{\parallel} < 0$ для сжимающих напряжений, $t_{\parallel} > 0$ для растягивающих напряжений².

Обозначим через t_{\perp}^* , t_{\parallel}^* значения касательного и нормального напряжений в состоянии предельного равновесия, т.е. связанные с площадкой, вдоль которой в предельном состоянии происходит сдвиг.

Изучение картин разрушения массивов природных сыпучих сред показывает, что во всех случаях нарушение равновесия происходит в форме сдвига одной части массива относительно другой, остающейся неподвижной части. Сдвиг реализуется вдоль так называемых поверхностей скольжения, состоящих из элементарных площадок скольжения. Указанное нарушение равновесия происходит потому, что на поверхности скольжения действующие касательные напряжения превышают внутренние силы сопротивления среды деформации сдвига. Установленные, например, для грунтов по результатам испытаний образцов на сдвиг зависимости между касательной t_{\perp}^* и нормальной составляющими вектора напряжений, действующего на элементарной площадке образца в момент сдвига, имеют форму пологой кривой (которая имеет значительную кривизну лишь на малом начальном участке, а затем, с возрастанием нормальной составляющей напряжений, ее кривизна быстро уменьшается). Такая кривая может быть заменена прямой, и таким образом ее уравнение будет иметь следующий вид:

$$t_{\perp}^* = c_2 - c_1 t_{\parallel}^*, \quad (19)$$

где c_1 , c_2 — материальные постоянные. Очевидно, что выражение в правой части (19) характеризует величину внутренних сил сопротивления среды деформации сдвига; она возрастает с увеличением величины сжимающих напряжений. Условие предельного равновесия (19) первоначально было предложено Кулоном (С. А. Coulomb, 1776 г.), в исследованиях о давлении грунта на стенки. Следует также принимать во внимание, что для многих типов горных пород вместо (19) на площадках скольжения наблюдается существенно нелинейная функциональная связь:

$$t_{\perp}^* = F(t_{\parallel}^*). \quad (20)$$

Заметим, что зависимость внутреннего сопротивления сыпучей среды деформации сдвига от нормальной составляющей напряжений, собственно, и отличает ее от идеально-пластической среды. Говорят также, что в сыпучей среде имеются два

²В технических теориях (например, в механике грунтов) обычно используется прямо противоположное соглашение о знаке нормальных напряжений. Мы по понятным причинам не будем следовать традициям технических теорий.



механизма сопротивления деформации сдвига: сцепление (характеризующее так называемое начальное сопротивление сдвигу, существующее даже при отсутствии нормальной составляющей напряжений) и внутреннее трение (происхождение которого обусловлено нормальными сжимающими напряжениями). Поэтому материальные постоянные c_2 , c_1 в (19) можно называть коэффициентом сцепления (inherent shear stress, cohesion) и коэффициентом внутреннего трения (coefficient of internal friction) соответственно.

Условие предельного равновесия сыпучей среды (19), выполняющееся на элементарных площадках скольжения, означает, что для всех остальных площадок должно соблюдаться условие

$$t_{\perp} \leq c_2 - c_1 t_{\parallel}. \quad (21)$$

Таким образом, вычисляя точную верхнюю границу суммы

$$t_{\perp} + c_1 t_{\parallel} \quad (22)$$

по всем возможным ориентациям в пространстве, можно определить площадки скольжения, если сама сумма (22) оказывается равной коэффициенту сцепления c_2 .

Заметим, что сумма (22) проще всего вычисляется в локальном триэдре главных направлений тензора напряжений. Действительно, исходя из (18) нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} t_{\parallel} &= \sigma_1 \nu_{\langle 1 \rangle}^2 + \sigma_2 \nu_{\langle 2 \rangle}^2 + \sigma_3 \nu_{\langle 3 \rangle}^2, \\ t_{\perp}^2 &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \nu_{\langle 1 \rangle}^2 \nu_{\langle 2 \rangle}^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \nu_{\langle 2 \rangle}^2 \nu_{\langle 3 \rangle}^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \nu_{\langle 1 \rangle}^2 \nu_{\langle 3 \rangle}^2. \end{aligned} \quad (23)$$

В этих формулах через $\nu_{\langle 1 \rangle}$, $\nu_{\langle 2 \rangle}$, $\nu_{\langle 3 \rangle}$ обозначены компоненты единичного директора $\boldsymbol{\nu}$ относительно базиса \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} .

Поиск точной верхней грани суммы (22) осуществляется с учетом условия нормировки директора $\boldsymbol{\nu}$:

$$\nu_{\langle 1 \rangle}^2 + \nu_{\langle 2 \rangle}^2 + \nu_{\langle 3 \rangle}^2 = 0.$$

Кроме того, поиск следует также ограничить условием

$$\nu_{\langle 2 \rangle}^2 = 0,$$

устанавливающим, что директор, указывающий на плоский элемент с наибольшим значением суммы (22), имеет нулевую проекцию на главную ось напряжений, соответствующую промежуточному главному нормальному напряжению σ_2 . Поэтому выражения (23) еще упрощаются

$$\begin{aligned} t_{\parallel} &= (\sigma_1 - \sigma_3) \nu_{\langle 1 \rangle}^2 + \sigma_3, \\ t_{\perp}^2 &= (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \nu_{\langle 1 \rangle}^2 (1 - \nu_{\langle 1 \rangle}^2). \end{aligned} \quad (24)$$

Сумма (22), таким образом, оказывается не зависящей от промежуточного главного нормального напряжения σ_2 .

Наконец, ограничимся только значениями $\nu_{\langle 1 \rangle} > 0$, поскольку от ориентации, характеризующейся условием $\nu_{\langle 1 \rangle} < 0$, всегда можно перейти к противоположной (и в силу этого неотличимой от исходной) ориентации с $\nu_{\langle 1 \rangle} > 0$.

В результате можно быстро выписать уравнение, из которого находятся экстремальные ориентации:

$$1 - 2\nu_{\langle 1 \rangle}^2 + 2c_1 \nu_{\langle 1 \rangle} \sqrt{1 - \nu_{\langle 1 \rangle}^2} = 0. \quad (25)$$



Полученное уравнение корректно определяет ориентации, которым соответствуют экстремальные значения суммы (22), только если компонента $\nu_{\langle 1 \rangle}$ директора ν удовлетворяет ограничениям

$$\frac{1}{2} < \nu_{\langle 1 \rangle}^2 < 1. \quad (26)$$

Устраняя в уравнении (25) радикал, приходим к биквадратному уравнению

$$\nu_{\langle 1 \rangle}^4 - \nu_{\langle 1 \rangle}^2 + \frac{1}{4(1+c_1)} = 0. \quad (27)$$

Это уравнение позволяет найти единственное значение $\nu_{\langle 1 \rangle}^2$, которое удовлетворяет ограничениям (26):

$$\nu_{\langle 1 \rangle}^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}},$$

и затем определить в точности два *различных* пространственных направления ν , характеризующиеся наибольшим значением суммы (22), в виде

$$\begin{aligned} \nu_{\langle 1 \rangle} &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}}, \\ \nu_{\langle 2 \rangle} &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\nu_{\langle 3 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}};$$

$$\begin{aligned} \nu_{\langle 1 \rangle} &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}}, \\ \nu_{\langle 2 \rangle} &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\nu_{\langle 3 \rangle} = -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}}.$$

Несложные вычисления показывают, что точная верхняя грань суммы (22) есть

$$\sup(t_{\perp} + c_1 t_{\parallel}) = c_1 \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \sqrt{1+c_1^2} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

и, следовательно, критерий предельного равновесия Кулона – Мора для сыпучей среды в пространстве главных напряжений имеет форму конечного уравнения:

$$c_1 \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \sqrt{1+c_1^2} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = c_2.$$

Введем вместо c_1, c_2 материальные постоянные γ и c (γ – угол внутреннего трения, c – коэффициент сцепления) согласно

$$c_1 = \operatorname{tg} \gamma, \quad c_2 = c.$$

В результате получается следующая форма критерия Кулона – Мора:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = c \cos \gamma - \sin \gamma \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad (30)$$



или, вводя максимальное касательное напряжение τ_{\max} и медианное напряжение s , —

$$\tau_{\max} = c \cos \gamma - \sin \gamma s. \quad (31)$$

Наконец, приведем симметризованную форму критерия Кулона – Мора, которая не зависит от способа нумерации главных осей тензора напряжений, она представляет собой произведение трех функций текучести:

$$\begin{aligned} [h_1][h_2][h_3] &= 0, \\ h_1 &= (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - (2c \cos \gamma - \sin \gamma (\sigma_2 + \sigma_3))^2, \\ h_2 &= (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - (2c \cos \gamma - \sin \gamma (\sigma_1 + \sigma_3))^2, \\ h_3 &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - (2c \cos \gamma - \sin \gamma (\sigma_1 + \sigma_2))^2. \end{aligned} \quad (32)$$

Площадки скольжения ортогональны директорам с компонентами относительно триэдра главных осей напряжений

$$\begin{aligned} \nu_{\langle 1 \rangle} &= \sqrt{\frac{1 + \sin \gamma}{2}}, \\ \nu_{\langle 2 \rangle} &= 0, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \nu_{\langle 3 \rangle} &= \sqrt{\frac{1 - \sin \gamma}{2}}; \\ \nu_{\langle 1 \rangle} &= \sqrt{\frac{1 + \sin \gamma}{2}}, \\ \nu_{\langle 2 \rangle} &= 0, \\ \nu_{\langle 3 \rangle} &= -\sqrt{\frac{1 - \sin \gamma}{2}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Хорошо известно, что главные нормальные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ могут быть вычислены в терминах второго инварианта девиатора тензора напряжений J'_2 , параметра Лоде – Надаи μ и гидростатического давления p :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -p + \frac{3 - \mu}{\sqrt{3(3 + \mu^2)}} \sqrt{J'_2}, \\ \sigma_2 &= -p + \frac{2\mu}{\sqrt{3(3 + \mu^2)}} \sqrt{J'_2}, \\ \sigma_3 &= -p - \frac{3 + \mu}{\sqrt{3(3 + \mu^2)}} \sqrt{J'_2}, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} 6J'_2 &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2, \\ \mu &= \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}, \\ -3p &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \end{aligned} \quad (36)$$

С учетом данных уравнений критерий (30) преобразуется к следующей форме:

$$\frac{3 - \mu \sin \gamma}{\sqrt{3(3 + \mu^2)} \sin \gamma} \sqrt{J'_2} - p = c \operatorname{ctg} \gamma. \quad (37)$$



Определяя затем угол Лоде ϑ , согласно

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\mu}{\sqrt{3}} = -\frac{\cos \gamma}{\sqrt{3}} \quad (38)$$

можно утверждать, что будет справедливо равенство

$$\left[\frac{3 - \mu \sin \gamma}{\sqrt{3}(3 + \mu^2)} \right]^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cos \vartheta - \sin \gamma \sin \vartheta}, \quad (39)$$

которое, в свою очередь, позволяет сформулировать критерий (30) в следующем замечательном виде:

$$\sqrt{J_2'} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cos \vartheta - \sin \gamma \sin \vartheta} (p \sin \gamma + c \cos \gamma). \quad (40)$$

Стоит отметить еще одну форму критерия Кулона – Мора (30) для сыпучих сред с трением и сцеплением, приближающую его по форме к критерию текучести идеально-пластического тела:

$$\sigma_1 - a\sigma_3 = 2k. \quad (41)$$

Здесь материальные постоянные a и k связаны с c и γ соотношениями

$$a = \frac{1 - \sin \gamma}{1 + \sin \gamma}, \quad k = \frac{c \cos \gamma}{1 + \sin \gamma}.$$

Поэтому сыпучая среда Кулона – Мора с позиций теории течения идеально-пластических сред определяется кусочно-линейной функцией текучести

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1 - a\sigma_3, \quad (42)$$

в запись которой не входит промежуточное главное нормальное напряжение σ_2 . Если $a \rightarrow 1$, то критерий текучести Кулона – Мора переходит в критерий максимального касательного напряжения Треска (Н. Tresca).

Из (41) следует формулировка критерия предельного состояния идеально-сыпучей среды, т. е. среды с нулевым внутренним сцеплением ($c = 0$), восходящая к Мору:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = a. \quad (43)$$

Дальнейшее обобщение модели сыпучей среды Кулона – Мора было выполнено в работах Л. Прандтля. Оно получается из формы (31), если считать зависимость максимального касательного напряжения от медианного напряжения заданной с помощью неопределенно общей функции:

$$\tau_{\max} = f(s). \quad (44)$$

Надо сказать, что моделирование течений обобщенного пластического тела Прандтля лучше всего осуществляется с помощью векторного дифференциального уравнения (17), которое в качестве неизвестных содержит асимптотические директоры тензора напряжений \mathbf{l} , \mathbf{n} .



4. ПРИРАЩЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ. МГНОВЕННО-НЕРАСТЯЖИМЫЕ ДИРЕКТОРЫ

Анализ течения среды Кулона – Мора основывается на общих кинематических уравнениях механики сплошных деформируемых сред и определяющем законе, связывающем инкремент тензора деформаций с тензором напряжений. В качестве определяющего примем ассоциированный с критерием (41) закон течения.

Течение среды Кулона – Мора с точки зрения кинематики характеризуется приращением вектора перемещений $d\mathbf{u}$ и приращением тензора (пластической) деформации (инкрементом тензора деформации) $d\boldsymbol{\varepsilon}$. Указанные приращения связаны между собой формулами Коши:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \otimes d\mathbf{u} + (\nabla \otimes d\mathbf{u})^T]. \quad (45)$$

В изотропных средах можно вести речь о, по крайней мере, одном общем триэдре главных осей тензоров $\boldsymbol{\sigma}$ и $d\boldsymbol{\varepsilon}$, следовательно, спектральное представление приращения тензора деформации лучше всего взять в форме

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} d\varepsilon_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} d\varepsilon_2 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_3, \quad (46)$$

где \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} – ортонормированный базис из собственных векторов, общих как для тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, так и для приращения тензора деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$; $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$, $d\varepsilon_3$ – главные приращения деформации (собственные значения тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$).

Для течений, для которых второй главной оси соответствуют промежуточные главное нормальное напряжение и главное приращение деформации, мы введем особую нумерацию осей главного триэдра так, чтобы наряду с (2) выполнялись неравенства

$$d\varepsilon_1 \geq d\varepsilon_2 \geq d\varepsilon_3. \quad (47)$$

Далее мы увидим, что для сред Кулона – Мора в силу ассоциированного закона течения упорядоченным главным нормальным напряжениям (2) соответствуют главные приращения деформации, которые также оказываются упорядоченными так, что выполняются неравенства (47). После этого представление об асимптотических директорах можно распространить на инкремент тензора деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$, что позволяет сразу же указать его каноническую форму в асимптотических директорах \mathbf{l} , \mathbf{n} :

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{l} d\varepsilon_2 + (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) \text{sym}(\mathbf{l} \otimes \mathbf{n}). \quad (48)$$

Напомним, что если смотреть на плоскость, ортогональную второму главному направлению, со стороны оперения вектора \mathbf{m} , то асимптотический директор \mathbf{l} получается в результате поворота собственного вектора \mathbf{l} на угол $\nu/2$ по ходу часовой стрелки, а асимптотический директор \mathbf{n} – поворотом на тот же угол против хода часовой стрелки.

Угол между асимптотическими директорами \mathbf{l} , \mathbf{n} вычисляется, как и в случае напряжений, с помощью параметра Лоде:

$$\cos \nu = -\nu, \quad (49)$$

где

$$\nu = \frac{2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}, \quad (50)$$



причем здесь выражение справа по абсолютной величине не превышает единицу.

Учитывая каноническую форму инкремента тензора деформации (48), становится почти очевидной необходимость ввести в рассмотрение два новых направления в плоскости, ортогональной второй главной оси тензора $d\varepsilon$, которые были бы ортогональны направлениям асимптотических директоров ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$. Соответствующие им директоры обозначим через ${}^{\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime}\mathbf{n}$, при этом директор ${}^{\prime}\mathbf{l}$ ортогонален асимптотическому директору ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$, а директор ${}^{\prime}\mathbf{n}$ ортогонален ${}^{\prime}\mathbf{l}$:

$${}^{\prime\prime}\mathbf{n} \cdot {}^{\prime}\mathbf{l} = 0, \quad {}^{\prime}\mathbf{l} \cdot {}^{\prime}\mathbf{n} = 0. \quad (51)$$

Точнее, если смотреть на плоскость, ортогональную второму главному направлению, со стороны оперения вектора \mathbf{m} , то директор ${}^{\prime}\mathbf{l}$ получается в результате поворота собственного вектора \mathbf{l} в указанной плоскости на угол $\frac{\pi - \vartheta}{2}$ по ходу часовой стрелки, а директор ${}^{\prime}\mathbf{n}$ — поворотом вектора \mathbf{l} на тот же угол против хода часовой стрелки.

Принимая во внимание (48) и (51), сразу же находятся мгновенные удлинения линейных элементов, направленных вдоль второго главного направления и вдоль директоров ${}^{\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime}\mathbf{n}$; все они оказываются равными промежуточному главному приращению $d\varepsilon_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \cdot (d\varepsilon) \cdot \mathbf{m} &= d\varepsilon_2, \\ {}^{\prime}\mathbf{l} \cdot (d\varepsilon) \cdot {}^{\prime}\mathbf{l} &= d\varepsilon_2, \\ {}^{\prime}\mathbf{n} \cdot (d\varepsilon) \cdot {}^{\prime}\mathbf{n} &= d\varepsilon_2. \end{aligned} \quad (52)$$

Без труда вычисляются также мгновенные сдвиги в плоскостях, определяемых директорами ${}^{\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime}\mathbf{n}$, \mathbf{m} :

$$\begin{aligned} {}^{\prime}\mathbf{l} \cdot (d\varepsilon) \cdot \mathbf{m} &= 0, \\ {}^{\prime}\mathbf{n} \cdot (d\varepsilon) \cdot \mathbf{m} &= 0, \\ {}^{\prime}\mathbf{l} \cdot (d\varepsilon) \cdot {}^{\prime}\mathbf{n} &= {}^{\prime}\mathbf{n} \cdot (d\varepsilon) \cdot {}^{\prime}\mathbf{l} = -\cos \vartheta d\varepsilon_2 + \frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{2} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right). \end{aligned} \quad (53)$$

Из формул (52), (53) подстановкой вместо приращения тензора деформации его спектрального представления, получается следующее соотношение, позволяющее устранить второе главное приращение:

$$d\varepsilon_2 = \sin^2 \frac{\vartheta}{2} d\varepsilon_1 + \cos^2 \frac{\vartheta}{2} d\varepsilon_3.$$

Исходя из ассоциированного закона течения

$$d\varepsilon_j = \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} d\lambda \quad (j = 1, 2, 3), \quad (54)$$

где неопределенный множитель $d\lambda$ строго положителен для состояний активного пластического течения, и функции текучести (42) для активных течений среды Кулона – Мора находим следующие значения для главных приращений:

$$d\varepsilon_1 = d\lambda, \quad d\varepsilon_2 = 0, \quad d\varepsilon_3 = -ad\lambda \quad (d\lambda > 0). \quad (55)$$



Данные равенства позволяют упорядочить главные приращения $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3$ в виде убывающей последовательности

$$d\varepsilon_1 > 0, \quad d\varepsilon_2 = 0, \quad d\varepsilon_3 < 0, \quad (56)$$

т.е. второй главной оси тензора $d\varepsilon$ (а в силу изотропии также и второй главной оси тензора напряжений σ) будет соответствовать промежуточное главное приращение $d\varepsilon_2 = 0$. Таким образом, убывающей последовательности главных напряжений отвечает убывающая последовательность главных приращений тензора деформации.

На основании (55) без труда устанавливается, что течение среды Кулона – Мора является необратимо сжимаемым:

$$\text{tr}(d\varepsilon) = (1 - a)d\lambda > 0 \quad (0 < a < 1). \quad (57)$$

Более того, дилатация оказывается всегда положительной (кроме случая, когда $a = 1$, т.е. когда среда Кулона – Мора вырождается в идеально-пластическую среду без внутреннего трения, подчиняющуюся критерию текучести Треска). Поэтому среда Кулона – Мора разрыхляется в процессе течения.

В силу (56) формула (48) упрощается до

$$d\varepsilon = (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)\text{sym}(\mathbf{l} \otimes \mathbf{n}); \quad (58)$$

можно также показать, что дилатация континуума Кулона – Мора определяется соотношениями

$$\frac{\text{tr}(d\varepsilon)}{\cos \iota} = \frac{d\varepsilon_1 + d\varepsilon_3}{\cos \iota} = d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3, \quad (59)$$

откуда сразу же можно заключить, что

$$\cos \iota = \frac{d\varepsilon_1 + d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}. \quad (60)$$

Соотношения для мгновенных удлинений и сдвигов (52), (53) также упрощаются:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \cdot (d\varepsilon) \cdot \mathbf{m} &= 0, \\ \mathbf{l} \cdot (d\varepsilon) \cdot \mathbf{l} &= 0, \\ \mathbf{n} \cdot (d\varepsilon) \cdot \mathbf{n} &= 0; \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot (d\varepsilon) \cdot \mathbf{m} &= 0, \\ \mathbf{n} \cdot (d\varepsilon) \cdot \mathbf{m} &= 0, \\ \mathbf{l} \cdot (d\varepsilon) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot (d\varepsilon) \cdot \mathbf{l} &= \frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{2} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \iota \right). \end{aligned} \quad (62)$$

Пользуясь (61), (62), сразу же приходим к выводу о том, что в процессе течения сред Кулона – Мора линейные элементы, перпендикулярные направлениям асимптотических директоров \mathbf{l}, \mathbf{n} , не претерпевают мгновенных удлинений, т.е. материальные волокна, ориентированные вдоль директоров \mathbf{l}, \mathbf{n} , мгновенно не удлиняются и не укорачиваются. То же самое, очевидно, справедливо и для волокон, направленных вдоль второй главной оси тензора $d\varepsilon$. Следовательно, мгновенная деформация трехмерного элемента с ребрами, ориентированными вдоль директоров $\mathbf{l}, \mathbf{n}, \mathbf{m}$,



представляет собой сдвиг в плоскости, ортогональной собственному вектору \mathbf{m} . Таким образом, в случае сред Кулона – Мора для векторов \mathbf{l} , \mathbf{n} оправданным будет термин «мгновенно-нерастяжимые директоры».

Если $a \rightarrow 1$, т.е. когда критерий Кулона – Мора сводится к критерию текучести Треска, асимптотические директоры становятся взаимно ортогональными, то же самое можно сказать и о мгновенно-нерастяжимых директорах \mathbf{l} , \mathbf{n} . Более того, асимптотические направления совпадают с направлениями мгновенно-нерастяжимых волокон, течение приобретает свойство несжимаемости, и инкремент тензора деформации представляется простой формулой

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)\text{sym}(\mathbf{l} \otimes \mathbf{n}) = (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)\text{sym}(\mathbf{l} \otimes \mathbf{n}), \quad (63)$$

на основании которой устанавливается, что плоский элемент, ортогональный промежуточной главной оси приращения тензора деформации и с ориентированными вдоль направлений, делящих точно пополам угол между двумя другими главными направлениями приращения тензора деформации, сторонами, испытывает лишь мгновенную деформацию сдвига.

Для инкремента тензора деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$ справедливо следующее диадное представление:

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3} = \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}(\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \frac{1 + \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}\text{sym}(\mathbf{l} \otimes \mathbf{n}). \quad (64)$$

Действительно, для диадного представления тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$ необходимы только диады, образованные мгновенно-нерастяжимыми директорами \mathbf{l} , \mathbf{n} , поэтому справедливо следующее разложение с неопределенными пока коэффициентами dl , dh , $d\gamma$:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = (dl)\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + (dh)\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{2}(d\gamma)\mathbf{l} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{2}(d\gamma)\mathbf{n} \otimes \mathbf{l}. \quad (65)$$

Подсчитывая далее мгновенные удлинения и сдвиги, находим

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{l} &= dl + \cos^2 \varphi dh - \cos \varphi d\gamma, \\ \mathbf{n} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{n} &= \cos^2 \varphi dl + dh - \cos \varphi d\gamma, \\ \mathbf{l} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{n} &= -\cos \varphi (dl + dh) + \frac{1 + \cos^2 \varphi}{2} d\gamma. \end{aligned} \quad (66)$$

С другой стороны, те же самые величины были ранее вычислены как (61), (62), следовательно, dl , dh , $d\gamma$ связываются приводимыми ниже уравнениями:

$$\begin{aligned} dl + \cos^2 \varphi dh - \cos \varphi d\gamma &= 0, \\ \cos^2 \varphi dl + dh - \cos \varphi d\gamma &= 0, \\ -\cos \varphi (dl + dh) + \frac{1 + \cos^2 \varphi}{2} d\gamma &= \frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{2} \sin^2 \varphi. \end{aligned} \quad (67)$$

Из этой системы уравнений можно найти следующие выражения для dl , dh , $d\gamma$:

$$\begin{aligned} dl = dh &= \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3), \\ d\gamma &= \frac{1 + \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3). \end{aligned} \quad (68)$$



Подставляя (68) в (65), приходим к диадному представлению (64).

В терминах приращений перемещений полная кинематическая картина сжимаемых течений сред Кулона – Мора в предельном состоянии без труда строится на основе данных представлений об асимптотических направлениях и о мгновенно-нерастяжимых линейных элементах. В частности, в двумерных задачах можно достаточно просто получить соотношения для приращений перемещений du вдоль линий, касающихся мгновенно-нерастяжимых директоров. В плоских течениях мгновенно-нерастяжимые директоры будут одновременно указывать характеристические направления системы дифференциальных уравнений кинематики.

Закljučая работу, рассмотрим вопрос о равенстве углов ψ и ψ' , определяющих ориентации асимптотических директоров тензора напряжений и приращения тензора деформации соответственно. А priori мы не можем утверждать, что они равны. Равенство $\psi = \psi'$ означает, что асимптотические директоры тензора напряжений и приращения тензора деформации ориентированы одинаково, и равны параметрам Лоде

$$\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3};$$

при этом убывающим значениям главных напряжений (2) должны соответствовать убывающие значения главных приращений (47). Они связываются ассоциированным законом течения, и в общем случае продемонстрировать равенство параметров Лоде не удастся. Эта важная и интересная проблема в «старых» теориях пластичности (см., например, [6–8]), не основанных явно на ассоциированном законе течения, решалась очень своеобразно. Так, в главе XVI монографии [7] равенство параметров Лоде формулируется как «третий закон пластичности» с указанием на подобие главных кругов Мора. Далее (глава XVII, с. 281) отмечается без дополнительной аргументации, что, несмотря на наблюдаемое в эксперименте отклонение, введение третьего закона пластичности является оправданным. Можно показать, что вопрос о равенстве (или отклонении) параметров Лоде решается на основе оценки величины «промежуточного» главного нормального напряжения.

Благодарности. Результаты получены в рамках выполнения государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00844).

Библиографический список

1. Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М. : Изд-во иностр. лит., 1963. 312 с.
2. Ильюшин А. А. Пластичность. Ч. I: Упруго-пластические деформации. М. : Гостехтеоретиздат, 1948. 376 с.
3. Соколовский В. В. Теория пластичности. М. : Высш. шк., 1969. 608 с.
4. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М. : Наука, 1969. 420 с.
5. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М. : Наука, 1966. 232 с.
6. Надаи А. Пластичность. Механика пластического состояния вещества. М. ; Л. : ОНТИ, 1936. 280 с.
7. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел : в 2 т. Т. 1. М. : Изд-во иностр. лит., 1954. 648 с.
8. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел : в 2 т. Т. 2. М.: Мир, 1969. 864 с.
9. Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара : Изд-во Самар. гос. ун-та, 2006. 240 с.



10. Радаев Ю. Н. Асимптотические оси тензоров напряжений и приращения деформации в механике сжимаемых континуумов // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 77–85.

Образец для цитирования:

Радаев Ю. Н. Мгновенно-нерастяжимые директоры в кинематике трехмерных течений сред Кулона – Мора // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 467–483. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-467-483>

Instantaneously not Elongated Directors in Three-Dimensional Kinematics of the Coulomb – Mohr Medium

Yu. N. Radayev

Yuri N. Radayev, <http://orcid.org/0000-0002-0866-2151>, Institute for Problems in Mechanics of RAS, 101 Vernadskogo Ave., Moscow 119526, Russia, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Three-dimensional flows of perfectly plastic medium are considered within the framework of the Coulomb – Mohr continuum model. The model is to be used in applied problems related to limit states and flows of sands, rocks and any other kind of granular media. The present study is based on a notion of asymptotic directions of the stress tensor and the strain tensor increment and as well on instantaneously not elongated directors which are orthogonal to the asymptotic directions and lie in the plane normal to the intermediate principal stress axis. By making use of mechanical sense of asymptotic directions the canonical dyadic representations of the stress tensor and the strain tensor increment are obtained. The associate flow rule equations are analysed and then applied to study of three-dimensional irreversible kinematics of the granular media. It is shown that the dilatation is always positive excepting the case of zero internal friction. Orientations of the instantaneously not elongated linear material elements are found. The strain tensor increment represented in three dimensions by means of the instantaneously not elongated directors is obtained.

Key words: plasticity, yielding, flow, Coulomb – Mohr criterion, strain tensor increment, associate flow rule.

Acknowledgements: The results have been obtained in the framework of the national tasks (state registration no. AAAA-A17-117021310381-8) and partial supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00844).

References

1. Prager W. *Vvedenie v mekhaniku sploshnyh sred* [Introduction to continuum mechanics]. Moscow, Izd-vo inostr. lit., 1963. 312 p. (in Russian).
2. Ilyushin A. A. *Plastichnost'. Ch. I : Uprugo-plasticheskie deformacii* [Plasticity. Pt. I : Elastic-plastic deformations]. Moscow, Gostekhtheoretizdat, 1948. 376 p. (in Russian).
3. Sokolovskii V. V. *Teoriya plastichnosti* [Theory of plasticity]. Moscow, Vyssh. Shk., 1969. 608 p. (in Russian).
4. Kachanov L. M. *Osnovy teorii plastichnosti* [Foundations of theory of plasticity]. Moscow, Nauka, 1969. 420 p. (in Russian).
5. Ivlev D. D. *Teoriya ideal'noj plastichnosti* [Theory of perfect plasticity]. Moscow. Nauka, 1966. 232 p.
6. Nadai A. *Plastichnost'. Mekhanika plasticheskogo sostoyaniya veshchestva* [Plasticity. Mechanics of the plastic state of matter]. Moscow, Leningrad, ONTI Publ., 1936. 280 p. (in Russian).



7. Nadai A. *Plastichnost' i razrushenie tverdyh tel* [Plasticity and fracture of solids]. Vol. I. Moscow, Izd-vo inostr. lit., 1954. 648 p. (in Russian).
8. Nadai A. *Plastichnost' i razrushenie tverdyh tel* [Plasticity and fracture of solids]. Vol. II. Moscow, Mir, 1969. 864 p. (in Russian).
9. Radayev Y. N. *Prostranstvennaya zadacha matematicheskoy teorii plastichnosti* [Three-dimensional problem of mathematical theory of plasticity]. Samara, Izd-vo Samar. Gos. Un-ta, 2006. 240 p. (in Russian).
10. Radayev Y. N. Asymptotic axes of stress tensors and strain increment tensors in mechanics of compressible continua, *Mech. Solids*, 2013, vol. 48, iss. 5, pp. 546–552. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654413050105>

Cite this article as:

Radayev Yu. N. Instantaneously not Elongated Directors in Three-Dimensional Kinematics of the Coulomb – Mohr Medium. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 467–483 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-467-483>



УДК 539.376

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ ТОЛСТОСТЕННЫХ ТРУБ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ ОСЕВОЙ СИЛОЙ, КРУТЯЩИМ МОМЕНТОМ И ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

В. П. Радченко, В. В. Цветков

Радченко Владимир Павлович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики, Самарский государственный технический университет, Россия, 443100, Самара, Молодогвардейская, 244, radchenko.vp@samgtu.ru

Цветков Виталий Владимирович, аспирант, Самарский государственный технический университет, Россия, 443100, Самара, Молодогвардейская, 244, vi.v.tsvetkoff@gmail.com

Разработан метод решения краевой задачи о реологическом деформировании и разрушении толстостенной трубы при комбинированном нагружении осевой силой, крутящим моментом и внутренним давлением. Для описания процесса ползучести используется энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности. Выполнена экспериментальная проверка предложенного метода на основании известных опытных данных по ползучести и длительной прочности толстостенных труб из сплава Д16Т и стали 20. Получены расчётные зависимости для полной осевой деформации и относительного угла закручивания с течением времени. Приведены результаты расчётов и оценки погрешностей по длительной прочности. Показано соответствие расчётных данных по предложенной методике с экспериментальными значениями, а также данными расчёта других авторов из независимых источников.

Ключевые слова: краевая задача, ползучесть, длительная прочность, толстостенная труба, растяжение, кручение, внутреннее давление.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-484-495>

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, большинство реальных деталей машин и механизмов в процессе эксплуатации подвергается воздействию сложного напряжённого состояния. При этом с течением времени при повышенных температурах в металлических материалах происходит накопление деформации ползучести, что способствует возникновению повреждений и в конечном счёте приводит к разрушению. Отсюда возникает необходимость в разработке методов оценки кинетики напряжённо-деформированного состояния и предела длительной прочности элементов конструкций в условиях ползучести при различных видах напряжённого состояния.

Значительное число известных работ по длительной прочности носит исключительно экспериментальный характер и посвящено исследованию цилиндрических изделий, в частности испытаниям толстостенных образцов при совместном действии осевой силы, крутящего момента и внутреннего давления. На сегодняшний день в наиболее полном объёме эта информация систематизирована А. М. Локощенко [1]. Там же рассмотрены два феноменологических подхода к прогнозированию длительной прочности металлических изделий при сложном напряжённом состоянии.



Критериальный подход (по терминологии А. М. Локощенко) базируется на концепции эквивалентных напряжённых состояний. Он позволяет установить критериальные зависимости для длительной прочности по упрощённой схеме, подробно изложенной в [1]. На основе данного подхода решаются многие задачи прогнозирования длительной прочности элементов конструкций при сложном напряжённом состоянии, в частности, они рассмотрены в работах [2–4] и др. Однако при таком подходе за рамками исследования находится кинетика напряжённо-деформированного состояния в процессе ползучести конструкции.

Другой подход — кинетический — заключается в математической постановке и решении соответствующих краевых задач с использованием кинетической теории ползучести и критерия разрушения. Как показано в работе [5], применение такого подхода позволяет получить расчётные зависимости для характеристик напряжённо-деформированного состояния, зная которые возможно спрогнозировать остаточный ресурс исследуемого объекта в условиях ползучести.

Целью настоящей работы является разработка и экспериментальная проверка метода решения краевой задачи о реологическом деформировании и разрушении толстостенной трубы при комбинированном нагружении осевой силой, крутящим моментом и внутренним давлением.

1. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О РЕОЛОГИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ И РАЗРУШЕНИИ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ ОСЕВОЙ СИЛОЙ, КРУТЯЩИМ МОМЕНТОМ И ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

Рассмотрим краевую задачу ползучести полого цилиндрического образца с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 при комбинированном нагружении осевой силой F , крутящим моментом M и внутренним давлением q , как показано на рис. 1.

Введём стандартную цилиндрическую систему координат (r, θ, z) . При рассматриваемых внешних нагрузках напряжённое состояние элементарного объёма цилиндрического образца в любой момент времени t определяется тензором напряжений:

$$\sigma_{ij}^0(r, t) = \begin{pmatrix} \sigma_z^0(r, t) & \tau_0(r, t) & 0 \\ \tau_0(r, t) & \sigma_\theta^0(r, t) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r^0(r, t) \end{pmatrix},$$

где через σ_z^0 , σ_θ^0 , σ_r^0 и τ_0 обозначены осевая, окружная, радиальная и касательная компоненты тензора напряжений соответственно.

Постановка краевой задачи включает в себя следующие соотношения:

— уравнения равновесия:

$$r \frac{d\sigma_r^0(r, t)}{dr} + \sigma_r^0(r, t) = \sigma_\theta^0(r, t), \quad (1)$$

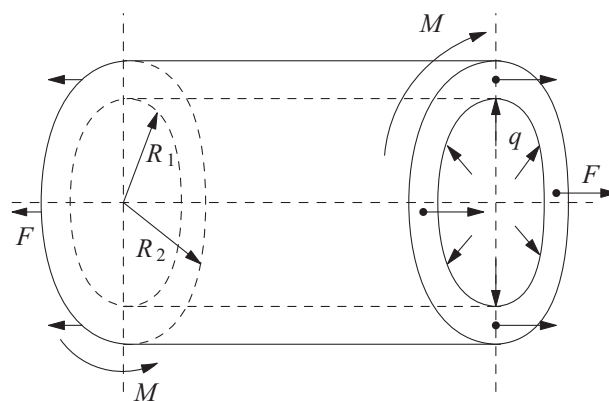


Рис. 1. Схема нагружения цилиндрического образца осевой силой F , крутящим моментом M и внутренним давлением q

Fig. 1. Loading condition of cylindrical specimen with axial force F , torsional moment M and internal pressure q



$$2\pi \int_{R_1}^{R_2} \sigma_z^0(r, t) r dr = F, \quad (2)$$

$$2\pi \int_{R_1}^{R_2} \tau_0(r, t) r^2 dr = M; \quad (3)$$

— уравнение совместности деформаций:

$$r \frac{d\varepsilon_\theta(r, t)}{dr} + \varepsilon_\theta(r, t) = \varepsilon_r(r, t), \quad (4)$$

где ε_r и ε_θ — радиальная и окружная компоненты тензора полных деформаций соответственно;

— гипотеза плоских сечений:

$$\varepsilon_z(r, t) = \varepsilon_z(t), \quad (5)$$

где ε_z — осевая компонента тензора полных деформаций;

— гипотеза прямых радиусов:

$$\gamma(r, t) = r\theta(t), \quad (6)$$

где γ — полная деформация сдвига, θ — относительный угол закручивания;

— краевые условия:

$$\forall t \geq 0 \quad \sigma_r^0(r, t) \Big|_{r=R_1} = -q; \quad \sigma_r^0(r, t) \Big|_{r=R_2} = 0. \quad (7)$$

Поскольку в соотношения (1)–(7) время t входит параметрически, то здесь и далее будет использоваться оператор полной производной по пространственной координате r .

Сформулируем начальные условия. В момент приложения нагрузки $t = 0$ напряжённое состояние определяется решением краевой задачи, полученным в теории упругости:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^0(r, 0) &= \frac{qR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right]; & \sigma_r^0(r, 0) &= \frac{qR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right]; \\ \sigma_z^0(r, 0) &= \frac{F}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}; & \tau_0(r, 0) &= \frac{M}{J}r, \end{aligned} \quad (8)$$

где J — момент инерции сечения относительно оси:

$$J = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{2}.$$

При температурно-силовом нагружении в цилиндрическом образце происходит накопление деформации ползучести, и тензор полных деформаций в любой момент времени t можно представить в виде

$$\varepsilon_{ij}(r, t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_z(r, t) & \frac{1}{2}\gamma(r, t) & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma(r, t) & \varepsilon_\theta(r, t) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_r(r, t) \end{pmatrix},$$



где

$$\varepsilon_z(r, t) = e_z(r, t) + p_z(r, t); \quad (9)$$

$$\varepsilon_\theta(r, t) = e_\theta(r, t) + p_\theta(r, t); \quad (10)$$

$$\varepsilon_r(r, t) = e_r(r, t) + p_r(r, t); \quad (11)$$

$$\gamma(r, t) = \gamma^e(r, t) + \gamma^p(r, t). \quad (12)$$

Здесь $e_z, e_\theta, e_r, \gamma^e$ — осевая, окружная, радиальная и сдвиговая компоненты тензора упругих деформаций соответственно; $p_z, p_\theta, p_r, \gamma^p$ — осевая, окружная, радиальная и сдвиговая компоненты тензора деформаций ползучести соответственно. При этом в начальный момент времени $t = 0$ значения компонент тензора деформаций ползучести равны нулю.

Далее задача заключается в разрешении соотношений (9)–(12) относительно компонент тензора напряжений $\sigma_z^0, \sigma_\theta^0, \sigma_r^0, \tau_0$.

Запишем закон Гука для упругих деформаций:

$$e_z(r, t) = \frac{1}{E} [\sigma_z^0(r, t) - \mu(\sigma_\theta^0(r, t) + \sigma_r^0(r, t))]; \quad (13)$$

$$e_\theta(r, t) = \frac{1}{E} [\sigma_\theta^0(r, t) - \mu(\sigma_r^0(r, t) + \sigma_z^0(r, t))]; \quad (14)$$

$$e_r(r, t) = \frac{1}{E} [\sigma_r^0(r, t) - \mu(\sigma_\theta^0(r, t) + \sigma_z^0(r, t))]; \quad (15)$$

$$\gamma^e(r, t) = \frac{1}{G} \tau_0(r, t), \quad (16)$$

где E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона, $G = E/(2(1 + \mu))$ — модуль сдвига материала.

Подставляя (13) и (5) в (9), находим распределение осевого напряжения:

$$\sigma_z^0(r, t) = E[\varepsilon_z(t) - p_z(r, t)] + \mu[\sigma_\theta^0(r, t) + \sigma_r^0(r, t)]. \quad (17)$$

Вычитая из (14) уравнение (15), исключим компоненту σ_z^0 :

$$e_\theta(r, t) - e_r(r, t) = \frac{1 + \mu}{E} [\sigma_\theta^0(r, t) - \sigma_r^0(r, t)].$$

Используя уравнение (1), запишем последнее соотношение в виде

$$e_\theta(r, t) - e_r(r, t) = \frac{1 + \mu}{E} \left(r \frac{d\sigma_r^0(r, t)}{dr} \right). \quad (18)$$

Найдём выражение de_θ/dr , для этого продифференцируем соотношение (14) по r :

$$\frac{de_\theta(r, t)}{dr} = \frac{1}{E} \left[\frac{d\sigma_\theta^0(r, t)}{dr} - \mu \left(\frac{d\sigma_r^0(r, t)}{dr} + \frac{d\sigma_z^0(r, t)}{dr} \right) \right]. \quad (19)$$

Дифференцируя соотношение (17) по r и подставляя полученное в (19), исключим из него величину $d\sigma_z^0/dr$:

$$\frac{de_\theta(r, t)}{dr} = \frac{1 + \mu}{E} \left[(1 - \mu) \frac{d\sigma_\theta^0(r, t)}{dr} - \mu \frac{d\sigma_r^0(r, t)}{dr} + \frac{\mu E}{1 + \mu} \frac{dp_z(r, t)}{dr} \right].$$



Продифференцировав (1) по r и подставив полученное в последнее соотношение, исключаем $d\sigma_\theta^0/dr$:

$$\frac{de_\theta(r, t)}{dr} = \frac{1 + \mu}{E} \left[(1 - \mu)r \frac{d^2\sigma_r^0(r, t)}{dr^2} + (2 - 3\mu) \frac{d\sigma_r^0(r, t)}{dr} + \frac{\mu E}{1 + \mu} \frac{dp_z(r, t)}{dr} \right]. \quad (20)$$

Преобразуем уравнение совместности деформаций (4) с учётом (10), (11) и (18):

$$r \frac{de_\theta(r, t)}{dr} = -\frac{1 + \mu}{E} \left(r \frac{d\sigma_r^0(r, t)}{dr} \right) + (p_r(r, t) - p_\theta(r, t)) - r \frac{dp_\theta(r, t)}{dr}.$$

Подставляя (20) в последнее равенство, получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно σ_r^0 :

$$r^2 \frac{d^2\sigma_r^0(r, t)}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r^0(r, t)}{dr} = g(r, t), \quad (21)$$

где правая часть имеет вид

$$g(r, t) = \frac{E}{1 - \mu^2} \left[p_r(r, t) - p_\theta(r, t) - r \left(\frac{dp_\theta(r, t)}{dr} + \mu \frac{dp_z(r, t)}{dr} \right) \right]. \quad (22)$$

Данное дифференциальное уравнение с граничными условиями (7) составляет краевую задачу, решение которой записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_r^0(r, t) = & \frac{qR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right] + \frac{1}{2} \int_{R_1}^r \frac{g(\xi, t)}{\xi} d\xi + \\ & + \frac{1}{2r^2} \left[\frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(\int_{R_1}^{R_2} g(\xi, t) \xi d\xi - R_2^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{g(\xi, t)}{\xi} d\xi \right) - \int_{R_1}^r g(\xi, t) \xi d\xi \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Формула (23) описывает распределение радиальной компоненты тензора напряжений σ_r^0 по пространственно-временным координатам.

При известном σ_r^0 распределение для окружной компоненты σ_θ^0 можно найти из уравнения равновесия (1):

$$\sigma_\theta^0(r, t) = \frac{d}{dr} \left(r\sigma_r^0(r, t) \right). \quad (24)$$

Для определения σ_z^0 по формуле (17) необходимо знать величину ε_z . Подставляя (17) в (2), проводя необходимые операции интегрирования и разрешая полученное соотношение относительно ε_z , получим:

$$\varepsilon_z(t) = \frac{F}{\pi (R_2^2 - R_1^2) E} + \frac{2}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} r \left\{ p_z(r, t) - \frac{\mu}{E} [\sigma_r^0(r, t) + \sigma_\theta^0(r, t)] \right\} dr. \quad (25)$$

Определив таким образом величину ε_z , можно найти σ_z^0 по формуле (17).

Распределение радиальной компоненты тензора напряжений τ_0 получим, подставляя (16) и (6) в соотношение (12):

$$\tau_0(r, t) = G [r\theta(t) - \gamma^p(r, t)], \quad (26)$$



где величина θ определяется из подстановки (26) в (3):

$$\theta(t) = \frac{M}{GJ} + \frac{2\pi}{J} \int_{R_1}^{R_2} \gamma^p(r, t) r^2 dr. \quad (27)$$

Таким образом, для определения всех характеристик напряжённо-деформированного состояния цилиндрического образца в условиях ползучести в момент времени t при начальных условиях (8) может быть использована следующая расчётная схема:

$$t \longrightarrow p_z(r, t), p_\theta(r, t), p_r(r, t), \gamma^p(r, t) \xrightarrow{(22)} g(r, t) \xrightarrow{(23)} \sigma_r^0(r, t) \xrightarrow{(24)} \sigma_\theta^0(r, t) \xrightarrow{(25)} \varepsilon_z(t) \xrightarrow{(17)} \sigma_z^0(r, t) \xrightarrow{(27)} \theta(t) \xrightarrow{(26)} \tau_0(r, t). \quad (28)$$

Обозначения над стрелками указывают номер формулы, по которой вычисляется соответствующая величина.

2. РЕОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

При реализации схемы (28) необходимо иметь величины p_z , p_θ , p_r , γ^p . Для их определения можно использовать любую теорию ползучести, которая способна адекватно описать экспериментальные данные.

В настоящей работе в качестве базовой реологической модели используется энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности [5]. Данная теория позволяет описать все три стадии ползучести, накопление повреждённости и разрушение материала. Рассмотрим основные соотношения модели [5] в одноосном случае без учёта первой стадии ползучести:

$$\dot{p} = c\sigma^m, \quad \sigma = \sigma_0(1 + \omega), \quad \dot{\omega} = \alpha\sigma\dot{p}, \quad \alpha = \alpha_1(\sigma_0)^{m_\alpha}. \quad (29)$$

Здесь p — деформация ползучести; σ_0 и σ — номинальное и истинное напряжения; ω — параметр повреждённости; c , m , α_1 , m_α — параметры модели.

Реологическая модель (29) не учитывает первую стадию ползучести, которая у большинства металлических материалов мала (а иногда и просто отсутствует) и практически не влияет на оценку длительной прочности.

Для определения момента времени разрушения $t = t^*$ используется критерий разрушения энергетического типа:

$$\Omega(t^*) = \int_0^{t^*} \frac{\sigma dp}{A_*} = 1; \quad A_* = A_1(\sigma_0)^{m_A}, \quad (30)$$

где A_* — критическая величина работы истинного напряжения на деформации ползучести (феноменологический параметр):

$$A(t) = \int_0^t \sigma dp,$$

по достижении которой в момент времени $t = t^*$ происходит разрушение; A_1 , m_A — параметры модели. При этом полагается, что материал находится в неразрушенном состоянии при $\Omega(t) < 1$ ($t < t^*$) и разрушается при выполнении $\Omega(t^*) = 1$.

Численные значения параметров модели (29), (30) определяются согласно [5] по стационарным экспериментальным кривым ползучести при одноосном растяжении $\sigma_0 = \text{const}$ вплоть до разрушения.



При введении скалярного параметра повреждённости определяющие соотношения (29) обобщаются на случай сложного напряжённого состояния при изотропной ползучести:

$$\dot{p}_{ij} = \frac{3}{2} c S^{m-1} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right), \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 (1 + \omega); \quad \dot{\omega} = \alpha \sigma_{ij} \dot{p}_{ij}, \quad \alpha = \alpha_1 (S_0)^{m_\alpha}, \quad (31)$$

где p_{ij} — тензор деформации ползучести; σ_{ij}^0 и σ_{ij} — тензоры номинальных и истинных напряжений соответственно; S_0 и S — интенсивности номинальных и истинных напряжений соответственно; δ_{ij} — символ Кронекера; остальные обозначения в (31) соответствуют модели (29).

Критерий разрушения (30) примет вид

$$\Omega(t^*) = \int_0^{t^*} \frac{\sigma_{ij} dp_{ij}}{A_*} = 1; \quad A_* = A_1 (S_0)^{m_A}. \quad (32)$$

В формулах (31)–(32) по повторяющимся индексам осуществляется суммирование.

3. ПРОВЕРКА АДЕКВАТНОСТИ МЕТОДА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Далее выполним экспериментальную проверку разработанного метода решения краевой задачи на основе расчётной схемы (28) и реологической модели (31)–(32).

Как отмечено выше, в научной литературе имеется достаточное число экспериментальных работ по длительной прочности толстостенных труб при сложном напряжённом состоянии. Однако надёжных источников, в которых наряду с данными по длительной прочности присутствуют также одноосные кривые ползучести, необходимые для построения реологической модели (31)–(32), относительно немного.

В качестве примера рассмотрим результаты, полученные для полых цилиндрических образцов из сплава Д16Т при температуре $T = 250^\circ\text{C}$, а также толстостенных труб из стали 20 при $T = 500^\circ\text{C}$. Данные материалы характеризуются отсутствием первой стадии ползучести при указанных температурах, что указывает на правомерность использования реологической модели (31)–(32). Значения параметров модели для указанных материалов, приведённые в работах [5, 6], представлены в табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

Значения параметров реологической модели (31)–(32) для сплава Д16Т ($T = 250^\circ\text{C}$) и стали 20 ($T = 500^\circ\text{C}$)

Parameter values of rheological model (31)–(32) for D16T alloy ($T = 250^\circ\text{C}$) and Steel 20 ($T = 500^\circ\text{C}$)

Материал / Material	$T, ^\circ\text{C}$	$c, (\text{МПа})^{-m}$	m	$\alpha_1, (\text{МПа})^{-m_\alpha-1}$	m_α	$A_1, (\text{МПа})^{m_A-1}$	m_A
Д16Т / D16T	250	$2.4 \cdot 10^{-15}$	5.405	0.91	-0.43	19.72	0
Сталь 20 / Steel 20	500	$2.953 \cdot 10^{-19}$	7.28	165	-2.34	0.0299	1.52

Расчёт ползучести на основе схемы (28) и реологической модели (31)–(32) осуществлялся численно «шагами по времени», при этом приращения компонент тензора деформаций ползучести и параметра ω рассчитывались по методу Эйлера. Все производные от напряжений и деформаций аппроксимировались через конечные разности,



а интегралы в каждый момент времени вычислялись численно по квадратурным формулам.

В работе [7] исследовались закономерности реологического деформирования толстостенных цилиндров из сплава Д16Т радиусами $R_1 = 5$ мм и $R_2 = 10$ мм при температуре $T = 250^\circ\text{C}$ ($E = 56000$ МПа, $\mu = 0.3$). На рис. 2 сплошными линиями представлены расчётные зависимости для полной осевой деформации $\varepsilon_z = \varepsilon_z(t)$ (а) и угла закручивания $\theta = \theta(t)$ (б) по методике решения краевой задачи по схеме (28) с использованием модели ползучести (31)–(32) при растяжении совместно с кручением. Наблюдается хорошее соответствие полученных результатов с экспериментальными данными (на рис. 2 обозначены точки), а также с данными расчёта по модели энергетического варианта теории ползучести О. В. Соснина (обозначены штриховыми линиями), представленными в работе [7].

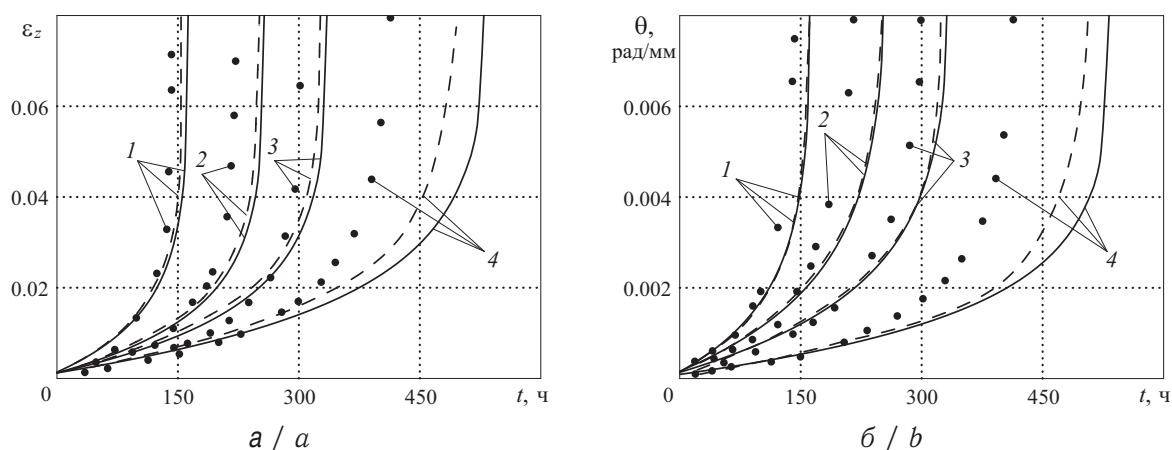


Рис. 2. Экспериментальные [7] (точки) и расчётные (сплошные линии — по методике решения краевой задачи и реологической модели (31)–(32), штриховые — по модели [7]) зависимости для осевой деформации $\varepsilon_z = \varepsilon_z(t)$ (а) и угла закручивания $\theta = \theta(t)$ (б) для толстостенных цилиндрических образцов из сплава Д16Т ($T = 250^\circ\text{C}$) при комбинированном нагружении осевой силой F и крутящим моментом M : 1 — $F = 18491.4$ Н, $M = 47167.6$ Н·мм; 2 — $F = 16180$ Н, $M = 50562.5$ Н·мм; 3 — $F = 16180$ Н, $M = 43339.3$ Н·мм; 4 — $F = 16180$ Н, $M = 28892.8$ Н·мм

Fig. 2. Experimental [7] (dots) and calculated (solid lines — by method for solving the boundary-value problem and rheological model (31)–(32), dashed lines — by model [7]) dependencies for axial strain $\varepsilon_z = \varepsilon_z(t)$ (a) and torsion angle $\theta = \theta(t)$ (b) of thick-walled cylindrical specimens made of D16T alloy ($T = 250^\circ\text{C}$) under combined load with axial force F and torsional moment M : 1 — $F = 18491.4$ N, $M = 47167.6$ N·mm; 2 — $F = 16180$ N, $M = 50562.5$ N·mm; 3 — $F = 16180$ N, $M = 43339.3$ N·mm; 4 — $F = 16180$ N, $M = 28892.8$ N·mm

Экспериментальная информация по одноосной ползучести наряду с данными по длительной прочности толстостенных труб из стали 20 при температуре $T = 500^\circ\text{C}$ ($E = 108000$ МПа, $\mu = 0.3$) при нагружении внутренним давлением представлены в работе [8]. В табл. 2 приведены экспериментальные t^* и расчётные t_p (полученные по предложенной методике решения краевой задачи на основании реологической модели (31)–(32)) значения времени до разрушения при одноосном растяжении образцов из стали 20 при $T = 500^\circ\text{C}$; в табл. 3 дана аналогичная информация по длительной прочности толстостенных труб различного диаметра под действием внутреннего давления.



Таблица 2 / Table 2

Экспериментальные t^* и расчётные t_p значения времени до разрушения стали 20 ($T = 500^\circ\text{C}$) при одноосном растяжении $\sigma_z^0 = \text{const}$
 Experimental t^* and calculated t_p values of creep-rupture life for Steel 20 ($T = 500^\circ\text{C}$) under uniaxial tension $\sigma_z^0 = \text{const}$

№ п/п	σ_z^0 , МПа / МПа	t^* , ч / h [8]	$t_p^{\text{ЭКВ}}$, ч / h [5]	t_p , ч / h
1	147.15	169	140.25	164.1
2	137.34	244	231.5	257.2
3	127.53	487	396.5	416.5
4	117.72	573	709.2	700.3
5	107.91	1134	1334.2	1230.3
6	98.1	2250	2666	2276.9
7	88.29	4912	5730.6	4487.3
Δ , %			16.1	8.8

Таблица 3 / Table 3

Экспериментальные t^* и расчётные t_p значения времени до разрушения толстостенных труб из стали 20 ($T = 500^\circ\text{C}$) под действием внутреннего давления q
 Experimental t^* and calculated t_p values of creep-rupture life for thick-walled tubes made of Steel 20 ($T = 500^\circ\text{C}$) under internal pressure q

№ п/п	R_1 , мм / mm	R_2 , мм / mm	q , МПа / МПа	t^* , ч / h [8]	$t_p^{\text{ЭКВ}}$, ч / h [5]	t_p , ч / h
1	18.02	20	17.56	75	54.8	75.1
2	18.02	20	17.56	100	54.8	75.1
3	17.015	22.46	35.81	385	454	482.2
4	17.02	21.96	29.82	889	884	899.2
5	18.02	20	12.26	1058	744.5	782.7
6	17	18.87	11.05	1176	1583	1546.2
7	18.01	22.51	23.41	1682	1883	1789.9
8	18.01	21.97	19.42	3803	3087	2802
9	17.01	18.88	9.42	5804	5042	4320
10	18.015	22.519	19.96	7067	5996	5043.1
11	17.02	19.06	9.32	7690	11317	7902.4
12	17.01	22.45	23.2	9092	10574	8048.9
Δ , %					26.3	20.5

Также в табл. 2 и табл. 3 приведены расчётные значения времени до разрушения $t_p^{\text{ЭКВ}}$, полученные в работе [5] при помощи критериальных зависимостей. Важно отметить, что в основе критериального подхода к прогнозированию длительной прочности лежит аппроксимация всех экспериментальных данных по длительной прочности при всех видах напряжённого состояния с использованием метода наименьших квадратов. Исходными данными для кинетического подхода, развиваемого в настоящей работе, являются лишь первичные кривые ползучести, необходимые для построения модели (31)–(32), а при сложном напряжённом состоянии осуществляется прогноз кинетики напряжений и деформаций и длительной прочности.

Погрешность отклонения экспериментальных данных t^* от расчётных значений



времени до разрушения t_p приведена в последней строке табл. 2 и табл. 3 и вычислялась по формуле

$$\Delta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{t_i^* - t_{pi}}{t_{pi}} \right| \cdot 100\%,$$

где N — объём экспериментальных данных.

Анализ данных табл. 2 и табл. 3 позволяет сделать следующий вывод: несмотря на то что в критериальных подходах фактически строится регрессионная модель, аппроксимирующая все наблюдаемые значения времени до разрушения по всем экспериментальным данным, данные расчёта длительной прочности по разработанному авторами методу (схема (28)) дают меньшую погрешность по отношению к экспериментальным данным, хотя исходной информацией являлись лишь кривые одноосной ползучести материала.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, учитывая реально наблюдаемый значительный разброс экспериментальных данных по ползучести и длительной прочности, можно сделать вывод, что в целом результаты расчёта на основе решения краевой задачи хорошо согласуются с экспериментальными данными как по деформационным характеристикам (осевая деформация; угол закручивания), так и по длительной прочности толстостенных труб при сложном напряжённом состоянии.

Разработанный метод решения краевой задачи позволяет оценить остаточный ресурс, а также выполнить вариативный анализ влияния различных факторов (механических характеристик, геометрических параметров, вида и величины приложенной нагрузки и др.) на кинетику напряжённо-деформированного состояния и длительную прочность цилиндрических деталей при температурно-силовом нагружении.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00249-а).

Библиографический список

1. Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов. М. : Физматлит, 2016. 504 с.
2. Голуб В. П., Регульский М. Н., Русинов А. А. Длительная прочность тонкостенных труб при двухосном статическом нагружении // Вестн. НТУУ «КПИ». Сер. Машиностроение. 2008. № 52. С. 61–67.
3. Голубовский Е. Р. Длительная прочность и критерий разрушения при сложном напряжённом состоянии сплава ЭИ698ВД // Проблемы прочности. 1984. № 8. С. 11–17.
4. Локощенко А. М., Платонов Д. О. Длительная прочность никелевого сплава ЭИ437БУВД при сложном напряженном состоянии // Машиностроение и инженерное образование. 2010. № 2. С. 15–24.
5. Радченко В. П., Ерёмин Ю. А. Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций. М.: Машиностроение-1, 2004. 265 с.
6. Радченко В. П., Цветков В. В. Напряжённо-деформированное состояние цилиндрического образца из сплава Д16Т в условиях осевого растяжения и кручения при ползучести // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2013. № 3 (32). С. 77–86.
7. Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф. Энергетический вариант теории ползучести / Ин-т гидродинамики СО АН СССР. Новосибирск, 1986. 95 с.



8. Кац Ш. Н. Исследование длительной прочности углеродистых труб // Теплоэнергетика. 1955. № 11. С. 37–40.

Образец для цитирования:

Радченко В. П., Цветков В. В. Моделирование ползучести и длительной прочности // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 484–495. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-484-495>

Creep and Long-Term Strength Modeling for Thick-Walled Tubes under Combined Loading with Axial Force, Torsional Moment and Internal Pressure

V. P. Radchenko, V. V. Tsvetkov

Vladimir P. Radchenko, <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>, Samara State Technical University, 244 Molodogvardeyskaya St., Samara 443100, Russia, radchenko.vp@samgtu.ru

Vitaly V. Tsvetkov, <https://orcid.org/0000-0001-9285-7607>, Samara State Technical University, 244 Molodogvardeyskaya St., Samara 443100, Russia, vi.v.tsvetkoff@gmail.com

We have developed a method for solving the boundary-value problem of rheological deformation and creep rupture of thick-walled tube under combined loading with axial force, torsional moment and internal pressure. Energetic variant of the theory of creep and long-term strength is used to describe creep process. Experimental verification of proposed method has been performed using known test data for creep and long-term strength of thick-walled tubes made of D16T alloy and Steel 20. Calculated dependencies for total axial strain and torsion angle on time are obtained. The results of calculation and estimated deviations for long-term strength are given. It is shown that the calculation data fit to experimental values as well as calculation data obtained by other scientists in third-party sources.

Key words: boundary-value problem, creep, long-term strength, thick-walled tube, tension, torsion, internal pressure.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00249-a).

References

1. Lokoshchenko A. M. *Polzuchest' i dlitel'naiya prochnost' metallov* [Creep and long-term strength of metals]. Moscow, Fizmatlit, 2016. 504 p. (in Russian).
2. Golub V. P., Regul'skiy M. N., Rusinov A. A. Dlitel'naiya prochnost' tonkostennykh trub pri dvuhosnom staticheskom nagruzhении [Long-term strength of thin-walled tubes under biaxial loading]. *Vestn. NTUU "KPI". Ser. Mashinostroenie*, 2008, no. 52, pp. 61–67 (in Russian).
3. Golubovskiy E. R. Dlitel'naiya prochnost' i kriteriy razrusheniya pri slozhnom napryazhonnom sostoyanii splava EI698VD [Long-term strength and damage criterion for complex stress state of EI698VD alloy]. *Strength of Materials*, 1984, no. 8, pp. 11–17 (in Russian).
4. Lokoshchenko A. M., Platonov D. O. Long-term strength of nickel alloy EI437BU-WD at the complex stress state. *Mashinostroenie i ingenernoe obrazovanie*, 2010, no. 2, pp. 15–24 (in Russian).
5. Radchenko V. P., Eremin Yu. A. *Reologicheskoe deformirovanie i razrushenie materialov i elementov konstruktsiy* [Rheological Deformation and Fracture of Materials and Structural Elements]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2004. 264 p. (in Russian).



6. Radchenko V. P., Tsvetkov V. V. The stress-strain state of cylindrical sample from alloy D16T under axial tension and torsion creep. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2013, no. 3 (32), pp. 77–86 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1277>
7. Sosnin O. V., Gorev B. V., Nikitenko A. F. *Energeticheskii variant teorii polzuchesti* [Energetic variant of the creep theory], Novosibirsk, Institute of Hydrodynamics, USSR Acad. of Sci., 1986. 95 p. (in Russian).
8. Kats Sh. N. Issledovanie dlitel'noy prochnosti uglerodistykh trub [Investigation of long-term strength of carbon tubes]. *Teploenergetika*, 1955, no. 11, pp. 37–40 (in Russian).

Cite this article as:

Radchenko V. P., Tsvetkov V. V. Creep and Long-Term Strength Modeling for Thick-Walled Tubes under Combined Loading with Axial Force, Torsional Moment and Internal Pressure. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 484–495 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-484-495>



УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ЛЕМБА ДЛЯ СРЕДЫ КОССЕРА

Чан Ле Тхай, Д. В. Тарлаковский

Чан Ле Тхай, аспирант кафедры сопротивления материалов, динамики и прочности машин, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4, tranlethaivvk@gmail.com

Тарлаковский Дмитрий Валентинович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией динамических испытаний НИИ механики, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119192, Москва, Мичуринский просп., 1; заведующий кафедрой сопротивления материалов, динамики и прочности машин, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4, tdvhome@mail.ru

В статье рассматривается упругое однородное изотропное полупространство, заполненное средой Коссера. На границе полупространства заданы нормальные давления. В начальный момент времени и на бесконечности возмущения отсутствуют. С учетом осевой симметрии разрешающая система уравнений включает в себя три гиперболических уравнения относительно скалярного потенциала и ненулевых компонент векторного потенциала и вектора поворота. Решение задачи ищется в виде обобщенных сверток заданного давления с соответствующими поверхностными функциями влияния. Для построения последних применяются преобразования Ханкеля по радиусу и Лапласа по времени. Используется разложение в степенные ряды по малому параметру, характеризующему связь волн сдвига и вращения. Найдены изображения первых двух коэффициентов этих рядов. Соответствующие оригиналы определяются связью плоской и осесимметричной задач. Приведены примеры расчетов регулярных составляющих функций влияния зернистого композита из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице.

Ключевые слова: среда Коссера, поверхностные функции влияния, метод малого параметра, интегральные преобразования Лапласа и Ханкеля, связь плоской и осесимметричной задач.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-496-506>

ВВЕДЕНИЕ

Общая теория моментной упругости впервые была разработана братьями Коссера (E. Cosserat, F. Cosserat) в 1909 г. [1]. В ней в отличие от классической теории упругости движение среды описывается не только вектором перемещения, но также вектором поворота. Краткие обзоры публикаций по тематике упругих сред с микроструктурой представлены в работах [2–7].

В настоящий момент моментная теория упругости привлекает внимание многих исследователей. Необходимо, прежде всего, выделить работы [4–6, 8–13], в которых исследованы статические и динамические задачи для таких сред. В [11] рассмотрена динамическая связанная осесимметричная задача микрополярной теории термоупругости для изотропных слоя, полупространства или пространства. А в работах [4–6] получены решения аналогичных нестационарных осесимметричных задач для однородной изотропной среды псевдокоссера.

В [12] дана постановка и проведены аналитические исследования задач о действии нестационарной поверхностной нагрузки на моментную упругую полуплоскость и



построены соответствующие нестационарные поверхностные функции влияния для плоской задачи Лемба. В работе [13] исследовано нестационарное осесимметричное движение упругого моментного полупространства под действием нестационарных нормальных поверхностных перемещений. В силу осесимметричного характера задачи наряду с преобразованием Лапласа по времени применяется двойное преобразование Фурье (или преобразование Ханкеля) по пространственным переменным.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается упругое однородное изотропное полупространство, заполненное средой Коссера [14]. Уравнения ее осесимметричного движения при отсутствии массовых сил и моментов аналогично [13] записываем относительно скалярного потенциала φ перемещений и ненулевых компонент ψ и ω векторов перемещений и угла поворота в цилиндрической системе координат $Or\vartheta z$ ($r \geq 0$, $-\pi < \vartheta \leq \pi$, $z \geq 0$) с направленной в глубину полупространства осью Oz (точками обозначены производные по времени):

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \Delta\varphi, \quad \ddot{\psi} = (\gamma_1^{-2} + \alpha) \Delta\psi + 2\alpha\omega - (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\psi}{r^2}, \\ \ddot{\omega} &= \gamma_2^{-2} \Delta\omega - 2\alpha\beta\Delta\psi - 4\alpha\beta\omega - r^{-2} (\gamma_2^{-2}\omega - 2\alpha\beta\psi), \quad z \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

При этом ненулевые компоненты u и w вектора перемещений связаны с потенциалами так:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi)}{\partial r}, \quad (2)$$

а нетривиальные физические компоненты тензоров напряжений $\sigma_{\xi\varsigma}$ и моментов $\mu_{\xi\varsigma}$ ($\{\xi, \varsigma\} = \{r, \vartheta, z\}$) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} + \kappa \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} \right), \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{u}{r} + \kappa \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \sigma_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \kappa \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right), \\ \sigma_{rz} &= (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial w}{\partial r} + (\gamma_1^{-2} - \alpha) \frac{\partial u}{\partial z} + 2\alpha\omega, \\ \sigma_{zr} &= (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial u}{\partial z} + (\gamma_1^{-2} - \alpha) \frac{\partial w}{\partial r} - 2\alpha\omega, \\ \mu_{r\vartheta} &= \frac{\partial\omega}{\partial r} - \eta \frac{\omega}{r}, \quad \mu_{\vartheta r} = -\frac{\omega}{r} + \eta \frac{\partial\omega}{\partial r}, \quad \mu_{z\vartheta} = \frac{\partial\omega}{\partial z}, \quad \mu_{\vartheta z} = \eta \frac{\partial\omega}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3)$$

В соотношениях (1)–(3) использованы безразмерные величины (при одинаковом начертании они обозначены штрихами, которые в них и далее опущены):

$$\begin{aligned} u' &= \frac{u}{L}, \quad w' = \frac{w}{L}, \quad r' = \frac{r}{L}, \quad z' = \frac{z}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad \varphi' = \frac{\varphi}{L^2}, \quad \psi' = \frac{\psi}{L^2}, \\ \sigma'_{\xi\varsigma} &= \frac{\sigma_{\xi\varsigma}}{\lambda + 2\mu}, \quad \mu'_{\xi\varsigma} = \frac{L\mu_{\xi\varsigma}}{\gamma + \varepsilon}, \quad \gamma_1^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \quad \gamma_2^2 = \frac{c_1^2}{c_3^2}, \quad \eta = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}, \quad \beta = \frac{\rho L^2}{J}, \\ \alpha' &= \frac{\alpha}{\lambda + 2\mu}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad c_3^2 = \frac{\gamma + \varepsilon}{J}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = 1 - 2\gamma_1^{-2}. \end{aligned}$$

Здесь t — время; L — некоторый характерный линейный размер; λ, μ — упругие постоянные Ламе; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ — физические параметры моментной среды; ρ — ее



плотность; J — мера инерции среды при вращении (плотность момента инерции); c_1 , c_2 и c_3 — скорости волн растяжения-сжатия, сдвига и кручения соответственно. Соотношения между этими скоростями могут быть различными. Далее будем считать имеют место справедливые для композита в виде алюминиевой дроби в эпоксидной матрице [2] неравенства $c_2 < c_1 < c_3$, из которых вытекает следующее соотношение: $\gamma_2 < 1 < \gamma_1$.

Отметим, что при $\alpha = 0$ второе и третье уравнения в (1) становятся независимыми.

Считаем, что в начальный момент времени возмущения отсутствуют:

$$\varphi|_{\tau=0} = \dot{\varphi}|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = \omega|_{\tau=0} = \dot{\omega}|_{\tau=0} = 0. \quad (4)$$

Все искомые функции предполагаются ограниченными, а на граничной плоскости подобно классической задаче Лемба [14–18] выполняются такие условия:

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = \delta(x, y) \delta(\tau), \quad \mu_{z\vartheta}|_{z=0} = 0, \quad (5)$$

где x, y — декартовы координаты в плоскости $z = 0$; $\delta(\xi)$ — дельта-функция Дирака [15].

2. ИЗОБРАЖЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И УГЛА ПОВОРОТА

К начально-краевой задаче (1)–(5) применяем преобразования Лапласа по времени τ и Ханкеля по радиусу r нулевого порядка для φ, w и первого порядка для ψ, u, ω (значки «L» и «H» указывают на соответствующие изображения; s и q — параметры этих преобразований). Тогда уравнения (1), равенства (2), (3) и граничные условия (5) переходят в следующие соотношения:

$$\frac{\partial^2 \varphi^{HL}}{\partial z^2} - k_0^2(q, s) \varphi^{HL} = 0 \quad k_0(q, s) = \sqrt{q^2 + \gamma_0^2 s^2} \quad (\gamma_0 = 1), \quad \operatorname{Re} \sqrt{\cdot} > 0,$$

$$(\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial^2 \psi^{HL}}{\partial z^2} - [(\gamma_1^{-2} + \alpha) q^2 + s^2] \psi^{HL} + 2\alpha \omega^{HL} = 0, \quad (6)$$

$$\gamma_2^{-2} \frac{\partial^2 \omega^{HL}}{\partial z^2} - 2\alpha\beta \frac{\partial^2 \psi^{HL}}{\partial z^2} - (\gamma_2^{-2} q^2 + s^2 + 4\alpha\beta) \omega^{HL} + 2\alpha\beta q^2 \psi^{HL} = 0;$$

$$u^{HL} = -q\varphi^{HL} - \frac{\partial \psi^{HL}}{\partial z}, \quad w^{HL} = \frac{\partial \varphi^{HL}}{\partial z} + q\psi^{HL}, \quad \sigma_{zz}^{HL} = \frac{\partial w^{HL}}{\partial z} + \kappa q u^{HL}, \quad (7)$$

$$\sigma_{zr}^{HL} = (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial u^{HL}}{\partial z} - (\gamma_1^{-2} - \alpha) q w^{HL} - 2\alpha \omega^{HL}, \quad \mu_{z\vartheta}^{HL} = \frac{\partial \omega^{HL}}{\partial z};$$

$$\sigma_{zr}^{HL}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}^{HL}|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}, \quad \mu_{z\vartheta}^{HL}|_{z=0} = 0. \quad (8)$$

Общие решения уравнений в (6) с учетом их ограниченности имеют вид [13]:

$$\varphi^{HL}(q, z, s) = C_0(q, s) E_0(q, z, s), \quad \psi^{HL}(q, z, s) = \sum_{l=1}^2 C_l(q, s) E_l(q, z, s),$$

$$\omega^{HL}(q, z, s) = \frac{1}{2\alpha} \sum_{l=1}^2 T_l(q, s) C_l(q, s) E_l(q, z, s), \quad (9)$$

$$E_j(q, z, s) = e^{-k_j(q, s)z}, \quad T_l(q, s) = (\gamma_1^{-2} + \alpha) [q^2 - k_l^2(q, s)] + s^2,$$



где $C_j(q, s)$ — постоянные интегрирования; а $k_{1,2}(q, s)$ — корни биквадратного уравнения, приведенного в [13].

Подстановка (9) в (7) и использование условий (8) позволяет определить постоянные интегрирования:

$$\begin{aligned} C_0(q, s) &= -\frac{\gamma_1^2 k_3^2(q, s) K_1(q, s)}{2\pi R_2(q, s)}, & C_1(q, s) &= -\frac{\gamma_1^2 q k_0(q, s) K_3(q, s)}{\pi R_2(q, s)}, \\ C_2(q, s) &= -\frac{\gamma_1^2 q k_0(q, s) K_2(q, s)}{\pi R_2(q, s)}. \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} R_2(q, s) &= -4q^2 k_0(q, s) K_4(q, s) - k_3^4(q, s) K_1(q, s), & K_1(q, s) &= K_2(q, s) + K_3(q, s), \\ K_2(q, s) &= k_1(q, s) T_1(q, s), & K_3(q, s) &= -k_2(q, s) T_2(q, s), \\ K_4(q, s) &= -k_1(q, s) k_2(q, s) R_1(q, s), & R_1(q, s) &= T_1(q, s) - T_2(q, s). \end{aligned}$$

Поскольку вид корней $k_{1,2}(q, s)$ не позволяет находить оригиналы аналитически, то аналогично [13] используем разложения в степенные ряды по малому параметру α , а именно, ограничиваясь линейным приближением, перемещения и угол поворота записываем так:

$$\begin{aligned} u(r, z, \tau) &= u_0(r, z, \tau) + u_1(r, z, \tau) \alpha, & w(r, z, \tau) &= w_0(r, z, \tau) + w_1(r, z, \tau) \alpha, \\ \omega(r, z, \tau) &= \omega_0(r, z, \tau) + \omega_1(r, z, \tau) \alpha. \end{aligned} \quad (11)$$

Отметим, что первые члены равенств (11) есть решения классической задачи Лемба для упругой среды. При этом $\omega_0 \equiv 0$. Функции же u_0 и w_0 найдены, например, в [18]. Поэтому далее они не рассматриваются.

Соответствующие (11) равенства для $k_{1,2}(q, s)$ получены в [13]:

$$\begin{aligned} k_l(q, s) &= k_{0l}(q, s) + \alpha k_{1l}(q, s) \quad (l = 1, 2), \\ k_{0l}(q, s) &= \sqrt{q^2 + \gamma_l^2 s^2}, & k_{11}(q, s) &= -\frac{\gamma_1^4 s^2}{2k_{01}(q, s)}, & k_{12}(q, s) &= \frac{2\beta\gamma_2^2}{k_{02}(q, s)}, \\ T_1(q, s) &= T_{12}(q, s) \alpha^2, & T_2(q, s) &= T_{20}(q, s) + \alpha T_{21}(q, s), \\ T_{12}(q, s) &= -\frac{4\beta\gamma_1^2\gamma_2^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}, & T_{20}(q, s) &= \gamma_1^{-2} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) s^2, \\ T_{21}(q, s) &= -\gamma_1^{-2} \gamma_2^2 (4\beta + \gamma_1^2 s^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Использование (7), (9), (10) и (12) позволяет найти изображения искомых коэффициентов в (11). Например, для нормального перемещения они имеют вид

$$w_1^{HL}(q, z, s) = \sum_{j=0}^2 w_{1j}^{HL}(q, z, s), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} w_{10}^{HL}(q, z, s) &= \frac{\gamma_1^6 s^2 q^2 k_0^2(q, s) k_3^2(q, s)}{\pi k_{01}(q, s) R^2(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}, & w_{12}^{HL}(q, z, s) &= 0, \\ w_{11}^{HL}(q, z, s) &= -\frac{\gamma_1^6 s^2 q^2 k_0(q, s)}{2\pi k_{01}(q, s) R(q, s)} \left[\frac{4q^2 k_0(q, s)}{R(q, s)} - z \right] e^{-k_{01}(q, s)z}, \\ R(q, s) &= k_3^4(q, s) - 4q^2 k_0(q, s) k_{01}(q, s), & k_3^2(q, s) &= 2q^2 + \gamma_1^2 s^2. \end{aligned}$$



3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРИГИНАЛОВ

Далее рассматриваем нормальное перемещение на поверхности полупространства. Соответствующие изображения согласно (13) имеют вид

$$G_{0w1}^{HL}(q, s) = w_{10}^{HL}(q, 0, s) + w_{11}^{HL}(q, 0, s) = \frac{1}{2\pi} W_1^{FL}(q, s). \quad (14)$$

Здесь W_1^{FL} — изображение Лапласа по времени τ и Фурье по декартовой координате x (им соответствует верхний индекс F) соответствующей составляющей решения плоской задачи Лемба для моментно-упругой полуплоскости. Оно получено в [12] и записывается так:

$$W_1^{FL}(q, s) = \frac{2\gamma_1^8 s^4 q^2 k_0^2(q, s)}{k_{01}(q, s) R^2(q, s)}. \quad (15)$$

Его оригинал также найден в указанной работе ($H(\tau)$ — единичная функция Хевисайда):

$$W_1(x, \tau) = \sum_{j=0}^1 W_{1j}(x, \tau) H(\tau - \gamma_j |x|), \quad (16)$$

$$W_{10}(x, \tau) = \frac{16\gamma_1^4 \tau^4 R_{10}(x^2, \tau^2)}{\pi \sqrt{\tau^2 - x^2}}, \quad W_{11}(x, \tau) = \frac{2\gamma_1^4 \tau^2 R_{11}(x^2, \tau^2)}{\pi \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2}},$$

Здесь

$$R_{1j}(x^2, \tau^2) = \frac{(\tau^2 - x^2) P_j(x^2, \tau^2)}{P_3^2(x^2, \tau^2)}, \quad P_0(x^2, \tau^2) = (2\tau^2 - \gamma_1^2 x^2)^2 (\tau^2 - x^2),$$

$$P_1(x^2, \tau^2) = (\gamma_1^2 x^2 - 2\tau^2)^4 + 16\tau^4 (\tau^2 - x^2) (\tau^2 - \gamma_1^2 x^2),$$

а $P_3(x, \tau)$ — многочлен, имеющий следующий вид [15, 18]:

$$P_3(x, \tau) = \gamma_1^6 x^3 - 8\gamma_1^4 x^2 \tau + 8\gamma_1^2 (2 + \kappa) x \tau^2 - 8(1 + \kappa) \tau^3 = \gamma_1^6 (x - c_R^2 \tau) P_2(x, \tau),$$

$$P_3(c_R^2, 1) = 0, \quad P_2(x, \tau) = x^2 - 2a^2 x \tau + b^2 \tau^2, \quad a^2 = \frac{4}{\gamma_1^2} - \frac{c_R^2}{2}, \quad b^2 = 16 \frac{\gamma_1^2 - 1}{\gamma_1^8 c_R^2}$$

(c_R — скорость волн Релея).

При этом для дискриминанта $D_2(\kappa)$ многочлена P_2 имеют место следующие соотношения:

$$c_R < \gamma_1^{-1}, \quad D_2(\kappa) > 0 \quad (0 \leq \kappa < \kappa_* \approx 0,357), \quad D_2(\kappa_*) = 0, \quad D_2(\kappa) < 0 \quad (\kappa_* < \kappa < 1).$$

Далее для определенности ограничимся случаем $\kappa_* < \kappa$.

Равенства (14) позволяют найти оригинал функции G_{0w1}^{HL} с помощью утверждений о связи преобразований Фурье и Ханкеля [15, 18]. При этом учитываем, что для этой функции использовалось преобразование Ханкеля нулевого порядка. Кроме того, принимаем во внимание, что функция $W_1(x, \tau)$ — четная функция по x . В результате получаем (интегралы понимаются в смысле регуляризованных значений):

$$G_{0w1}(r, \tau) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{x W_1(x, \tau) dx}{(x^2 - r^2)^{3/2}} = -\frac{\gamma_1^2}{\pi} \sum_{j=0}^1 I_{1j}(r, \tau) H(\tau - \gamma_j r), \quad (17)$$



где

$$I_{1j}(r, \tau) = \frac{A_{1j} \gamma_1^2 \tau}{\pi} \int_{r^2/\tau^2}^{\gamma_j^{-2}} \frac{Q_{1j}(z) dz}{\sqrt{(1 - \gamma_j^2 z)(\tau^2 z - r^2)}}, \quad Q_{1j}(z) = \frac{R_{1j}(z, 1)}{\tau^2 z - r^2},$$

$$A_{10} = 8, \quad A_{11} = 1.$$

С помощью разложения рациональной части подынтегральной функции на элементарные дроби в последнем интеграле выделяем регулярную и сингулярную части:

$$I_{1j}(r, \tau) = \frac{A_{1j}}{\gamma_1^{10}} [K_{jr}(r, \tau) + K_{js}(r, \tau)], \quad (18)$$

где

$$K_{jr}(r, \tau) = \frac{1}{\pi \tau^2} \int_{r^2/\tau^2}^{\gamma_j^{-2}} \frac{\Phi_j(z, r^2/\tau^2)}{\sqrt{(1 - \gamma_j^2 z)(z - r^2/\tau^2)}} dz,$$

$$\Phi_j(z, \xi) = \left[\frac{F_j(z) - F_j(\xi)}{z - \xi} - \frac{F_j(z) - F_j(c_R^2)}{z - c_R^2} \right] \frac{1 - \xi}{(\xi - c_R^2)^2} -$$

$$- \frac{1 - c_R^2}{\xi - c_R^2} \frac{F_j(z) - F_j(c_R^2) - F'_j(c_R^2)(z - c_R^2)}{(z - c_R^2)^2},$$

$$F_j(z) = \frac{P_j(z, 1)}{P_2^2(z, 1)};$$

$$K_{js}(r, \tau) = h_{j1}(\tau) (r^2 - \tau^2 c_R^2)_+^{-3/2} + h_{j2}(r, \tau) (r^2 - \tau^2 c_R^2)_+^{-5/2},$$

$$h_{j1}(\tau) = - \frac{(1 - c_R^2) \tau}{2(1 - \gamma_j^2 c_R^2)^{3/2}} [\gamma_j^2 F_j(c_R^2) + 2(1 - \gamma_j^2 c_R^2) F'_j(c_R^2)],$$

$$h_{j2}(r, \tau) = - \tau \frac{(3 - c_R^2) \tau^2 - 2r^2}{2\sqrt{1 - \gamma_j^2 c_R^2}} F_j(c_R^2).$$

Достаточно просто доказывается, что функция $\Phi_j(z, \xi)$ доопределяется непрерывным образом:

$$\Phi_j(z, c_R^2) = - \frac{F_j(z) - F_j(c_R^2) - F'_j(c_R^2)(z - c_R^2)}{(z - c_R^2)^2}, \quad \Phi_j(c_R^2, c_R^2) = - \frac{1}{2} F''_j(c_R^2).$$

Выясним, как ведет себя функция $G_{0w1}(r, \tau)$ на границах носителя ее составляющих. Прежде всего, отметим, что носителями слагаемых в (17) и функций $K_{js}(r, \tau)$ являются множества $\tau \geq \gamma_j r$ и $r \geq c_R \tau$ соответственно. При этом функции $K_{jr}(r, \tau)$ в (18) непрерывны и для них справедливы равенства

$$\lim_{\tau \rightarrow \gamma_j r + 0} K_{jr}(r, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} K_{jr}(r, \tau) = 0. \quad (19)$$

Функция $K_{js}(r, \tau)$ при $\tau = \gamma_j r$ принимает конечное значение:

$$K_{js}(r, \gamma_j r) = - \frac{\pi}{r^3 (1 - \gamma_j^2 c_R^2)^3} \{ (1 - c_R^2) (1 - \gamma_j^2 c_R^2) F'_j(c_R^2) +$$



$$+F_j(c_R^2) [(2 - c_R^2) \gamma_j^2 - 1] \}, \quad (20)$$

а на фронте волны Релея коэффициенты h_{j1} и h_{j2} при ее сингулярных составляющих определяются так:

$$\begin{aligned} h_{j1}(r/c_R) &= -\frac{(1 - c_R^2)r}{2c_R(1 - \gamma_j^2 c_R^2)^{3/2}} [\gamma_j^2 F_j(c_R^2) + 2(1 - \gamma_j^2 c_R^2) F'_j(c_R^2)], \\ h_{j2}(r, r/c_R) &= -\frac{3(1 - c_R^2)r^3}{2c_R^3 \sqrt{1 - \gamma_j^2 c_R^2}} F_j(c_R^2). \end{aligned} \quad (21)$$

Окончательно с учетом неравенств $1 < \gamma_1 < c_R^{-1}$ из (17)–(21) получаем:

$$\begin{aligned} G_{0w1}(r, \tau) &= 0 \quad (\tau < r), \quad \lim_{\tau \rightarrow r+0} G_{0w1}(r, \tau) = -\frac{A_{10}}{\pi \gamma_1^8} K_{0s}(r, r), \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} G_{0w1}(r, \tau) = 0, \\ \lim_{\tau \rightarrow \gamma_1 r - 0} G_{0w1}(r, \tau) &= -\frac{A_{10}}{\pi \gamma_1^8} [K_{0r}(r, \gamma_1 r) + K_{0s}(r, \gamma_1 r)], \\ \lim_{\tau \rightarrow \gamma_1 r + 0} G_{0w1}(r, \tau) &= \lim_{\tau \rightarrow \gamma_1 r - 0} G_{0w1}(r, \tau) - \frac{A_{11}}{\pi \gamma_1^8} K_{1s}(r, \gamma_1 r), \\ \lim_{\tau \rightarrow r/c_R + 0} G_{0w1}(r, \tau) &= -\frac{1}{\pi \gamma_1^8} [A_{10} K_{0r}(r, r/c_R) + A_{11} K_{1r}(r, r/c_R)]. \end{aligned}$$

Следовательно, график этой функции при фиксированных r имеет в точках $\tau = r$ и $\tau = \gamma_1 r$ разрывы первого рода, а в точке $\tau = r/c_R$ левую вертикальную асимптоту.

Отметим, что решение осесимметричной задачи Лемба для упругой среды имеет степенную особенность порядка $-3/2$ на фронте волны Релея $r = c_R \tau$. Для моментной же среды, как вытекает из формул (17) и (18), появляется дополнительная особенность порядка $-5/2$. Кроме того, обращает на себя внимание тот факт, что рассмотренное первое приближение для нормального перемещения не содержит фронта волны кручения.

4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

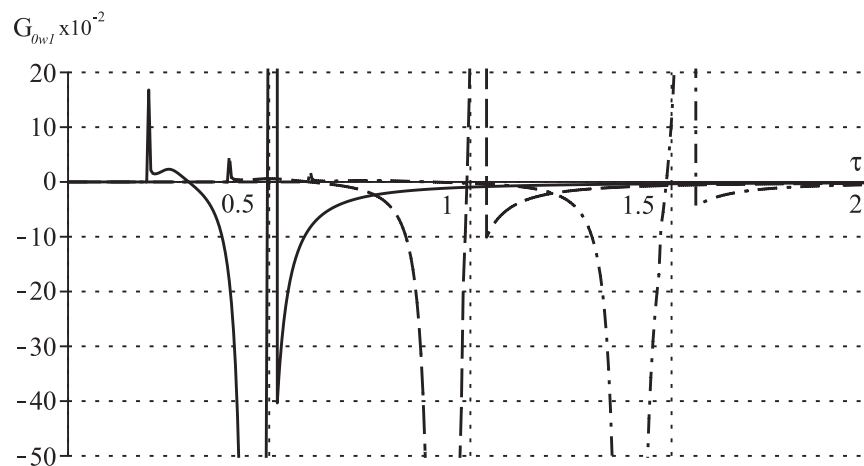
Полагаем, что материалом, заполняющим полупространство, является зернистый композит из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице со следующими физическими характеристиками [2]:

$$\lambda = 7.59 \text{ ГПа}; \quad \mu = 1.89 \text{ ГПа}; \quad \alpha = 7.45 \text{ МПа}; \quad \gamma + \varepsilon = 2.64 \text{ кН}; \quad J = 0.429 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м.}$$

В качестве характерного линейного размера принимаем $L = 1\text{ м}$. При этом безразмерные параметры таковы:

$$\gamma_1 = 2,45; \quad \gamma_2 = 0,92; \quad \alpha = 0,66 \cdot 10^{-3}; \quad \beta = 5,1 \cdot 10^6; \quad c_R^2 = 0,148.$$

На рисунке представлены зависимости функций влияния G_{0w1} от времени τ для трех радиусов: $r = 0.2$, $r = 0.4$ и $r = 0.6$.



Зависимости функции G_{0w1} от времени τ : сплошная кривая соответствует $r = 0.2$, пунктирная — $r = 0.4$, а штрихпунктирная — $r = 0.6$

The function G_{0w1} depends on time τ : the solid curve corresponds $r = 0.2$, dashed — $r = 0.4$, dot-dash — $r = 0.6$

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-08-00471).

Библиографический список

1. *Cosserat E., Cosserat F.* Theorie des corps deformables. P. : Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
2. *Ерофеев В. И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М. : Изд-во МГУ, 1999. 328 с.
3. *Кулеш М. А., Шардаков И. Н.* Построение и анализ некоторых точных аналитических решений двумерных упругих задач в рамках континуума Коссера // Вестн. ПГТУ. Математическое моделирование систем и процессов. 2001. № 9. С. 187–201.
4. *Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д. В.* Распространение нестационарных кинематических возмущений от сферической полости в псевдоконтинууме Коссера // Механика композиционных материалов и конструкций. 2011. Т. 17, № 2. С. 184–195.
5. *Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д. В.* Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от поверхности шара, заполненного псевдоупругой средой Коссера // Электронный журн. «Труды МАИ». 2012. № 53. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29267/> (дата обращения: 19.04.2012).
6. *Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д. В.* Дифракция нестационарных волн на сферической полости в псевдоконтинууме Коссера // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. 2013. Т. 5, № 1. С. 119–125.
7. *Пальмов В. А.* Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28, вып. 6. С. 1117–1120.
8. *Белоносов С. М.* Моментная теория упругости: (Статика). Владивосток : Дальнаука, 1993. 148 с.
9. *Бытев В. О., Слезко И. В.* Решение задач асимметричной упругости // Математическое и информационное моделирование : сб. науч. тр. Тюмень : Вектор Бук, 2008. Вып. 10. С. 27–32.
10. *Атоян А. А., Саркисян С. О.* Динамическая теория микрополярных упругих тонких пластин // Экол. вестн. науч. центров ЧЭС. 2004. № 1. С. 18–29.
11. *Hirdeshwar S. Saxena, Ranjit S. Dhaliwal.* Eigenvalue approach to axially-symmetric coupled micropolar thermoelasticity // Bull. Pol. Acad. Sci. Techn. Sci. 1990. Vol. 38, № 1. P. 7–18.



12. Суворов Е. М., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Плоская задача об ударе твердого тела по полупространству, моделируемому средой Коссера // ПММ. 2012. Т. 76, Вып. 5. С. 850–859.
13. Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д. В. Нестационарное осесимметричное движение упругого моментного полупространства под действием нестационарных нормальных поверхностных перемещений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2017. Т. 159, кн. 2. С. 231–245.
14. Новацкий В. Теория упругости. М. : Мир, 1975. 872 с.
15. Горшков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В. Волны в сплошных средах. М. : Физматлит, 2004. 472 с.
16. Слепьян Л. И. Нестационарные упругие волны. Л. : Судостроение, 1972. 351 с.
17. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости. М. : Наука, 1986. 328 с.
18. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. М. : Физматлит, 1995. 352 с.

Образец для цитирования:

Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д. В. Осесимметричная задача Лемба для среды Коссера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 496–506. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-496-506>

Axisymmetric Problem Lemba for the Cosserat Medium

Tran Le Thai, D. V. Tarlakovskii

Tran Le Thai, <https://orcid.org/0000-0002-8733-6150>, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoye Shosse, Moscow 125993, Russia, tranlethaivvk@gmail.com

Dmitrii V. Tarlakovskii, <https://orcid.org/0000-0002-5694-9253>, Institute of Mechanics Lomonosov Moscow University, 1 Michurinsky Ave., Moscow 119192, Russia; Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoye Shosse, Moscow 125993, Russia, tdvhome@mail.ru

The article deals with elastic homogeneous isotropic half-space filled with the Cosserat medium. At the initial instant of time and at infinity, there are no perturbations. At the boundary of the half-space, normal pressures are given. All the components of the stress-strain state are supposed to be limited. A cylindrical coordinate system is used with an axis directed inward into the half-space. With allowance for axial symmetry, the resolving system of equations includes three hyperbolic equations with respect to the scalar potential and the non-zero components of the vector potential and the rotation vector. The components of displacement vectors, rotation angle, stress tensors and stress moments are related to the potentials by known relationships. The solution of the problem is sought in the form of generalized convolutions of a given pressure with the corresponding surface influence functions. To construct the latter, Hankel transformations along the radius and Laplace transformations are applied in time. We use the expansion in power series for a small parameter characterizing the connection between the shear and rotation waves. The images of the first two coefficients of these series are found. The corresponding originals are determined by the connection between the plane and axisymmetric problems. Examples of calculations of the regular components of the influence of a granular composite from an aluminum shot in an epoxy matrix are given.

Key words: Cosserat medium, surface influence functions, Laplace and Hankel integral transformations, the small parameter method, connection between plane and axisymmetric problems.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-08-00471).



References

1. Cosserat E., Cosserat F. *Theorie des corps deformables*. Paris, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p. (in French).
2. Erofeev V. I. *Volnovye processy v tverdyh telah s mikrostrukturoj* [Wave Processes in Solids with Microstructure]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1999. 328 p. (in Russian).
3. Kulesh M. A., Shardakov I. N. Construction and analysis of some exact analytic solutions of two-dimensional elastic problems within the Cosserat continuum. *Vestn. PGTU. Matematicheskoe modelirovanie sistem i processov* [Bulletin of Perm State Technical University. Mathematical modeling of systems and processes], 2001, no. 9, pp. 187–201 (in Russian).
4. Lai Thanh Tuan, Tarlakovsky D. V. Propagation of non-stationary kinematic perturbations from a spherical cavity in the Cosserat pseudocontinuum. *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.* [Mechanics of composite materials and structures], 2011, vol. 17, no. 2, pp. 184–195 (in Russian).
5. Lai Thanh Tuan, Tarlakovsky D. V. Propagation of nonstationary axisymmetric perturbations from the surface of a sphere filled with a Cousser pseudoelastic medium. *Online journal "Trudy MAI"*, 2012, no. 53. (in Russian). Available at: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29267/> (accessed 19 April 2012).
6. Lai Thanh Tuan, Tarlakovsky D. V. Diffraction of waves by a spherical cavity in the Cosserat pseudo-continuum. *Radioelectron., Nanosist., Inf. Tekhnol.*, 2013, vol. 5, no. 1, pp. 119–125 (in Russian).
7. Palmov V. A. Basic equations of the theory of asymmetric elasticity. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1964. vol. 28, iss. 6. pp. 1117–1120 (in Russian).
8. Belonosov S. M. *Momentnaya teoriya uprugosti: (Statika)* [Moment theory of elasticity: (Statics)]. Vladivostok, Dal'nauka Publ., 1993. 148 p. (in Russian).
9. Bytev V. O., Slezko I. V. Solution of asymmetric elasticity problems. *Mathematical and Informational Modeling* : Collection of scientific papers. Tyumen : Vector Beech, 2008, iss. 10, pp. 27–32 (in Russian).
10. Atoyan A. A., Sarkisyan S. O. Dynamic theory of micropolar elastic thin plates. *Ekol. vestn. nauch. tsentrov CHES*, 2004, no. 1, pp. 18–29 (in Russian).
11. Hirdeshwar S. Saxena, Ranjit S. Dhaliwal. Eigenvalue approach to axially-symmetric coupled micropolar thermoelasticity. *Bull. Pol. Acad. Sci. Techn. Sci.*, 1990, vol. 38, no. 1, pp. 7–18.
12. Suvorov E. M., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium. *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 511–518. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015>
13. Tran Le Thai, Tarlakovskii D. V. Nonstationary axisymmetric motion of an elastic momentum semi-space under non-stationary normal surface movements. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 2, pp. 231–245 (in Russian).
14. Novatsky V. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Mir, 1975. 872 p. (in Russian).
15. Gorshkov A. G., Medvedskii A. L., Rabinskii L. N., Tarlakovskii D. V. *Volny v sploshnyh sredah* [Waves in Continuous Media]. Moscow, Fizmatlit, 2004. 472 p. (in Russian).
16. Slepian L. I. *Nestacionarnye uprugie volny* [Non-stationary elastic waves]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1972. 351 p. (in Russian).



17. Poruchikov V. B. *Metody dinamicheskoy teorii uprugosti* [Methods of the Dynamic Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka, 1986. 328 p. (in Russian).
18. Gorshkov A. G, Tarlakovskii D. V. *Dinamicheskie kontaktnye zadachi s podvizhnymi granicami* [Dynamic contact problems with moving boundaries]. Moscow, Fizmatlit, 1995. 352 p. (in Russian).

Cite this article as:

Tran Le Thai, Tarlakovskii D. V. Axisymmetric Problem Lemba for the Cosserat Medium. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 496–506 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-496-506>



PERSONALIA

ПРОФЕССОР ЛЕОНИД ЮРЬЕВИЧ КОССОВИЧ (к 70-летию со дня рождения)

Ю. Н. Радаев

Радаев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН, Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Статья посвящена 70-летию юбилею главного редактора журнала «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика», доктора физико-математических наук, профессора, заведующего кафедрой математической теории упругости и биомеханики, лауреата Государственной премии РФ в области науки и техники Леонида Юрьевича Коссовича.

Ключевые слова: юбилей, ведущий ученый, механика, биомеханика.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-507-521>

15 октября 2018 г. исполнилось 70 лет известному российскому ученому, доктору физико-математических наук, профессору Леониду Юрьевичу Коссовичу. Вся его жизнь и профессиональная деятельность неразрывно связаны с одним из крупнейших центров науки и образования в России — Саратовским национальным исследовательским государственным университетом имени Н. Г. Чернышевского (СГУ). С 1989 г. Л. Ю. Коссович заведует кафедрой теории упругости СГУ, переименованной в 1989 г. в кафедру математической теории упругости и биомеханики. Десять лет (1993—2003 гг.) он работал в должности декана механико-математического факультета, а затем (2003—2013 гг.) — в должности ректора СГУ.



В 2013 г. был избран президентом СГУ. Именно Л. Ю. Коссович, работая в должности ректора, сумел задать новый, инновационный вектор развития Саратовского университета. В 2007 г. СГУ побеждает в конкурсе Министерства образования и науки РФ инновационных образовательных программ вузов, что положило начало новой миссии университета — инновационной деятельности (наряду с учебной, научной, исследовательской, воспитательной). В 2010 г. СГУ выигрывает конкурс программ развития университетов, получив при этом статус национального исследовательского университета и официально войдя в группу ведущих университетов России.



Основными направлениями научных исследований Л. Ю. Коссовича являются: асимптотические методы теории упругости, колебания и распространение нестационарных волн, динамика тонкостенных упругих и вязкоупругих конструкций, биомеханика, одномерные и двумерные наноматериалы и наноструктуры. С помощью указанных методов Л. Ю. Коссовичем были решены прикладные задачи, имеющие большое народнохозяйственное и оборонное значение. Л. Ю. Коссовичу принадлежит решение ряда важных прикладных задач механики. Им написано более 200 научных и учебно-методических работ (в том числе три монографии). Под его научным руководством выполнены и защищены двенадцать кандидатских диссертаций. В 1998 г. указом Президента Российской Федерации в составе авторского коллектива под руководством профессора А. Л. Гольденвейзера ему была присуждена Государственная премия Российской Федерации в области науки и техники за цикл работ «Фундаментальные проблемы теории тонкостенных конструкций». Главным своим учителем Л. Ю. Коссович считает профессора Алексея Львовича Гольденвейзера, посвятившего себя научным исследованиям в Институте проблем механики АН СССР (ИПМ АН СССР, г. Москва; в настоящее время — Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН). А. Л. Гольденвейзер вместе с академиком В. В. Новожиловым по праву считается основоположником теории оболочек в СССР¹.

В монографии «Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек» (1986 г.) Л. Ю. Коссович обобщил асимптотические подходы, известные ранее в статике упругих оболочек (У. К. Нигул (1965 г.), А. Л. Гольденвейзер (1968 г.), Э. И. Григолюк и И. Т. Селезов (1973 г.)), на нестационарные задачи. В этой книге было предложено расчленение нестационарного напряженно-деформированного состояния оболочек на составляющие, соответствующие различным значениям параметра изменчивости. Решения в форме нестационарных волн были построены с помощью безмоментной и моментной составляющих кинематического поля Кирхгофа – Лява, квазистатического пограничного слоя Сен-Венана и дополнительной составляющей в форме быстропеременного по продольной координате и времени динамического пограничного слоя. К тому же автору удалось провести доказательство существования областей согласования указанных составляющих и пограничных слоев.

Дальнейший анализ динамического пограничного слоя был предпринят Л. Ю. Коссовичем с соавторами в монографии, изданной Academic Press в 1998 г. (см.: Karplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. Dynamics of Thin-Walled Elastic Bodies). Выяснилось, что он неоднороден по параметру изменчивости и для его описания были введены три составляющие: погранслои параболического и гиперболического типов, коротковолновые квазиплоские и квазиантиплоские асимптотики. В

¹Быстрое развитие теории оболочек в СССР стало возможным благодаря фундаментальным достижениям целой плеяды ученых-механиков. Первые крупные исследования по общей теории упругих оболочек относятся к сороковым годам прошлого века. В значительной степени это было обусловлено проникновением в механику новых математических методов и аппарата тензорного анализа. Так, в 1939 г. А. Л. Гольденвейзер впервые получил уравнения совместности деформаций в теории тонких оболочек. Фундамент современной теории оболочек составляют известные монографии В. В. Новожилова и А. Л. Гольденвейзера, вышедшие в свет в 1951 г. и 1953 г. и переведенные на несколько европейских языков.



этой же книге впервые была предложена методика прямого вывода уравнений погранслоев и коротковолновых асимптотик непосредственно из точных трехмерных уравнений математической теории упругости. Тем самым было в целом завершено построение асимптотического подхода к исследованию нестационарных волн в тонких упругих оболочках.

В настоящее время тематика научных исследований Л. Ю. Коссовича сконцентрирована на области расчета ударного воздействия на оболочечные конструкции, выявления краевого эффекта в подобного рода задачах, учета влияния диссипативных механизмов (таких как вязкость) на поведение и прочность оболочек. Значительное внимание он уделяет исследованиям в области биомеханики: сердечно-сосудистой и костной системам человека, проблемам эластичности стенок кровеносных сосудов, гидродинамике кровотока в патологически измененных сосудах, реологическому моделированию биоматериалов и др.

Леонид Юрьевич Коссович родился 15 октября 1948 г. в Саратове в семье военнослужащего. Л. Ю. Коссович происходит из старинного российского рода, в котором слилась русская, белорусская и польская кровь. Все его представители искренне и преданно служили Отечеству. Его дед Леонид (в честь которого Л. Ю. Коссович получил свое имя) родился в семье статского советника и был царским офицером в действующей армии. В 1916 г. он умер от тифа в госпитале (его брат Никон, также офицер, был расстрелян в 1918 г. под Ростовом революционной властью). Отец, Юрий Леонидович Коссович, был убежденным коммунистом, работал в системе Комитета государственной безопасности, участвовал в Великой Отечественной войне, был контрразведчиком.

В 1956 г. Л. Ю. Коссович становится учеником средней школы № 37 г. Саратова, в 1966 г. заканчивает с серебряной медалью престижную в то время физико-математическую среднюю школу № 13 г. Саратова. Именно здесь начал формироваться его запас знаний в области естественных наук, который впоследствии послужит прочным фундаментом научно-исследовательской деятельности. При этом он серьезно интересуется и изучает историю Древнего Востока, Средней Азии, культуру скифских племен.

В 1966 г. Л. Ю. Коссович поступает на первый курс механико-математического факультета Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского и в 1971 г. заканчивает его по специальности «Механика». После окончания университета он работает старшим инженером в лаборатории математических методов НИИ геологии при СГУ. В 1973 г. Л. Ю. Коссович поступает в аспирантуру механико-математического факультета Саратовского университета, где проходит обучение на кафедре теории упругости. С 1975 по 1978 г. работает ассистентом кафедры вычислительной математики СГУ.

В 1977 г. Л. Ю. Коссович успешно защищает кандидатскую диссертацию «Некоторые задачи динамической теории упругих оболочек переменной толщины» и получает ученую степень кандидата физико-математических наук. С 1978 по 1989 г. он работает в должности доцента кафедры математической кибернетики Саратовского университета. В 1982 г. Л. Ю. Коссович направляется на стажировку в Институт проблем механики АН СССР, где под руководством профессора А. Л. Гольденвейзера занимается изучением асимптотических методов решения динамических задач тео-



рии упругости для тонких оболочек. Созданный академиком А. Ю. Ишлинским Институт проблем механики объединил ведущих ученых различных областей механики и всегда был центром притяжения тех, кто стремился приобрести самую высокую квалификацию в избранной сфере научного поиска. В 1984 г. он оставляет должность доцента кафедры математической кибернетики и переводится на должность старшего научного сотрудника (сроком на два года для завершения работы над докторской диссертацией). С этой же целью в 1984 г. он был прикомандирован к Институту проблем механики АН СССР, где в 1989 г. успешно защитил диссертационную работу «Нестационарные задачи упругих тонких оболочек вращения» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела» в Совете при ИПМ АН СССР. В 1991 г. Л. Ю. Коссовичу было присвоено ученое звание профессора.

Сразу после защиты докторской диссертации Л. Ю. Коссович был избран заведующим кафедрой теории упругости СГУ (позднее — кафедра математической теории упругости и биомеханики). В 1993 г. стал деканом механико-математического факультета СГУ. В 2003 г. Л. Ю. Коссович был избран на должность ректора СГУ им. Н. Г. Чернышевского и продолжил работать в этой должности до 2013 г. Именно в это время в полной мере проявился организаторский талант Л. Ю. Коссовича, его способность четко определять цели и добиваться их достижения. В те годы в СГУ было открыто несколько новых образовательных программ, существенно возрос набор студентов, созданы новые, сильные и перспективные научные школы (становление и работа некоторых из них проходит при непосредственном участии и поддержке Л. Ю. Коссовича). Успешно развивались послевузовское профессиональное образование и подготовка специалистов высшей квалификации в аспирантуре и докторантуре СГУ. Им был предпринят ряд энергичных мер по реконструкции корпусов университета, существенно изменившей его архитектурный облик. За короткий срок Л. Ю. Коссовичу удалось вывести Саратовский университет на новую, более высокую орбиту инновационного развития, которая была призвана обеспечить ему лидирующие позиции в сфере высшего профессионального образования в России.

В 2013 г. Л. Ю. Коссович избирается на должность президента СГУ. И в этот период успешно реализуются проект Фонда перспективных исследований «Разработка комплекса перспективных защитных и маскирующих материалов экипировки военнослужащего» (2014—2017 гг.) и аванпроект «Обоснование исходных данных для разработки программно-аналитической системы обеспечения эффективного хирургического лечения патологий позвоночно-тазового комплекса» (2016 г.). На базе Саратовского университета в 2018 г. под научным руководством Л. Ю. Коссовича началась реализация аванпроекта Фонда перспективных исследований «Обоснование возможности создания «умных» терморегулирующих материалов экипировки» и проекта «Разработка прототипа системы поддержки принятия врачебных решений в реконструктивной хирургии позвоночно-тазового комплекса» (2018—2021 гг.). В настоящее время он является руководителем со стороны СГУ проекта по созданию серийного производства рулонных мембранных материалов, получаемых методом электроформования полимеров.

Л. Ю. Коссович — председатель диссертационного совета Д 212.243.10 при СГУ по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук по специаль-



ностям «Механика деформируемого твердого тела» и «Биомеханика». С 2005 по 2013 г. — член Экспертного совета по математике и механике Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки РФ. С 2006 г. он является членом Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике. Профессор Л. Ю. Коссович — крупный организатор научной работы в России. При его участии проведено около 40 научных конференций, 15 из которых являются международными. С 2005 г. Л. Ю. Коссович — почетный приглашенный профессор Брюнельского университета (Лондон, Великобритания). В этом же году ему было присвоено звание почетного доктора Башкирского государственного университета. В 2010 г. он был избран почетным профессором Западно-Казахстанского аграрно-технического университета им. Жангир хана (Уральск, Казахстан).

С 2000 г. Л. Ю. Коссович входит в коллегию Министерства промышленности, науки и технологий Саратовской области, а с 2002 г. — в Совет по науке и высоким технологиям при губернаторе Саратовской области. В 2004–2006 гг. являлся членом Общественного совета по профессиональному образованию при комитете Государственной Думы РФ по образованию и науке. С 2010 по 2012 г. он являлся членом коллегии Министерства образования и науки Российской Федерации; с 2012 по 2017 г. входил в Экспертный совет председателя Военно-промышленной комиссии при Правительстве РФ; в 2016 г. был избран депутатом Саратовской городской думы.

Л. Ю. Коссович — почетный работник высшего профессионального образования (2011 г.). Он был удостоен ряда других почетных званий и наград: почетной грамоты Председателя Государственной Думы Федерального собрания Российской Федерации за активную общественно-политическую деятельность (2009 г.); благодарственного письма полномочного представителя Президента Российской Федерации в Приволжском федеральном округе за большой вклад в развитие высшего профессионального образования, многолетний добросовестный труд и в связи со 100-летием со дня основания Саратовского государственного университета (2009 г.); Патриаршей Грамоты, данной в благословение за усердные труды во славу Русской православной церкви (2009 г.); орденом Русской православной церкви святителя Макария митрополита Московского III степени (2014 г.). Л. Ю. Коссович — кавалер ордена Дружбы (2010 г.).

Л. Ю. Коссович обладает выдающимся талантом организатора, конструктивным мышлением, редким даром быстро находить развязки сложных проблем. Свидетельством того является его многогранная научная, организаторская и общественная деятельность. Его отличительная черта — внимательное отношение к людям. В научной и общественной деятельности профессора Л. Ю. Коссовича прослеживается ярко выраженная гражданская позиция, суть которой — в отстаивании национальных и государственных интересов России.

Л. Ю. Коссович является главным редактором журнала «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика» (ISSN 1816-9791, 2541-9005) со дня его основания в 2005 г. Он сумел привлечь к работе над журналом ведущих ученых и сделать журнал известным не только в России, но и за рубежом. Журнал входит в базу данных лучших российских журналов Russian Science Citation Index на платформе Web of Science, включен в Перечень ВАК,



зарегистрирован в международных базах zbMATH, MathSciNet, Emerging Sources Citation Index (входит в Web of Science Core Collection).

Мы поздравляем Леонида Юрьевича с 70-летием, желаем ему здоровья и творческих успехов в научной и педагогической деятельности, а также новых свершений на высоком посту президента Саратовского университета.

Избранные труды Л. Ю. Коссовича

1976

Бурмистров Е. Ф., Коссович Л. Ю., Маслов Н. М. Нестационарные напряжения в защемленном сечении конической оболочки переменной толщины // Изв. вузов. Авиационная техника. 1976. № 4. С. 120–122.

Бурмистров Е. Ф., Коссович Л. Ю., Маслов Н. М. Некоторые вопросы термоупругости цилиндрической оболочки переменной толщины // Механика деформируемых сред. 1976. № 4. С. 130–134.

Коссович Л. Ю. Асимптотика динамики цилиндрической оболочки переменной толщины при действии внезапно приложенного нормального давления // Механика деформируемых сред. 1976. № 4. С. 64–69.

Бурмистров Е. Ф., Коссович Л. Ю., Маслов Н. М. Асимптотическое интегрирование уравнений термоупругости цилиндрической оболочки переменной толщины // Прикладная механика. 1976. Т. 12, № 10. С. 113–117.

1977

Коссович Л. Ю. Некоторые задачи динамической теории упругих оболочек переменной толщины : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1977. 145 с.

Бурмистров Е. Ф., Коссович Л. Ю., Маслов Н. М. Метод возмущений в задачах термоупругости для цилиндрической оболочки переменной толщины // Изв. вузов. Авиационная техника. 1977. № 2. С. 36–39.

Коссович Л. Ю. Асимптотическое интегрирование нелинейных уравнений теории упругости для цилиндрической оболочки // Механика деформируемых сред. 1977. № 3. С. 86–96.

1978

Бурмистров Е. Ф., Коссович Л. Ю., Маслов Н. М. Асимптотическое интегрирование динамических уравнений цилиндрической оболочки переменной толщины // Распространение упругих и упругопластических волн : материалы VI Всесоюз. симпозиума. Фрунзе, 1978. С. 27–29.

1979

Коссович Л. Ю. Асимптотический анализ двумерных уравнений теплопроводности цилиндрической оболочки переменной толщины // Механика деформируемых сред. 1979. № 6. С. 161–167.

1982

Бурмистров Е. Ф., Коссович Л. Ю. Применение метода асимптотического интегрирования к задаче о распространении волн в цилиндрической оболочке переменной толщины // Тр. XII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван, 1982. Т. 1. С. 41–50.

Бурмистров Е. Ф., Коссович Л. Ю., Маслов Н. М. Исследование переходных волновых процессов в цилиндрической оболочке переменной толщины методом асимптотического интегрирования // Механика деформируемых сред. 1982. № 7. С. 41–50.

Коссович Л. Ю. Исследование решения задачи о распространении волн в цилиндрической оболочке переменной толщины // Изв. вузов. Математика. 1982. № 9. С. 20–24.

**1983**

Коссович Л. Ю. Метод асимптотического интегрирования в задачах о распространении волн в оболочках вращения // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 3. С. 143–148.

Коссович Л. Ю. Области согласования интегралов теории Кирхгофа—Лява и динамического нерегулярного погранслоя в задачах о распространении волн в оболочках вращения // Тр. XIII Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Таллин, 1983. С. 90–95.

Коссович Л. Ю. Распространение сдвиговых и моментных волн в цилиндрической оболочке переменной толщины // Механика деформируемых сред. 1983. № 8. С. 71–79.

1984

Коссович Л. Ю. Исследование волнового процесса в оболочках вращения методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 5. С. 142–146.

1985

Коссович Л. Ю. Волновые процессы деформации в цилиндрической оболочке переменной толщины при продольных воздействиях тангенциального типа // Механика деформируемых сред. 1985. № 9. С. 43–49.

1986

Коссович Л. Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов, 1986. 176 с.

1987

Коссович Л. Ю. Метод расчленения нестационарного напряженного состояния в оболочках вращения // Тр. XIV Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Кутаиси, 1987. С. 98–103.

1989

Коссович Л. Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек вращения : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1989. 309 с.

1990

Кожанова Т. В., Коссович Л. Ю. Дисперсионные уравнения Релея – Лэмба : учеб.-метод. пособие для студ. мех-мат. фак. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1990. 18 с.

Кожанова Т. В., Коссович Л. Ю. Метод расчленения нестационарного напряженного состояния в криволинейных стержнях // Тр. XV Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Казань, 1990. С. 175–180.

Березин В. Л., Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю. Дисперсия упругих волн в тонкостенном цилиндре / Институт проблем механики АН СССР. Препринт № 454. М., 1990. 40 с.

1993

Коссович Л. Ю., Никонов А. В. Нестационарная задача теории оболочек при ударно приложенном осциллирующем воздействии тангенциального типа // Механика деформируемых сред. 1993. № 11. С. 85–102.

Игнатъев О. В., Коссович Л. Ю. Асимптотические методы определения нестационарной безмоментной составляющей Кирхгофа—Лява в случае конической оболочки // Механика деформируемых сред. 1993. № 11. С. 102–113.

Каплунов Ю. Д., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая тонких оболочек // ПММ. 1993. Вып. 1. С. 83–91.



1994

Коссович Л. Ю., Никонов А. В. Асимптотический анализ распространения нестационарных волн в цилиндрических оболочках при ударно приложенном осциллирующем воздействии // Тр. XVI Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. Н. Новгород, 1994. С. 117–122.

Kossovich L. Yu. Transient waves in reinforced thin walled shells // Asymptotics in Mechanics : Abstracts of Reports of the Intern. Conf. St. Petersburg, 1994. P. 58–59.

1995

Berezin V. L., Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu. Synthesis of the dispersion curves for a cylindrical shell on the basis of approximate theories // J. Sound and Vibration. 1995. Vol. 186, № 1. P. 37–53.

Копнин А. Ю., Коссович Л. Ю. Исследование нестационарного НДС подкрепленных оболочек вращения при ударных продольных воздействиях тангенциального типа // Механика деформируемых сред. 1995. № 12. С. 9–29.

1996

Копнин А. Ю., Коссович Л. Ю., Петраковский С. А. Нестационарное НДС подкрепленных оболочек вращения при ударных воздействиях изгибающего типа // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 6. С. 127–138.

Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Динамический погранслои в окрестности поперечной волны изгиба // Современные проблемы механики сплошной среды : тр. II междунар. конф. Ростов н/Д, 1996. С. 92–96.

Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Dynamic boundary layer at elastic wave propagation in thin shells of revolution // ZAMM. 1996. Vol. 76, iss. 5. P. 249–250.

Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Dynamic boundary layer at non-stationary elastic wave propagation in thin shells of revolution // Proc. of the 2nd Intern. Conf. on Asymptotics in Mechanics (AIM96). St. Petersburg, 1996. P. 121–128.

1997

Коссович Л. Ю., Шепеленко О. В. Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для двухслойной оболочки // Тр. III Всерос. конф. по проблемам механики сплошной среды. Ростов н/Д, 1997. С. 23–26.

Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Transient stress waves in shells: an asymptotic approach // III EUROMECH Solid Mechanics Conference : Abstracts of Reports. Stockholm, 1997. P. 325.

1998

Emri I., Kossovich L. Yu., Sukholovskaya M. Transient stress waves in viscoelastic shells at tangential longitudinal shock loading // Proc. 2nd Intern. Conf. on Mechanics of Time-Dependent Materials. Pasadena, 1998. P. 35–36.

Gadomski P. P., Kossovich L. Yu., Parfenova Ya. A. Transverse approximation for transient waves in cylindrical shells // Proc. 6th Intern. Conf. «Shell Structures, Theory and Applications». Gdan'sk, 1998. P. 121–123.

Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. San-Diego : Academic Press, 1998. 226 p.

1999

Cardon A., Kaplunov J., Kossovich L., Emri I., Gallegos C. Interactive theoretical-experimental methods for the characterization of composite systems // Proc. Spring Conf. of the SEM. USA, Cincinnati, 1999. P. 825–827.

Kossovich L. Yu., Rogerson G. A. Approximations of the dispersion relation for an elastic plate composed of strongly anisotropic elastic material // J. Sound and Vibration. 1999. Vol. 225, № 2. P. 283–305.



Бурцева У. А., Коссович Л. Ю. Нестационарные волны напряжений в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях типа NW // Проблемы прочности материалов и нагружений на транспорте : тез. докл. IV Междунар. конф. СПб., 1999. С. 35–36.

2000

Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Moukhomodiarov R. R. Impact normal compression of an elastic plate: Analysis utilising an advanced asymptotic 2D model // Mechanics Research Communications. 2000. Vol. 27. P. 117–122.

Коссович Л. Ю., Бажанова Н. С., Сухоловская М. С. Нестационарные волны в вязкоупругих оболочках: модель Максвелла // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естественные науки. 2000. № 2. С. 17–24.

Ковалев В. А., Коссович Л. Ю., Никонов А. В. Переходные волновые процессы в цилиндрической оболочке при внезапно приложенных гармонических нагрузках // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 2. С. 169–180.

Kossovich L. Yu., Parfenova Ya. A. Flexural transient waves in shells of revolution: an asymptotic approach // ZAMP. 2000. Vol. 51, № 4. P. 611–628.

Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Rogerson G. A. Direct asymptotic integration of the equations of transversely isotropic elasticity for a plate near cut-off frequency // Q. J. Mech. Appl. Math. 2000. Vol. 53, № 2. P. 323–341.

Anofrikova N. S., Kossovich L. Yu. Constitutive Equations for Thin Elastic Shells // Proc. 3rd Intern. Conf. on Mechanics of Time-Dependent Materials. Erlangen, 2000. P. 66–68.

Бажанова Н. С., Коссович Л. Ю. Погранслои в окрестности фронта волны расширения в вязкоупругих оболочках вращения // Проблемы прочности и пластичности : межвуз. сб. Н. Новгород, 2000. С. 22–26.

Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Wilde M. V. Free localized vibrations of a semi-infinite cylindrical shell // Journal Acoust. Soc. America. 2000. Vol. 107. P. 1383–1393.

2001

Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Boundary layers in shells of revolution with a discontinuity in the thickness // Proc. of the ICOVP. M., 2001. P. 263–266.

Коссович Л. Ю., Каплунов Ю. Д. Асимптотический анализ нестационарных упругих волн в тонких оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2001. Т. 1, вып. 2. С. 111–131.

Коссович Л. Ю., Парфенова Я. А. Асимптотический метод исследования нестационарных волн в составных оболочках // VIII Всерос. съезд по теоретической и прикладной механике : аннотации докл. Пермь, 2001. С. 359.

2002

Kossovich L. Yu., Moukhomodiarov R. R., Rogerson G. A. Analysis of the dispersion relation for an incompressible transversely isotropic elastic plate // Acta Mecanica. 2002. Vol. 153. P. 89–111.

Kossovich L. Yu., Moukhomodiarov R. R., Rogerson G. A. Long wave asymptotic integration in incompressible transversely isotropic elastic structures // Acta Mecanica. 2002. Vol. 154. P. 1–12.

Коссович Л. Ю., Сухоловская М. С. Решение задачи о нестационарных продольных волнах в тонком вязкоупругом стержне // Механика деформируемых сред. 2002. № 14. С. 93–98.

Коссович Л. Ю., Пушкина Н. А., Шевцова Ю. В. Асимптотическое интегрирование трехмерных уравнений теории упругости в двухслойных пластинах в случае нестационарных продольных волн // Механика деформируемых сред. 2002. № 14. С. 87–92.



Коссович Л. Ю., Пушкина Н. А., Шевцова Ю. В. Тангенциальные низкочастотные приближения в двухслойных пластинах // Механика деформируемых сред. 2002. № 14. С. 193–196.

Kossovich L. Yu., Pushkina N. A., Shevtsova Yu. V. The boundary layer in the vicinity of the quasi-front in two-layer cylindrical shells // EUROMECH Colloquium 439 «Mathematical Modeling of Dynamic Behaviour of Thin Elastic Structures». Saratov, 2002. P. 18–19.

Kossovich L. Yu. A low frequency model for anti-symmetric motion in a fibre-reinforced elastic plate // EUROMECH Colloquium 439 «Mathematical Modeling of Dynamic Behavior of Thin Elastic Structures». Saratov, 2002. P. 19–20.

Kossovich L. Yu., Lavrentyev A. V., Kaplunov J. D. The union of mathematics, surgeons and phuseologists // EUROMECH Colloquium 439 «Mathematical Modeling of Dynamic Behavior of Thin Elastic Structures». Saratov, 2002. P. 21–22.

2003

Kossovich L. Yu. Mathematical Analysis of Flexible Blood Vessels // Proc. Medical Math. Conference. East Carolina University, Greenville, North Carolina, 2003. P. 21–22.

Коссович Л. Ю., Кушеккалиев А. Н. Анализ приближений в задаче Лэмба для бесконечного упругого слоя // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естественные науки. 2003. № 9. С. 10–22.

Коссович Л. Ю., Кушеккалиев А. Н. Расчленение нестационарного НДС в задаче Лэмба для бесконечного слоя на составляющие с разными показателями изменяемости // Тр. III Всерос. конф. по теории упругости с междунар. участием. Ростов н/Д, 2003. С. 232–234.

Коссович Л. Ю., Кушеккалиев А. Н. Поле Рэлея в бесконечном упругом слое // Математика. Механика. 2003. Вып.5. С. 159–161.

2004

Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю. Асимптотическая модель для вычисления дальнего поля волны Рэлея в упругой плоскости // Докл. АН. 2004. Т. 395, № 4. С. 482–484.

Kaplunov J., Kossovich L., Zakharov A. Explicit asymptotic model for the Bleustein–Gulyaev wave far-field // Comptes Rendus Mecanique. 2004. Vol. 332. P. 487–492.

Коссович Л. Ю. Традиции и перспективы // Экономика и образование сегодня. 2004. Вып. 8. С. 84–86.

Коссович Л. Ю., Мухомодьяров Р. Р. Некоторые упрощенные длинноволновые модели для идеализированных армированных композитов // Вопросы прикладной физики : межвуз. науч. сб. / под ред. Ю. В. Гуляева, Н. Н. Синицина, В. М. Аникина. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Т. 11. С. 153–164.

Ковалев В. А., Коссович Л. Ю., Таранов О. В. Поле Рэлея в задаче Лэмба для цилиндрической оболочки // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естественные науки. 2004. Спец. вып. С. 52–54.

2005

Коссович Л. Ю., Мухомодьяров Р. Р. Длинноволновые асимптотические приближения для идеализированных волновых композитов // Радиотехника. 2005. № 4. С. 46–49.

Ковалев В. А., Коссович Л. Ю., Таранов О. В. Дальнее поле волны Рэлея для упругой полуполосы при действии торцевой нагрузки // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 5. С. 89–96.

Коссович Л. Ю., Усанов Д. А. Направления развития научной и инновационной деятельности в Саратовском государственном университете // Инновации. 2005. № 6(83). С. 61–63.

Коссович Л. Ю., Анофрикова Н. С., Черненко В. П. Асимптотические методы построения решений в окрестностях фронтов волн в вязкоупругом стержне при больших значениях времени // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 5, вып. 1. С. 82–88.



Коссович Л. Ю., Шевцова Ю. В. Асимптотические приближения трехмерных динамических уравнений теории упругости в случае двухслойных пластин // Проблемы прочности и пластичности. 2005. Вып. 67. С. 102–110.

Коссович Л. Ю. Вызов времени. Новый век классического университета // Экономика и образование сегодня. 2005. № 6. С. 50–51.

2006

Бокерия Л. А., Морозов К. М., Коссович Л. Ю., Кириллова И. В., Гучяев Ю. П., Десятова А. С., Каменский А. В., Сальковский Ю. Е., Островский Н. В., Поляев В. О. Эндартерэктомия сонной артерии человека заплатами из различных материалов // Биомедицинские технологии и радиэлектронника. 2006. № 12. С. 33–42.

2007

Kossovich L. Yu. Non-Stationary Asymptotic Analysis of Combined Stiffened Shells // Proceedings of the Eleventh Intern. Conf. on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing. St. Jullians, Malta, 2007. P. 1–12.

Коссович Л. Ю., Усанов Д. А., Монахов С. Ю. Перспективы развития инновационного университетского комплекса в условиях высоко-конкурентной региональной среды // Инновации. 2007. № 4 (102). С. 67–69.

2008

Бокерия Л. А., Пирцхалаишвили З. К., Морозов К. М., Каменский А. В., Сальковский Ю. Е., Десятова А. С., Дзенис Ю. А., Коссович Л. Ю., Кириллова И. В., Гуляев Ю. П., Островский Н. В., Поляев В. О. Реконструкция сонной артерии человека заплатами из различных материалов (поиск оптимального материала для улучшения результатов пластики сонных бифуркаций) // Анналы хирургии. 2008. № 2. С. 5–19.

Kamenskiy A. V., Pipinos I. I., Desyatova A. S., Salkovskiy Y. E., Kossovich L. Yu., Kirillova I. V., Bockeria L. A., Morozov K. M., Polyayev V. O. Finite element model of the patched human carotid // Бюл. НЦССХ им. А. Н. Бакулева РАМН. Сердечно-сосудистые заболевания. 2008. Т. 9, № S6. С. 155.

Коссович Л. Ю. Асимптотические методы в динамике оболочек при ударных воздействиях // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, вып. 2. С. 12–33.

Kossovich L. Yu., Kirillova I. V. Dynamics of shells under shock loading: An asymptotic approach // Proceedings of the Ninth Intern. Conf. on Computational Structures Technology. Athens, 2008. P. 1–20.

Kossovich L. Yu., Kirillova I. V., Gulaev Yu. P., Ivanov D. V., Kamenskiy A. V., Polgaev V. O., Ostrovskiy N. V., Morozov K. M. Mathematical Modelling of Human Carotid in Healthy, Affected or Post-Corrective Surgery Conditions // Topical Problems in Solid Mechanics. New Delhi : Elite Publishing House Pvt Ltd., 2008. P. 235–250.

2009

Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Гиперболические погранслои в составных цилиндрических оболочках // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 3. С. 89–101.

Коссович Л. Ю. Саратовский государственный университет: традиции и инновации // Высшее образование в России. 2009. № 12. С. 42–49.

Коссович Л. Ю., Кириллова И. В., Вениг С. Б. Образовательно-научный институт наноструктур и биосистем // Высшее образование в России. 2009. № 12. С. 61–66.

Kamenskiy A. V., Pipinos I. I., Desyatova A. S., Salkovskiy Yu. E., Kossovich L. Yu., Kirillova I. V., Bockeria L. A., Morozov K. M., Polgaev V. O., Lynch T. G., Dzenis Yu. A. Finite Element Model of the Patched Human Carotid // Vascular and Endovascular Surgery. 2009. Vol. 43, № 6. P. 533–534.



Бокерия Л. А., Коссович Л. Ю., Морозов К. М., Кириллова И. В., Гуляев В. П., Каменский А. В., Десятова А. С. Выбор материала для пластики внутренней сонной артерии на основании числового анализа // Клиническая гемостазиология и гемореология в сердечно-сосудистой хирургии. Регионарная гемодинамика и микроциркуляция. М., 2009. С. 40–41.

2010

Kossovich L. Yu., Salkovskiy Yu. E., Kirillova I. V. Electrospan Chitosan Nanofiber Materials as Born Dressing // IFMBE Proceedings. Singapore : Springer, 2010. Vol. 31. P. 1212–1214.

Kossovich L. Yu., Kirillova I. V., Pavlova O., Salkovskiy Yu. Modelling of Hemodynamics and Mechanical Behaviour of Pathologically Tortuous Carotid Arteries // IFMBE Proceedings. Singapore : Springer, 2010. Vol. 31. P. 860–862.

Kossovich L. Yu., Salkovskiy Y. Electrospan Nanofiber Structures for Advanced Nanocomposites // Civil-Comp Proceedings. 2010. Vol. 93, paper 265. DOI: <https://doi.org/10.4203/csp.93.265>

Вильде М. В., Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М., 2010. 280 с.

2011

Дмитриев Ю. А., Сальковский Ю. Е., Коссович Л. Ю. Электроформование волокон из растворов хитозана с различным сроком хранения // Пластические массы. 2011. № 7. С. 43–46.

Коссович Л. Ю., Юрко В. А., Кириллова И. В. Разложение решения задач теории упругости для полосы в ряд по модам // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, № 2. С. 83–96.

Вильде М. В., Коссович Л. Ю. Асимптотическая модель дальнего поля волны Рэлея в многослойной пластине // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, № 4. С. 74–86.

Коссович Л. Ю. Асимптотический анализ нестационарного напряженно-деформированного состояния тонких оболочек вращения при торцевых ударных воздействиях нормального типа // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4. С. 2267–2268.

Козырева Е. В., Дмитриев Ю. А., Шиповская А. Б., Коссович Л. Ю. Оценка волоконно-образующей способности хитозана по физико-химическим параметрам раствора полимера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Химия. Биология. Экология, 2011. Т. 11, вып. 1. С. 22–25.

2012

Kamenskiy A. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Y., Salkovskiy Y. E., Dzenis Y. A. Mechanically-motivated Selection of Patching Material for the Patient-specific Carotid Artery // Civil-Comp Proceedings. 2012. Vol. 100, paper 136. DOI: <https://doi.org/10.4203/csp.100.136>

Ivanov D. V., Kossovich L. Yu., Salkovsky Y. E. Biomechanics of the Willis Circle Arteries // Civil-Comp Proceedings. 2012. Vol. 99, paper 188. DOI: <https://doi.org/10.4203/csp.99.188>

2013

Коссович Л. Ю., Голуб Ю. Г., Елина Е. Г. Национальный исследовательский университет в контексте модернизации образования // ALMA MATER (ВЕСТНИК ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ). 2013. № 7. С. 6–10.

Ардашишвили Р. В., Вильде М. В., Коссович Л. Ю. Антисимметричные кромочные волны высшего порядка в пластинах // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1. С. 50–56.

Коссович Л. Ю., Морозов К. М., Павлова О. Е. Биомеханика сонной артерии человека



с патологической извитостью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 3. С. 76–82.

Kossovich L. Y., Kirillova I. V. Transit waves in shells of revolution under normal shock loading // Topical Problems in Theoretical and Applied Mechanics. New Delhi : Elite Publishing House Pvt Ltd., 2013. P. 186–200.

Коссович Л. Ю. На стыке наук // Финансы. 2013. № 8. С. 62–64.

2014

Ардазишвили Р. В., Вильде М. В., Коссович Л. Ю. Трёхмерная поверхностная волна в полупространстве и кромочные волны в пластинах в случае смешанных граничных условий на поверхности распространения // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2014. № 4(37). С. 53–64. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1360>

Kossovich E. L., Kirillova I. V., Kossovich L. Y., Safonov R. A., Ukrainskiy D. V., Apshtein S. A. Hybrid coarse-grained/atomistic model of «chitosan + carbon nanostructures» composites // J. Mol. Model. 2014. Vol. 20, № 10. P. 2452–2460. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00894-014-2452-9>

Golyadkina A. A., Grishina O. A., Kirillova I. V., Kossovich L. Y., Chelnokova N. O. Biomechanical modeling of a human heart in normal and pathological states // Civil-Comp Proceedings. 2014. Vol. 106, paper 206. DOI: <https://doi.org/10.4203/ccp.106.206>

Kossovich L. Y., Kirillova I. V., Kossovich E. L. Asymptotic models for flexural edge wave propagation in thin isotropic plates // Civil-Comp Proceedings. 2014. Vol. 106, paper 160. DOI: <https://doi.org/10.4203/ccp.106.160>

Kossovich L., Golyadkina A., Kirillova I., Morozov K., Kalinin A., Polienko A., Menishova L., Kossovich E. Patient-specific modeling of pathologically tortuous carotid artery // CARDIOTECHNIX 2014 – Proc. 2nd Intern. Congress on Cardiovascular Technologies. Rome, Italy, 2014. P. 31–35.

Kossovich L., Golyadkina A., Kirillova I., Polienko A., Menishova L., Kossovich E., Morozov K. Biomechanical Modeling of the Left Ventricule of Human Heart with Postinfarction Aneurysm // CARDIOTECHNIX 2014 – Proc. 2nd Intern. Congress on Cardiovascular Technologies. Rome, Italy, 2014. P. 36–41.

2015

Ардазишвили Р. В., Вильде М. В., Коссович Л. Ю. Кромочные волны в пластинах с жёстко защемлёнными лицевыми поверхностями при различных способах закрепления на торце // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 187–193. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-2-187-193>

Ардазишвили Р. В., Вильде М. В., Коссович Л. Ю. Трёхмерные фундаментальные кромочные волны в тонкой оболочке // Вестн. ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния, 2015. № 4(26). С. 109–124.

Голядкина А. А., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Полиенко А. В., Челнокова Н. О. Биомеханика артерий мышечно-эластического типа // Актуальные проблемы механики сплошной среды : тр. IV междунар. конф. Институт механики НАН РА; Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН. М., 2015. С. 134–138.

Коссович Е. Л., Сафонов Р. А., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Федышин О. Я. Многомасштабное молекулярно-динамическое исследование механических свойств хитин-хитозановых нанокompозитов // XI Всерос. съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики : сб. докл. / сост. : Д. Ю. Ахметов, А. Н. Герасимов,



Ш. М. Хайдаров; отв. ред.: Д. А. Губайдуллин, А. И. Елизаров, Е. К. Липачев. Казань, 2015. С. 2005–2007.

Коссович Л. Ю., Кириллова И. В. Асимптотическая теория волновых процессов в тонких оболочках при ударных торцевых воздействиях тангенциального, изгибающего и нормального типов // XI Всерос. съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики : сб. докл. / сост. : Д. Ю. Ахметов, А. Н. Герасимов, Ш. М. Хайдаров; отв. ред. : Д. А. Губайдуллин, А. И. Елизаров, Е. К. Липачев. Казань, 2015. С. 2008–2010.

Golyadkina A., Chelnokova N., Kirillova I., Kossovich L. Hystomorphological and biomechanical study of atherogenesis // IUTAM Symposium on Growing solids Symposium Materials / eds. A. Manzhairov, N. Gupta. M., 2015. P. 28–31.

2016

Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Эллиптический погранслои в оболочках вращения при ударных поверхностных воздействиях нормального типа // Вестн. Санкт-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3, № 1. С. 139–146.

2017

Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Уточненные уравнения эллиптического погранслоя в оболочках вращения при ударных поверхностных воздействиях нормального типа // Вестн. Санкт-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4, № 1. С. 113–120.

Fedonnikov A. S., Kovtun A. L., Kossovich L. Y., Kirillova I. V., Kolesnikova A. S., Norkin I. A. Preoperative planning software in vertebrology: issues and outlook // Russian Open Medical Journal. 2017. Vol. 6, № 4. P. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.15275/rusomj.2017.0408>

Kirillova I. V., Kossovich L. Y. Refined equations of elliptic boundary layer in shells of revolution under normal shock surface loading // Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics. 2017. Vol. 50, № 1. P. 68–73. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1063454117010058>

Kudiyashev A. L., Hominets V. V., Teremshonok A. V., Korostelev K. E., Nagornyy E. B., Dol A. V., Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Y. Biomechanical background for the formation of proximal junctional kyphosis after the transpedicular fixation of the lumbarian spine // Рос. журн. биомеханики. 2017. Т. 21, № 3. С. 270–278.

2018

Федонников А. С., Колесникова А. С., Рожкова Ю. Ю., Кириллова И. В., Бессонов Л. В., Ульянов В. Ю., Коссович Л. Ю. Методология проектирования специализированных регистров медицинской информации // Саратовский научно-медицинский журн. 2018. Т. 14, № 3. С. 434–437.

Кудяшев А. Л., Хоминец В. В., Теремшонок А. В., Нагорный Е. Б., Стадниченко С. Ю., Доль А. В., Иванов Д. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Ковтун А. Л. Биомеханическое моделирование при хирургическом лечении пациента с истинным спондилолистезом поясничного позвонка // Хирургия позвоночника. 2018. Т. 15, № 4. С. 107–114. DOI: <http://dx.doi.org/10.14531/ss2018.4.107-114>

Образец для цитирования:

Радаев Ю. Н. Профессор Леонид Юрьевич Коссович (к 70-летию со дня рождения) // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 507–521. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-507-521>



Professor Leonid Yu. Kossovich (to the 70th Anniversary)

Yu. N. Radaev

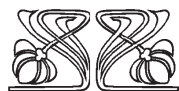
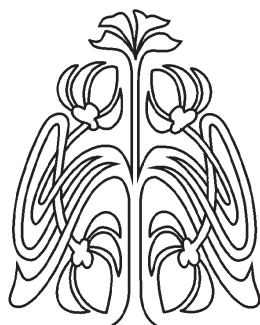
Yuri N. Radaev, <http://orcid.org/0000-0002-0866-2151>, Institute for Problems in Mechanics of RAS, 101 Vernadskogo Ave., Moscow 119526, Russia, radaev@ipmnet.ru, y.radaev@gmail.com

The present paper is devoted to the 70th Anniversary of the Editor-in-Chief of "Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics", DSc (Physics & Mathematics), Prof., Head of the Department of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics, a Laureate of the State Prize of the Russian Federation in the field of science and technology Leonid Yu. Kossovich.

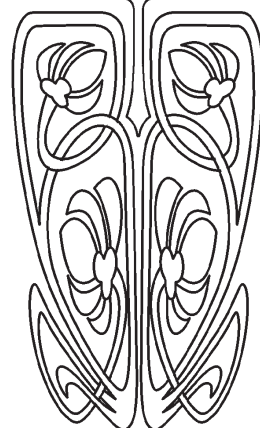
Key words: Anniversary, leading scientist, mechanics, biomechanics.

Cite this article as:

Radaev Yu. N. Professor Leonid Yu. Kossovich (to the 70th Anniversary). *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 507–521 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-507-521>



ПОДПИСКА



Подписка на II полугодие 2019 года

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год

Цена свободная

Оформить подписку онлайн можно в Интернет-каталоге «Пресса по подписке» (www.akc.ru)

Адрес издательства:

410012, Саратов, Астраханская, 83

Тел.: +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89

Факс: +7(845-2) 27-85-29

E-mail: izvestiya@sgu.ru

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,

СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mmi@sgu.ru

Website: <http://mmi.sgu.ru/>