



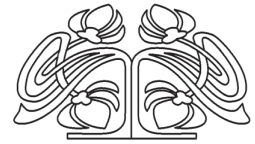
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

# ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 1

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,  
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал  
2019 Том 19

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

Издаётся с 2005 года

## СОДЕРЖАНИЕ

### Научный отдел

#### Математика

**Акиев G. G.** Approximation of Continuous  $2p$ -Periodic Piecewise Smooth Functions by Discrete Fourier Sums  
[Акиев Г. Г. Приближение непрерывных  $2p$ -периодических кусочно-гладких функций дискретными суммами Фурье] 4

**Алдашев С. А.** Нелокальные краевые задачи в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа 16

**Berdnikov G. S.** Necessary and Sufficient Condition for an Orthogonal Scaling Function on Vilenkin Groups  
[Бердников Г. С. Необходимое и достаточное условие ортогональной масштабирующей функции на группах Виленкина] 24

**Ломов И. С.** Спектральный метод Ильина установления свойств базисности и равномерной сходимости биортогональных разложений на конечном интервале 34

#### Механика

**Колесникова А. С., Приходченко К. А.** Влияние легирования атомами кислорода пористых углеродных наноструктур на значения модуля Юнга 59

**Осипенко М. А., Касаткин А. А.** Моментная контактная нагрузка при одностороннем контакте балок 69

**Рязанов В. В., Ледков А. С.** Увод наноспутника с низкой орбиты с помощью ионного потока 82

#### Информатика

**Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Batraeva I. A.** Hybrid Automation Extended Model  
[Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Батраева И. А. Расширенная модель гибридного автомата] 94

**Karatetskaia E. Yu., Lakshina V. V.** Multiple Hedging on Energy Market  
[Каратецкая Е. Ю., Лакшина В. В. Многократное хеджирование на энергетическом рынке] 105

**Рацеев С. М., Ростов М. А.** О протоколах аутентификации с нулевым разглашением знания 114

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (группы научных специальностей: 01.01.00 – математика; 01.02.00 – механика; 05.13.00 – информатика, вычислительная техника и управление).

Журнал входит в международные базы данных Emerging Sources Citation Index, MathSciNet, zbMATH

Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-56162 от 15 ноября 2013 года

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год

**Директор издательства**  
Бучко Ирина Юрьевна

**Редактор**  
Крылова Елена Борисовна

**Художник**  
Соколов Дмитрий Валерьевич

**Редактор-стилист**  
Кочкаева Инна Анатольевна

**Верстка**  
Степанова Наталия Ивановна

**Технический редактор**  
Каргин Игорь Анатольевич

**Корректор**  
Кочкаева Инна Анатольевна

**Адрес учредителя, издателя и издательства:**

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83

Тел.: +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89

E-mail: izvestiya@info.sgu.ru

Подписано в печать 28.02.19.

Формат 60x84 1/8.

Усл. печ. л. 14,18(15,25).

Тираж 500 экз. Заказ 22 -Т.

Отпечатано в типографии Саратовского университета.

**Адрес типографии:**  
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2019



## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <http://mmi.sgu.ru/dlya-avtogo>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования в журнале. В случае положительного решения об опубликовании статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <http://mmi.sgu.ru>.

---

### Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,  
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,  
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: [mmi@info.sgu.ru](mailto:mmi@info.sgu.ru)

Website: <http://mmi.sgu.ru/>

### Ответственный секретарь серии:

Шевцова Юлия Владиславовна

## CONTENTS

### Scientific Part

#### Mathematics

**Akniyev G. G.** Approximation of Continuous  $2p$ -Periodic Piecewise Smooth Functions by Discrete Fourier Sums 4

**Aldashev S. A.** Nonlocal Boundary-Value Problems in the Cylindrical Domain for of the Multidimensional Laplace Equation 16

**Berdnikov G. S.** Necessary and Sufficient Condition for an Orthogonal Scaling Function on Vilenkin Groups 24

**Lomov I. S.** The  $l^2$  in Spectral Method for Determination of the Properties of the Basis Property and the Uniform Convergence of Biorthogonal Expansions on a Finite Interval 34

#### Mechanics

**Kolesnikova A. S., Prikhodchenko K. A.** Influence of Doping by Oxygen Atoms of Porous Carbon Nanostructures on Values of Young's Modulus 59

**Osipenko M. A., Kasatkin A. A.** A Couple Contact Loading at the Unilateral Contact of Beams 69

**Ryazanov V. V., Ledkov A. S.** Descent of Nanosatellite from Low Earth Orbit by Ion Beam 82

#### Computer Sciences

**Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Batraeva I. A.** Hybrid Automation Extended Model 94

**Karatetskaia E. Yu., Lakshina V. V.** Multiple Hedging on Energy Market 105

**Ratseev S. M., Rostov M. A.** Zero-Knowledge Proof Authentication Protocols 114



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА  
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.  
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

**Главный редактор**

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Заместитель главного редактора**

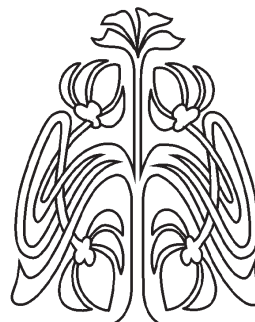
Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Ответственный секретарь**

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

**Члены редакционной коллегии:**

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)  
Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)  
Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Омск, Россия)  
Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)  
Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)  
Индейцев Дмитрий Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Санкт-Петербург, Россия)  
Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)  
Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)  
Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Республика Беларусь)  
Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)  
Матвеев Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)  
Морозов Никита Фёдорович, доктор физ.-мат. наук, акад. РАН (Санкт-Петербург, Россия)  
Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)  
Пархоменко Павел Павлович, доктор техн. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)  
Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук (Долгопрудный, Московская обл., Россия)  
Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)  
Рацеев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ульяновск, Россия)  
Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)  
Роджерсон Грэм, Ph.D., профессор (Киль, Великобритания)  
Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Саратов, Россия)  
Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)  
Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Республика Беларусь)  
Субботин Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Екатеринбург, Россия)  
Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)  
Шалыто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)  
Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)  
Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)  
Янг Чунь-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)



**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL  
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES.  
SERIES: MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»**

**Editor-in-Chief** – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

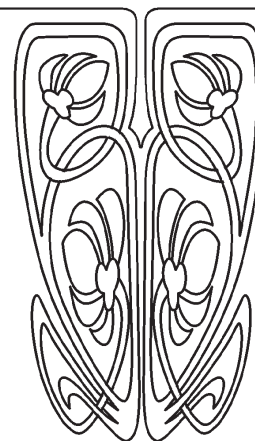
**Deputy Editor-in-Chief** – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

**Executive Secretary** – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

**Members of the Editorial Board:**

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)	Alexander F. Rezchikov (Saratov, Russia)
Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)	Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)
Dmitry A. Indeitsev (St. Petersburg, Russia)	Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)
Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)	Shoji IMATANI (Kyoto, Japan)
Avzug P. Khromov (Saratov, Russia)	Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny, Moscow region, Russia)
Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)	Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)
Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)	Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)
Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)	Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)
Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)	Yurii N. Subbotin (Ekaterinburg, Russia)
Nikita F. Morozov (St. Petersburg, Russia)	Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)
Semen R. Nasyrov (Kazan', Russia)	Vjacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)
Pavel P. Parkhomenko (Moscow, Russia)	Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)
Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)	Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)
Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)	

**РЕДАКЦИОННАЯ  
КОЛЛЕГИЯ**



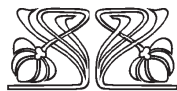
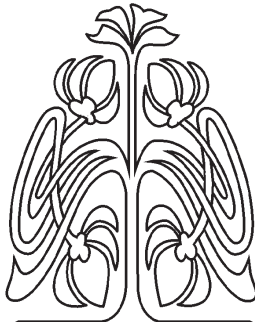


# МАТЕМАТИКА

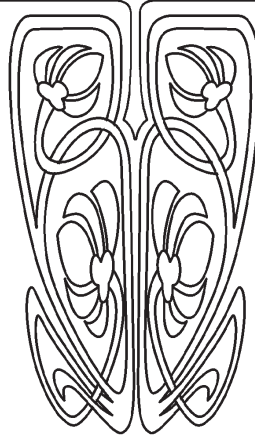
## Approximation of Continuous $2\pi$ -Periodic Piecewise Smooth Functions by Discrete Fourier Sums

G. G. Akniyev

Gasan G. Akniyev, <https://orcid.org/0000-0001-8533-4277>, Dagestan Scientific Center RAS, 45 M. Gadzhieva St., 367025 Makhachkala, Russia, hasan.akniyev@gmail.com



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ



Let  $N$  be a natural number greater than 1. Select  $N$  uniformly distributed points  $t_k = 2\pi k/N + u$  ( $0 \leq k \leq N - 1$ ), and denote by  $L_{n,N}(f) = L_{n,N}(f, x)$  ( $1 \leq n \leq N/2$ ) the trigonometric polynomial of order  $n$  possessing the least quadratic deviation from  $f$  with respect to the system  $\{t_k\}_{k=0}^{N-1}$ . Select  $m + 1$  points  $-\pi = a_0 < a_1 < \dots < a_{m-1} < a_m = \pi$ , where  $m \geq 2$ , and denote  $\Omega = \{a_i\}_{i=0}^m$ . Denote by  $C_{\Omega}^r$  a class of  $2\pi$ -periodic continuous functions  $f$ , where  $f$  is  $r$ -times differentiable on each segment  $\Delta_i = [a_i, a_{i+1}]$  and  $f^{(r)}$  is absolutely continuous on  $\Delta_i$ . In the present article we consider the problem of approximation of functions  $f \in C_{\Omega}^2$  by the polynomials  $L_{n,N}(f, x)$ . We show that instead of the estimate  $|f(x) - L_{n,N}(f, x)| \leq c \ln n/n$ , which follows from the well-known Lebesgue inequality, we found an exact order estimate  $|f(x) - L_{n,N}(f, x)| \leq c/n$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) which is uniform with respect to  $n$  ( $1 \leq n \leq N/2$ ). Moreover, we found a local estimate  $|f(x) - L_{n,N}(f, x)| \leq c(\varepsilon)/n^2$  ( $|x - a_i| \geq \varepsilon$ ) which is also uniform with respect to  $n$  ( $1 \leq n \leq N/2$ ). The proofs of these estimations are based on comparing of approximating properties of discrete and continuous finite Fourier series.

**Keywords:** function approximation, trigonometric polynomials, Fourier series.

Received: 22.05.2018 / Accepted: 28.11.2018

Published online: 28.02.2019

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-4-15>

### INTRODUCTION

We begin by establishing some notations. Let  $\Omega$  be a set of  $m + 1$  points  $\{a_i\}_{i=0}^m$  ( $m > 2$ ) such that  $-\pi = a_0 < a_1 < \dots < a_{m-1} < a_m = \pi$ . We denote by  $C_{\Omega}^{0,r}$  the class of  $2\pi$ -periodic functions with  $r$  absolutely continuous derivatives on each interval  $(a_i, a_{i+1})$  and by  $C_{\Omega}^r$  the subclass of



all continuous functions in  $C_{\Omega}^{0,r}$  (here we say that a function  $f$  is absolutely continuous on an interval  $(a, b)$  if the function  $\bar{f}$  is absolutely continuous on the segment  $[a, b]$ , where  $\bar{f}(x) = f(x)$  for  $x \in (a, b)$ ,  $\bar{f}(a) = f(a + 0)$ , and  $\bar{f}(b) = f(b - 0)$ ).

We denote by  $L_{n,N}(f, x)$  a trigonometric polynomial of order  $n$  possessing the least quadratic deviation from the function  $f$  at the points  $\{t_j\}_{j=0}^{N-1}$ , where  $t_j = u + 2\pi j/N$ ,  $n \leq N/2$ ,  $N \geq 2$ , and  $u \in \mathbb{R}$ . In other words,  $L_{n,N}(f, x)$  provides the minimum for the sum  $\sum_{j=0}^{N-1} |f(t_j) - T_n(t_j)|^2$  on the set of all trigonometric polynomials of order at most  $n$ . To read more about function approximation by trigonometric polynomials see [1–10].

Also, in this paper we denote by  $c$  or  $c(b_1, b_2, \dots, b_k)$  some positive constants, which depend only on specified arguments (if any) and may vary from line to line, and by  $S_n(f, x)$  the  $n$ -th partial sum of the Fourier series of the function  $f$ . We also note that it is easy to show that the Fourier series of any  $f \in C_{\Omega}^2$  converges uniformly on  $\mathbb{R}$  and the following representation is possible:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1}$$

where

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt. \tag{2}$$

The goal of this work is to estimate the value  $|f(x) - L_{n,N}(f, x)|$  for  $f \in C_{\Omega}^2$ . Note that the special case of this problem is considered in [11], where the value  $|f(x) - L_{n,N}(f, x)|$  is estimated for a  $2\pi$ -periodic function  $f(x) = |x|$  ( $x \in [-\pi, \pi]$ ). In this work, we generalize the results from [11] for any function  $f \in C_{\Omega}^2$ , as stated in the following theorem:

**Theorem 1.** For  $f \in C_{\Omega}^2$  the following inequalities hold:

$$|f(x) - L_{n,N}(f, x)| \leq \frac{c(f)}{n}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$|f(x) - L_{n,N}(f, x)| \leq \frac{c(f, \varepsilon)}{n^2}, \quad x \in |x - a_i| \geq \varepsilon. \tag{4}$$

The order of these estimates cannot be improved.

To prove this theorem we use a lemma from [12]:

**Lemma 1 (Sharapudinov, [12]).** If the Fourier series of  $f$  converges at the points  $t_k = u + 2k\pi/N$ , then the representation

$$L_{n,N}(f, x) = S_n(f, x) + R_{n,N}(f, x), \tag{5}$$

where

$$R_{n,N}(f, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x - t) \cos \mu N(u - t) f(t) dt, \tag{6}$$

holds true, where  $2n < N$  and  $D_n(x)$  is the Dirichlet kernel:

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx. \tag{7}$$



This lemma considers only the case  $2n < N$ . If  $2n = N$  (when  $N$  is even) we can write (see [12])

$$L_{n,2n}(f, x) = L_{n-1,2n}(f, x) + a_n^{(2n)}(f) \cos n(x - u), \tag{8}$$

where

$$a_n^{(2n)}(f) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(t_k) \cos n(t_k - u). \tag{9}$$

To prove the inequalities (3) and (4) from Theorem 1 we use the formulas

$$|f(x) - L_{n,N}(f, x)| \leq |f(x) - S_n(f, x)| + |R_{n,N}(f, x)|, \quad n < N/2, \tag{10}$$

$$|f(x) - L_{n,N}(f, x)| \leq |f(x) - S_{n-1}(f, x)| + |R_{n-1,N}(f, x)| + |a_n^{(2n)}(f)|, \quad n = N/2, \tag{11}$$

which immediately follow from (5) and (8).

The estimates for the values  $|f(x) - S_n(f, x)|$ ,  $|R_{n,N}(f, x)|$ , and  $|a_n^{(2n)}(f)|$  are found in the following sections.

### 1. THE ESTIMATE FOR $|f(x) - S_n(f, x)|$

To estimate the value  $|f(x) - S_n(f, x)|$  we need the following lemma.

**Lemma 2.** For  $f \in C_{\Omega}^2$  the following inequality holds:

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) h_p(k(t + \alpha)) dt \right| \leq \frac{c(f)}{k^2},$$

where  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , and

$$h_p(x) = \begin{cases} \cos x, & p = 0, \\ \sin x, & p = 1. \end{cases} \tag{12}$$

**Proof.** Performing integration by parts two times we have

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} f(t) h_p(k(t + \alpha)) dt = \frac{(-1)^{p+1}}{k} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) h_{1-p}(k(t + \alpha)) dt = \\ & = \frac{1}{k^2} \left[ \sum_{i=0}^{m-1} (f'(a_i - 0) - f'(a_i + 0)) h_p(k(a_i + \alpha)) - \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) h_p(k(t + \alpha)) dt \right]. \end{aligned}$$

From this we can get the estimate

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) h_p(k(t + \alpha)) dt \right| \leq \frac{1}{k^2} \left[ \sum_{i=0}^{m-1} |f'(a_i - 0) - f'(a_i + 0)| + \int_{-\pi}^{\pi} |f''(t)| dt \right] \leq \frac{c(f)}{k^2}.$$

□



**Lemma 3.** For  $f \in C^2_\Omega$  the following inequalities hold:

$$|f(x) - S_n(f, x)| \leq \frac{c(f)}{n}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

$$|f(x) - S_n(f, x)| \leq \frac{c(f, \varepsilon)}{n^2}, \quad |x - a_i| \geq \varepsilon. \tag{14}$$

**Proof.** Here we prove only (13) because the proof for inequality (14) can be found in [13, Theorem 2.1]. Using (1) and (2) we can write

$$f(x) - S_n(f, x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Applying Lemma 2 to (2) we get  $|a_k| \leq c(f)/k^2$  and  $|b_k| \leq c(f)/k^2$ , which gives us

$$|f(x) - S_n(f, x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \leq c(f)/n.$$

□

## 2. THE ESTIMATE FOR $|R_{n,N}(f, x)|$

From (6) and (7) follows  $R_{n,N}(f, x) = R_{n,N}^1(f, x) + R_{n,N}^2(f, x)$ , where

$$R_{n,N}^1(f, x) = \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos \mu N(u - t) dt,$$

$$R_{n,N}^2(f, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k(x - t) \cos \mu N(u - t) dt. \tag{15}$$

Obviously,  $|R_{n,N}(f, x)| \leq |R_{n,N}^1(f, x)| + |R_{n,N}^2(f, x)|$ . The values  $|R_{n,N}^1(f, x)|$  and  $|R_{n,N}^2(f, x)|$  are estimated later in this section, but first we prove three auxiliary lemmas.

**Lemma 4.** For  $f \in C^{0,1}_\Omega$  the following holds:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) h_p(k(t - x)) h_q(\mu N(t - u)) dt =$$

$$= \frac{(-1)^q \mu N}{(\mu N)^2 - k^2} \sum_{i=0}^{m-1} (f(a_i - 0) - f(a_i + 0)) h_p(k(a_i - x)) h_{1-q}(\mu N(a_i - u)) -$$

$$- \frac{(-1)^q \mu N}{(\mu N)^2 - k^2} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) h_p(k(t - x)) h_{1-q}(\mu N(t - u)) dt +$$

$$+ \frac{(-1)^{1+p} k}{(\mu N)^2 - k^2} \sum_{i=0}^{m-1} (f(a_i - 0) - f(a_i + 0)) h_{1-p}(k(a_i - x)) h_q(\mu N(a_i - u)) -$$

$$- \frac{(-1)^{1+p} k}{(\mu N)^2 - k^2} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) h_{1-p}(k(t - x)) h_q(\mu N(t - u)) dt. \tag{16}$$



**Proof.** Perform integration by parts:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\pi}^{\pi} f(t)h_p(k(t-x))h_q(\mu N(t-u))dt = \\
 &= \frac{(-1)^q}{\mu N} \sum_{i=0}^{m-1} (f(a_i-0) - f(a_i+0)) h_p(k(a_i-x))h_{1-q}(\mu N(a_i-u)) - \\
 & \quad - \frac{(-1)^q}{\mu N} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)h_p(k(t-x))h_{1-q}(\mu N(t-u))dt + \\
 & \quad + \frac{(-1)^{p+q}k}{\mu N} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)h_{1-p}(k(t-x))h_{1-q}(\mu N(t-u))dt. \tag{17}
 \end{aligned}$$

Repeat integration by parts for the last integral in (17):

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\pi}^{\pi} f(t)h_p(k(t-x))h_q(\mu N(t-u))dt = \\
 &= \frac{(-1)^q}{\mu N} \sum_{i=0}^{m-1} (f(a_i-0) - f(a_i+0)) h_p(k(a_i-x))h_{1-q}(\mu N(a_i-u)) - \\
 & \quad - \frac{(-1)^q}{\mu N} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)h_p(k(t-x))h_{1-q}(\mu N(t-u))dt + \\
 & \quad + \frac{(-1)^{1+p}k}{(\mu N)^2} \sum_{i=0}^{m-1} (f(a_i-0) - f(a_i+0)) h_{1-p}(k(a_i-x))h_q(\mu N(a_i-u)) - \\
 & \quad - \frac{(-1)^{1+p}k}{(\mu N)^2} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)h_{1-p}(k(t-x))h_q(\mu N(t-u))dt + \\
 & \quad + \frac{k^2}{(\mu N)^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)h_p(k(t-x))h_q(\mu N(t-u))dt.
 \end{aligned}$$

By moving the last integral from the right side to the left and dividing both sides by  $\frac{(\mu N)^2 - k^2}{(\mu N)^2}$  we get (16). □

**Corollary 1.** If  $f \in C_{\Omega}^2$ , then  $f(a_i-0) - f(a_i+0) = 0$ , so we can write (16) as

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} f(t)h_p(k(t-x))h_q(\mu N(t-u))dt &= \frac{(-1)^q \mu N}{(\mu N)^2 - k^2} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)h_p(k(t-x))h_{1-q}(\mu N(t-u))dt - \\
 & \quad - \frac{(-1)^{1+p}k}{(\mu N)^2 - k^2} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)h_{1-p}(k(t-x))h_q(\mu N(t-u))dt.
 \end{aligned}$$





**Lemma 5.** *The following estimate holds:*

$$\left| \sum_{k=1}^n h_p(kx) \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}.$$

**Proof.** The proof is obvious and follows from well-known formulas

$$\sum_{k=1}^n \sin(kx) = \frac{\sin \left( \frac{n+1}{2}x \right) \sin \left( \frac{nx}{2} \right)}{\sin \left( \frac{x}{2} \right)}, \quad \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\cos \left( \frac{n+1}{2}x \right) \sin \left( \frac{nx}{2} \right)}{\sin \left( \frac{x}{2} \right)}.$$

□

**Lemma 6.** *Let  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  be a monotonous sequence (either increasing or decreasing) of  $n$  positive numbers. The following holds:*

$$\left| \sum_{k=1}^n \alpha_k h_p(kx) \right| \leq \frac{2\alpha_n + \alpha_1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}.$$

**Proof.** After performing Abel transformation (summation by parts) we have:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k h_p(kx) = \alpha_n \sum_{j=1}^n h_p(jx) - \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sum_{j=1}^k h_p(jx).$$

Using Lemma 5 and the fact that  $\sum_{k=1}^n |\alpha_{k+1} - \alpha_k| = \left| \sum_{k=1}^n \alpha_{k+1} - \alpha_k \right|$  we can write

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k h_p(kx) \right| &\leq \alpha_n \left| \sum_{j=1}^n h_p(jx) \right| + \sum_{k=1}^{n-1} |\alpha_{k+1} - \alpha_k| \left| \sum_{j=1}^k h_p(jx) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \left( \alpha_n + \left| \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{k+1} - \alpha_k \right| \right) \leq \frac{2\alpha_n + \alpha_1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}. \end{aligned}$$

□

**Lemma 7.** *The following inequality holds:  $|R_{n,N}^1(f, x)| \leq c(f)/N^2$ .*

**Proof.** Using Lemma 2 we have

$$\left| R_{n,N}^1(f, x) \right| \leq \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos \mu N(u - t) dt \right| \leq \frac{c(f)}{N^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2} \leq \frac{c(f)}{N^2}.$$

□

**Lemma 8.** *The following estimates hold:*

$$\left| R_{n,N}^2(f, x) \right| \leq \frac{nc(f)}{N^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

$$\left| R_{n,N}^2(f, x) \right| \leq \frac{c(f, \varepsilon)}{N^2}, \quad |x - a_i| \geq \varepsilon. \tag{19}$$



**Proof.** Rewrite (15) using (12):

$$R_{n,N}^2(f, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) h_0(k(t-x)) h_0(\mu N(t-u)) dt.$$

Using Corollary 1 we rewrite the above formula as follows:

$$\begin{aligned} R_{n,N}^2(f, x) &= \frac{2}{\pi N} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - \left(\frac{k}{\mu N}\right)^2} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) h_0(k(t-x)) h_1(\mu N(t-u)) dt + \\ &+ \frac{2}{\pi N} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2} \sum_{k=1}^n \frac{k}{N} \frac{1}{1 - \left(\frac{k}{\mu N}\right)^2} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) h_1(k(t-x)) h_0(\mu N(t-u)) dt = \\ &= R_{n,N}^{2.1}(f, x) + R_{n,N}^{2.2}(f, x). \end{aligned}$$

For brevity we only consider here estimation of  $|R_{n,N}^{2.1}(f, x)|$  because  $|R_{n,N}^{2.2}(f, x)|$  can be estimated in almost the same way. Obviously,  $f' \in C_{\Omega}^{0,1}$ , so we can apply Lemma 4 to  $R_{n,N}^{2.1}(f, x)$ :

$$\begin{aligned} R_{n,N}^{2.1}(f, x) &= \frac{-2}{\pi N^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{k}{\mu N}\right)^2\right)^2} \sum_{i=0}^{m-1} \left(f'(a_i - 0) - f'(a_i + 0)\right) \times \\ &\quad \times h_0(k(a_i - x)) h_0(\mu N(a_i - u)) + \\ &+ \frac{2}{\pi N^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{k}{\mu N}\right)^2\right)^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) h_0(k(t-x)) h_0(\mu N(t-u)) dt + \\ &+ \frac{-2}{\pi N^3} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^3} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\left(1 - \left(\frac{k}{\mu N}\right)^2\right)^2} \sum_{i=0}^{m-1} \left(f'(a_i - 0) - f'(a_i + 0)\right) \times \\ &\quad \times h_1(k(a_i - x)) h_1(\mu N(a_i - u)) + \\ &+ \frac{2}{\pi N^3} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^3} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\left(1 - \left(\frac{k}{\mu N}\right)^2\right)^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) h_1(k(t-x)) h_1(\mu N(t-u)) dt = \\ &= R_{n,N}^{2.1.1}(f, x) + R_{n,N}^{2.1.2}(f, x) + R_{n,N}^{2.1.3}(f, x) + R_{n,N}^{2.1.4}(f, x). \end{aligned}$$

Begin with  $R_{n,N}^{2.1.2}(f, x)$ . Applying Lemma 4 we get

$$\begin{aligned} R_{n,N}^{2.1.2}(f, x) &= \frac{2}{\pi N^3} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{k}{\mu N}\right)^2\right)^3} \sum_{i=0}^{m-1} \left(f''(a_i - 0) - f''(a_i + 0)\right) \times \\ &\quad \times h_0(k(a_i - x)) h_1(\mu N(a_i - u)) + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{-2}{\pi N^3} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{k}{\mu N}\right)^2\right)^3} \int_{-\pi}^{\pi} f'''(t) h_0(k(t-x)) h_1(\mu N(t-u)) dt + \\
 & + \frac{-2}{\pi N^4} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^4} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\left(1 - \left(\frac{k}{\mu N}\right)^2\right)^3} \sum_{i=0}^{m-1} \left(f''(a_i - 0) - f''(a_i + 0)\right) \times \\
 & \quad \times h_1(k(a_i - x)) h_0(\mu N(a_i - u)) + \\
 & + \frac{2}{\pi N^4} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^4} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\left(1 - \left(\frac{k}{\mu N}\right)^2\right)^3} \int_{-\pi}^{\pi} f'''(t) h_1(k(t-x)) h_0(\mu N(t-u)) dt.
 \end{aligned}$$

From this we can get the estimate

$$\begin{aligned}
 |R_{n,N}^{2.1.2}(f, x)| & \leq \frac{c}{N^3} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{k}{\mu N}\right)^2\right)^3} \sum_{i=0}^{m-1} |f''(a_i - 0) - f''(a_i + 0)| + \\
 & + \frac{c}{N^3} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{k}{\mu N}\right)^2\right)^3} \int_{-\pi}^{\pi} |f'''(t)| dt + \\
 & + \frac{c}{N^3} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^4} \sum_{k=1}^n \frac{k/N}{\left(1 - \left(\frac{k}{\mu N}\right)^2\right)^3} \sum_{i=0}^{m-1} |f''(a_i - 0) - f''(a_i + 0)| + \\
 & + \frac{c}{N^3} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^4} \sum_{k=1}^n \frac{k/N}{\left(1 - \left(\frac{k}{\mu N}\right)^2\right)^3} \int_{-\pi}^{\pi} |f'''(t)| dt \leq \frac{c(f)}{N^2}.
 \end{aligned}$$

In the same way we can get  $|R_{n,N}^{2.1.4}(f, x)| \leq c(f)/N^2$ . Now we consider  $|R_{n,N}^{2.1.1}(f, x)|$  and  $|R_{n,N}^{2.1.3}(f, x)|$ . We will estimate here only  $|R_{n,N}^{2.1.1}(f, x)|$  because the other one can be estimated in the similar way. After a simple transformation we have

$$R_{n,N}^{2.1.1}(f, x) = \frac{-2}{\pi N^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2} \sum_{i=0}^{m-1} \left(f'(a_i - 0) - f'(a_i + 0)\right) h_0(\mu N(a_i - u)) \sum_{k=1}^n \frac{h_0(k(a_i - x))}{\left(1 - \left(\frac{k}{\mu N}\right)^2\right)^2}.$$

From this we have the uniform estimate for  $x \in \mathbb{R}$ :

$$|R_{n,N}^{2.1.1}(f, x)| \leq \frac{c}{N^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2} \sum_{i=0}^{m-1} |f'(a_i - 0) - f'(a_i + 0)| \left| \sum_{k=1}^n \frac{h_0(k(a_i - x))}{\left(1 - \left(\frac{k}{\mu N}\right)^2\right)^2} \right| \leq \frac{nc(f)}{N^2}.$$



Using Lemma 6 and assuming  $\alpha_k = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{k}{\mu N}\right)^2\right)^2}$  we have

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{h_p(k(a_i - x))}{\left(1 - \left(\frac{k}{\mu N}\right)^2\right)^2} \right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{a_i - x}{2}\right|} \left( \frac{2}{\left(1 - \left(\frac{n}{\mu N}\right)^2\right)^2} + \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{1}{\mu N}\right)^2\right)^2} \right) \leq \frac{c}{\left|\sin \frac{a_i - x}{2}\right|}.$$

Now we can write

$$|R_{n,N}^{2.1.1}(f, x)| \leq \frac{c}{N^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{|f'(a_i - 0) - f'(a_i + 0)|}{\left|\sin \frac{a_i - x}{2}\right|} \leq \frac{c(f, \varepsilon)}{N^2}, \quad |x - a_i| \geq \varepsilon.$$

In the similar way we can get

$$|R_{n,N}^{2.1.3}(f, x)| \leq \frac{nc(f)}{N^2}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ and } |R_{n,N}^{2.1.3}(f, x)| \leq \frac{c(f, \varepsilon)}{N^2}, \quad |x - a_i| \geq \varepsilon.$$

Finally, for  $R_{n,N}^{2.1}(f, x)$  we can write

$$|R_{n,N}^{2.1}(f, x)| \leq \sum_{i=1}^4 |R_{n,N}^{2.1.i}(f, x)| \leq \frac{nc(f)}{N^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad |R_{n,N}^{2.1}(f, x)| \leq \frac{c(f, \varepsilon)}{N^2}, \quad |x - a_i| \geq \varepsilon.$$

Using the same approach we can show that the value  $|R_{n,N}^{2.2}(f, x)|$  has the same estimate as  $|R_{n,N}^{2.1}(f, x)|$ , which leads us to (18) and (19).  $\square$

From the previous lemmas and inequality  $|R_{n,N}(f, x)| \leq |R_{n,N}^1(f, x)| + |R_{n,N}^2(f, x)|$  follow estimates for  $|R_{n,N}(f, x)|$ :

$$|R_{n,N}(f, x)| \leq \frac{nc(f)}{N^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

$$|R_{n,N}(f, x)| \leq \frac{c(f, \varepsilon)}{N^2}, \quad |x - a_i| \geq \varepsilon. \tag{21}$$

### 3. THE ESTIMATE FOR $|a_n^{(2n)}(f)|$

**Lemma 9.** For the value  $a_n^{(2n)}(f)$ , where  $f \in C_{\Omega}^2$  and  $2n = N$ , the estimate  $|a_n^{(2n)}(f)| \leq c(f)/N^2$  holds.

**Proof.** For each  $f \in C_{\Omega}^2$  the sum  $S = \sum_{k=0}^{2n-1} (f(t_k) - f(t_{k+1})) = 0$ . We can represent the above sum as  $S = S_1 + S_2$ , where  $S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} (f(t_{2k}) - f(t_{2k+1}))$  and  $S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} (f(t_{2k+1}) - f(t_{2k+2}))$ . We can see that  $S_1 = -S_2$  and  $|S_1| = |S_1 - S_2|/2$ . From the above formulas we can write the equation for  $S_1 - S_2$ :

$$S_1 - S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} (f(t_{2k}) - 2f(t_{2k+1}) + f(t_{2k+2})) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta^2 f(t_{2k}). \tag{22}$$

Denote by  $G$  the set of numbers  $\bigcup_{i=0}^m \{k : 0 \leq k < n, |t_{2k+1} - a_i| \leq \frac{2\pi}{N}\}$  and  $\hat{G} = \{k\}_{k=0}^{n-1} \setminus G$ . Rewrite (22) by dividing it into two sums:

$$S_1 - S_2 = \sum_{k \in G} \Delta^2 f(t_{2k}) + \sum_{k \in \hat{G}} \Delta^2 f(t_{2k}).$$



For every  $k \in \hat{G}$  we have  $|t_{2k+1} - a_i| > 2\pi/N$  ( $0 \leq i \leq m$ ) so the points  $t_{2k}, t_{2k+1}, t_{2k+2}$  are inside some interval  $(a_i, a_{i+1})$  and the function  $f \in C_{\Omega}^2$  has an absolutely continuous derivative  $f''$  on  $(a_i, a_{i+1})$ , therefore we can write  $|\Delta^2 f(t_{2k})| \leq (\frac{2\pi}{N})^2 \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f''(x)|$ . For  $k \in G$  we can write  $|\Delta^2 f(t_{2k})| \leq c(f)/N$ , also note that  $|G| \leq 2m$ . Therefore, we have

$$|S_1| = \frac{|S_1 - S_2|}{2} \leq \frac{c(f)}{N}. \tag{23}$$

From (9)

$$a_n^{(2n)}(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2n-1} f(t_k) \cos \pi k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} (f(t_{2k}) - f(t_{2k+1})) = \frac{1}{N} S_1. \tag{24}$$

From (23) and (24) follows  $|a_n^{(N)}(f)| \leq c(f)/N^2$ . □

#### 4 . THE PROOF OF THEOREM 1

The proof of Theorem 1 consists of two parts: first we prove that the inequalities (3) and (4) of the theorem hold, then we prove that these estimates cannot be improved for all  $f \in C_{\Omega}^2$ .

From the inequalities (10), (11), the estimates (13), (14), (20), (21) and Lemma 9 we can easily get (3) and (4). To prove that the order of these estimates cannot be improved we consider the aforementioned  $2\pi$ -periodic function  $f(x) = |x|$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ . Obviously,  $f \in C_{\Omega}^2$ . Consider only the case when  $n < N/2$ . From (5) follows the inequality  $|f(x) - L_{n,N}(f, x)| \geq |f(x) - S_n(f, x)| - |R_{n,N}(f, x)|$ . From (20) follows  $|R_{n,N}(f, x)| \leq c(f)/N$ . Therefore, for every  $\varepsilon > 0$  we can find a natural number  $N_0$ , such that for every  $N > N_0$  follows  $|R_{n,N}(f, x)| < \varepsilon$ . Let  $N_0(n)$  be a natural number such that for every  $N > N_0(n)$

$$\max_{\substack{x \in E \\ N > N_0(n)}} |R_{n,N}(f, x)| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in E} |f(x) - S_n(f, x)|,$$

where  $E \subset \mathbb{R}$ . So, we can write

$$\max_{\substack{x \in E \\ N > N_0(n)}} |f(x) - L_{n,N}(f, x)| \geq \frac{1}{2} \max_{x \in E} |f(x) - S_n(f, x)|. \tag{25}$$

**Lemma 10.** *The following inequalities hold:*

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_n(f, x)| &\geq c(f)/n, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \max_{|\pi k - x| \geq \varepsilon} |f(x) - S_n(f, x)| &\geq c(f, \varepsilon)/n^2, \quad |\pi k - x| \geq \varepsilon. \end{aligned}$$

**Proof.** From [14, p. 443] we have the following representation:

$$f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$



From the previous equation we can get  $f(x) - S_n(f, x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$ . For  $x = 0$  we have

$$|R_n(f, 0)| = \frac{4}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \geq c/n.$$

Now we consider the case when  $x = \pi/4$  and  $n+1 = 4l$ ,  $l \in \mathbb{N}$ . It is easy to show that

$$\begin{aligned} R_n\left(f, \frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=l}^{\infty} \left( \frac{1}{(8k-1)^2} + \frac{1}{(8k+1)^2} - \frac{1}{(8k+3)^2} - \frac{1}{(8k+5)^2} \right) = \\ &= -\frac{16\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=l}^{\infty} \left( \frac{8k+1}{(8k-1)^2(8k+3)^2} + \frac{8k+3}{(8k+1)^2(8k+5)^2} \right). \end{aligned}$$

Hence we have  $|R_n(f, \frac{\pi}{4})| \geq c/n^2$ . □

From (25) and the above lemma follows

$$\begin{aligned} \max_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ N > N_0(n)}} |f(x) - L_{n,N}(f, x)| &\geq \frac{c}{n}, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \max_{\substack{|\pi k - x| \geq \varepsilon \\ N > N_0(n)}} |f(x) - L_{n,N}(f, x)| &\geq \frac{c(\varepsilon)}{n^2}, \quad |x - \pi k| \geq \varepsilon. \end{aligned}$$

Theorem 1 is proved.

## References

1. Bernshtein S. N. O trigonometricheskom interpolirovanii po sposobu naimen'shih kvadratov [On trigonometric interpolation by the method of least squares]. *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 1934, vol. 4, pp. 1–5 (in Russian).
2. Erdős P. Some theorems and remarks on interpolation. *Acta Sci. Math.* (Szeged), 1950, vol. 12, pp. 11–17.
3. Kalashnikov M. D. O polinomah nailuchshego (kvadracheskogo) priblizheniya v zadannoy sisteme toчек [On polynomials of best (quadratic) approximation on a given system of points]. *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 1955, vol. 105, pp. 634–636 (in Russian).
4. Krilov V. I. Shodimost algebraicheskogo interpolirovaniya po kornyam mnogochlena Chebisheva dlya absolutno neprerivnih funkciy i funkciy s ogranichenim izmeneniyem [Convergence of algebraic interpolation with respect to the roots of a Chebyshev polynomial for absolutely continuous functions and functions with bounded variation]. *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 1956, vol. 107, pp. 362–365 (in Russian).
5. Marcinkiewicz J. Quelques remarques sur l'interpolation. *Acta Sci. Math.* (Szeged), 1936, vol. 8, pp. 127–130 (in French).
6. Marcinkiewicz J. Sur la divergence des polynômes d'interpolation. *Acta Sci. Math.* (Szeged), 1936, vol. 8, pp. 131–135 (in French).
7. Natanson I. P. On the Convergence of Trigonometrical Interpolation at Equi-Distant Knots. *Annals of Mathematics, Second Ser.*, 1944, vol. 45, no. 3, pp. 457–471. DOI: <http://doi.org/10.2307/1969188>
8. Nikolski S. M. Sur certaines methodes d'approximation au moyen de sommes trigonometriques. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 1940, vol. 4, iss. 4, pp. 509–520 (in Russian).
9. Turetskiy A. H. *Teoriya interpolirovaniya v zadachah* [Interpolation theory in exercises]. Minsk, Vissheyshaya Shkola Publ., 1968. 320 p. (in Russian).



10. Zygmund A. *Trigonometric Series*. Vol. 1. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1959. 747 p.
11. Akniyev G. G. Discrete least squares approximation of piecewise-linear functions by trigonometric polynomials. *Issues Anal.*, 2017, vol. 6 (24), iss. 2, pp. 3–24. DOI: <http://doi.org/10.15393/j3.art.2017.4070>
12. Sharapudinov I. I. On the best approximation and polynomials of the least quadratic deviation. *Anal. Math.*, 1983, vol. 9, iss. 3, pp. 223–234.
13. Sharapudinov I. I. Overlapping transformations for approximation of continuous functions by means of repeated mean Valle Poussin. *Daghestan Electronic Mathematical Reports*, 2017, iss. 8, pp. 70–92.
14. Courant R. *Differential and Integral Calculus*. Vol. 1. New Jersey, Wiley-Interscience, 1988. 704 p.

---

**Cite this article as:**

Akniyev G. G. Approximation of Continuous  $2\pi$ -Periodic Piecewise Smooth Functions by Discrete Fourier Sums. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 1, pp. 4–15. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-4-15>

---

УДК 517.521.2

## Приближение непрерывных $2\pi$ -периодических кусочно-гладких функций дискретными суммами Фурье

Г. Г. Акниев

Акниев Гасан Гарунович, младший научный сотрудник, Дагестанский научный центр РАН, 367025, Россия, Махачкала, ул. М. Гаджиева, д. 45, [hasan.akniyev@gmail.com](mailto:hasan.akniyev@gmail.com)

Пусть  $N \geq 2$  — некоторое натуральное число. Выберем на вещественной оси  $N$  равномерно расположенных точек  $t_k = 2\pi k/N + u$  ( $0 \leq k \leq N - 1$ ). Обозначим через  $L_{n,N}(f) = L_{n,N}(f, x)$  ( $1 \leq n \leq N/2$ ) тригонометрический полином порядка  $n$ , обладающий наименьшим квадратичным отклонением от  $f$  относительно системы  $\{t_k\}_{k=0}^{N-1}$ . Выберем  $m + 1$  точку  $-\pi = a_0 < a_1 < \dots < a_{m-1} < a_m = \pi$ , где  $m \geq 2$ , и обозначим  $\Omega = \{a_i\}_{i=0}^m$ . Через  $C_{\Omega}^r$  обозначим класс  $2\pi$ -периодических непрерывных функций  $f$ ,  $r$ -раз дифференцируемых на каждом сегменте  $\Delta_i = [a_i, a_{i+1}]$ , причем производная  $f^{(r)}$  на каждом  $\Delta_i$  абсолютно непрерывна. В данной работе рассмотрена задача приближения функций  $f \in C_{\Omega}^2$  полиномами  $L_{n,N}(f, x)$ . Показано, что вместо оценки  $|f(x) - L_{n,N}(f, x)| \leq c \ln n/n$ , которая следует из известного неравенства Лебега, найдена точная по порядку оценка  $|f(x) - L_{n,N}(f, x)| \leq c/n$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), которая равномерна относительно  $n$  ( $1 \leq n \leq N/2$ ). Кроме того, найдена локальная оценка  $|f(x) - L_{n,N}(f, x)| \leq c(\varepsilon)/n^2$  ( $|x - a_i| \geq \varepsilon$ ), которая также равномерна относительно  $n$  ( $1 \leq n \leq N/2$ ). Доказательства этих оценок основаны на сравнении дискретных и непрерывных конечных сумм ряда Фурье.

*Ключевые слова:* приближение функций, тригонометрические полиномы, ряд Фурье.

Поступила в редакцию: 22.05.2018 / Принята: 28.11.2018 / Опубликовано онлайн: 28.02.2019

---

**Образец для цитирования:**

*Akniyev G. G. Approximation of Continuous  $2\pi$ -Periodic Piecewise Smooth Functions by Discrete Fourier Sums [Акниев Г. Г. Приближение непрерывных  $2\pi$ -периодических кусочно-гладких функций дискретными суммами Фурье] // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 1. С. 4–15. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-4-15>*

---



УДК 517.956

## Нелокальные краевые задачи в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа

С. А. Алдашев

Алдашев Серик Аймурзаевич, доктор физико-математических наук, профессор, Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Казахстан, 050012, Алматы, ул. Толе Би, д. 86, [aldash51@mail.ru](mailto:aldash51@mail.ru)

Корректные постановки краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного хорошо изучены. При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряет свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений. Автором ранее изучены локальные краевые задачи в цилиндрической области для многомерных эллиптических уравнений. Насколько известно для этих уравнений нелокальные краевые задачи не исследованы. В данной статье используется метод, предложенный в ранних работах автора, показаны однозначные разрешимости и получены явные виды классических решений нелокальных краевых задач в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа, которые являются обобщением смешанной задачи, задач Дирихле и Пуанкаре. Получен также критерий единственности регулярного решения этих задач.

*Ключевые слова:* нелокальные задачи, цилиндрическая область, многомерное уравнение, критерии, функция Бесселя.

Поступила в редакцию: 02.09.2017 / Принята: 05.06.2018 / Опубликовано онлайн: 28.02.2019

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-16-23>

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ И РЕЗУЛЬТАТ

Локальные краевые задачи в цилиндрической области для многомерных эллиптических уравнений изучены в [1–6].

Насколько нам известно, для этих уравнений нелокальные краевые задачи не исследованы.

В работе показаны однозначные разрешимости нелокальных краевых задач в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа, которые являются обобщением смешанной задачи, задач Дирихле и Пуанкаре. Получен также критерий единственности регулярного решения этих задач.

Пусть  $D_\alpha$  — цилиндрическая область евклидова пространства  $E_{m+1}$  точек  $(x_1, \dots, x_m, t)$ , ограниченная цилиндром  $\Gamma = \{(x, t) :: |x| = 1\}$ , плоскостями  $t = \alpha > 0$  и  $t = 0$ , где  $|x|$  — длина вектора  $x = (x_1, \dots, x_m)$ .

Части этих поверхностей, образующих границу  $\partial D_\alpha$  области  $D_\alpha$ , обозначим через  $\Gamma_\alpha, S_\alpha, S_0$  соответственно.

В области  $D_\alpha$  рассмотрим многомерное уравнение Лапласа:

$$\Delta_x u + u_{tt} = 0, \quad (1)$$

где  $\Delta_x$  — оператор Лапласа по переменным  $x_1, \dots, x_m, m \geq 2$ .

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат  $x_1, \dots, x_m, t$  к сферическим  $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t, r \geq 0, 0 \leq \theta_1 < 2\pi, 0 \leq \theta_i \leq \pi, i = 2, 3, \dots, m-1$ .

Рассмотрим следующие нелокальные краевые задачи.





**Задача 1.** Найти решение уравнения (1) в области  $D_\alpha$  из класса  $C(\bar{D}_\alpha) \cap \cap C^1(D_\alpha \cup S_\alpha \cup S_0) \cap C^2(D_\alpha)$ , удовлетворяющее краевым условиям:

$$\begin{aligned} \beta_1 u(r, \theta, 0) = \gamma_1 u(r, \theta, \alpha) + \varphi_1(r, \theta), \quad \beta_2 u_t(r, \theta, 0) = \gamma_2 u_t(r, \theta, \alpha) + \varphi_2(r, \theta), \\ u|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t, \theta). \end{aligned} \quad (2)$$

**Задача 2.** Найти решение уравнения (1) в области  $D_\alpha$  из класса  $C(\bar{D}_\alpha) \cap \cap C^1(D_\alpha \cup S_0) \cap C^2(D_\alpha)$ , удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(r, \theta, 0) = \varphi_1(r, \theta), \quad \beta_2 u_t(r, \theta, 0) = \gamma_2 u(r, \theta, \alpha) + \varphi_2(r, \theta), \quad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t, \theta), \quad (3)$$

где  $\beta_j, \gamma_j - \text{const}, \beta_j^2 + \gamma_j^2 \neq 0, j = 1, 2$ , которые являются обобщениями задач Пуанкаре и Дирихле.

Пусть  $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$  — система линейно независимых сферических функций порядка  $n, 1 \leq k \leq k_n, (m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2), \theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1}), W_2^l(S_0), l = 0, 1, \dots$  — пространства Соболева.

Имеют место [7] следующие леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $f(r, \theta) \in W_2^l(S_0)$ . Если  $l \geq m-1$ , то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (4)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка  $p \leq l - m + 1$ , сходятся абсолютно и равномерно.

**Лемма 2.** Для того чтобы  $f(r, \theta) \in W_2^l(S_0)$ , необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const}.$$

Через  $\bar{\varphi}_{1n}^k(r), \bar{\varphi}_{2n}^k(r), \psi_n^k(t)$  обозначим коэффициенты разложения ряда (4) соответственно функций  $\varphi_1(r, \theta), \varphi_2(r, \theta), \psi(t, \theta)$ .

Пусть  $\varphi_1(r, \theta), \varphi_2(r, \theta) \in W_2^l(S_0), \psi(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha), l > 3m/2$ .

Тогда справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1.** 1. Если выполняется условие

$$(\beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1) \text{ch } \mu_{s,n} \alpha \neq \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

то задача 1 однозначно разрешима.

2. Если выполняется условие

$$\gamma_2 \text{sh } \mu_{s,n} \alpha \neq \mu_{s,n} \beta_2, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

то задача 2 имеет единственное решение, где  $\mu_{s,n}$  — положительные нули функций Бесселя первого рода  $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$ .

Заметим, что в случае задачи Пуанкаре ( $\beta_1 = 0, \gamma_2 = 0$ ) и задачи Дирихле ( $\beta_2 = 0$ ) соответственно условий (5) и (6) всегда выполняются, однозначные разрешимости которых показаны в [2, 3].

**Теорема 2.** 1. Решение задачи 1 единственно, тогда и только тогда, когда имеет место соотношение (5).

2. Решение задачи 2 единственно, если и только если выполняется условие (6).



## 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Сначала рассмотрим задачу 1. В сферических координатах уравнения (1) имеют вид

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u + u_{tt} = 0, \quad (7)$$

$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left( \sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right),$$

$$g_1 = 1, \quad g_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно [7], что спектр оператора  $\delta$  состоит из собственных чисел  $\lambda_n = n(n+m-2)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , каждому из которых соответствует  $k_n$  ортонормированных собственных функций  $Y_{n,m}^k(\theta)$ .

Так как искомое решение задачи 1 принадлежит классу  $C(\bar{D}_\alpha \cap C^2(D_\alpha))$ , то его можно искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (8)$$

где  $\bar{u}_n^k(r, t)$  — функции, подлежащие определению.

Подставляя (8) в (7), используя ортогональность сферических функций  $Y_{n,m}^k(\theta)$  [7], будем иметь

$$\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k + \bar{u}_{ntt}^k = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (9)$$

при этом краевое условие (2) с учетом леммы 1 запишется в виде

$$\beta_1 \bar{u}_n^k(r, 0) = \gamma_1 \bar{u}_n^k(r, \alpha) + \bar{\varphi}_{1n}^k(r), \quad \beta_2 \bar{u}_n^k(r, 0) = \gamma_2 \bar{u}_n^k(r, \alpha) + \bar{\varphi}_{2n}^k(r), \quad (10)$$

$$\bar{u}_n^k(1, t) = \psi_n^k(t), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

В (9), (10), произведя замену  $\bar{u}_n^k(r, t) = \bar{v}_n^k(r, t) - \psi_n^k(t)$ , получим:

$$\bar{v}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{v}_{nr}^k - \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\bar{v}_n^k + \bar{v}_{ntt}^k = \bar{f}_n^k(r, t), \quad (11)$$

$$\beta_1 \bar{v}_n^k(r, 0) = \gamma_1 \bar{v}_n^k(r, \alpha) + \bar{\varphi}_{1n}^k(r), \quad \beta_2 \bar{v}_n^k(r, 0) = \gamma_2 \bar{v}_n^k(r, \alpha) + \varphi_{2n}^k(r), \quad (12)$$

$$\bar{v}_n^k(1, t) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$\bar{f}_n^k(r, t) = -\psi_{ntt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2}\psi_n^k, \quad \varphi_{1n}^k(r) = \bar{\varphi}_{1n}^k(r) + \gamma_1 \psi_n^k(\alpha) - \beta_1 \psi_n^k(0),$$

$$\varphi_{2n}^k(r) = \bar{\varphi}_{2n}^k(r) - \gamma_2 \psi_{nt}^k(\alpha) - \beta_2 \psi_{nt}^k(0).$$

Произведя замену  $\bar{v}_n^k(r, t) = r^{(1-m)/2} v_n^k(r, t)$ , задачу (11), (12) запишем в следующем виде:

$$L v_n^k \equiv v_{nrr}^k + v_{ntt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} v_n^k = f_n^k(r, t), \quad (13)$$

$$\beta_1 v_n^k(r, 0) = \gamma_1 v_n^k(r, \alpha) + \tilde{\varphi}_{1n}^k(r), \quad \beta_2 v_n^k(r, 0) = \gamma_2 v_n^k(r, \alpha) + \tilde{\varphi}_{2n}^k(r), \quad (14)$$

$$v_n^k(1, t) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots,$$



$$\bar{\lambda}_n = \frac{(m-1)(3-m) - 4\lambda_n}{4}, \quad f_n^k(r, t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{f}_n^k(r, t),$$

$$\tilde{\varphi}_{jn}^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \varphi_{jn}^k(r), \quad j = 1, 2.$$

Решение задачи (13), (14) рассмотрим в виде

$$v_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \tag{15}$$

при этом пусть

$$f_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) R_s(r), \quad \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k R_s(r), \quad \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{ns}^k R_s(r). \tag{16}$$

Подставляя (15) в (13), (14) с учетом (16) получим:

$$R_{srr} + \left( \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} + \mu \right) R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{17}$$

$$R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty, \tag{18}$$

$$T_{stt} - \mu T_s(t) = a_{ns}^k(t), \quad 0 < t < \alpha, \tag{19}$$

$$\beta_1 T_s(0) = \gamma_1 T_s(\alpha) + b_{ns}^k, \quad \beta_2 T_{st}(0) = \gamma_2 T_{st}(\alpha) + e_{ns}^k. \tag{20}$$

Ограниченным решением задачи (17), (18) является [8]:

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \tag{21}$$

где  $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$ ,  $\mu = \mu_{s,n}^2$ .

Общее решение уравнения (19) представимо в виде [8]:

$$T_{s,n}(t) = c_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} t + c_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} t - \frac{\operatorname{ch} \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_0^t a_{ns}(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi d\xi +$$

$$+ \frac{\operatorname{sh} \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_0^t a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi d\xi, \tag{22}$$

$c_{1s}$ ,  $c_{2s}$  — произвольные постоянные, удовлетворив условию (20), получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (\beta_1 - \gamma_1 \operatorname{ch} \mu_{s,n} \alpha) c_{1s} - \gamma_1 c_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} \alpha = \\ = \frac{\gamma_1}{\mu_{s,n}} [\operatorname{sh} \mu_{s,n} \alpha \int_0^{\alpha} a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi d\xi - \operatorname{ch} \mu_{s,n} \alpha \int_0^{\alpha} a_{ns}(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi d\xi] + b_{ns}^k, \\ \gamma_2 c_{1s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} \alpha + (\gamma_2 \operatorname{ch} \mu_{s,n} \alpha - \beta_2) c_{2s} = \\ = \frac{[\gamma_2 (\operatorname{sh} \mu_{s,n} \alpha \int_0^{\alpha} a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi d\xi - \operatorname{ch} \mu_{s,n} \alpha \int_0^{\alpha} a_{ns}(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi d\xi) - e_{ns}^k]}{\mu_{s,n}}. \end{cases} \tag{23}$$

которая имеет единственное решение, если выполняется условие (5).



Подставляя (21) в (16), получим:

$$r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k J_{\nu}(\mu_{s,n} r),$$

$$r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{ns}^k J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad 0 < r < 1. \tag{24}$$

Ряды (24) — разложение в ряды Фурье – Бесселя [9], если

$$a_{ns}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi, t) J_{\nu}(\mu_{s,n} \xi) d\xi,$$

$$b_{ns}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_{1n}^k(\xi) J_{\nu}(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \tag{25}$$

$$e_{ns}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_{2n}^k(\xi) J_{\nu}(\mu_{s,n} \xi) d\xi,$$

$\mu_{s,n}$ ,  $s = 1, 2, \dots$  — положительные нули функций Бесселя  $J_{\nu}(z)$  расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (21), (22) получим решение задачи (13), (14) в виде

$$v_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_{\frac{n+(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r), \tag{26}$$

где  $a_{ns}^k(t)$ ,  $b_{ns}^k$ ,  $e_{ns}^k$  определяются из (25), а  $c_{1s}$ ,  $c_{2s}$  — из (23).

Таким образом, из (8) следует, что решением задачи 1 является ряд

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left[ \psi_n^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}} v_n^k(r, t) \right] Y_{n,m}^k(\theta), \tag{27}$$

где  $v_n^k(r, t)$  находятся из (26).

Учитывая формулу  $2J'_{\nu}(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$  [9] оценки из [7, 10]:

$$J_{\nu}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), \quad \nu \geq 0, \tag{28}$$

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \quad \left| \frac{\partial^q}{\partial \theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad q = 0, 1, \dots,$$

а также леммы, условия на заданные функции  $\varphi_1(r, \theta)$ ,  $\varphi_2(r, \theta)$ ,  $\psi(t, \theta)$ , как в [2, 3] можно показать, что полученное единственное решение (27) принадлежит классу  $C(\bar{D}_{\alpha}) \cap C^1(D_{\alpha} \cup S_{\alpha} \cup S_0) \cap C^2(D_{\alpha})$ .

Следовательно, задача 1 однозначно разрешима.

Теперь рассмотрим задачу 2. Ее решение также будем искать в виде ряда (8), где функции  $\bar{u}_n^k(r, t)$  будут определены ниже. Тогда аналогично задаче 1  $\bar{u}_n^k$  удовлетворяет уравнению (9), при этом краевое условие (3) в силу (8) запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(r, 0) = \bar{\varphi}_{1n}^k(r), \quad \beta_2 \bar{u}_{nt}^k(r, 0) = \gamma_2 \bar{u}_n^k(r, \alpha) + \bar{\varphi}_{2n}^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1, t) = \psi_n^k(t),$$

$$k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{29}$$



Произведя сначала замену  $\bar{v}_n^k(r, t) = \bar{u}_n^k(r, t) - \psi_n^k(t)$ , а затем, положив  $\bar{v}_n^k(r, t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} v_n^k(r, t)$ , задачу (9), (29) приведем к следующей задаче:

$$Lv_n^k(r, t) = f_n^k(r, t), \tag{30}$$

$$v_n^k(r, 0) = \tilde{\varphi}_{1n}^k(r), \quad \beta_2 v_{nt}^k(r, 0) = \gamma_2 v_n^k(r, \alpha) + \tilde{\varphi}_{2n}^k(r), \quad v_n^k(1, t) = 0, \tag{31}$$

$$k = \bar{1}, \bar{k}_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

где  $\tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} (\bar{\varphi}_{1n}^k(r) - \psi_n^k(0))$ ,  $\tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} (\bar{\varphi}_{2n}^k(r) + \gamma_2 \psi_n^k(\alpha) - \beta_2 \psi_{nt}^k(0))$ .

Если решение задачи (30), (31) будем искать в виде (15), то приходим к задаче (17), (18) и к задаче для (19) с данными

$$T_s(0) = b_{ns}^k, \quad \beta_2 T_{st}(0) = \gamma_2 T_s(\alpha) + e_{ns}^k. \tag{32}$$

Удовлетворив общее решение (22) уравнения (19) краевому условию (32), будем иметь

$$\begin{cases} c_{1s} = b_{ns}^k, \\ (\mu_{s,n} \beta_2 - \gamma_2 \operatorname{sh} \mu_{s,n} \alpha) c_{2s} = \gamma_2 b_{ns}^k \operatorname{ch} \mu_{s,n} \alpha + \frac{\gamma_2}{\mu_{s,n}} (\operatorname{sh} \mu_{s,n} \alpha \int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi d\xi - \\ - \operatorname{ch} \mu_{s,n} \alpha \int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi d\xi) + e_{ns}^k, \end{cases} \tag{33}$$

из которого однозначно определяются коэффициенты  $c_{1s}$ ,  $c_{2s}$ , если выполняется условие (6).

Таким образом, из (21), (22) получим решение задачи (30), (31) в виде (26), где  $a_{ns}^k$ ,  $b_{ns}^k$ ,  $e_{ns}^k$  находятся из (25), а  $c_{1s}$ ,  $c_{2s}$  — из (33).

Следовательно, единственное решение задачи 2 представимо по формуле (27).

Теорема 1 доказана.  $\square$

Докажем теорему 2. Если выполняется условие (5), то из теоремы 1 вытекает единственность решения задачи 1. Пусть теперь условие (5) нарушено хотя бы для одного  $s = l$ .

Тогда нетривиальным решением однородной задачи, соответствующей задаче 1, является

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-p} r^{\frac{(2-m)}{2}} T_{l,n}(t) J_{n+\frac{m-2}{2}}(\mu_l r), \tag{34}$$

где

$$\begin{cases} \operatorname{ch} \mu_{l,n} t + \operatorname{sh} \mu_{l,n} t & \gamma_j \neq 0, \quad j = 1, 2, \\ \operatorname{sh} \mu_{l,n} t, & \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 \neq 0, \\ \operatorname{ch} \mu_{l,n} t, & \gamma_2 = 0, \quad \gamma_1 \neq 0, \end{cases}$$

при этом из (28) получим, что функция (34) принадлежит искомому классу, если  $p > \frac{3m}{2}$ .

Если имеет место соотношение (6), то из теоремы 1 следует единственность решения задачи 2. Пусть теперь условие (6) не выполняется хотя бы для одного  $s = l$ . Тогда ненулевым решением однородной задачи 2 будет функция

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-p} r^{\frac{(2-m)}{2}} (\operatorname{sh} \mu_{l,n} t) J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_l r),$$

которая принадлежит классу  $C(D_\alpha) \cap C^1(D_\alpha \cup S_0) \cap C^2(D_\alpha)$  при  $p > \frac{3m}{2}$ .

Теорема 2 доказана.



### Библиографический список

1. Алдашев С. А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 3–7
2. Алдашев С. А. Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа // Изв. НАН РК. Сер. физико-математическая. 2014. № 3(295). С. 62–67.
3. Алдашев С. А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 7–13.
4. Алдашев С. А. Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. 2014. № 10(121). С. 17–25.
5. Алдашев С. А. Корректность локальной краевой задачи в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 365–371. DOI: <https://doi.org/18500/1816-9791-2015-15-4-365-371>
6. Алдашев С. А. Корректность локальной краевой задачи в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений // Вестн. СамУ. Естественнонауч. сер. 2016. Вып. 1–2. С. 7–17.
7. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М. : Физматгиз, 1962. 254 с.
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1965. 703 с.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции : 2 т. Т. 2. М. : Наука, 1974. 295 с.
10. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1966. 724 с.

---

### Образец для цитирования:

Алдашев С. А. Нелокальные краевые задачи в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 1. С. 16–23. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-16-23>

---

## Nonlocal Boundary-Value Problems in the Cylindrical Domain for the Multidimensional Laplace Equation

S. A. Aldashev

Serik A. Aldashev, <https://orcid.org/0000-0002-8223-6900>, Abai Kazakh National Pedagogical University, 86 Tole Bi St., 050012 Almaty, Kazakhstan, [aldash51@mail.ru](mailto:aldash51@mail.ru)

Correct statements of boundary value problems on the plane for elliptic equations by the method of analytic function theory of a complex variable. Investigating similar questions, when the number of independent variables is greater than two, problems of a fundamental nature arise. A very attractive and convenient method of singular integral equations loses its validity due to the absence of any complete theory of multidimensional singular integral equations. The author has previously studied local boundary value problems in a cylindrical domain for multidimensional elliptic equations. As far as we know, non-local boundary-value problems for these equations have not been investigated. This paper uses the method proposed in the author's earlier



works, shows unique solvabilities, and gives explicit forms of classical solutions of nonlocal boundary-value problems in the cylindrical domain for the multidimensional Laplace equation, which are generalizations of the mixed problem, the Dirichlet and Poincare problems. A criterion for uniqueness is also obtained for regular solutions of these problems is also obtained.

**Keywords:** nonlocal problem, cylindrical domain, multidimensional equation, criterion, Bessel function.

Received: 02.09.2017 / Accepted: 05.06.2018 / Published online: 28.02.2019

## References

1. Aldashev S. A. The correctness of the Dirichlet problem in cylindrical domain for the multidimensional Laplace equation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 3, pp. 3–7 (in Russian).
2. Aldashev S. A. Correctness of Poincare's problem in a cylindrical region for Laplace's multi-measured equation. *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical Series*, 2014, no. 3 (295), pp. 62–67 (in Russian).
3. Aldashev S. A. The correctness of the Dirichlet problem in cylindrical domain for a class of multidimensional elliptic equations. *Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 1, pp. 7–13 (in Russian).
4. Aldashev S. A. Well-Posedness of Poincare Problem in the Cylindrical Domain for a Class of Multi-Dimensional Elliptic Equations. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2014, no. 10 (121), pp. 17–25 (in Russian).
5. Aldashev S. A. The correctness of the local boundary value problem in cylindrical domain for the multidimensional Laplace equation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 4, pp. 365–371 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-365-371>
6. Aldashev S. A. The correctness of the local boundary value problem in cylindrical domain for a class of multidimensional elliptic equations. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2016, vol. 12 (123), iss. 1–2, pp. 7–17 (in Russian).
7. Mikhlin S. G. *Mnogomernye singulyarnye integraly i integral'nye uravneniya* [Multidimensional singular integrals and Integral equations]. Moscow, Fizmatgiz, 1962. 254 p. (in Russian).
8. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravneniyam* [Handbook of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1965. 703 p. (in Russian).
9. Bateman G., Erdi A. *Vysshie transcendentnye funktsii* [Higher transcendental functions]. Vol. 2. Moscow, Nauka, 1974. 295 p. (in Russian).
10. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uraveniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1966. 724 p. (in Russian).

---

### Cite this article as:

Aldashev S. A. Nonlocal Boundary-Value Problems in the Cylindrical Domain for the Multidimensional Laplace Equation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 1, pp. 16–23 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-16-23>

---



# Necessary and Sufficient Condition for an Orthogonal Scaling Function on Vilenkin Groups

G. S. Berdnikov

Gleb S. Berdnikov, <https://orcid.org/0000-0001-5070-4370>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., 410012 Saratov, Russia, [evointelligent@gmail.com](mailto:evointelligent@gmail.com)

There are several approaches to the problem of construction of an orthogonal MRA on Vilenkin groups, but all of them are reduced to the search of the so-called scaling function. In 2005 Yu. Farkov used the so-called “blocked sets” in order to find all possible band-limited scaling functions with compact support for each set of certain parameters and his conditions are necessary and sufficient. S. F. Lukomskii, Iu. S. Kruss and G. S. Berdnikov presented another approach in 2014–2015 which has some advantages over the previous ones and employs the notion from discrete mathematics to achieve the same goals. This approach gives an algorithm for construction of band-limited orthogonal scaling functions with compact support in a concrete fashion using some class of directed graphs, which, in turn, is obtained from the so-called  $N$ -valid trees introduced by the same authors in 2012. Up to this point, though, it was not known whether this algorithm is good enough to produce any possible orthogonal scaling function of such a class. This paper describes the aforementioned algorithm and proves that it can be viewed as a necessary and sufficient condition itself, i. e. it produces any possible orthogonal scaling function. Additionally, we get another, more convenient description of the class of directed graphs we are interested in.

**Keywords:** Vilenkin group, abelian group, wavelets, scaling function, MRA, directed graphs .

Received: 16.10.2018 / Accepted: 18.12.2018 / Published online: 28.02.2019

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-24-33>

## INTRODUCTION

Consider  $(G, \dot{+})$  — locally compact Vilenkin group with sequences infinite in both directions as its elements:

$$x = (\dots, 0_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots), \quad x_j = \overline{0, p-1},$$

where  $p$  is an arbitrary prime number;  $g_n = (\dots, 0_{n-1}, 1_n, 0_{n+1}, \dots)$  are basic elements in  $G$ . Addition  $\dot{+}$  is defined as coordinate wise addition modulus  $p$ , i.e.  $x \dot{+} y = (x_j \dot{+} y_j) = (x_j + y_j \bmod p)$ . Let

$$G_n = \{x \in G : x = (\dots, 0_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots)\}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

be a basic sequence of subgroups,  $G_n^\perp$  — sequence of annihilators,  $X$  — character group,  $r_n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$  — Rademacher functions on group  $G$ . Dilation operator  $\mathcal{A}$  in group  $G$  is defined by the equation  $\mathcal{A}x := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_{n-1}$ , where  $x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n \in G$ ; in character group it is defined by the equation  $(\chi \mathcal{A}, x) = (\chi, \mathcal{A}x)$ . Let us define sets

$$H_0^{(s)} = \{h \in G : h = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} a_{-s}g_{-s}\}, \quad s \in \mathbb{N},$$

$$H_0 = \{x \in G : x = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} a_{-s}g_{-s}, \quad s \in \mathbb{N}\}.$$

Set  $H_0$  is the set of shifts in  $G$ . It is an analogue of the nonnegative integers set.

V. Protasov, Yu. Farkov in [1–3] characterized all diadic wavelets on  $\mathbb{R}_+$  and developed an algorithm for their construction. Yu. Farkov in [4, 5] researched scaling





functions  $\varphi(x)$  with compact support on  $G_{-N}$  and developed necessary and sufficient conditions on mask  $m_0(\chi)$ , which generates an orthogonal MRA. These conditions hold with additional assumption

$$\sum_{\alpha_0=0}^{p-1} |m_0(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha-N} r_{-N+1}^{\alpha-N+1} \dots r_{-1}^{\alpha-1} r_0^{\alpha_0})|^2 = 1,$$

which is necessary for orthogonality of the system of shifts of the corresponding scaling function  $\varphi$ . Yu. Farkov proved that in this case scaling function  $\varphi$  generates orthogonal MRA iff mask  $m_0$  does not have the so-called “blocked” sets. The problem of finding such sets requires exhaustive search of approximately  $2^{p^N}$  different cases, which is possible only with  $p$  and  $N$  being rather small.

Thus, the necessity of finding another algorithm arose, the algorithm which does not require exhaustive search. This necessity triggered the appearance of another approach, which employs various graphs as the means to construct orthogonal MRA. In [6, 7] another algorithm for construction of  $\varphi$  was developed. It doesn't require exhaustive search, but it is valid only for functions  $|\hat{\varphi}(\chi)|$  constant on cosets  $G_{-1}^\perp$  and taking 2 values only: 0 or 1. Initially, trees appeared in [8, 9], where they were used for construction of Riesz MRA. In [10] authors managed to get rid of restriction  $\text{supp } \varphi(x) \subset G_{-1}$ . To achieve this, the notion of  $N$ -valid tree was introduced. It was proved that step function  $\varphi(x)$  with support  $\text{supp } \varphi(x) \subset G_{-N}$  and restriction  $|\hat{\varphi}(\chi)| = 0$  or 1 generates orthogonal MRA if  $\varphi(x)$  is constructed by the means of some  $N$ -valid tree using the algorithm presented in the same paper.

In [11] another restriction was omitted. The results of this paper no longer require  $\hat{\varphi}(\chi)$  to satisfy “ $|\hat{\varphi}(\chi)| = 0$  or 1”. The algorithm for construction of orthogonal scaling function now has the only restriction:  $\hat{\varphi}(\chi)$  is a band limited function with compact support. This algorithm does not require exhaustive search. The problem of constructing such function is reduced to constructing some digraph, which, in turn, is constructed using arbitrary  $N$ -valid tree.

However, until current article it was not known whether the aforementioned algorithm is able to construct any possible function  $\varphi$  of the described class or not. The research presented here answers this question with definite “yes”. Thus, the algorithm in question can actually be viewed as a necessary and sufficient condition for  $\varphi$  to generate an orthogonal MRA on Vilenkin group. As a pleasant complement we incidentally get another, more convenient description of a certain class of digraphs while proving this fact.

The structure of the paper is the following. In Section 1 we describe the algorithm from the paper [11]. In Section 2 we find a necessary condition for scaling function  $\varphi$  using the notion of digraphs, and then we prove that this necessary condition is just a rephrased sufficient one we have in the form of the algorithm, which, in turn, proves that the algorithm is a necessary and sufficient condition.

## 1 . CONSTRUCTION OF A SCALING FUNCTION

Let us introduce the algorithm for construction of scaling function with the use of digraphs. Denote the collection of step functions constant on cosets of  $G_M$  with support  $\text{supp}(\varphi) \subset G_{-N}$  as  $\mathfrak{D}_M(G_{-N})$ ,  $M, N \in \mathbb{N}$ . Similarly,  $\mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$  is a collection of step functions constant on cosets of  $G_{-N}^\perp$  with support  $\text{supp}(\varphi) \subset G_M^\perp$ . If  $\varphi \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$  generates an orthogonal MRA, then it satisfies the refinement equation



$\varphi(x) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x - h)$  which can also be written in frequency form (see [7])

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi) \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}), \tag{1}$$

where

$$m_0(\chi) = \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \overline{\varphi(\chi \mathcal{A}^{-1}, h)} \tag{2}$$

is a mask of equation (1).

In [7] the following statements were proved.

1. If  $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$  is a solution of refinement equation (1) and the system of shifts  $(\varphi(x - h))_{h \in H_0}$  is orthonormal, then  $\varphi$  generates an orthogonal MRA.

2. If  $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$ , then the system of shifts  $(\varphi(x - h))_{h \in H_0}$  is orthonormal iff for all  $\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1} = \overline{(0, p-1)}$

$$\sum_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{M-1}=0}^{p-1} |\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 = 1. \tag{3}$$

Thus, in order to construct orthogonal MRA one needs to construct a function  $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$ , which is a solution of refinement equation (1) and which satisfies conditions (3).

**Definition 1.** Let  $N$  be a natural number,  $p$  — a prime number. Then  $N$ -valid tree is a tree with vertices  $\alpha_j = \overline{0, p-1}$  directed from leaves to root and having the following properties:

- 1) the root and all vertices up to  $(N-1)$ -th level are equal to zero;
- 2) any path  $(\alpha_k \rightarrow \alpha_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_{k+N-1})$  of length  $N-1$  is unique in the tree. Here  $\alpha_i = \overline{0, p-1}$ .

Let us choose an arbitrary  $N$ -valid tree  $T$  and construct a scaling function using it.

**Algorithm 1.** From the tree  $T$  we construct a new tree  $\tilde{T}$  in a following way.

1. Replace the path of  $N$  zeros ending with root with one vertex  $(0_N, 0_{N-1}, \dots, 0_1)$ . All vertices of  $(N+1)$ -th level of  $T$  are now connected to this vertex in  $\tilde{T}$ . It becomes the root of  $\tilde{T}$ .

2. Then we change the values of each vertex without changing the arcs. If in the tree  $T$  we had a path

$$\alpha_N \rightarrow \alpha_{N-1} \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_1$$

starting from the vertex  $\alpha_N$ , then in the new tree  $\tilde{T}$  this vertex has a value equal to  $N$ -dimensional vector  $(\alpha_N, \alpha_{N-1}, \dots, \alpha_1)$ .

Because of  $N$ -validity of the tree  $T$  each possible vector appears in  $\tilde{T}$  one time exactly. Also, if we denote  $height(T) = H$ ,  $height(\tilde{T}) = \tilde{H}$ , then, obviously,  $\tilde{H} = H - N + 1$ .

**Remark.** We refer to the tree  $\tilde{T}$  as an expanded  $N$ -valid tree. Tree  $T$ , in turn, is called shortened  $N$ -valid tree. It is easy to switch from one representation to another if needed, and they describe the same structure as it becomes apparent later in this paper.



**Algorithm 2.** Now we use  $\tilde{T}$  to construct digraph  $\Gamma$ .

Each vertex  $\bar{\alpha}_N = (\alpha_N, \alpha_{N-1}, \dots, \alpha_1)$  of  $\tilde{T}$  we can connect to any number of lower level vertices  $(\alpha_{N-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0)$ , i.e. first  $(N-1)$  elements of this vertex are equal to last  $(N-1)$  elements of vertex  $\bar{\alpha}_N$ . We call this condition *suffix-prefix property*. Vertices that  $\bar{\alpha}_N$  is connected to, we denote as  $(\alpha_{N-1}, \dots, \alpha_1, \tilde{\alpha}_0)$ . I.e.  $\alpha_0 \in \{\tilde{\alpha}_0\}$  iff the vertex  $\bar{\alpha}_N$  is connected to  $(\alpha_{N-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0)$  in  $\Gamma$ .

**Algorithm 3.**

1. Denote

$$\lambda_{\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1}, \alpha_0} = |m_0(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \dots r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0})|^2.$$

If a vertex  $(\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1})$  in digraph  $\Gamma$  is connected to vertices

$$(\alpha_{-N+1}, \alpha_{-N+2}, \dots, \alpha_{-1}, \tilde{\alpha}_0)$$

then we define the values of the mask for the condition

$$\sum_{\tilde{\alpha}_0} \lambda_{\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1}, \tilde{\alpha}_0} = 1 \text{ and } \lambda_{\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1}, \alpha_0} = 0 \text{ for all } \alpha_0 \notin \{\tilde{\alpha}_0\} \quad (4)$$

to hold. Also, define  $m_0(G_{-N}^\perp) = 1$ , which implies  $\lambda_{0,0,\dots,0} = 1$ .

2. Using equation (1), one can recover  $\hat{\varphi}$  from the mask we have already generated. Then the scaling function  $\varphi$  itself can be found after the application of inverse Fourier transform.

The main result of paper [11] is the following.

**Theorem 1.** *Given arbitrary  $N$ -valid tree  $T$ , let the tree  $\tilde{T}$  and graph  $\Gamma$  be constructed based on  $T$  and values of the mask  $m_0(\chi)$  defined with the help of equation (4). Let  $\tilde{H} = \text{height}(\tilde{T})$ . Then the equation*

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi \mathcal{A}^{-k}) \in \mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$$

*defines an orthogonal scaling function  $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$ , where  $M = \tilde{H} - N$ .*

This theorem supplied with aforementioned algorithms describes the process of constructing step scaling functions with compact support on Vilenkin groups. This process always results in an appropriate scaling function, i.e. it can be viewed as a sufficient condition. But can we acquire any possible scaling function with these properties? To answer this question some additional operations should be introduced.

## 2 . THE NECESSARY CONDITION AND CRITERIA

Let us describe an algorithm inverse to Algorithm 3. Algorithm 3 describes construction of  $\hat{\varphi}$  given digraph  $\Gamma$ , a new algorithm describes a process of construction of a digraph  $\Gamma$  given  $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(\mathfrak{G}_M^\perp)$ .

**Algorithm 4.**

1. Let vertices of our digraph  $\Gamma$  be in the form  $\bar{\alpha}^j = (\alpha_i^j)_{i=1}^N$ . Denote  $\{\bar{\alpha}^j\}$  — the set of all vertices.

2. Let  $\hat{\varphi}(\mathfrak{G}_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{s-1}^{\alpha_{s-1}}) \neq 0$ , where  $s \leq M$ . Using

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{n=0}^{\infty} m_0(\chi \mathcal{A}^{-n}),$$



periodicity of the mask and notation

$$m_0(\mathfrak{G}_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \dots r_0^{\alpha_0}) = \lambda_{\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_0},$$

we obtain:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\mathfrak{G}_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{s-1}^{\alpha_{s-1}}) &= \lambda_{\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_0} \lambda_{\alpha_{-N+1}, \alpha_{-N+2}, \dots, \alpha_1} \dots \times \\ &\times \lambda_{\alpha_{s-N-1}, \alpha_{s-N}, \dots, \alpha_{s-1}} \lambda_{\alpha_{s-N}, \alpha_{s-N+1}, \dots, \alpha_{s-1}, 0} \dots \lambda_{\alpha_{s-1}, 0, \dots, 0} \neq 0. \end{aligned}$$

Inequality to zero holds iff all the values  $\lambda_{\alpha_{i-N}, \dots, \alpha_i}$ , in this equation are nonequal to zero. For every such  $\lambda$  we construct an arc

$$(\alpha_{i-N}, \alpha_{i-N+1}, \dots, \alpha_{i-1}) \rightarrow (\alpha_{i-N+1}, \alpha_{i-N+2}, \dots, \alpha_i).$$

3. Checking every coset for each  $\hat{\varphi}(\chi)$  is nonequal to zero and performing the same operations we obtain digraph  $\Gamma$  where each arc corresponds to a different nonzero value of the mask.

**Theorem 2 (Necessary condition in terms of graphs).** *Let  $\varphi(x)$  be a scaling function with  $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(\mathfrak{G}_M^\perp)$  which generates orthogonal MRA on Vilenkin group. Then digraph  $\Gamma$  constructed with the algorithm 4 has the following properties:*

1. *If there exists an arc  $\bar{\alpha}^j \rightarrow \bar{\alpha}^k$ , it means that  $N-1$  last components of  $\bar{\alpha}^j$  coincide with the first  $N-1$  components of  $\bar{\alpha}^k$ . In other words, suffix-prefix condition holds.*
2. *There exists a path to  $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$  from any vertex that is not  $\bar{0}$ .*
3. *There are no directed cycles in the graph.*
4. *The vertex  $\bar{0}$  is a source, i.e. there are no arcs coming out of it.*
5. *The graph includes all possible vertices  $(\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1})$ ,  $\forall \alpha_i = \overline{0, p-1}$ .*

**Proof.** 1. This property is apparent by the construction algorithm.

2. Let us prove that there exists a path from any nonzero vertex to  $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$ . Since all cosets from the support of  $\hat{\varphi}(\chi)$  have the form  $\mathfrak{G}_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{s-1}^{\alpha_{s-1}}$  and

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\mathfrak{G}_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{s-1}^{\alpha_{s-1}}) &= \lambda_{\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_0} \lambda_{\alpha_{-N+1}, \alpha_{-N+2}, \dots, \alpha_1} \dots \times \\ &\times \lambda_{\alpha_{s-N-1}, \alpha_{s-N}, \dots, \alpha_{s-1}} \lambda_{\alpha_{s-N}, \alpha_{s-N+1}, \dots, \alpha_{s-1}, 0} \dots \lambda_{\alpha_{s-1}, 0, \dots, 0} \neq 0. \end{aligned}$$

all values of  $\lambda$  in this product are nonzero. This collection of values of  $\lambda$  generates a path

$$(\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_1) \rightarrow (\alpha_{-N+1}, \alpha_{-N+2}, \dots, \alpha_0) \rightarrow \dots \rightarrow (\alpha_s, 0, \dots, 0) \rightarrow (0, 0, \dots, 0).$$

Thus, since any coset from the support of  $\hat{\varphi}(\chi)$  generates a path ending with  $\bar{0}$ , there exists a path from any nonzero vertex to  $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$ . This proves the property.

3. Let us prove this one by contradiction. Let the graph  $\Gamma$  contain a directed cycle

$$\bar{\alpha}^1 \rightarrow \bar{\alpha}^2 \rightarrow \dots \bar{\alpha}^k \rightarrow \bar{\alpha}^1.$$

We rewrite this path using the 1st property and specifying the components of vertices:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1}, \alpha_N) \rightarrow (\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N, \alpha_{N+1}) \rightarrow \dots$$





corresponding value of the mask is not equal to 0. This, in turn, means that for every such collection there exists an arc

$$(\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1}) \rightarrow (\alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1}, \alpha_0).$$

Thus, the constructed graph includes all possible vertices  $(\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-1})$ ,  $\forall \alpha_i = \overline{0, p-1}$ .  $\square$

Let us denote the collection of graphs constructed using algorithms 1–2 as  $\Gamma_1$ . Let us denote the collection of graphs satisfying the properties of Theorem 2 as  $\Gamma_2$ . At this point we can see the following implication:

$$\begin{aligned} \Gamma \in \Gamma_1 \text{ generates } \hat{\varphi}\text{- FT of a scaling function} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{\varphi}\text{- FT of a scaling function-generates } \Gamma \in \Gamma_2, & \end{aligned}$$

thus  $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ . But if the set  $\Gamma_2$  is wider then the algorithms 1–3 are not able to generate any possible scaling function! On the other hand, if  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  then the algorithms are actually the necessary and sufficient condition for  $\hat{\varphi}$  to be an orthogonal scaling function with compact support. Let us prove this.

**Theorem 3.** *Set  $\Gamma_1$  contains the set  $\Gamma_2$ , i. e.  $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ .*

**Proof.** To prove the fact, we need to show that any graph satisfying the properties from Theorem 2 can be constructed from some  $N$ -valid tree using algorithms 1–2.

Consider  $\Gamma \in \Gamma_2$ . Let us construct  $\tilde{T}$  from algorithm 1 based on this graph.

**Step 1.** Choose  $\bar{\alpha}^1 = (\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_N^1)$ ,  $\alpha_i^1 = \overline{0, p-1}$ . Then choose the longest path of the form  $p^{(1)} = \bar{\alpha}^1 \rightarrow p^{2,(1)} \rightarrow \dots \rightarrow \bar{p}^{l_1,(1)} \rightarrow \bar{0}$ , i. e. the longest path starting from  $\bar{\alpha}^1$  and ending with  $\bar{0}$ . This path exists since there are no cycles (and thus no paths of unlimited length) and since there exists a path from each nonzero vertex to  $\bar{0}$ . If there exist several paths of maximal length we choose any of them. Let us include this path into the tree. At this point the tree consists of the only “branch”:

$$\bar{\alpha}^1 \rightarrow p^{2,(1)} \rightarrow \dots \rightarrow \bar{p}^{l_1,(1)} \rightarrow \bar{0}.$$

Denote  $p^{1,(1)} = \bar{\alpha}^1, p^{l_1+1,(1)} = \bar{0}$ .

**Step 2.** Choose the next value  $\bar{\alpha}^2 = (\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_N^2)$ ,  $\alpha_i^2 = \overline{0, p-1}$ . Choose the longest path  $p^{(2)} = \bar{\alpha}^2 \rightarrow p^{2,(2)} \rightarrow \dots \rightarrow p^{l_2,(2)} \rightarrow \bar{0}$ . Denote  $p^{1,(2)} = \bar{\alpha}^2, p^{l_2+1,(2)} = \bar{0}$ . Again, let us mention that if there exist several longest paths we choose an arbitrary one. Include this path into a tree.

Out of all vertices of  $p^{(2)}$  already in the tree choose vertex  $p^{k,(2)}$  with the lowest  $k$ . It’s guaranteed that at least  $\bar{0}$  is already in the tree. Two cases are possible: either the whole “tail” of the path  $p^{k,(2)} \rightarrow p^{k+1,(2)} \rightarrow \dots \rightarrow p^{l_2,(2)} \rightarrow \bar{0}$  is already in the tree or not. In the latter case it means that there exists path of the same length from  $p^{k,(2)}$  to  $\bar{0}$ . Indeed, since we chose the longest paths from  $\bar{\alpha}^2$ , the “tail” of such path starting from any  $p^{m,(2)}$  is the longest path from the vertex  $p^{m,(2)}$ .

**Case 1.** The “tail” is in the tree already.

In this case  $\exists k, j : p^{k,(2)} = p^{j,(1)}$ , where  $k, j$  are the greatest of all such values, and  $\forall i, p^{k+i,(2)} = p^{j+i,(1)}$ . If  $k = 1$  then the whole path  $p^{(2)}$  is in the tree already and we do not change it. Otherwise connect the path  $\bar{\alpha}^2 \rightarrow \dots \rightarrow p^{k-1,(2)}$  to  $p^{k,(2)} = p^{j,(1)}$ . We have included his path in the tree. No cycles have appeared in the process, so our structure is a tree, still.



**Case 2.** The “tail” is not in the tree.

As we have already discussed, in this case the path from  $p^{k,(2)}$  to  $\bar{0}$  existing in the tree (denote it by  $p^{k,(2)} \rightarrow \tilde{p}^{k+1,(2)} \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{p}^{l_2,(2)} \rightarrow \bar{0}$ ), has the same length as the “tail”  $p^{k,(2)} \rightarrow p^{k+1,(2)} \rightarrow \dots \rightarrow p^{l_2,(2)} \rightarrow \bar{0}$ . It means that original graph  $\Gamma$  contains both of them. Let us choose

$$\tilde{p}^{(2)} = \bar{\alpha}^2 \rightarrow p^{2,(2)} \rightarrow \dots p^{k,(2)} \rightarrow \tilde{p}^{k+1,(2)} \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{p}^{l_2,(2)} \rightarrow \bar{0}$$

instead of  $p^{(2)}$  and include it in the same way as Case 1.

**Step  $n$ .** Choose the next vertex  $\bar{\alpha}^n$ . Choose the longest path  $p^{(n)} = \bar{\alpha}^n \rightarrow p^{2,(n)} \rightarrow \dots \rightarrow p^{l_n,(n)} \rightarrow \bar{0}$ . Assume all paths  $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n-1)}$  have already been included in the tree, and include  $p^{(n)}$  into it. Denote  $p^{1,(i)} = \bar{\alpha}^i, p^{i+1,(i)} = \bar{0}$

Similarly to Step 2 we have already chosen  $p^{k,(n)}$  in the tree and having the lowest possible index  $k$ . The “tail” of  $p^{k,(n)} \rightarrow p^{k+1,(n)} \rightarrow \dots \rightarrow p^{l_n,(n)} \rightarrow \bar{0}$  is either in the tree already or we can rechoose it to satisfy this property.

If  $k = 1$  then the whole path  $p^{(n)}$  is in the tree already and we don’t change anything. Otherwise connect the path  $\bar{\alpha}^n \rightarrow \dots \rightarrow p^{k-1,(n)}$  to  $p^{k,(n)}$  which is in the tree already. The path is included, no cycles have appeared, we still have a tree.

Choosing all possible  $\alpha_i$  we obtain a tree with all those vertices. During the construction process we used paths from  $\Gamma \in \mathbf{\Gamma}_2$ , thus:

- 1) every possible  $\alpha_i$  appears in the tree only once;
- 2) the vertex  $\bar{0}$  is a root;
- 3) if there exists an arc  $\bar{\alpha}^i \rightarrow \bar{\alpha}_{i+1}$  that implies that the last  $N - 1$  components of  $\bar{\alpha}^i$  are equal to the first  $N - 1$  components of  $\bar{\alpha}^{i+1}$ , i.e. suffix-prefix property holds.

These properties mean that we got an expanded  $N$ -valid tree  $\tilde{T}$ . It is easy to return to the shortened one  $T$  if needed. Let us now reconstruct  $\Gamma$  using this tree.

All the arcs of  $\tilde{T}$  also exist in  $\Gamma$ . Let us add the arcs which exist in  $\Gamma$  but not in  $\tilde{T}$ .

Let us prove that each added arc is the arc from higher level vertex to the lower level one. Indeed, by construction any path  $\bar{\alpha}^k \rightarrow \bar{\alpha}^{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow \bar{\alpha}^{k+s} \rightarrow \bar{0}$  of length  $s + 2$  is the longest path of  $\Gamma$  starting from  $\bar{\alpha}^k$ . Let  $\bar{\alpha}^j$  be a vertex of a greater or equal level, i.e. the path  $\bar{\alpha}^j \rightarrow \bar{\alpha}^{j+1} \rightarrow \dots \rightarrow \bar{\alpha}^{j+s_1} \rightarrow \bar{0}$  has the length  $s_1 + 2$ , where  $s_1 \geq s$ . If we need to connect  $\bar{\alpha}^k$  with  $\bar{\alpha}^j$  while reconstructing arcs of  $\Gamma$ , it means that there exists the path  $\bar{\alpha}^k \rightarrow \bar{\alpha}^j \rightarrow \bar{\alpha}^{j+1} \rightarrow \dots \rightarrow \bar{\alpha}^{j+s_1} \rightarrow \bar{0}$  and it has the length of  $s_1 + 3 > s + 2$  greater than the chosen longest path  $\bar{\alpha}^k \rightarrow \bar{\alpha}^{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow \bar{\alpha}^{k+s} \rightarrow \bar{0}$ . It is impossible by construction.

Thus, for an arbitrary  $\Gamma \in \mathbf{\Gamma}_2$  we found  $N$ -valid tree  $\tilde{T}$  which can generate  $\Gamma$  using algorithm 2. The theorem is proved.  $\square$

The collection of Theorems 1–3 shows that there is a bijection between all possible supports of scaling function and graphs of class  $\mathbf{\Gamma}_1 = \mathbf{\Gamma}_2$ . Algorithms 1, 2 describe a way of constructing such graphs, algorithm 3 shows how to construct an orthogonal scaling function. On the other hand, we have a descriptions of all these graphs in Theorem 2. These are all small, but pleasant consequences of the work. The main achievement is the following, though.

We have proven that by the use of algorithms 1–3 we can obtain any possible  $\varphi(x) \in \mathcal{D}_M(G_{-N})$  which generates an orthogonal MRA on Vilenkin groups, thus the algorithms 1–3 can be viewed as a necessary and sufficient condition for such function.

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00152a).



## References

1. Protasov V. Yu., Farkov Yu. A. Dyadic wavelets and refinable functions on a half-line. *Sb. Math.*, 2006, vol. 197, iss. 10, pp. 1529–1598. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM2006v197n10ABEH003811>
2. Farkov Yu. A. Biorthogonal dyadic wavelets on  $\mathbb{R}_+$ . *Russian Math. Surveys*, 2007, vol. 62, iss. 6, pp. 1197–1198. DOI: <https://doi.org/10.1070/RM2007v062n06ABEH004494>
3. Protasov V. Yu. Dyadic wavelet approximation. *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, iss. 11, pp. 1665–1681. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM2007v198n11ABEH003900>
4. Farkov Yu. A. Orthogonal wavelets with compact support on locally compact Abelian groups. *Izv. Math.*, 2005, vol. 69, iss. 3, pp. 623–650. DOI: <https://doi.org/10.1070/IM2005v069n03ABEH000540>
5. Farkov Yu. A. Orthogonal wavelets on direct products of cyclic groups. *Math. Notes*, 2007, vol. 82, iss. 5, pp. 843–859.
6. Lukomskii S. F. Multiresolution analysis on zero-dimensional Abelian groups and wavelets bases. *Sb. Math.*, 2010, vol. 201, iss. 5, pp. 669–691. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM2010v201n05ABEH004088>
7. Lukomskii S. F. Step refinable functions and orthogonal MRA on Vilenkin groups. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2014, vol. 20, iss. 1, pp. 42–65. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00041-013-9301-6>
8. Lukomskii S. F. Riesz Multiresolution Analysis on Vilenkin Groups. *Dokl. Math.*, 2014, vol. 90, iss. 1, pp. 412–415. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064562414040061>
9. Lukomskii S. F. Riesz multiresolution analysis on zero-dimensional groups. *Izv. Math.*, 2015, vol. 79, iss. 1, pp. 145–176. DOI: <https://doi.org/10.1070/IM2015v079n01ABEH002737>
10. Lukomskii S. F., Berdnikov G. S. N-Valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups. *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.*, 2015, vol. 13, no. 05, 1550037. DOI: <https://doi.org/10.1142/S021969131550037X>
11. Berdnikov G. S., Lukomskii S. F., Kruss Iu. S. On orthogonal systems of shifts of scaling function on local fields of positive characteristic. *Turk. J. Math.*, 2017, vol. 41, pp. 244–253. DOI: <https://doi.org/10.3906/mat-1504-7>

---

### Cite this article as:

Berdnikov G. S. Necessary and Sufficient Condition for an Orthogonal Scaling Function on Vilenkin Groups. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 1, pp. 24–33. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-24-33>

---

УДК 517.986.62

## Необходимое и достаточное условие ортогональной масштабирующей функции на группах Виленкина

Г. С. Бердников

Бердников Глеб Сергеевич, ассистент кафедры математического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83, [evrointelligent@gmail.com](mailto:evrointelligent@gmail.com)

Существуют несколько подходов к задаче построения ортогонального кратномасштабного анализа на группах Виленкина, но все они сводятся к поиску так называемой масштабирующей функции. В 2005 г. Ю. А. Фарков использовал так называемые «блокированные» множества, чтобы строить все возможные масштабирующие функции с компактным носителем и ограниченной частотной полосой





для каждого набора неких параметров, его условия оказались необходимыми и достаточными. С. Ф. Лукомский, Ю. С. Крусс и Г. С. Бердников представили другой подход в 2014–2015 гг., который имеет некие преимущества перед другими и использует аппарат дискретной математики для достижения тех же целей. Результатом этого подхода является алгоритм построения ортогональных масштабирующих функций с ограниченной частотной полосой и компактным носителем в конкретном виде, используя некий класс ориентированных графов, которые, в свою очередь, строятся по так называемым  $N$ -валидным деревьям, введенным теми же авторами в 2012 г. До этого момента, однако, было неизвестно, достаточно ли этот алгоритм хорош, чтобы порождать любую из возможных ортогональных масштабирующих функций такого класса. Эта работа описывает вышеупомянутый алгоритм и доказывает, что его можно воспринимать как необходимое и достаточное условие, то есть он может порождать любую возможную ортогональную масштабирующую функцию. Дополнительно мы получим другое, более удобное описание интересующего нас класса ориентированных графов.

*Ключевые слова:* группа Виленкина, абелева группа, вейвлеты, масштабирующая функция, КМА, ориентированные графы.

Поступила в редакцию: 16.10.2018 / Принята: 18.12.2018 / Опубликовано онлайн: 28.02.2019

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152а).

---

**Образец для цитирования:**

*Berdnikov G. S. Necessary and Sufficient Condition for an Orthogonal Scaling Function on Vilenkin Groups [Бердников Г. С. Необходимое и достаточное условие ортогональной масштабирующей функции на группах Виленкина] // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 1. С. 24–33. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-24-33>*

---



УДК 517.927.25

## Спектральный метод Ильина установления свойств базисности и равномерной сходимости биортогональных разложений на конечном интервале

И. С. Ломов

Ломов Игорь Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор, и.о. заведующего кафедрой общей математики, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, Москва, Ленинские Горы, lomov@cs.msu.ru

В работе обсуждаются основы спектрального метода В. А. Ильина на примере простого дифференциального оператора второго порядка на отрезке числовой прямой. Сформулирована первая теорема Ильина о безусловной базисности. Приведено ее подробное доказательство. Прослежена цепочка обобщений этой теоремы и сформулирована недавно установленная теорема о безусловной базисности для дифференциальных операторов с общими — интегральными — краевыми условиями. Продемонстрирована схема обоснования утверждений о равномерной сходимости биортогональных разложений функций с использованием метода Ильина. Сформулированы основные теоремы, в том числе недавно установленная теорема для операторов с интегральными краевыми условиями.

*Ключевые слова:* дифференциальный оператор, собственные и присоединенные функции, спектр, безусловный базис, равномерная сходимость биортогональных рядов.

Поступила в редакцию: 13.04.2018 / Принята: 15.06.2018 / Опубликовано онлайн: 28.02.2019

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-34-58>

*К 90-летию  
замечательного подвижника математики  
Владимира Александровича Ильина*

В 1975 г. В. А. Ильин опубликовал две работы [1, 2], заложившие основу нового метода исследования свойств собственных и присоединенных функций как самосопряженных, так и несамосопряженных дифференциальных операторов (модификация спектрального метода Ильина [3], разработанного для исследования самосопряженных эллиптических операторов). Эти работы посвящены вопросам локальной базисности подсистемы корневых функций пучка М. В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов и вопросам равномерной сходимости разложений. Новый подход заключался в отказе от рассмотрения конкретных краевых форм оператора. Заменяли их конструктивные и легко проверяемые условия на собственные значения и системы корневых функций, т.е. рассматриваются некоторые сужения максимального оператора. Идея такого подхода восходит к А. Н. Тихонову.

В дальнейшем В. А. Ильиным и его учениками метод был применен к широкому классу неисследованных ранее обыкновенных и эллиптических операторов, спектральные задачи для которых содержали линейно собственные значения. Получены необходимые и достаточные условия безусловной базисности в  $L^2(0, 1)$  систем корневых функций, локальной базисности и локальной равномерной сходимости биортогональных разложений функций с тригонометрическим рядом Фурье, равномерной сходимости этих разложений на всем отрезке.



В основе метода лежит рассмотрение обобщенных корневых функций оператора, являющихся только регулярными решениями соответствующего дифференциального уравнения со спектральным параметром. Используются интегральные представления (формулы среднего значения, формулы сдвига) для решений этого уравнения. В случае исследования равносходимости разложений из модифицированного ядра Дирихле выделяется спектральная функция оператора и далее проводится эффективная оценка остатка с использованием априорных оценок корневых функций. В случае исследования безусловной базисности доказывается справедливость неравенства Бесселя для операторов  $L$  и  $L^*$  и далее используется известная теорема Н. К. Бари [4] о базисах Рисса.

**Безусловная базисность. Базис Рисса.** Сформулируем результаты В. А. Ильина и его учеников по безусловной базисности систем корневых функций на всем отрезке  $\overline{G} = [0, 1]$  в пространстве  $H = \mathcal{L}^2(G)$ .

Напомним, что *базисом Рисса* в  $H$  называется базис, эквивалентный ортонормированному, т.е. он получается из ортонормированного в  $H$  базиса после применения к этому базису некоторого ограниченного обратимого оператора [4]. Базис Рисса является базисом безусловной сходимости, т.е. сходимость не нарушается при любой перестановке членов ряда. Для базиса Рисса  $\{u_n\}$  в  $H$  существует единственная биортогональная система  $\{v_n\}$ , также образующая базис Рисса в  $H$ . Обе эти системы являются почти нормированными в  $H$ , т.е.  $\inf_n \|u_n\|_H > 0$  и  $\sup_n \|u_n\|_H < \infty$ .

Для доказательства теоремы о базисности Рисса используется следующая теорема Н. К. Бари [4]. Пусть  $\{u_n\}, \{v_n\}$  — биортогональные системы в пространстве  $H$ . Для того чтобы  $\{u_n\}$  образовывала базис Рисса в пространстве  $H$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\{u_n\}$  и  $\{v_n\}$  были полны в  $H$  и для них было справедливо неравенство Бесселя. В нашем случае система, биортогонально сопряженная с системой корневых функций оператора  $L$ , является системой корневых функций формально сопряженного с ним оператора  $L^+$ .

Рассмотрим оператор  $L$ , действующий в пространстве  $H$ , порожденный дифференциальной операцией  $l = d^2/dx^2 + q(x)$ ,  $q \in \mathcal{L}$ , на классе функций  $D$  — абсолютно непрерывных на  $\overline{G}$  вместе со своей производной первого порядка. Обозначим через  $L^+$  формально сопряженный с  $L$  оператор, действующий в  $H$ , порожденный дифференциальной операцией  $l^* = d^2/dx^2 + \bar{q}(x)$  на множестве  $D^* = D$ .

Рассмотрим биортонормированную в  $H$  пару систем  $\{u_n(x)\}, \{v_n(x)\}$  обобщенных собственных и присоединенных (кратко — корневых) функций операторов  $L$  и  $L^+$ , т.е. для каждого  $n \in N : u_n \in D, v_n \in D^*$ , для некоторого числа  $\lambda_n \in \mathcal{C}$  почти всюду в  $G$  имеют место равенства  $lu_n + \lambda_n^2 u_n = \theta_n \mu_n u_{n-1}$ ,  $l^* v_n + \bar{\lambda}_n^2 v_n = \theta_{n+1} \bar{\mu}_n v_{n+1}$ , где  $\theta_n = 0$ , и тогда  $u_n$  называется собственной функцией, либо  $\theta_n = 1$  (в последнем случае  $\lambda_n = \lambda_{n-1}$ ), и  $u_n$  называется присоединенной функцией,  $\theta_1 = 0, (u_n, v_k) = \delta_{nk}, n, k \in \mathcal{N}$ . Числа  $\mu_n$  выбираем в зависимости от рассматриваемой спектральной задачи 1 или 2:  $\mu_n = 1$  (задача 1), либо  $\mu_n = \omega \lambda_n$  при  $|\lambda_n| \geq 1, \mu_n = \omega = const \neq 0$  при  $|\lambda_n| < 1$  (задача 2); коэффициент  $\mu_n$  влияет только на нормировку присоединенных функций.

Отметим, что если рассматривается существенно несамосопряженный оператор  $L$ , т.е. общее число присоединенных функций в его системе корневых функций является бесконечным, то базис Рисса могут образовывать только корневые функции, являющиеся решением спектральной задачи 2.

Зафиксируем произвольное число  $\gamma \geq 0$  и свяжем с ним следующее спектральное



множество  $\Pi_\gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \rho + i\mu, \rho, \mu \in \mathbb{R}, \rho \geq 0, |\mu| \leq \gamma\}$ . Будем рассматривать числа  $\{\lambda_n\}$  такие, что с некоторыми постоянными  $c_0 > 0, \gamma \geq 0$

$$\lambda_n \in \Pi_\gamma, \quad \sum_{\lambda \leq |\lambda_n| \leq \lambda+1} 1 \leq c_0, \quad \forall \lambda \geq 0, \quad (1)$$

т.е. числа  $\lambda_n$  лежат в полосе около вещественной оси, нет конечных точек сгущения и количество присоединенных функций, отвечающих одному собственному значению, равномерно ограничено.

**Теорема 1 (см. [5]).** *Для того чтобы полные в  $H$  системы  $\{u_n(x)\}, \{v_n(x)\}$  обобщенных корневых функций операторов  $L$  и  $L^+$ , отвечающих числам  $\{\lambda_n\} \in \Pi_\gamma$ , являлись безусловными базисами в  $H$ , необходимо и достаточно, чтобы были справедливы два неравенства: неравенство (1) для суммы единиц и неравенство*

$$\|u_n\|_2 \cdot \|v_n\|_2 \leq c, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где  $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{\mathcal{L}^2(G)}$ .

В работе [5] установлен также следующий принципиальный факт: *условие базисности Рисса или обычной базисности системы корневых функций нельзя выразить в традиционной форме задания типа краевых условий*. Так, корневые функции оператора  $L$ , порожденного дифференциальной операцией

$$lu = u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u, \quad x \in G, \quad (3)$$

одними и теми же краевыми условиями  $u(0) = 0, u'(0) = u'(1)$  при  $p_1(x) \equiv p_2(x) \equiv 0$  и при правильном выборе присоединенных функций образуют базис Рисса в  $H$ , а при  $p_1(x) \equiv 1, p_2(x) \equiv 0$  не обладают свойством базисности в  $H$  ни при каком выборе корневых функций.

Этот пример показывает, что при одних и тех же краевых условиях наличие или отсутствие свойства базисности определяется значениями коэффициентов дифференциального оператора.

Отметим, что в [5] рассмотрен оператор  $L$  с дифференциальной операцией (3) и с условием  $p_1(x) \in W_1^1(G)$  ( $p_2 \in \mathcal{L}$ ). Это условие позволяет известной подстановкой убрать слагаемое  $p_1(x)u'_n(x)$  из уравнения на собственные и присоединенные функции и рассматривать далее уравнение с потенциалом  $q(x) \in \mathcal{L}(G)$ .

Работа В. А. Ильина [5] послужила отправной точкой для многочисленных исследований по проблеме безусловной базисности. Прежде чем доказывать теорему 1, перечислим некоторые из полученных результатов в этом направлении.

В работе [6] основной результат работы [5] перенесен на случай разрывного оператора  $L$ , т.е. на случай, когда корневые функции  $u_n(x)$  удовлетворяют соответствующему дифференциальному уравнению не почти всюду на всем интервале  $G$ , а только на каждом частичном интервале  $(\xi_{l-1}, \xi_l)$ , возникающем при разбиении  $G$  точками  $0 = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_s < \xi_{s+1} = 1$ . При этом в точках  $\xi_p, 1 \leq p \leq s$ , допускаются совершенно произвольные условия сшивания корневых функций.

Основной результат работы [6] нацелен на установление условий базисности Рисса задач с так называемыми нелокальными краевыми условиями, например, с условиями вида

$$u(1) = \sum_{l=1}^s \alpha_l u(\xi_l) \quad \text{и} \quad u'(0) = \sum_{l=1}^s \beta_l u'(\xi_l).$$



Задачи, сопряженные к задачам с такими условиями, как раз и являются задачами с разрывным оператором.

Результат работы [6] перенесен в [7] на разрывный оператор Шредингера  $(U = U'' + Q(x)U)$  с матричным неэрмитовым потенциалом  $Q(x)$  с комплекснозначными и только суммируемыми на  $G$  элементами  $Q_{ij}(x)$ . Соответствующие теоремы в [6, 7] формулируются в точности как теорема 1.

Этот результат получил развитие в нескольких направлениях. Для системы уравнений первого порядка теорему доказали Е. И. Моисеев и М. Барновска [8]. На операторы 4-го порядка теорему 1 перенес Н. Б. Керимов [9, 10]. В дополнение к условиям теоремы 1 показано, что необходимым и достаточным условием базисности для дифференциальных операторов порядка выше второго является условие

$$\exists c = \text{const} > 0 : \sum_{|\lambda_n| \leq N} \|u_n\|_\infty^2 \|u_n\|_2^{-2} \leq cN,$$

для каждой из систем  $\{u_n\}$  и  $\{v_n\}$ . Для оператора второго порядка Н. Б. Керимов показал, что если ранг собственных функций равномерно ограничен и система  $\{v_n\}$  состоит из корневых функций оператора  $L^+$ , то первое условие (1) ( $|\text{Im} \lambda_n| \leq c_0$ ,  $\forall n$ ) является необходимым для безусловной базисности (это условие необходимо и для базисности в  $\mathcal{L}^p(G)$ ,  $p \in (1, \infty)$  [11]). Доказано [11], что при указанных двух условиях в случае, если система  $\{u_n\}$  образует базис в  $\mathcal{L}^2(G)$ , этот базис является безусловным. Аналогичный результат для нормированных базисов в  $\mathcal{L}^2(G)$  доказал Л. В. Крицков [12].

В 1977 г. В. А. Ильин [13] исследовал вопрос о сходимости разложений в точках разрыва коэффициентов оператора второго порядка, на такие операторы теорему о безусловной базисности перенес В. Д. Будаев [14].

Для оператора шестого и выше — четного — порядков теорему о безусловной базисности в  $\mathcal{L}^2(G)$  доказал В. Д. Будаев [15–17]. Примерно в то же время для оператора произвольного порядка в  $m$ -мерном пространстве вектор-функций теорема доказана в [18]; доказана и необходимость второго условия (1) для безусловной базисности. В дальнейшем эту теорему для оператора четного порядка при несколько более широких предположениях доказал В. М. Курбанов [19]. Теорему о безусловной базисности в  $\mathcal{L}^2(G)$  для оператора Шредингера с сингулярным потенциалом  $q(x)$  доказал Л. В. Крицков [20, 21] (условие на потенциал  $q(x) : x(1-x)q(x) \in \mathcal{L}(G)$ ).

Все указанные теоремы о безусловной базисности в  $\mathcal{L}^2(G)$  доказаны в рамках метода В. А. Ильина — безотносительно к конкретному виду краевых условий (более того, В. А. Ильин и Е. И. Моисеев [22] показали, что результат справедлив и для систем, состоящих из подмножеств двух различных краевых задач). Но во всех теоремах предполагается, что биортогональная система  $\{v_n\}$  состоит из корневых функций оператора  $L^+$  и удовлетворяет тем же требованиям, что и  $\{u_n\}$ . В частности,  $v_n \in D$  — гладкие функции. Оказалось, что это возможно только для двухточечных краевых условий — с данными в точках  $x = 0$  и  $x = 1$ . Появление любой внутренней точки из  $G$  в краевых формах приводит к разрывам у функций  $v_n$  или их производных, т. е.  $v_n \notin D$ . Поскольку для обоснования теорем над  $u_n$  и  $v_n$  совершаются одни и те же действия, то возникла идея доказать теорему для случая, когда оба оператора  $L$  и  $L^+$  определены на классе функций  $y(x) \in D$  на конечном числе отрезков  $[x_{k-1}, x_k]$ ,  $k = \overline{1, l}$ , составляющих  $\overline{G}$ . Как отмечалось выше, впервые это сделал В. А. Ильин [6, 7] в скалярном и векторном случаях.



Однако и эти результаты не охватывали всех видов краевых форм; подходили только многоточечные условия с конечным числом внутренних точек. В общем случае краевые формы следует рассматривать как линейные непрерывные функционалы в пространстве  $C(\overline{G})$  (или  $C^1$ ). Но тогда по теореме Рисса [23, с. 347] каждый функционал представим в виде интеграла Стилтеса по мере, порожденной некоторой функцией с ограниченным изменением. Таким образом, естественным путем приходим к необходимости изучить краевую задачу с интегральными краевыми условиями. Так как функцию с ограниченным изменением можно представить в виде суммы функции скачков, абсолютно непрерывной функции и непрерывной сингулярной функции, то и краевые формы распадаются на сумму трех слагаемых — дискретную часть, содержащую значения функции и ее производных в отдельных точках отрезка  $\overline{G}$  (причем точки эти могут составлять плотное множество на  $\overline{G}$ ), интеграл от произведения на функцию из  $\mathcal{L}(G)$  и интеграл по непрерывной сингулярной мере. Сопряженный оператор для такой краевой задачи был построен Р. Брауном и А. Кроллом [24] и имеет весьма сложную структуру. Биортогонально сопряженная система теперь состоит из функций, которые сами, как и их производные, могут иметь разрывы первого рода в счетном числе точек. Точки разрывов и величины скачков определяются дискретной составляющей меры. Абсолютно непрерывная часть меры влияет на дифференциальную операцию для  $L^+$ : она становится «нагруженной», т. е. содержит функционалы от решения — значения неизвестной функции или ее производных в фиксированных точках отрезка. Отметим, что методы исследования нагруженных дифференциальных и интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории динамики грунтовых вод и в теории теплопроводности, разработаны А. М. Нахушевым и его учениками [25, 26].

В свою очередь, оператор  $L^*$  может также порождаться интегральным условием, что приводит к необходимости изучать оператор  $L$  на упомянутом множестве разрывных функций. Автором [27] построен пример задачи, где операторы  $L$  и  $L^*$  определены на множестве разрывных функций (одна точка разрыва), показано, что выполняются все условия теоремы В. А. Ильина и система корневых функций образует базис Рисса в  $\mathcal{L}^2(G)$ . Впервые безусловная базисность для столь общих неклассических операторов была доказана автором для оператора второго порядка сначала для дискретных краевых форм [28, 29], затем для общих краевых форм в пространстве вектор-функций [30, 31] и для операторов любого порядка [32]. При этом рассмотрены модельные операторы — область определения операторов не зависела от коэффициентов дифференциальной операции.

Отметим также, что для операторов четного порядка, определенных на множестве функций, разрывных в конечном числе точек, теорему о безусловной базисности в  $\mathcal{L}^2(G)$  доказал В. Д. Будаев [17], для оператора второго порядка с сингулярными коэффициентами, определенными на множестве разрывных функций, теорема доказана в [31, 33] — для разных особенностей у коэффициентов. В. А. Юрко [34] исследовал обратную задачу для граничной задачи оператора второго порядка с точкой разрыва решения внутри интервала. Показано, что система собственных функций полна в  $\mathcal{L}^2$ , получена теорема о равномерной сходимости ряда Фурье для абсолютно непрерывной функции. Такого рода задачи возникают в механике, радиоэлектронике, геофизике и др. Такие задачи решают и в связи с исследованием разрывных решений нелинейных интегрируемых уравнений в математической физике.

Ниже будет сформулирована теорема о безусловной базисности системы корневых



функций дифференциального оператора второго порядка с интегральными краевыми условиями.

Приведем еще ряд близких результатов по спектральной теории дифференциальных операторов, полученных в рамках метода Ильина. А. С. Макин [35–37] исследовал случай, когда для оператора  $L$  не выполняется условие (2). Получены достаточные условия суммируемости методом Рисса биортогональных рядов. Эти работы продолжили исследования В. А. Ильина и В. В. Тихомирова [38, 39], Я. Ш. Салимова [40], посвященные средним Рисса спектральных разложений. В. В. Тихомиров [41–43] в случае оператора второго порядка доказал ряд теорем о безусловной базисности систем регулярных корневых функций нагруженных операторов и операторов с отклоняющимся аргументом. Априорные оценки корневых функций, используемые во всех перечисленных работах, были получены в [1, 2, 11, 30, 32, 44–48].

Подробный обзор разных направлений исследований, проведенных в рамках метода Ильина содержится в [49]. Обзор результатов по сходимости спектральных разложений, полученных другими методами, подробно изложен в работе А. П. Хромова [50] (см. также статьи его и его учеников [51–54]).

**Доказательство теоремы 1.** В работе [5] содержится краткая схема доказательства этой теоремы, поэтому приведем здесь более подробное и более простое доказательство. Пусть  $\{u_n\}, \{v_n\}$  — биортогональные системы, каждая из которых полна в  $H$ . Тогда системы  $\{u_n \|u_n\|_2^{-1}\}, \{v_n \|u_n\|_2\}$  и  $\{u_n \|v_n\|_2\}, \{v_n \|v_n\|_2^{-1}\}$  являются биортогональными и каждая из них полна в  $H$ . Докажем, что для каждой из этих систем справедливо неравенство Бесселя: найдутся постоянные  $c > 0$  такие, что для  $\forall f \in H$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, u_n)|^2 \|u_n\|_2^{-2} \leq c \|f\|_2^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |(f, v_n)|^2 \|u_n\|_2^2 \leq c \|f\|_2^2, \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, u_n)|^2 \|v_n\|_2^2 \leq c \|f\|_2^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |(f, v_n)|^2 \|v_n\|_2^{-2} \leq c \|f\|_2^2. \quad (5)$$

Тогда из приведенной выше теоремы Бари следует, что каждая из этих новых систем образует базис Рисса в  $H$  и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f, v_n) u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, v_n \|u_n\|_2) u_n \|u_n\|_2^{-1} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} (f, u_n) v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, u_n \|v_n\|_2) v_n \|v_n\|_2^{-1}$$

сходятся безусловно в  $H$ , т. е. каждая из систем  $\{u_n\}$  и  $\{v_n\}$  образует безусловный базис в  $H$ .

При доказательстве первого неравенства (4) и второго неравенства (5) используются равенства  $\|u_n\|_2 \|u_n\|_2^{-1} = 1, \|v_n\|_2 \|v_n\|_2^{-1} = 1$ , при доказательстве второго неравенства (4) и первого неравенства (5) используется неравенство (2):  $\|u_n\|_2 \|v_n\|_2 \leq c$ . В остальном схемы обоснования неравенств одинаковы.

Докажем первое неравенство (4). Возьмем произвольную функцию  $f(x) \in H$ . Используя неравенство Коши – Буняковского

$$|(u_n, f)| \cdot \|u_n\|_2^{-1} \leq \|u_n\|_2 \cdot \|f\|_2 \cdot \|u_n\|_2^{-1} = \|f\|_2$$

и второе условие (1):

$$\sum_{|\lambda_n| \leq 1} |(u_n, f)|^2 \|u_n\|_2^{-2} \leq \|f\|_2^2 \sum_{|\lambda_n| \leq 1} 1 \leq c_0 \|f\|_2^2,$$



убеждаемся в том, что первое неравенство (4) достаточно установить для чисел  $\lambda_n$ :  $|\lambda_n| > 1$ .

Воспользуемся следующим представлением функций  $u_n(x)$ , отвечающих числам  $\lambda_n \neq 0$  (интегральным уравнением для  $u_n$ ), получаемым интегрированием по частям интегрального слагаемого после замены  $\theta_n \mu_n u_{n-1}(\tau) - q(\tau)u_n(\tau) = u_n''(\tau) + \lambda_n^2 u_n(\tau)$ :

$$u_n(x) = u_n(0) \cos \lambda_n x + \frac{1}{\lambda_n} u_n'(0) \sin \lambda_n x + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^x [\theta_n \mu_n u_{n-1}(\tau) - q(\tau)u_n(\tau)] \sin \lambda_n(x - \tau) d\tau. \tag{6}$$

Поскольку  $|(f, u_n)| = |(u_n, f)|$ , то используем запись  $(u_n, f)$  и обозначим  $g(x) = \bar{f}(x)$ . Умножим представление (6) на  $g(x)$  и проинтегрируем обе части равенства по  $x$  на отрезке  $\bar{G}$ :

$$(u_n, f) = u_n(0) \int_0^1 g(x) \cos \lambda_n x dx + \frac{1}{\lambda_n} u_n'(0) \int_0^1 g(x) \sin \lambda_n x dx + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^1 g(x) \int_0^x [\theta_n \mu_n u_{n-1}(\tau) - q(\tau)u_n(\tau)] \sin \lambda_n(x - \tau) d\tau dx.$$

Из этого представления скалярного произведения  $(u_n, f)$  следует, что для доказательства первого неравенства (4) для  $|\lambda_n| > 1$  достаточно доказать справедливость с некоторыми постоянными  $c > 0$  следующих четырех неравенств:

$$\sum_{|\lambda_n| > 1} |u_n(0)|^2 \left| \int_0^1 g(x) \cos \lambda_n x dx \right|^2 \|u_n\|_2^{-2} \leq c \|f\|_2^2, \tag{7}$$

$$\sum_{|\lambda_n| > 1} |\lambda_n|^{-2} |u_n'(0)|^2 \left| \int_0^1 g(x) \sin \lambda_n x dx \right|^2 \|u_n\|_2^{-2} \leq c \|f\|_2^2, \tag{8}$$

$$\sum_{|\lambda_n| > 1} |\lambda_n|^{-2} \left| \int_0^1 g(x) \int_0^x \theta_n \mu_n u_{n-1}(\tau) \sin \lambda_n(x - \tau) d\tau dx \right|^2 \|u_n\|_2^{-2} \leq c \|f\|_2^2, \tag{9}$$

$$\sum_{|\lambda_n| > 1} |\lambda_n|^{-2} \left| \int_0^1 g(x) \int_0^x q(\tau)u_n(\tau) \sin \lambda_n(x - \tau) d\tau dx \right|^2 \|u_n\|_2^{-2} \leq c \|f\|_2^2, \tag{10}$$

Докажем эти неравенства. Нам потребуются следующие априорные оценки, установленные в [44, 45].

**Лемма 1.** Пусть потенциал  $q(x) \in \mathcal{L}(G)$ . Тогда найдется такая постоянная  $c > 0$ , что для всех чисел  $\lambda \in \Pi_\gamma$  для цепочек корневых функций  $\{u_j(x)\}_{j=0}^m$  оператора  $L$ , отвечающих параметру  $\lambda$ , справедливы следующие оценки ( $r = \overline{0, m}$ ,  $0 \leq j \leq r$ ):

$$\|u_j^{(\alpha)}\|_\infty \leq c(1 + |\lambda|)^{r-j+\alpha-\beta} \|u_r^{(\beta)}\|_2, \quad \alpha, \beta \in \{0, 1\}, \tag{11}$$





для спектральной задачи 1, а для спектральной задачи 2

$$\|u_j^{(\alpha)}\|_\infty \leq c(1 + |\lambda|)^{\alpha-\beta} \|u_r^{(\beta)}\|_2, \quad \alpha, \beta \in \{0, 1\}. \quad (12)$$

Рассмотрим ряд из неравенства (7). Применим оценку (11) леммы 1 ( $\alpha = \beta = 0$ ,  $j = r$ , при этом оценки (11) и (12) совпадают):  $|u_n(0)| \|u_n\|_2^{-1} \leq c \|u_n\|_2 \cdot \|u_n\|_2^{-1} = c$ ,  $\forall n$ . Получим, что этот ряд мажорируется рядом

$$\sum_{|\lambda_n| > 1} \left| \int_0^1 g(x) \cos \lambda_n x dx \right|^2. \quad (13)$$

Поскольку выполняется второе условие (1) и  $|Im \lambda_n| \leq \gamma$ , то рассматриваемую последовательность  $\{\lambda_n\}$  можно расслоить на сумму конечного числа последовательностей, в каждой из которых содержится не более чем один элемент  $\lambda_n$ , удовлетворяющий условиям

$$2\pi n \leq |\lambda_n| \leq 2\pi(n + 1), \quad \lambda_n = \pm 2\pi n + \delta_n, \quad |\delta_n| \leq c, \quad n \geq 0. \quad (14)$$

Достаточно получить оценку ряда (13) для каждой из таких последовательностей. Используем формулу тригонометрии:

$$\cos \lambda_n x = \cos(\pm 2\pi n x + \delta_n x) = \cos 2\pi n x \cos \delta_n x \mp \sin 2\pi n x \sin \delta_n x$$

и равенство  $\psi(x) = - \left( \int_x^1 \psi(\tau) d\tau \right)'_x$ . Интегрированием по частям получим:

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x) \cos \lambda_n x dx &= \int_0^1 g(x) \cos 2\pi n x \cos \delta_n x dx \mp \int_0^1 g(x) \sin 2\pi n x \sin \delta_n x dx = \\ &= - \int_0^1 \left[ \int_x^1 g(\tau) \cos 2\pi n \tau d\tau \right]' \cos \delta_n x dx \pm \int_0^1 \left[ \int_x^1 g(\tau) \sin 2\pi n \tau d\tau \right]' \sin \delta_n x dx = \\ &= - \int_x^1 g(\tau) \cos 2\pi n \tau d\tau \cos \delta_n x \Big|_{x=0}^1 - \delta_n \int_0^1 \sin \delta_n x \int_x^1 g(\tau) \cos 2\pi n \tau d\tau dx \pm \\ &\pm \int_x^1 g(\tau) \sin 2\pi n \tau d\tau \sin \delta_n x \Big|_{x=0}^1 \mp \delta_n \int_0^1 \cos \delta_n x \int_x^1 g(\tau) \sin 2\pi n \tau d\tau dx = \\ &= \int_0^1 g(\tau) \cos 2\pi n \tau d\tau - \delta_n \int_0^1 \sin \delta_n x \int_x^1 g(\tau) \cos 2\pi n \tau d\tau dx \mp \\ &\mp \delta_n \int_0^1 \cos \delta_n x \int_x^1 g(\tau) \sin 2\pi n \tau d\tau dx. \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством Коши для трех слагаемых:  $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ ,  $\forall a, b, c \in \mathcal{R}$ , ограниченностью модулей величин  $\delta_n$  (см. (14)),  $\sin \delta_n x, \cos \delta_n x$  и неравенством Коши – Буняковского, получим:

$$\left| \int_0^1 g(x) \cos \lambda_n x dx \right|^2 \leq 3 \left[ \left| \int_0^1 g(\tau) \cos 2\pi n \tau d\tau \right|^2 + \right.$$



$$\begin{aligned}
 & + \left| \delta_n \int_0^1 \sin \delta_n x \int_x^1 g(\tau) \cos 2\pi n \tau d\tau dx \right|^2 + \left| \delta_n \int_0^1 \cos \delta_n x \int_x^1 g(\tau) \sin 2\pi n \tau d\tau dx \right|^2 \Bigg] \leq \\
 & \leq 3 \left[ \left| \int_0^1 g(\tau) \cos 2\pi n \tau d\tau \right|^2 + \int_0^1 |\delta_n \sin \delta_n x|^2 dx \int_0^1 \left| \int_x^1 g(\tau) \cos 2\pi n \tau d\tau \right|^2 dx + \right. \\
 & \left. + \int_0^1 |\delta_n \cos \delta_n x|^2 dx \int_0^1 \left| \int_x^1 g(\tau) \sin 2\pi n \tau d\tau \right|^2 dx \right] \leq c \left[ \left| \int_0^1 g(\tau) \cos 2\pi n \tau d\tau \right|^2 + \right. \\
 & \left. + \int_0^1 \left| \int_x^1 g(\tau) \cos 2\pi n \tau d\tau \right|^2 dx + \int_0^1 \left| \int_x^1 g(\tau) \sin 2\pi n \tau d\tau \right|^2 dx \right]. \tag{15}
 \end{aligned}$$

Тригонометрическая система функций  $\{1, \sqrt{2} \cos 2\pi n x, \sqrt{2} \sin 2\pi n x\}_{n=1}^{\infty}$  является ортонормированной в пространстве  $\mathcal{L}^2(G)$  и для нее справедливо неравенство Бесселя. Поэтому для первого слагаемого в правой части соотношения (15) получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_0^1 g(x) \cos 2\pi n x dx \right|^2 \leq c \|g(x)\|_2^2 = c \|f\|_2^2. \tag{16}$$

Рассмотрим второе и третье слагаемые в правой части (15) и соответствующий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \left[ \left| \int_x^1 g(\tau) \cos 2\pi n \tau d\tau \right|^2 + \left| \int_x^1 g(\tau) \sin 2\pi n \tau d\tau \right|^2 \right] dx. \tag{17}$$

Для того чтобы воспользоваться неравенством Бесселя или равенством Парсеваля для тригонометрической системы функций, нужно вынести интеграл за знак суммы, т. е. показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left| \int_x^1 g(\tau) \cos 2\pi n \tau d\tau \right|^2 + \left| \int_x^1 g(\tau) \sin 2\pi n \tau d\tau \right|^2 \right] \tag{18}$$

можно интегрировать почленно по  $x$  на отрезке  $\overline{G}$ . Для этого достаточно показать, что этот ряд сходится равномерно или в среднем на  $\overline{G}$ . Отметим, что ряд (18) сходится для каждого значения  $x \in \overline{G}$  — в силу неравенства Бесселя для тригонометрической системы функций для функции  $F(x, \tau) = g(\tau)$  при  $\tau \in [x, 1]$ ,  $F(x, \tau) = 0$  при  $\tau \in [0, x)$ ,  $F(x, \tau) \in H, \forall x \in \overline{G}$ .

Фиксируем произвольную точку  $x \in [0, 1)$ . Запишем равенство Парсеваля для тригонометрической системы для этой функции  $F$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left| \int_0^1 F(x, \tau) \cos 2\pi n \tau d\tau \right|^2 + \left| \int_0^1 F(x, \tau) \sin 2\pi n \tau d\tau \right|^2 \right] = c \|F(x, \tau)\|_2^2. \tag{19}$$

Применим признак Дини равномерной сходимости функциональных рядов. Поскольку  $f(x) \in H$ , то интеграл  $\int_x^1 f(\tau) d\tau$  есть абсолютно непрерывная функция,



поэтому  $\|F(x, \tau)\|_2^2$  и слагаемые под знаком суммы в равенстве (19) есть непрерывные функции на  $\overline{G}$ . Следовательно, на отрезке  $\overline{G}$  к ряду (18) применим признак Дини, и этот ряд сходится равномерно по  $x$  на отрезке  $\overline{G}$ . Таким образом, ряд (18) на отрезке  $\overline{G}$  можно интегрировать почленно, и в соотношении (17) можно вынести интеграл за знак суммы и далее применить равенство Парсеваля (19), где мы вернемся к функции  $g(x) = \overline{f}(x)$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \left[ \left| \int_x^1 g(\tau) \cos 2\pi n\tau d\tau \right|^2 + \left| \int_x^1 g(\tau) \sin 2\pi n\tau d\tau \right|^2 \right] dx = \\ & = \int_0^1 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left| \int_x^1 g(\tau) \cos 2\pi n\tau d\tau \right|^2 + \left| \int_x^1 g(\tau) \sin 2\pi n\tau d\tau \right|^2 \right] \right] dx = \\ & = c \int_0^1 \int_x^1 |g(\tau)|^2 d\tau dx \leq c \|g\|_2^2 = c \|f\|_2^2, \end{aligned}$$

что в соединении с оценкой (16) дает оценку ряда (13):

$$\sum_{|\lambda_n|>1} \left| \int_0^1 g(x) \cos \lambda_n x dx \right|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_0^1 g(x) \cos pm2\pi nx + \delta_n x dx \right|^2 \leq c \|g\|_2^2 = c \|f\|_2^2, \quad (20)$$

для каждой рассматриваемой выделенной последовательности  $\{\lambda_n\}$ . А это доказывает справедливость неравенства (7).

Рассмотрим ряд из неравенства (8). Применим оценку (11) леммы 1 для  $\alpha = 1$  и  $j = r, \beta = 0$ :  $|\lambda_n|^{-1} |u'_n(0)| \cdot \|u_n\|_2^{-1} \leq c |\lambda_n|^{-1} \left[ (1 + |\lambda_n|) \|u_n\|_2 \right] \|u_n\|_2^{-1} \leq c_1$  и заключим, что этот ряд мажорируется рядом

$$\sum_{|\lambda_n|>1} \left| \int_0^1 g(x) \sin \lambda_n x dx \right|^2, \quad (21)$$

для которого получаем оценку (20), повторяя ту же схему, что была применена для ряда (13). Нужно только использовать другую тригонометрическую формулу для  $\lambda_n$  из (14):  $\sin \lambda_n x = \pm \sin 2\pi nx \cos \delta_n x + \cos 2\pi nx \sin \delta_n x$ , вся последующая схема не изменяется (с точностью до знаков слагаемых).

Обратимся к ряду из неравенства (9). Преобразуем общий член ряда, поменяв местами интегралы, применив априорные оценки (11), (12) с  $\alpha = \beta = 0, j = r - 1$ , неравенство Коши – Буняковского, учтем условие  $\lambda_n \in \Pi_\gamma$  и используем неравенство Коши  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ :

$$\begin{aligned} & |\lambda_n|^{-2} \left| \int_0^1 g(x) \int_0^x \theta_n \mu_n u_{n-1}(\tau) \sin \lambda_n(x - \tau) d\tau dx \right|^2 \|u_n\|_2^{-2} = \\ & = |\lambda_n|^{-2} \|u_n\|_2^{-2} \left| \int_0^1 \theta_n \mu_n u_{n-1}(\tau) \int_\tau^1 g(x) \sin \lambda_n(x - \tau) dx d\tau \right|^2 = |\lambda_n|^{-2} \|u_n\|_2^{-2} \times \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \times \left| \int_0^1 \theta_n \mu_n u_{n-1}(\tau) \left[ \cos \lambda_n \tau \int_{\tau}^1 g(x) \sin \lambda_n x dx + \sin \lambda_n \tau \int_{\tau}^1 g(x) \cos \lambda_n x dx \right] d\tau \right|^2 \leq \\ & \leq c |\lambda_n|^{-2} \|u_n\|_2^{-2} (1 + |\lambda_n|)^2 \|u_n\|_2^2 \left[ \int_0^1 \left[ \left| \int_{\tau}^1 g(x) \sin \lambda_n x dx \right| + \left| \int_{\tau}^1 g(x) \cos \lambda_n x dx \right| \right] d\tau \right]^2 \leq \\ & \leq c_1 \left[ \int_0^1 \left| \int_{\tau}^1 g(x) \cos \lambda_n x dx \right|^2 d\tau + \int_0^1 \left| \int_{\tau}^1 g(x) \sin \lambda_n x dx \right|^2 d\tau \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, для установления оценки (9) достаточно получить аналогичные оценки для двух рядов

$$\sum_{|\lambda_n| > 1} \int_0^1 \left| \int_{\tau}^1 g(x) \cos \lambda_n x dx \right|^2 d\tau; \quad \sum_{|\lambda_n| > 1} \int_0^1 \left| \int_{\tau}^1 g(x) \sin \lambda_n x dx \right|^2 d\tau. \quad (22)$$

Повторим схему, примененную для оценки рядов (13), (21), внося в нее необходимые изменения. Будем преобразовывать первый ряд (22). Расщепим последовательность  $\{\lambda_n\}$  на подпоследовательности и представим числа  $\lambda_n$  в виде (14), используем формулу косинуса суммы и применим формулу интегрирования по частям. Получим

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^1 g(x) \cos \lambda_n x dx &= \int_{\tau}^1 g(x) \cos(\pm 2\pi n x + \delta_n x) dx = \int_{\tau}^1 g(x) \cos 2\pi n x \cos \delta_n x dx \mp \\ & \mp \int_{\tau}^1 g(x) \sin 2\pi n x \sin \delta_n x dx = - \int_{\tau}^1 \left[ \int_x^1 g(\xi) \cos 2\pi n \xi d\xi \right]' \cos \delta_n x dx \pm \\ & \pm \int_{\tau}^1 \left[ \int_x^1 g(\xi) \sin 2\pi n \xi d\xi \right]' \sin \delta_n x dx = \cos \delta_n \tau \int_{\tau}^1 g(\xi) \cos 2\pi n \xi d\xi - \\ & - \delta_n \int_{\tau}^1 \sin \delta_n x \int_x^1 g(\xi) \cos 2\pi n \xi d\xi dx \mp \sin \delta_n \tau \int_{\tau}^1 g(\xi) \sin 2\pi n \xi d\xi \mp \\ & \mp \delta_n \int_{\tau}^1 \cos \delta_n x \int_x^1 g(\xi) \sin 2\pi n \xi d\xi dx. \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством Коши для четырех слагаемых  $(a + b + c + d)^2 \leq 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ , ограниченностью модулей величин  $\delta_n$ ,  $\sin \delta_n x$ ,  $\cos \delta_n x$  и неравенством Коши – Буняковского. Получаем:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tau}^1 g(x) \cos \lambda_n x dx \right|^2 &\leq 4 \left[ \left| \cos \delta_n \tau \int_{\tau}^1 g(\xi) \cos 2\pi n \xi d\xi \right|^2 + \left| \sin \delta_n \tau \int_{\tau}^1 g(\xi) \sin 2\pi n \xi d\xi \right|^2 + \right. \\ & \left. + \left| \delta_n \int_{\tau}^1 \sin \delta_n x \int_x^1 g(\xi) \cos 2\pi n \xi d\xi dx \right|^2 + \left| \delta_n \int_{\tau}^1 \cos \delta_n x \int_x^1 g(\xi) \sin 2\pi n \xi d\xi dx \right|^2 \right] \leq \end{aligned}$$



$$\leq c \left[ \left| \int_{\tau}^1 g(\xi) \cos 2\pi n \xi d\xi \right|^2 + \left| \int_{\tau}^1 g(\xi) \sin 2\pi n \xi d\xi \right|^2 + \int_{\tau}^1 \left| \int_x^1 g(\xi) \cos 2\pi n \xi d\xi \right|^2 dx + \int_{\tau}^1 \left| \int_x^1 g(\xi) \sin 2\pi n \xi d\xi \right|^2 dx \right].$$

Для общего члена первого ряда (22) имеем неравенство

$$\int_0^1 \left| \int_{\tau}^1 g(x) \cos \lambda_n x dx \right|^2 d\tau \leq c \int_0^1 \left[ \left| \int_{\tau}^1 g(\xi) \cos 2\pi n \xi d\xi \right|^2 + \left| \int_{\tau}^1 g(\xi) \sin 2\pi n \xi d\xi \right|^2 \right] d\tau + c \int_0^1 \int_{\tau}^1 \left[ \left| \int_x^1 g(\xi) \cos 2\pi n \xi d\xi \right|^2 dx + \left| \int_x^1 g(\xi) \sin 2\pi n \xi d\xi \right|^2 \right] dx d\tau,$$

и задача сводится к получению оценок через  $c\|f\|_2^2$  для рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \left[ \left| \int_{\tau}^1 g(\xi) \cos 2\pi n \xi d\xi \right|^2 + \left| \int_{\tau}^1 g(\xi) \sin 2\pi n \xi d\xi \right|^2 \right] d\tau, \quad (23)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \int_{\tau}^1 \left[ \left| \int_x^1 g(\xi) \cos 2\pi n \xi d\xi \right|^2 dx + \left| \int_x^1 g(\xi) \sin 2\pi n \xi d\xi \right|^2 \right] dx d\tau. \quad (24)$$

Ряд (23) совпадает с рядом (17) (с точностью до обозначения переменных), для него нужная оценка получена выше.

Исследуем ряд (24). В отличие от ряда (17), в (24) нужно два интеграла вынести за знак суммы и применить неравенство Бесселя или равенство Парсеваля для тригонометрической системы функций. Для того чтобы внешний интеграл в (24) вынести за знак суммы, докажем равномерную по  $\tau \in \overline{G}$  сходимую ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\tau}^1 \left[ \left| \int_x^1 g(\xi) \cos 2\pi n \xi d\xi \right|^2 dx + \left| \int_x^1 g(\xi) \sin 2\pi n \xi d\xi \right|^2 \right] dx. \quad (25)$$

Выше мы показали, что ряд (18) сходится равномерно по  $x \in \overline{G}$ . Общий член ряда (18) — непрерывная функция, следовательно, ряд сходится и в точке максимума функции, т. е. сходится числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ , где  $\varphi_n = \max \left[ \left| \int_x^1 g(\xi) \cos 2\pi n \xi d\xi \right|^2 dx + \left| \int_x^1 g(\xi) \sin 2\pi n \xi d\xi \right|^2 \right] \geq 0$ . Но общий член ряда (25) не превосходит  $\varphi_n$  для каждого значения  $\tau \in \overline{G}$ , следовательно, ряд (25) сходится равномерно по  $\tau$  на отрезке  $\overline{G}$  (согласно признаку Вейерштрасса). Таким образом, интеграл по  $\tau$  в (24) можно вынести за знак суммы, так как согласно известной теореме анализа, ряд (25) можно почленно интегрировать по  $\tau$  на отрезке  $\overline{G}$  (общий член ряда (25) есть непрерывная на  $\overline{G}$  функция).

Фиксируем произвольное значение  $\tau \in \overline{G}$  и покажем, что ряд (18) можно почленно интегрировать по  $x$  на отрезке  $[\tau, 1]$ . Выше мы показали, что ряд (18) сходится



равномерно по  $x$  на отрезке  $\overline{G}$ , следовательно, он сходится равномерно по  $x$  и на отрезке  $[\tau, 1]$ . Общий член ряда (18) непрерывен на  $[\tau, 1]$ . Поэтому ряд (18) можно почленно интегрировать по  $x$  на  $[\tau, 1]$  и в ряде (25) интеграл по  $x$  можно вынести за знак суммы. Далее остается записать равенство Парсеваля (19) для функции  $F(x, \xi, \tau) : F(x, \xi, \tau) = g(\xi)$  для  $\xi \in [x, 1]$ ,  $F(x, \xi, \tau) = 0$  для  $\xi \in [\tau, x]$ . В итоге получим для ряда (24), возвращаясь к функции  $g(x)$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \int_{\tau}^1 \left[ \left| \int_x^1 g(\xi) \cos 2\pi n \xi d\xi \right|^2 + \left| \int_x^1 g(\xi) \sin 2\pi n \xi d\xi \right|^2 \right] dx d\tau = \\ & = \int_0^1 \int_{\tau}^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left| \int_x^1 g(\xi) \cos 2\pi n \xi d\xi \right|^2 + \left| \int_x^1 g(\xi) \sin 2\pi n \xi d\xi \right|^2 \right] \right) dx d\tau = \\ & = c \int_0^1 \int_{\tau}^1 \int_x^1 |g(\xi)|^2 d\xi dx d\tau \leq \|g\|_2^2 = c \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Тем самым для ряда (24) получена искомая оценка. Это завершает установление оценки для первого ряда (22). Второй ряд (22) оценивается точно так же с заменой косинуса на синус. Оценка (9) доказана.

Для получения оценки (10) для общего члена ряда применим априорную оценку (11) с  $\alpha = \beta = 0$ ,  $j = r$ , неравенство Коши – Буняковского и учтем условие  $\lambda_n \in \Pi_{\gamma}$ :

$$\begin{aligned} & |\lambda_n|^{-2} \left| \int_0^1 g(x) \int_0^x q(\tau) u_n(\tau) \sin \lambda_n(x - \tau) d\tau dx \right|^2 \|u_n\|_2^{-2} \leq \\ & \leq c |\lambda_n|^{-2} \|u_n\|_2^{-2} \left[ \int_0^1 |g(x)| \int_0^1 |q(\tau) u_n(\tau)| d\tau dx \right]^2 \leq \\ & \leq c |\lambda_n|^{-2} \|u_n\|_2^{-2} \cdot \|q\|_1^2 \cdot \|u_n\|_{\infty}^2 \cdot \|g\|_2^2 \leq c_1 |\lambda_n|^{-2} \|f\|_2^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Используя второе условие (1) для последовательности  $\{\lambda_n\}$ , установим сходимость ряда с общим членом  $|\lambda_n|^{-2}$ :

$$\sum_{|\lambda_n| > 1} |\lambda_n|^{-2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n \leq |\lambda_n| \leq n+1} |\lambda_n|^{-2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{n \leq |\lambda_n| \leq n+1} 1 \leq c_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = c = \text{const}. \quad (27)$$

Из соотношений (26), (27) следует справедливость неравенства (10).

Это завершает обоснование первого неравенства (4). Теорема 1 доказана.

**Дифференциальный оператор с интегральными краевыми условиями.** Сформулируем теоремы о безусловной базисности и равномерной сходимости биортонормальных разложений по корневым функциям дифференциального оператора второго порядка с интегральными краевыми условиями. Доказательство этих теорем также основано на методе Ильина.

**Постановка задачи. Операторы  $L, L^+, L^*$ .** В пространстве  $H$  рассмотрим оператор  $L$ , порожденный дифференциальной операцией (3)  $ly = y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y$ ,  $x \in G$ ,

$$p_1(x) \in C(\overline{G}), \quad p_2(x) \in \mathcal{L}^1(G), \quad (28)$$



на множестве функций  $D = \{y(x) \in H : y \in W_2^2(G) \cap N(U), ly \in H\}$ , где  $W_2^2(G) = \{y(x) \in H : y \in AC^2(\overline{G}), y'' \in H\}$ ,  $AC^k(\overline{G})$ ,  $k = 1, 2$ , — класс функций  $f(x)$ , абсолютно непрерывных вместе с  $f^{(k-1)}(x)$  на  $\overline{G}$ ,  $AC^1 \equiv A$ ,  $N(U)$  — ядро функционала  $U(y) : W_2^2(G) \rightarrow \mathcal{C}^2$ ,

$$U(y) = \int_0^1 y'(x) d\nu_1(x) + \int_0^1 y(x) d\nu_2(x), \quad \nu_i = \begin{pmatrix} \nu_{i1} \\ \nu_{i2} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad (29)$$

$\nu_{ij}(x)$  — функции с ограниченным изменением на  $\overline{G}$ , непрерывные справа в каждой точке  $G$ . Функции с ограниченным изменением запишем в виде суммы  $\nu_i = \nu_i^c + \nu_i^s$ ,  $i = 1, 2$ , где  $\nu_i^c$  — вектор с абсолютно непрерывными компонентами, а  $\nu_i^s$  — сингулярная часть функции  $\nu_i(x)$ :  $\nu_i^s = \nu_i^{sc} + \nu_i^{sa}$ , где  $\nu_i^{sc}$  — вектор с непрерывными компонентами, сингулярная функция, а  $\nu_i^{sa}$  — функция скачков. Известно, что  $\nu_{ij}^s(x) \in W_1^1(G)$  и почти всюду на  $G$  производная  $(\nu_i^s)'(x)$  равна  $\theta$ . Пусть функции  $\nu_i^{sa}(x)$  имеют в точках  $\xi_p \in \overline{G}$  скачки  $\alpha_i^p \in \mathcal{C}^2$ ,  $i = 1, 2$ ,  $p = 0, 1, \dots$ . Разбиение  $T = \{\xi_p\}$  отрезка  $\overline{G}$  таково, что  $\xi_0 = 0$ ,  $\xi_1 = 1$ ,  $\xi_p \in G$ ,  $p \geq 2$ . Множество точек  $\{\xi_p\}$  может быть конечным (например, состоять всего из двух точек  $\xi_0, \xi_1$ ) или бесконечным, разбиение  $T$  может быть плотным на части или на всем  $\overline{G}$ .

Используем обозначение  $\beta_i(x) = d\nu_i^c(x)/dx$ . Краевые формы (29) теперь можно записать в виде

$$U(y) = \sum_{i=1}^2 \left[ \sum_{p=0}^{\infty} y^{(2-i)}(\xi_p) \alpha_i^p + \int_0^1 \beta_i(x) y^{(2-i)}(x) dx + \int_0^1 y^{(2-i)}(x) d\nu_i^{sc}(x) \right]. \quad (30)$$

Будем также использовать обозначение

$$\nu_i^s[0, x] = \int_{0+}^{1-} d\nu_i^s(t) = \int_0^x d\nu_i^{sc}(t) + \sum_{p=0, x}^{\infty} \alpha_i^p \chi(\xi_p, 1], \quad i = 1, 2,$$

где  $\chi(x, 1]$  — характеристическая функция множества  $(x, 1]$ , а сумма в правой части формулы для каждого значения  $x$  берется по тем  $p$ , для которых  $0 \leq \xi_p < x$ . Как обычно,  $\nu_i^*$  — операция сопряжения для вектора  $\nu_i$ :  $\nu_i^* = \overline{\nu}_i^T = (\overline{\nu}_{i1}, \overline{\nu}_{i2})$ .

Введем в рассмотрение следующий оператор  $L^+$  [24]. Пусть  $l_0^+ z = z$ ,  $l_1^+ z = -z' + \overline{p}_1 z$ ,  $l_2^+ z = z'' - (\overline{p}_1 z)' + \overline{p}_2 z$ ,  $x \in G$ , — вспомогательные дифференциальные операции и  $D^*$  — множество функций:  $D^* = \{z \in H : \exists \varphi \in \mathcal{C}^2, \varepsilon_{j+1} \equiv l_j^* z(x) + \nu_{j+1}^{s*}[0, x] \varphi \in A(G), j = 0, 1, l_0^+ z(0^+) = -\alpha_1^{0*} \varphi, l_0^+ z(1^-) = \alpha_1^{1*} \varphi, l_1^+ z(0^+) = -\alpha_2^{0*} \varphi + \beta_1^*(0) \varphi, l_1^+ z(1^-) = \alpha_2^{1*} \varphi, l^* z \equiv l_2^+ z + (\beta_1^*)'(x) \varphi - \beta_2^*(x) \varphi \in H\}$ , где  $\varphi$  — некоторый параметрический вектор. Оператор  $L^+$  действует в пространстве  $H$ , порождается дифференциальной операцией  $l^* z$  на множестве функций  $D^*$ . Оператор  $L^+$  является формально сопряженным к оператору  $L$ , для операторов  $L$  и  $L^+$  выполняется тождество Лагранжа  $(ly, z) = (y, l^* z)$ ,  $y \in D$ ,  $z \in D^*$  [55]. Если  $\overline{D} = H$ , т. е. область определения оператора  $L$  плотна в  $H$ , то оператор  $L^+ = L^*$  является сопряженным к оператору  $L$ .

Из результатов работы [56] следует, что если  $p_1 \equiv 0$  на  $G$ , а краевые формы (29) оператора  $L$  регулярны, то  $\overline{D} = H$ , т. е. в этом случае  $L^+ = L^*$ .

Пример построения сопряженного оператора «по Брауну» [24] и «по Лагранжу» для случая многоточечных краевых условий (в форме (30) присутствует только первая сумма по  $p$ ) и вывод выражения для вектора  $\varphi$  из определения класса  $D^*$  можно найти в работе [57].



Задачи с интегральными краевыми условиями ранее активно исследовались, полезный обзор содержится в [24]. Из работ, вышедших после этого обзора, отметим следующие. А. А. Шкаликов [56] для обыкновенного дифференциального оператора произвольного порядка с интегральными краевыми условиями ввёл понятие регулярных краевых условий и доказал, что в случае таких условий система корневых функций оператора образует в пространстве  $\mathcal{L}^2(G)$  базис Рисса со скобками, блок-базис (в случае усиленно регулярных условий — обычный базис Рисса). Аналогичный результат получен в работе [58] для векторного функционально-дифференциального уравнения  $y^{(n)} + Fy = \lambda y$  ( $F$  — подчиненный оператор) с интегральными краевыми условиями. Задачи с интегральными краевыми условиями исследовались также в работах [59–62] и др. Сопряженный оператор в этих и последующих работах не использовался и не вводился.

**Базисность систем корневых функций операторов  $L$  и  $L^+$ .** Обозначим  $V(x) = (\beta_1^*)'(x) - \beta_2^*(x)$ , где  $\beta_k = (\nu_k^c)'$ ,  $k = 1, 2$ . Нам потребуется наложить ограничения на вектор-функции  $\nu_k(x)$  — установить связь между матрицами  $\nu_k^{sa}$ ,  $\nu_k^{sc}$ ,  $V(x)$ , действующими на вектор  $\varphi$ .

Введем обозначение для ядер этих матриц:  $N_V = \bigcap_{x \in \bar{G}} N(V(x))$ ,  $N_{ka} = \bigcap_{x \in G} N(\nu_k^{sa*}[x]) = \bigcap_{p=2}^{\infty} N(\alpha_k^{p*})$ ,  $N_{kc} = \bigcap_{x \in \bar{G}} N(\nu_k^{sc*}[0, x])$ ,  $k = 1, 2$ . Пусть выполняются следующие вложения:

$$N_{1a} \subseteq N_{1c}, \quad \exists k = 1, 2: \quad N_{ka} \subseteq N_{2c}, \quad (31)$$

$$\exists k = 1, 2: \quad N_{ka} \subseteq N_V, \quad \text{при } k = 2: \quad \nu_{2j}^c(x) \in W_2^1(G), \quad j = 1, 2. \quad (32)$$

Рассмотрим биортонормированную в  $H$  пару систем  $\{u_n(x)\}$ ,  $\{v_n(x)\}$  обобщенных собственных и присоединенных функций операторов  $L$  и  $L^+$ . Зафиксируем произвольное число  $\gamma \geq 0$ . Будем рассматривать числа  $\{\lambda_n\}$ , удовлетворяющие условиям (1).

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия (28) на коэффициенты  $p_k(x)$ , условия (1) на систему чисел  $\{\lambda_n\}$ , условия (31), (32) на функции  $\nu_k(x)$ ,  $\nu_{1j}^c(x) \in W_2^2(G)$ ,  $j = 1, 2$ , и обе системы  $\{u_n\}$ ,  $\{v_n\}$  являются полными в  $H$ . Тогда для того чтобы каждая из систем  $\{u_n\}$ ,  $\{v_n\}$  являлась базисом Рисса в  $H$ , необходимо и достаточно, чтобы эти системы были почти нормированными в  $H$ . Для того чтобы каждая из систем  $\{u_n\}$ ,  $\{v_n\}$  образовывала безусловный базис в  $H$ , необходимо и достаточно выполнения с некоторой постоянной  $c > 0$  соотношения (2). Для того чтобы каждая из систем  $\{u_n \cdot \|u_n\|_2^{-1}\}$ ,  $\{v_n \cdot \|v_n\|_2^{-1}\}$  образовывали базис Рисса в  $H$ , необходимо и достаточно выполнения условия (2).

**Замечание 1.** Для оператора  $L$  с регулярными краевыми условиями и коэффициентом  $p_1 \equiv 0$  в  $G$ , для некоторых чисел  $\gamma \geq 0$ ,  $c_0 > 0$  выполняются условия (1) и обе системы  $\{u_n\}$ ,  $\{v_n\}$  полны в  $H$ , что следует из работы [56]. Таким образом, в этом случае в теореме 2 проверки требуют лишь условия (31), (32) на ядра векторов и условие почти нормированности систем или условие (2) (для чего достаточно знать главные члены асимптотик функций  $u_n, v_n$ ).

**Пример.** Проиллюстрируем результат теоремы 2 на простом примере нелокальной краевой задачи. Пусть оператор  $L$  действует в пространстве  $H$ , порожден дифференциальной операцией  $lu(x) = u''(x)$ ,  $x \in G$ ,  $u \in C^2(\bar{G})$ , и краевыми условиями:

$$u(0) = 0, \quad u(1) + 2u(1/2) = \int_0^1 u(x) dx.$$





Интегрированием по частям получаем, что сопряженный оператор порождается нагруженной дифференциальной операцией  $l^*v(x) = v''(x) - v'(1)$ ,  $x \in G$ , крайвыми условиями  $v(0) = v(1) = 0$  и условиями на разрыв в точке  $x = 1/2$ :

$$v[1/2] = 0, \quad v'[1/2] = -2v'(1), \quad v(x) \in W_2^1(G) \cup C^2[0, 1/2) \cup C^2(1/2, 1],$$

где использовано обозначение для скачка функции  $v[1/2] = v(1/2 + 0) - v(1/2 - 0)$ . В точке  $x = 1/2$  функции  $v(x)$  из области определения оператора  $L^*$  непрерывны, а функции  $v'(x)$  могут иметь разрыв первого рода (если  $v'(1) \neq 0$ ).

Для этого примера выполнены все условия теоремы 2, за исключением условия почти нормированности системы  $\{v_n\}$  и условия (2) [63]. Обе системы  $\{u_n\}$ ,  $\{v_n\}$  не образуют базиса в  $H$ . Уберем интегральное слагаемое из краевого условия. Тогда при правильном выборе присоединенных функций (так, чтобы выполнялось условие (2)), будут выполнены все условия теоремы 2. Системы  $\{u_n\}$ ,  $\{v_n\}$  образуют базис Рисса в  $H$ . В каждом из примеров оператор  $L$  является существенно несамосопряженным.

**Равномерная сходимость биортогональных разложений.** Продолжим изучение введенных выше систем  $\{u_n\}$ ,  $\{v_n\}$ . Для произвольной функции  $f(x) \in H$  рассмотрим две частичные суммы её биортогональных разложений:

$$\sigma_\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_n| \leq \lambda} (f, v_n) u_n(x), \quad \tilde{\sigma}_\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_n| \leq \lambda} (f, u_n) v_n(x), \quad \forall \lambda > 0, \quad x \in \bar{G}.$$

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия (28), (31), (32) (условие (32) — при  $k = 1$ ), (1), (2),  $v_{1j}^c(x) \in W_2^2(G)$ ,  $j = 1, 2$ . Пусть функция  $f(x) \in W_2^1(G)$  и

$$\int_0^1 f(x) dv_2^s(x) + f(1)(v_1^c)'(1) - f(0)v_1^c(0) = 0. \tag{33}$$

Тогда разложение  $\sigma_\lambda(x, f)$  сходится абсолютно и равномерно на  $\bar{G}$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Если дополнительно потребовать, чтобы системы  $\{u_n\}$ ,  $\{v_n\}$  были полны в  $H$ , то разложение  $\sigma_\lambda(x, f)$  сходится к функции  $f(x)$  равномерно на отрезке  $\bar{G}$  и равномерно по  $x \in \bar{G}$  справедливо

$$f(x) - \sigma_\lambda(x, f) = o((\sqrt{\lambda})^{-1}), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \tag{34}$$

остаток ряда из модулей  $|f_n u_n(x)|$  имеет такую же оценку (34), равномерно по  $x \in \bar{G}$ .

Доказательство теоремы 3 основано на следующем представлении коэффициентов Фурье. Рассмотрим спектральную задачу для оператора  $L^+$  с фиксированным значением  $\lambda_n = \lambda \neq 0$ ,  $\lambda \in \mathcal{C}$ ,  $z(x)$  — собственная или присоединенная функция оператора.

**Лемма 2.** Пусть  $z(x) \in D^*$ , выполняются условия (28) и почти всюду в  $G$  выполняется равенство

$$z'' - (\bar{p}_1 z)' + \bar{p}_2 z + V(x)\varphi + \bar{\lambda}^2 z = \theta_0 \bar{\mu} z_0, \quad z_0 \in H.$$

Пусть комплекснозначная функция  $f(x) \in W_2^1(G)$  и удовлетворяет крайнему условию (33). Тогда справедливо следующее соотношение:

$$(f, z) = \frac{\theta_0 \mu}{\lambda^2} (f, z_0) + \frac{1}{\lambda} (f', \frac{z'}{\lambda}) - \frac{1}{\lambda^2} (f' p_1 + f p_2, z) - \frac{1}{\lambda^2} (f, V\varphi), \quad \forall \lambda \in \mathcal{C}, \quad \lambda \neq 0.$$



Для доказательства теоремы 3 используем полученное представление коэффициентов Фурье, неравенство Бесселя для корневых функций (и их производных) оператора  $L^+$  и априорные оценки для этих функций.

Рассмотрим вопрос о сходимости «сопряжённого» разложения  $\tilde{\sigma}_\lambda(x, f)$ . Сходимость таких разложений требуется, например, в методе В. А. Ильина доказательства теорем равносходимости.

**Теорема 4.** Пусть выполняются условия (1), (2), (28) (32),  $\nu_{1j}^c(x) \in W_2^2(G)$ ,  $j = 1, 2$ , функция  $f(x) \in W_2^1(G)$  и  $f(0) = f(1) = 0$ . Тогда разложение  $\tilde{\sigma}_\lambda(x, f)$  сходится абсолютно и равномерно на  $\overline{G}$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Если системы  $\{u_n\}$ ,  $\{v_n\}$  полны в  $H$ , то разложение  $\tilde{\sigma}_\lambda(x, f)$  сходится к функции  $f(x)$  почти всюду в  $G$  и почти всюду в  $G$  справедливо  $f(x) - \tilde{\sigma}_\lambda(x, f) = o((\sqrt{\lambda})^{-1})$ ,  $\lambda \rightarrow +\infty$  (если функции  $v_n$  непрерывны на  $\overline{G}$ , то в обоих случаях сходимость равномерная на отрезке  $\overline{G}$ ).

Для рассмотренного выше примера в силу нарушения условия (2) гарантировать равномерную на  $\overline{G}$  сходимость разложений функции  $f(x) \in W_2^1(G)$ :  $\sigma_\lambda(x, f)$  при  $f(0) = 0, f(1) + 2f(1/2) = 0$  (условия (33)) и  $\tilde{\sigma}_\lambda(x, f)$  при  $f(0) = f(1) = 0$ , мы не можем. Если же в краевом условии убрать интегральное слагаемое, то при правильном выборе присоединенных функций для любой функции  $f(x) \in W_2^1(G)$ ,  $f(0) = 0, f(1) + 2f(1/2) = 0$ , разложение  $\sigma_\lambda(x, f)$  сходится к  $f(x)$  равномерно на  $\overline{G}$  и  $f(x) - \sigma_\lambda(x, f) = o((\sqrt{\lambda})^{-1})$ ,  $\lambda \rightarrow +\infty$ , равномерно на  $\overline{G}$ ; для  $f(x) \in W_2^1(G)$ ,  $f(0) = f(1) = 0$ , разложение  $\tilde{\sigma}_\lambda(x, f)$  сходится к  $f(x)$  равномерно на  $\overline{G}$  (так как функции  $v_n(x)$  — непрерывны) и справедлива оценка скорости сходимости  $f(x) - \tilde{\sigma}_\lambda(x, f) = o((\sqrt{\lambda})^{-1})$ ,  $\lambda \rightarrow +\infty$ , равномерно на  $\overline{G}$ .

Обзоры результатов по вопросам сходимости биортогональных разложений функций для обыкновенных дифференциальных операторов с двухточечными регулярными и нерегулярными краевыми условиями (в точках 0 и 1) приведены в [64, с. 88–103] и в [50]. Исследовались и задачи с нелокальными краевыми условиями. В работах [65, 66] получены условия равномерной и абсолютной сходимости биортогональных разложений по корневым функциям одномерного оператора Шредингера с частного вида многоточечными краевыми условиями. Этот же вопрос исследован в [57] для случая общих многоточечных условий. Отметим также работу [67], где рассмотрен интересный пример с одной внутренней точкой в краевом условии. В работах [68, 69] установлены условия равномерной и абсолютной сходимости и получены оценки скорости сходимости биортогональных разложений для дифференциальных операторов с двухточечными краевыми условиями (см. также другие работы этих авторов по этим вопросам). Обзор по работам школы Ильина по оценкам скорости сходимости и равносходимости спектральных разложений можно посмотреть в [70].

**Благодарности.** Автор признателен А. П. Хромову за полезные обсуждения рассматриваемых в данной работе вопросов и современных проблем спектральной теории дифференциальных операторов..

### Библиографический список

1. Ильин В. А. О равномерной равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223, № 3. С. 548–551.



2. Ильин В. А. О равносходимости разложений в тригонометрический ряд Фурье и по собственным функциям пучка М. В. Келдыша обыкновенных несамосопряженных дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225, № 3. С. 497–499.
3. Ильин В. А. Спектральная теория дифференциальных операторов. М. : Наука, 1991. 368 с.
4. Бари Н. К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Учен. зап. МГУ. 1951. Вып. 148. С. 69–107.
5. Ильин В. А. О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 5. С. 1048–1053.
6. Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 12. С. 2059–2071.
7. Ильин В. А. О базисности Рисса систем корневых вектор-функций разрывного оператора Шредингера с матричным потенциалом // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314, № 1. С. 59–62.
8. Моисеев Е. И., Барновска М. О безусловной базисности системы собственных и присоединенных функций дифференциального оператора первого порядка в пространстве вектор-функций // Math. Slovaca. 1990. Vol. 40, № 3. P. 325–336.
9. Керимов Н. Б. Некоторые вопросы спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1987. 15 с.
10. Керимов Н. Б. О безусловной базисности системы собственных и присоединенных функций дифференциального оператора четвертого порядка // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286, № 4. С. 803–808.
11. Керимов Н. Б. Базисность и равномерная минимальность систем корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1996. 25 с.
12. Крицков Л. В. О необходимых условиях базисности в  $\mathcal{L}^p(G)$  систем корневых функций одномерного оператора Шредингера // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311, № 6. С. 1306–1309.
13. Ильин В. А. О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора // Матем. заметки. 1977. Т. 22, вып. 5. С. 679–698.
14. Будаев В. Д. О безусловной базисности систем собственных и присоединенных функций оператора второго порядка с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 4. С. 777–780.
15. Будаев В. Д. О неравенстве Бесселя для систем корневых функций дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. 1991. Т. 218, № 1. С. 16–20.
16. Будаев В. Д. Критерии бесселевости и базисности Рисса систем корневых функций дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 12. С. 2033–2044.
17. Будаев В. Д. Безусловная базисность систем корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1993. 22 с.
18. Ломов И. С. Неравенство Бесселя, теорема Рисса и безусловная базисность для корневых векторов обыкновенных дифференциальных операторов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 1992. № 5. С. 33–43.
19. Курбанов В. М. Распределение собственных значений и сходимость биортогональных разложений по корневым функциям обыкновенных дифференциальных операторов : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 2000. 26 с.
20. Крицков Л. В. Равномерная оценка порядка присоединенных функций и распределение собственных значений одномерного оператора Шредингера // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 7. С. 1121–1129.



21. Крицков Л. В. Некоторые спектральные свойства сингулярных обыкновенных операторов второго порядка : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1990. 19 с.
22. Ильин В. А., Моисеев Е. И. О системах, состоящих из подмножеств корневых функций двух различных краевых задач // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1992. Т. 201. С. 219–230.
23. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1972. 496 с.
24. Krall A. M. The development of general differential boundary systems // Rocky Mountain J. Math. 1975. Vol. 5, № 4. P. 493–542.
25. Нахушев А. М., Дикинов Х. Ж., Кереефов А. А. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 177–179.
26. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М. : Наука, 2012. 232 с.
27. Ломов И. С. Пример разрывного оператора, имеющего разрывный сопряженный. Свойство базисности // Задачи математической физики и спектральная теория операторов. М. : МЭИ, 1989. № 215. С. 46–50.
28. Ломов И. С. О базисности корневых функций операторов с многоточечными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 6. С. 1053–1056.
29. Ломов И. С. О свойствах корневых функций оператора Штурма – Лиувилля, разрывных на всюду плотном множестве // Изв. вузов. Матем. 1990. № 8. С. 35–44.
30. Ломов И. С. Свойство базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 1. С. 80–93.
31. Ломов И. С. Теорема о безусловной базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 9. С. 1550–1563.
32. Ломов И. С. О базисности систем нерегулярных корневых векторов дифференциальных операторов высокого порядка // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 1. С. 74–86.
33. Белянцев О. В. Неравенство Бесселя и свойство базисности корневых функций сингулярного дифференциального оператора второго порядка // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 8. С. 1011–1020.
34. Юрко В. А. Граничные задачи с условиями разрывов во внутренней точке интервала // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 8. С. 1266–1269.
35. Макин А. С. О сходимости средних Рисса спектральных разложений, отвечающих одномерному оператору Шредингера // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 5. С. 897–899.
36. Макин А. С. О средних Рисса биортогональных разложений по корневым функциям несамосопряженных расширений оператора Шредингера // Докл. АН СССР. 1992. Т. 322, № 3. С. 472–475.
37. Макин А. С. О свойствах корневых функций и спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным дифференциальным операторам : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 2000. 26 с.
38. Ильин В. А., Тихомиров В. В. О базисности риссовских средних спектральных разложений, отвечающих обыкновенному несамосопряженному оператору порядка  $s$  // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 12. С. 2098–2126.
39. Ильин В. А. Оценка разности средних Рисса двух спектральных разложений для функций из класса  $L^2$  // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 5. С. 852–863.
40. Салимов Я. Ш. О средних Рисса разложений по корневым функциям некоторых нелокальных краевых задач // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 1. С. 155–160.
41. Тихомиров В. В. О безусловной базисности корневых векторов нагруженных операторов // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 2. С. 355–357.



42. Тихомиров В. В. О безусловной базисности корневых векторов нелокальных задач для систем уравнений с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 1. С. 147–153.
43. Барновска М., Тихомиров В. В. О базисности Рисса корневых векторов нелокальных задач для системы дифференциальных уравнений // Math. Slovaca. 1993. Vol. 43, № 2. P. 193–205.
44. Ломов И. С. Некоторые свойства спектральных разложений, связанных с операторами типа Штурма – Лиувилля // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248, № 5. С. 1063–1065.
45. Ломов И. С. Некоторые свойства собственных и присоединенных функций оператора Штурма – Лиувилля // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 10. С. 1684–1694.
46. Тихомиров В. В. Точные оценки регулярных решений одномерного несамосопряженного уравнения Шредингера // Докл. АН СССР. 1982. Т. 273, № 4. С. 807–810.
47. Тихомиров В. В. Точные оценки собственных функций произвольного несамосопряженного оператора Шредингера // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 8. С. 1378–1385.
48. Ломов И. С. Оценки корневых функций оператора, сопряженного к дифференциальному оператору второго порядка с интегральными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 5. С. 602–612. DOI: <https://doi.org/10.1134/S037406411804>
49. Ильин В. А., Крицков Л. В. Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным дифференциальным операторам // Функциональный анализ. Итоги науки и техники. Сер. Совр. матем. и ее приложения. Темат. обзор. М. : ВИНТИ, 2006. Т. 96. С. 190–231.
50. Хромов А. П. Спектральный анализ дифференциальных операторов на конечном интервале // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 10. С. 1691–1696.
51. Хромов А. П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных операторов // Матем. сб. 1981. Т. 114, № 3. С. 378–405.
52. Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям конечномерных возмущений оператора интегрирования // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2000. № 2. С. 21–26.
53. Курдюмов В. П., Хромов А. П. О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций функционально-дифференциального уравнения с оператором отражения // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 2. С. 196–204.
54. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. РАН. 2014. Т. 458, № 2. С. 138–140. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0869565214260041>
55. Ломов И. С. Интегральные представления нерегулярных корневых функций нагруженных дифференциальных операторов второго порядка // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 12. С. 1634–1646. DOI: <https://doi.org/10.1134/S03740641160>
56. Шкаликов А. А. О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора с интегральными краевыми условиями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 1982. № 6. С. 12–21.
57. Ломов И. С. Равномерная сходимость биортогонального ряда для оператора Шредингера с многоточечными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 7. С. 890–896.
58. Гомилко А. М., Радзиевский Г. В. Базисные свойства собственных функций регулярной краевой задачи для векторного функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 3. С. 384–396.
59. Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям оператора дифференцирования с интегральным граничным условием // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 129–131.
60. Хромов А. П. Об аналоге теоремы Жордана – Дирихле для разложений по собственным функциям дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием // Докл. РАЕН (Поволжское межрегиональное отделение). 2004. № 4. С. 80–87.



61. Седлецкий А. М. Аппроксимативное свойство систем экспонент в  $L^p(a, b)$  // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 10. С. 1675–1681.
62. Пулькина Л. С., Дюжева А. В. Нелокальная задача с переменными по времени краевыми условиями Стеклова для гиперболического уравнения // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. 2010. Вып. 4(85). С. 56–64.
63. Самарская Т. А. О равносходимости спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным расширениям дифференциального оператора второго порядка // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 1. С. 155–166.
64. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 526 с.
65. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Нелокальная краевая задача для оператора Штурма – Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291, № 3. С. 534–539.
66. Самарская Т. А. Абсолютная и равномерная сходимость разложений по корневым функциям нелокальной краевой задачи первого рода // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 7. С. 1152–1160.
67. Мустафин М. А. Об абсолютной и равномерной сходимости рядов по одной системе синусов // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 8. С. 1465–1466.
68. Lazetic N. L. On uniform convergence on closed intervals of spectral expansions and their derivatives for functions from  $W_p^1$  // Matematicki Vesnik. 2004. Vol. 56, № 3–4. P. 91–104.
69. Kurbanov V. M. Conditions for the absolute and uniform convergence of the biorthogonal series corresponding to a differential operator // Dokl. Math. 2008. Vol. 78, № 2. P. 748–750.
70. Ломов И. С. Оценки скорости сходимости и равносходимости спектральных разложений обыкновенных дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 405–418. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-405-418>

---

**Образец для цитирования:**

Ломов И. С. Спектральный метод Ильина установления свойств базисности и равномерной сходимости биортогональных разложений на конечном интервале // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 1. С. 34–58. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-34-58>

---

## **The Il'in Spectral Method for Determination of the Properties of the Basis Property and the Uniform Convergence of Biorthogonal Expansions on a Finite Interval**

**I. S. Lomov**

Igor S. Lomov, <https://orcid.org/0000-0003-1510-1739>, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 119991 Moscow, Russia, [lomov@cs.msu.su](mailto:lomov@cs.msu.su)

The paper discusses the basics of the spectral method of V. A. Il'in on an example of a simple second order differential operator on a segment of the number line. The first theorem of Il'in on the unconditional basis property is stated. Its detailed proof is given. A chain of generalizations of this theorem is traced. A recently established a theorem on the unconditional basis property for the differential operators with general integral boundary conditions is formulated. The substantiation of the statements about the uniform convergence of biorthogonal expansions of functions using the Il'in method is presented. The main theorems, including, the recently established theorem for operators with integral boundary conditions are formulated.



**Keywords:** differential operator, eigenfunctions and associated functions, spectrum, unconditional basis, uniform convergence of biorthogonal series.

Received: 13.04.2018 / Accepted: 15.06.2018 / Published online: 28.02.2019

## References

1. Il'in V. A. The uniform equiconvergence of expansions in the eigen- and associated functions of a nonselfadjoint ordinary differential operator and in a trigonometric Fourier series. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1975, vol. 223, no. 3, pp. 548–551 (in Russian).
2. Il'in V. A. On the equiconvergence of expansions in the trigonometric Fourier series and eigenfunctions of the beam M. V. Keldysh non-selfadjoint ordinary differential operator. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1975, vol. 225, no. 3, pp. 497–499 (in Russian).
3. Il'in V. A. *Spektral'naya teoriya differentsialnykh operatorov. Samosopryazhennye differentsialnye operatory* [Spectral theory of differential operators. Selfadjoint differential operators]. Moscow, Nauka, 1991. 368 p. (in Russian).
4. Bari N. K. Biorthogonal systems and bases in Hilbert space. *Uch. Zap. Mosk. Gos. Univ.*, 1951, vol. 148, pp. 69–107 (in Russian).
5. Il'in V. A. On the unconditional basis property for systems of eigenfunctions and associated functions of a second-order differential operator on a closed interval. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1983, vol. 273, no. 5, pp. 1048–1053 (in Russian).
6. Il'in V. A. Necessary and sufficient conditions for the Riesz basis property of root vectors of discontinuous operators of second order. *Differ. Uravn.*, 1986, vol. 22, no. 12, pp. 2059–2071 (in Russian).
7. Il'in V. A. On the basis of Riesz systems of root vector-functions of discontinuous of the Schrödinger operator with a matrix potential. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1990, vol. 314, no. 1, pp. 59–62 (in Russian).
8. Moiseev E. I., Barnovska M. On the unconditional basis property of a root functions of the first order differential operator in the space of vector-functions. *Math. Slovaca*, 1990, vol. 40, no. 3, pp. 325–336 (in Russian).
9. Kerimov N. B. *Some questions of non-self-adjoint differential operator spectral theory* : Thesis Diss. Cand. Sci. (Math. and Mech.). Moscow, 1987. 15 p. (in Russian).
10. Kerimov N. B. On the unconditional basis property of a system of a root functions of the differential operator of the fourth order. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 286, no. 4, pp. 803–808 (in Russian).
11. Kerimov N. B. *Basis and uniform minimality of root systems functions of ordinary differential operators* : Thesis Diss. Dr. Sci. (Math. and Mech.). Moscow, 1996. 25 p. (in Russian).
12. Kritskov L. V. On necessary conditions for a basis in  $\mathcal{L}^p(G)$  of systems of root functions of a one-dimensional Schrödinger operator. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1990, vol. 311, no. 6, pp. 1306–1309 (in Russian).
13. Il'in V. A. Convergence of eigenfunction expansions at points discontinuities of differential operator coefficients. *Math. Notes*, 1977, vol. 22, no. 5, pp. 870–882. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01098352>
14. Budaev V. D. On the unconditional basis property of systems of root functions of the second order operator with discontinuous coefficients. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 289, no. 4, pp. 777–780 (in Russian).
15. Budaev V. D. On Bessel inequality for systems of root functions differential operators. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1991, vol. 218, no. 1, pp. 16–20 (in Russian).
16. Budaev V. D. Criteria of Bessel and Riesz basis of root systems functions of differential operators. *Differential Equations*, 1991, vol. 27, no. 12, pp. 1421–1432.



17. Budaev V. D. *Unconditional basis of systems of root functions of ordinary differential operators* : Thesis Diss. Dr. Sci. (Math. and Mech.). Moscow, 1993. 22 p. (in Russian).
18. Lomov, I. S. The Bessel Inequality, the Riesz theorem and unconditional basis for root vectors of ordinary differential operators. *Vestnik Mosk. Un-ta, Ser. 1, Math. Mehan.*, 1992, no. 5, pp. 33–43 (in Russian).
19. Kurbanov V. M. *On distribution of eigenvalues and convergence of biorthogonal expansions in root functions of ordinary differential operators* : Thesis Diss. Dr. Sci. (Math. and Mech.). Moscow, 2000. 26 p. (in Russian).
20. Kritskov L. V. A uniform estimate for the order of associated functions, and the distribution of eigenvalues of a one-dimensional Schrödinger operator. *Differential Equations*, 1989, vol. 25, no. 7, pp. 784–791.
21. Kritskov L. V. *Some spectral properties of singular ordinary operators of the second order* : Thesis Diss. Dr. Sci. (Math. and Mech.). Moscow, 1990. 19 p. (in Russian).
22. Il'in V. A., Moiseev E. I. On the systems consisting of subsets of root function of two distinct boundary value problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1994, vol. 201, pp. 183–192.
23. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elements of the theory of functions and functional analysis*. Moscow, Nauka, 1972. 496 p. (in Russian).
24. Krall A. M. The development of general differential boundary systems. *Rocky Mountain J. Math.*, 1975, vol. 5, no. 4, pp. 493–542.
25. Dikinov Kh. Zh., Kerefov A. A., Nakhushhev A. M. A certain boundary value problem for a loaded heat equation. *Differ. Uravn.*, 1976, vol. 12, no. 1, pp. 177–179 (in Russian).
26. Nakhushhev A. M. *Nagruzhennye uravneniia i ikh primeneniie* [The loaded equations and their application]. Moscow, Nauka, 2012. 232 p. (in Russian).
27. Lomov I. S. Example of discontinuous operator with a discontinuous adjoint operator. Basis property. *Zadachi matematicheskoi fiziki i spektral'naia teoriia operatorov* [Problems of Mathematical Physics and Spectral Theory of Operators], Collection of Scientific Papers of Moscow Power Engineering Institute, vol. 215. Moscow, Moscow Power Engineering Inst, 1989, pp. 46–50 (in Russian).
28. Lomov I. S. The basis property of root functions of operators with multipoint boundary conditions. *Differ. Uravn.*, 1989, vol. 25, no. 6, pp. 1053–1056 (in Russian).
29. Lomov I. S. Properties of root functions of the Sturm – Liouville operator that are discontinuous on an everywhere dense set. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1990, no. 8, pp. 39–49.
30. Lomov I. S. The basis property of root vectors of loaded second-order differential operators on an interval. *Differential Equations*, 1991, vol. 27, no. 1, pp. 64–75.
31. Lomov I. S. A theorem on the unconditional basis property of root vectors of second-order weighted differential operators. *Differential Equations*, 1991, vol. 27, no. 9, pp. 1098–1107.
32. Lomov I. S. On the basis property of systems of nonregular root vectors of higher-order differential operators. *Differential Equations*, 1993, vol. 29, no. 1, pp. 62–72.
33. Belyancev O. V. The bessel inequality and the basis property of root functions of a second-order singular differential operator. *Differential Equations*, 2000, vol. 36, no. 8, pp. 1119–1130. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02754179>
34. Yurko V. A. Boundary value problems with discontinuity conditions in an interior point of the interval. *Differential Equations*, 2000, vol. 36, no. 8, pp. 1266–1269. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02754199>
35. Makin A. S. Convergence of the Riesz means of spectral expansions that correspond to the one-dimensional Schrödinger operator. *Differ. Uravn.*, 1988, vol. 24, no. 5, pp. 897–899 (in Russian).
36. Makin A. S. On the average of the Riesz biorthogonal expansions in root functions of non-self-adjoint Schrödinger operator extensions. *Dokl. Akad. Nauk*, 1992, vol. 322, no. 3, pp. 472–475 (in Russian).





37. Makin A. S. *On the properties of the root functions and spectral decompositions, responding to non-self-adjoint differential operators* : Thesis Diss. Dr. Sci. (Math. and Mech.). Moscow, 2000. 26 p. (in Russian).
38. Il'in V. A., Tikhomirov V. V. The basis property of Riesz means of spectral decompositions corresponding to an  $n$ th-order ordinary nonselfadjoint differential operator. *Differ. Uravn.*, 1982, vol. 18, no. 12, pp. 2098–2126.
39. Il'in V. A. Evaluation of the difference between means of two Riesz spectral decompositions for functions of class  $\mathcal{L}^2$ . *Differential Equations*, 1988, vol. 24, no. 5, pp. 852–863.
40. Salimov Ya. Sh. On average Riesz of expansions in root functions of some nonlocal boundary value problems. *Differential Equations*, 1987, vol. 23, no. 1, pp. 155–160.
41. Tikhomirov V. V. On unconditional basis of root vectors of loaded operators. *Differential Equations*, 1989, vol. 25, no. 2, pp. 355–357.
42. Tikhomirov V. V. On the unconditional basis property of root vectors of nonlocal problems for systems of equations with deviating argument. *Differential Equations*, 1990, vol. 26, no. 1, pp. 147–53.
43. Barnovska M., Tikhomirov V. V. Riesz basis property of root vectors of nonlocal problems for systems of differential equations. *Math. Slovaca*, 1993, vol. 43, no. 2, pp. 193–205.
44. Lomov I. S. Some properties of spectral expansions related to operators of the Sturm–Liouville problem. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1979, vol. 248, no. 5, pp. 1063–1065 (in Russian).
45. Lomov I. S. Some properties of eigenfunctions and adjoint functions of operator of the Sturm–Liouville problem. *Differential Equations*, 1982, vol. 18, no. 10, pp. 1684–1694.
46. Tikhomirov V. V. Exact estimates of regular one-dimensional solutions non-self-adjoint Schrödinger equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1982, vol. 273, no 4, pp. 807–810 (in Russian).
47. Tikhomirov V. V. Exact estimates of eigenfunctions of arbitrary non-self-adjoint Schrödinger operator. *Differential Equations*, 1983, vol. 19, no. 8, pp. 1378–1385.
48. Lomov I. S. Estimates of root functions of the operator adjoint to a second order differential operator with integral boundary conditions. *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 5, pp. 596–607. DOI: <https://doi.org/10.1134/S001226611805004X>
49. Il'in V. A., Kritskov L. V. Properties of Spectral Expansions Corresponding to Non-Self-Adjoint Differential Operators. *J. Math. Sci.*, 2003, vol. 116, iss. 5, pp. 3489–3550. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1024180807502>
50. Khromov A. P. Spectral analysis of differential operators on a finite interval. *Differential Equations*, 1995, vol. 31, no. 10, pp. 1691–1696.
51. Khromov A. P. Equiconvergence theorems for integrodifferential and integral operators. *Math. USSR-Sb.*, 1981, vol. 42, no. 3, pp. 331–355. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM1982v042n03ABEH002257>
52. Khromov A. P. On equiconvergence of the eigenfunction finite-dimensional perturbations of the integration operator. *Vestn. Moscow State Univ., Ser. 1, Math. Mech.*, 2000, no. 2, pp. 21–26 (in Russian).
53. Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Riesz basis formed by root functions of a functional-differential equation with a reflection operator. *Differential Equations*, 2008, vol. 44, no. 2, pp. 203–212.
54. Burlutskaya M. S., Khromov A. P. Resolvent approach in the Fourier method. *Dokl. Math.*, 2014, vol. 90, no. 2, pp. 545–548. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064562414060076>
55. Lomov I. S. Integral representations of irregular root functions of loaded second-order differential operators. *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 12, pp. 1634–1646. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266116120041>



56. Shkalikov A. A. On the basis property of eigenfunctions of ordinary differential operator with integral boundary conditions. *Vestn. Moscow State Univ., Ser. 1, Math. Mech.*, 1982, no. 6, pp. 12–21 (in Russian).
57. Lomov I. S. Uniform Convergence of Biorthogonal Series for the Schrödinger Operator with Multipoint Boundary Conditions. *Differential Equations*, 2002, vol. 38, no. 7, pp. 941–948. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1021147327871>
58. Gomilko A. M., Radzievskii G. V. Basis properties of eigenfunctions of a regular boundary value problem for the vector functional differential equations. *Differential Equations*, 1991, vol. 27, no. 3, pp. 264–273.
59. Khromov A. P. O ravnoskhodimosti razlozhenij po sobstvennym funkciyam operatora differencirovaniya s integral'nym granichnym usloviem [On equiconvergence of the eigenfunction expansions of the differential operator with integral boundary condition]. *Matematika. Mekhanika* [Mathematics. Mechanics], Saratov, 2003, vol. 5, pp. 129–131 (in Russian).
60. Khromov A. P. On the analogue of Jordan – Dirichlet theorem for expansions in eigenfunctions of differential-difference operator with the integral boundary condition. *Proc. of the Academy of Natural Sciences (Volga Inter-Regional Department)*, 2004, no. 4, pp. 80–87 (in Russian).
61. Sedletskii A. M. Approximation properties of systems of exponentials in  $L^p(a, b)$ . *Differential Equations*, 1995, vol. 31, no. 10, pp. 1639–1645.
62. Pulkina L. S., Dyuzheva A. V. Nonlocal problem with variables in time by Steklov boundary conditions for the hyperbolic equation. *Vestnik SamGU, Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2010, iss. 4 (85), pp. 56–64 (in Russian).
63. Samarskaya T. A. Equiconvergence of spectral expansions that correspond to nonselfadjoint extensions of a second-order differential operator. *Differential Equations*, 1988, vol. 24, no. 1, pp. 122–131.
64. Naimark M. A. *Linear differential operators*. Moscow, Nauka, 1969. 526 p. (in Russian).
65. Il'in V. A., Moiseev E. I. A nonlocal boundary value problem for the Sturm – Liouville operator in differential and difference interpretations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 291, no. 3, pp. 534–539 (in Russian).
66. Samarskaya T. A. Absolute and uniform convergence of expansions in root functions of a nonlocal boundary value problem of the first kind. *Differential Equations*, 1989, vol. 25, no. 7, pp. 813–817.
67. Mustafin M. A. Absolute and uniform convergence of series in a sine system. *Differ. Uravn.*, 1992, vol. 28, no. 8, pp. 1465–1466 (in Russian).
68. Lazetic N. L. On uniform convergence on closed intervals of spectral expansions and their derivatives, for functions from  $W_p^1$ . *Matematicki Vesnik*, 2004, vol. 56, no. 3–4, pp. 91–104.
69. Kurbanov V. M. Conditions for the absolute and uniform convergence of the biorthogonal series corresponding to a differential operator. *Dokl. Math.*, 2008, vol. 78, no. 2, pp. 748–750. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064562408050281>
70. Lomov I. S. Estimates of speed of convergence and equiconvergence of spectral decomposition of ordinary differential operators. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 4, pp. 405–418 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-405-418>

---

**Cite this article as:**

Lomov I. S. The Il'in Spectral Method for Determination of the Properties of the Basis Property and the Uniform Convergence of Biorthogonal Expansions on a Finite Interval. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 1, pp. 34–58 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-34-58>

---



## МЕХАНИКА

УДК 501.1

### Влияние легирования атомами кислорода пористых углеродных наноструктур на значения модуля Юнга

А. С. Колесникова, К. А. Приходченко

Колесникова Анна Сергеевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83, Kolesnikova.88@mail.ru

Приходченко Кристина Алексеевна, магистр 2-го курса кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83, kristyans@yandex.ru

Проведено исследование механической прочности пористых углеродных структур плотностью  $1.4 \text{ г/см}^3$  с различными размерами пор и концентрациями атомов кислорода. Исследование механических свойств пористых углеродных наноструктур проводилось на трех моделях с размерами нанопор 0.4–0.8 нм, 0.2–1.12 нм, 0.7–1.3 нм. Установлен характер изменения модуля Юнга пористых наноструктур в зависимости от концентрации и расположения атомов кислорода в нанопорах.

*Ключевые слова:* пористые углеродные структуры, допирование, модуль Юнга, атомы кислорода, концентрация.

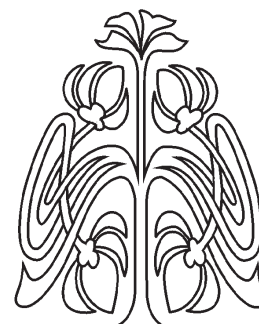
Поступила в редакцию: 17.09.2018 / Принята: 18.12.2018

Опубликована онлайн: 28.02.2019

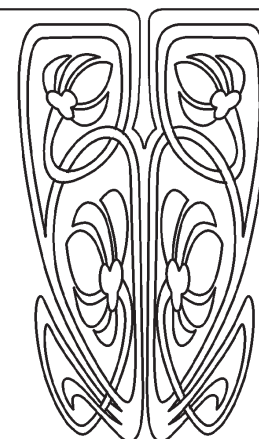
DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-59-68>

### ВВЕДЕНИЕ

Пористые структуры, основанные на стеклоподобном углероде, привлекли внимание многих исследователей из-за их уникальных физических свойств [1–8]. Геометрические параметры (размер нанопор) полых углеродных наноструктур можно легко адаптировать с помощью методов синтеза. Пористые углеродные структуры используются в качестве сорбентов, что является важным элементом современной медицины. Пористые углеродные структуры обладают отличным потенциалом для адсорбции [9], катализа [10] и хранения энергии [11, 12]



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





благодаря их устойчивым физико-химическим свойствам, хорошей электронной проводимости и уникальным структурным свойствам, включая высокую площадь поверхности, доступную пористость оболочки и высокий внутренний объем. Кроме того, пустота в нанопорах обеспечивает ограниченное пространство, которое особенно привлекательно для доставки лекарств, хранения газа, нанореакторов и инкапсуляции активного материала [13–15].

Для расширения областей использования пористых углеродных наноматериалов активно развиваются исследования свойств допированных пористых углеродных материалов гетероатомами (например, N, B, P). Исследование свойств допированных пористых углеродных материалов с гетероатомами позволит предложить эффективный подход к модификации их физико-химических свойств [16–18].

В настоящее время исследуются электронные и эмиссионные свойства допированных пористых углеродных материалов. Однако работ по исследованию механических свойств допированных пористых углеродных наноструктур найдено не было. Экспериментально известен факт, что существует разновидность пористых углеродных наноструктур с плотностью  $1.4 \text{ г/см}^3$  допированных атомами кислорода [19], но ранее не проводились работы по исследованию механических свойств этих структур. В работах [1, 3, 4] проводились исследования механических свойств беспримесной пористой углеродной структуры с плотностью  $1.4 \text{ г/см}^3$ .

Целью данной работы является поиск наиболее упругой конфигурации пористой углеродной структуры (ПУС) с плотностью  $1.4 \text{ г/см}^3$ . Для этого осуществлялось теоретическое исследование изменения модуля Юнга пористых углеродных наноструктур с плотностью  $1.4 \text{ г/см}^3$  при допировании их атомами кислорода. Осуществлялось допирование пористых углеродных наноструктур с разным размером нанопор и с постоянной плотностью атомов углерода. Исследования проводились с помощью молекулярно-механического метода с использованием энергетического потенциала REBO [20]. Выбор данного метода обусловлен тем, что он хорошо зарекомендовал себя при исследовании свойств углеродных наноструктур [21–24].

## 1. ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Для теоретического исследования механических свойств ПУС с плотностью  $1.4 \text{ г/см}^3$  в зависимости от размера нанопор были построены три атомистические модели: для первой модели размер пор составил  $0.27\text{--}0.55 \text{ нм}$ , для второй модели размер пор составил  $0.62\text{--}0.73 \text{ нм}$ , для третьей модели размер пор составил  $0.85\text{--}1.49 \text{ нм}$ .

Количество атомов в элементарной ячейке составляло 1899. Элементарная ячейка атомистической ПУС имела размер  $3 \times 3 \times 3 \text{ нм}$ .

Беспримесные структуры допировались атомами кислорода в хаотичном порядке с увеличением их концентрации до 3.5%. Атомы кислорода помещались хаотично в центре ячейки ПУС (в нанопорах) и послойно внутри протяженной ПУС. После этого проводился процесс оптимизации, т. е. поиск равновесного состояния атомов элементарной кубической решетки. Модели ПУС, допированной атомами кислорода, представлены на рис. 1.

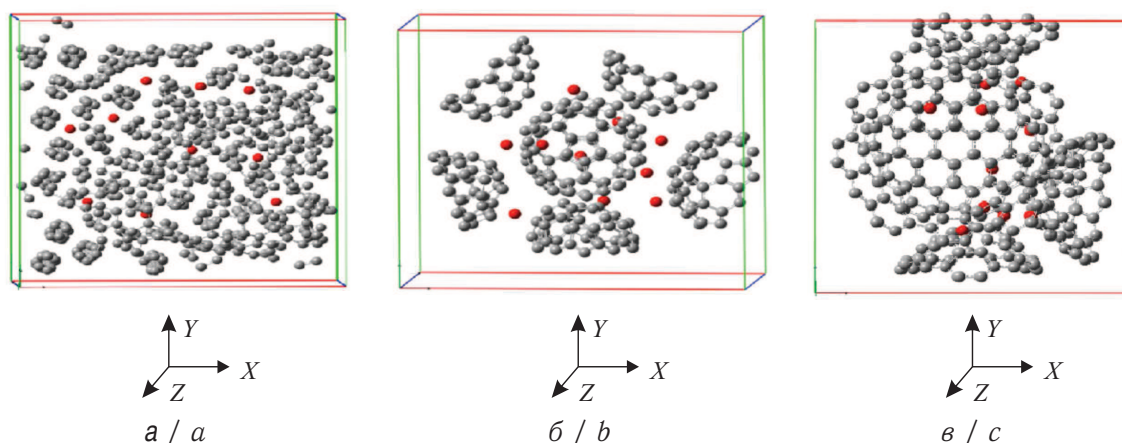


Рис. 1. Модель пористой углеродной структуры: *a* — с размером пор 0.27–0.55 нм, допированной атомами кислорода с максимальной концентрацией 1.44%; *b* — с размером пор 0.62–0.73 нм, допированной атомами кислорода с максимальной концентрацией 3.57%; *c* — с размером пор 0.85–1.49 нм, допированной атомами кислорода с максимальной концентрацией 3.52%

Fig. 1. Model of porous carbon structure: *a* — with the pore size of 0.27–0.55 nm, doped with oxygen atoms with a maximum concentration of 1.44%; *b* — with the pore size of 0.62–0.73 nm, doped with oxygen atoms with a maximum concentration of 3.57%; *c* — with the pore size of 0.85–1.49 nm doped with oxygen atoms with a maximum concentration of 3.52%

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

### 2.1. Модуль Юнга пористой углеродной наноструктуры, допированной атомами кислорода хаотично в ячейке ПУС

Исследование модуля Юнга ПУС осуществлялось по методике, описанной в работе [3]. На рис. 2 представлены графики изменения модуля Юнга для ПУС, допированных атомами кислорода, хаотично расположенных в структуре, при увеличении концентрации атомов кислорода. Из этих графиков видно, что модуль Юнга увеличивается при увеличении концентрации атомов кислорода независимо от размера нанопор. Для каждой модели ПУС с размером нанопор 0.27–0.55 нм, 0.62–0.73 нм и 0.85–1.49 нм на рис. 2, 3 приведены две кривые. Первая кривая соответствует одному способу расположения атомов кислорода в ПУС, вторая кривая соответствует другому способу расположения атомов кислорода в ПУС.

При увеличении концентрации атомов кислорода на этих графиках имеются области, на которых видно, что при одной и той же концентрации атомов кислорода модуль Юнга может вести себя по-разному. Это можно объяснить различными расстояниями от атомов кислорода до атомов углерода в ПУС. Чем расстояние больше, тем меньше атомы кислорода оказывают влияние на значения модуля Юнга ПУС, а чем расстояние меньше, тем больше атомы кислорода оказывают влияние на значения модуля Юнга ПУС. Следовательно, если атомы кислорода располагаются ближе к атомам углерода, образующим ПУС, то модуль Юнга увеличивается, а чем дальше, тем влияние атома на значение модуля Юнга ПУС становится меньше, либо совсем отсутствует. Это связано с тем, что при увеличении расстояния между атомами сила взаимодействия между ними уменьшается, и поэтому наличие допированных атомов меньше оказывает влияние на свойства структуры.

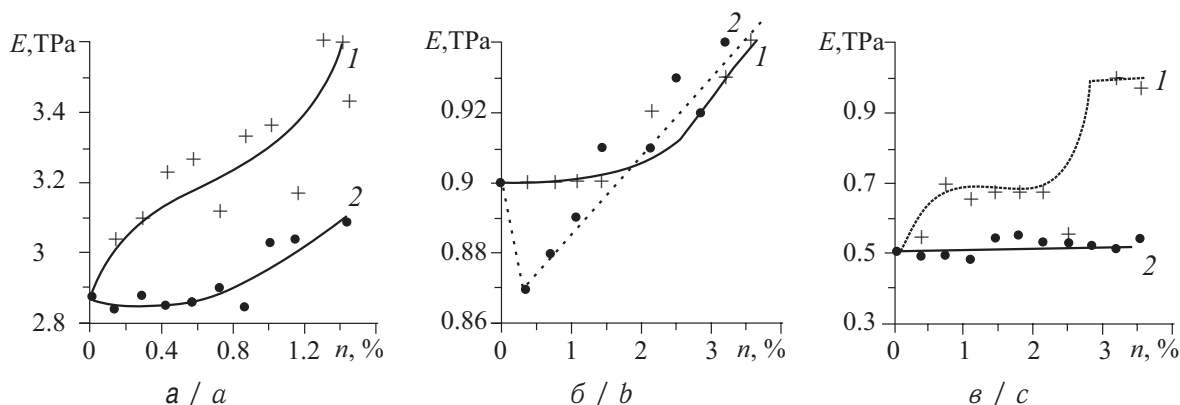


Рис. 2. Изменение модуля Юнга пористой углеродной наноструктуры, допированной атомами кислорода хаотично в ячейке ПУС (в нанопорах), при увеличении концентрации атомов кислорода с размером пор 0.27–0.55 нм (а), 0.62–0.73 нм (б), 0.85–1.49 нм (в). Кривые 1 и 2 соответствуют первому и второму способам расположения атомов кислорода в ПУС

Fig. 2. The change in Young's modulus of a porous carbon nanostructure doped with oxygen atoms is random in the cell of the PCS (in nanopores), with an increase in the concentration of oxygen atoms with a pore size of 0.27–0.55 nm (a), 0.62–0.73 nm (b), 0.85–1.49 nm (c). Curves 1 and 2 correspond to the first and second methods of the arrangement of oxygen atoms in the PCS

Для ПУС с размером пор 0.27–0.55 нм (см. рис. 2, а) модуль Юнга увеличивается независимо от способа расположения атомов кислорода в структуре. Так как размер пор в этой структуре очень маленький, то при добавлении атомов кислорода они будут достаточно близко располагаться к атомам углерода, поэтому на каком-то этапе две кривые на графике, характеризующие разное расположение атомов кислорода хаотично в ПУС, соединятся в одну кривую.

Для ПУС с размером пор 0.62–0.73 нм на рис. 2, б видно, что значение модуля Юнга зависит от способа расположения атомов кислорода. Две кривые графика, характеризующие разное расположение атомов кислорода в структуре, плавно возрастают и две кривые графика почти объединяются в одну кривую, так как концентрация атомов кислорода независимо от размера пор достигает таких значений, что кривые графика начинают объединяться в одну кривую.

Аналогичные результаты наблюдаются для ПУС с размером нанопор 0.85–1.49 нм (рис. 2, в). Из графика видно, что в одном случае модуль Юнга не изменился при увеличении концентрации, а при другом расположении он начал сразу увеличиваться. Это можно объяснить тем, что если поместить атом кислорода в центр поры, то за счет того, что поры большие, атом кислорода будет находиться настолько далеко от стенок поры, что он никак не будет влиять на значение модуля Юнга. Если поместить атом кислорода рядом со стенкой поры, то модуль Юнга начнет изменяться. Когда концентрация станет достаточно большой, то атомы будут равномерно распределяться относительно атомов углерода, образующих стенки пор, и две кривые на графике объединятся в одну кривую.

## 2.2. Модуль Юнга пористой углеродной наноструктуры, допированной атомами кислорода послойно в ПУС

На рис. 3 для случаев расположения атомов кислорода послойно внутри протяженной ПУС наблюдается качественная картина уменьшения значений модуля Юнга



независимо от размера нанопор ПУС и от способа расположения атомов кислорода послойно в решетке ПУС. На рис. 3 представлено изменение значений модуля Юнга, полученных при растяжении ПУС вдоль плоскостей  $YZ$  и  $XZ$  при послойном расположении атомов кислорода в решетке ПУС, независимо от размера нанопор ПУС. Рассмотрено по два способа с разным расположением атомов кислорода в ячейке при исследовании изменения значений модуля Юнга в зависимости от концентрации атомов кислорода.

Рассмотрим изменение модуля Юнга ПУС при растяжении структуры вдоль плоскости  $XU$ . При первом способе расположения атомов кислорода допирование атомами кислорода ПУС со средними размерами пор 0.41 нм осуществлялось параллельно плоскости  $XU$  до концентрации атомов кислорода 0.6%, а дальнейшее допирование осуществлялось перпендикулярно относительно плоскости  $XU$  (параллельно  $YZ$ ). При втором способе расположения атомов кислорода осуществлялись параллельно плоскости  $XU$ , как и при первом способе, только концентрация атомов кислорода в плоскости  $XU$  составляла 1%, а дальнейшее допирование осуществлялось параллельно относительно плоскости  $YZ$ .

В зависимости от увеличения концентрации атомов кислорода с параллельным их расположением относительно плоскости растяжения ( $XU$ ) наблюдается увеличение значений модуля Юнга при увеличении концентрации атомов кислорода, а при перпендикулярном расположении атомов кислорода относительно плоскости растяжения ( $XU$ ) наблюдается уменьшение модуля Юнга при увеличении концентрации атомов кислорода.

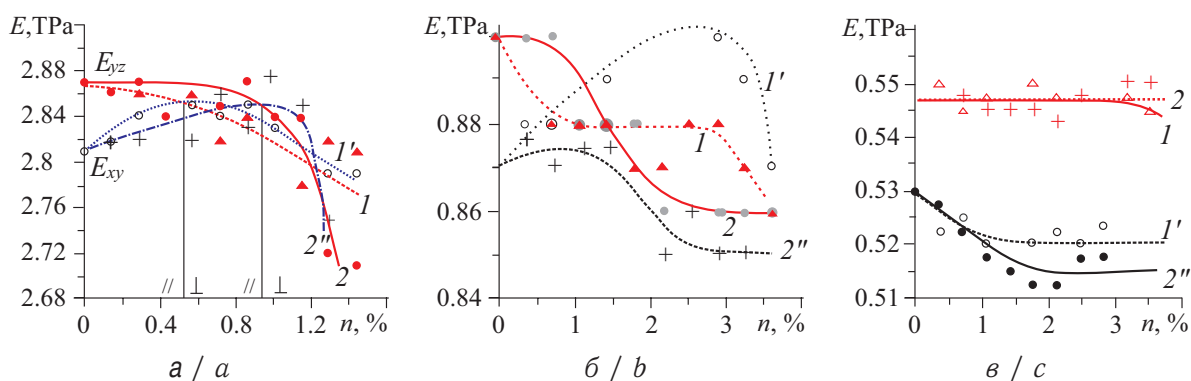


Рис. 3. Изменение модуля Юнга пористой углеродной наноструктуры, допированной атомами кислорода послойно в ПУС, при увеличении концентрации атомов кислорода с размером пор 0.27–0.55 нм (а), 0.62–0.73 нм (б), 0.85–1.49 нм (в). Кривые 1 и 2 соответствуют способам расположения атомов кислорода в ПУС в плоскости  $XU$ , а кривые 1' и 2' — в плоскости  $YZ$

Fig. 3. The change in the Young's modulus of a porous carbon nanostructure doped with oxygen atoms in layers in the PCS, with an increase in the concentration of oxygen atoms with the pore size of 0.27–0.55 nm (a), 0.62–0.73 nm (b), 0.85–1.49 nm (c). Curves 1 and 2 corresponds of the arrangement of oxygen atoms in the PCS in the  $XU$  plane, and 1' and 2' corresponds in  $YZ$  plane

Рассмотрим изменение модуля Юнга ПУС при растяжении вдоль плоскости  $YZ$ . При первом способе расположение атомов кислорода осуществлялось параллельно плоскости  $YZ$  (до 0.6% в первом случае и до 0.9% во втором случае), а с выше 0.6% и 0.9% допирование атомами кислорода осуществляется перпендикулярно



плоскости  $YZ$ . Следовательно, до 0.6% в первом случае и до 0.9% во втором случае не наблюдается изменений значения компонента модуля Юнга при увеличении концентрации атомов кислорода, а при допировании с выше 0.6% и 0.9%, несмотря на то, что это допирование атомов кислорода осуществляется перпендикулярно плоскости  $YZ$ , наблюдается уменьшение значения компонента модуля Юнга при увеличении концентрации атомов кислорода. Аналогичные результаты наблюдаются для модуля Юнга у ПУС с размером нанопор 0.675 нм и 1 нм.

Из полученных результатов можно сделать вывод, что при допировании атомами кислорода ПУС значения модуля Юнга уменьшаются с увеличением концентрации атомов кислорода при их расположении в ячейке ПУС послойно и перпендикулярно оси растяжения. Значения модуля Юнга увеличиваются с увеличением концентрации атомов кислорода при их хаотичном расположении в порах ячейки ПУС.

## ВЫВОДЫ

С помощью методов компьютерного моделирования в работе впервые проведено теоретическое исследование механических свойств допированных кислородом ПУС с плотностью  $1.4 \text{ г/см}^3$  с разным размером нанопор. В процессе моделирования построено три модели ПУС. У первой структуры размер пор варьировался от 0.27 до 0.55 нм, у второй — 0.62–0.73 нм, у третьей — 0.85–1.49 нм. Средние значения модуля Юнга для беспримесных ПУС со средним размером пор 0.41 нм составляют 2.37 ГПа, 0.675 нм — 0.53 ГПа, 1.17 нм — 0.43 ГПа.

Допирование атомами кислорода осуществлялось при расположении атомов кислорода хаотично в ячейке ПУС (в нанопорах) и послойно внутри структуры. Значение модуля Юнга для ПУС, допированной атомами кислорода, хаотично в структуре увеличивается независимо от способа расположения атомов кислорода в структуре. Единственным фактором, не влияющим на изменение значений модуля Юнга при допировании ПУС атомами кислорода, является большая величина размера нанопор, в которых атомы кислорода располагаются далеко от стенок нанопор, не оказывая на них влияние. Для случаев расположения атомов кислорода послойно внутри протяженной ПУС справедливы следующие заключения:

1) при параллельном расположении допированных атомов кислорода оси растяжения ПУС наблюдается увеличение значений модуля Юнга при увеличении концентрации допированных атомов;

2) при перпендикулярном расположении допированных атомов кислорода оси растяжения ПУС наблюдается уменьшение значений модуля Юнга при увеличении концентрации допированных атомов.

На основе полученных результатов можно заключить, что наиболее прочной ПУС является допированная атомами кислорода ПУС с наименьшим размером нанопор и с наибольшей концентрацией в ней атомов кислорода в центральной части ячейки, когда атомы кислорода располагаются наиболее близко к атомам углерода. Полученные результаты согласуются с результатами, которые были получены в работах [7, 12].

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке Президентской стипендии 2016–2018 (проект № СП-2502.2016.1).

## Библиографический список

1. Zhao Z., Wang E. F., Yan H., Kono Y., Wen B., Bai L., Shi F., Zhang J., Kenney-Benson C., Park C., Wang Y., Shen G. Nanoarchitected materials composed of fullerene-





- like spheroids and disordered graphene layers with tunable mechanical properties // *Nature Communications*. 2015. Vol. 6, № 6212. P. 1–10. DOI: <https://doi.org/10.1038/ncomms7212>
2. *Bauer J., Schroer A., Schwaiger R., Kraft O.* Approaching theoretical strength in glassy carbon nanolattices // *Nat. Mater.* 2016. Vol. 15. P. 438–443. DOI: <https://doi.org/10.1038/NMAT4561>
  3. *Kolesnikova A. S.* Mechanical Properties of Sorbents Depending on Nanopore Sizes // *Physics of the Solid State*. 2017. Vol. 59, № 7. P. 1336–1339. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063783417070113>
  4. *Manoharan M. P., Lee H., Rajagopalan R., Foley H. C., Haque M. A.* Elastic Properties of 4–6 nm-thick Glassy Carbon Thin Films // *Nanoscale Res Lett*. 2010. Vol. 5. P. 14–19. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11671-009-9435-2>
  5. *Suarez-Martinez I., Marks N. A.* Effect of microstructure on the thermal conductivity of disordered carbon // *Applied Physics Letters*. 2011. Vol. 99, iss. 3. P. 033101. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.3607872>
  6. *Yao M., Xiao J., Fan X., Liu R., Liu B.* Transparent, superhard amorphous carbon phase from compressing glassy carbon // *Applied Physics Letters*. 2014. Vol. 104, iss. 2. P. 021916. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4861929>
  7. *Glukhova O. E., Slepchenkov M. M.* Electronic Properties of the Functionalized Porous Glass-Like Carbon // *J. Phys. Chem. C*. 2016. Vol. 120, № 31. P. 17753–17758. DOI: <https://doi.org/10.1021/acs.jpcc.6b05058>
  8. *Liang H., Ma X., Yang Z., Wang P., Zhang X., Ren Z., Xue M., Chen G.* Emergence of superconductivity in doped glassy-carbon // *Carbon*. 2016. Vol. 99. P. 585–590. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.carbon.2015.12.046>
  9. *Feng S., Li W., Shi Q., Li Y., Chen J., Ling Y., Asiri A. M., Zhao D.* Synthesis of Nitrogen-Doped Hollow Carbon Nanospheres for CO<sub>2</sub> Capture. // *Chem. Commun.* 2014. Vol. 50. P. 329–331. DOI: <https://doi.org/10.1039/C3CC46492J>
  10. *Bo X., Bai J., Ju J., Guo L.* Highly dispersed Pt nanoparticles supported on poly(ionic liquids) derived hollow carbon spheres for methanol oxidation. // *J. Power Sources*. 2011. Vol. 196. P. 8360–8365. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2011.06.068>
  11. *Qiao Z. A., Guo B., Binder A. J., Chen J., Veith G. M., Dai S.* Controlled Synthesis of Mesoporous Carbon Nanostructures via a “Silica-Assisted” Strategy // *Nano Lett.* 2013. Vol. 13. P. 207–212. DOI: <https://doi.org/10.1021/nl303889h>
  12. *Bushuev N. A., Glukhova O. E., Grigor'ev Y. A., Ivanov D. V., Kolesnikova A. S., Nikolaev A. A., Shalaev P. D., Shesterkin V. I.* Emissivity of a multibeam electron gun with a glassy carbon field-emission cathode // *Technical Physics*. 2016. Vol. 61, № 2. P. 290–295. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063784216020080>
  13. *White R. J., Tauer K., Antonietti M., Titirici M. M.* Functional Hollow Carbon Nanospheres by Latex Templating // *J. Am. Chem. Soc.* 2010. Vol. 132. P. 17360–17363. DOI: <https://doi.org/10.1021/ja107697s>
  14. *Chen A., Yu Y., Lv H., Wang Y., Shen S., Hu Y., Li B., Zhang Y., Zhang J.* Thin-walled, mesoporous and nitrogen-doped hollow carbon spheres using ionic liquids as precursors // *J. Mater. Chem. A*. 2013. Vol. 1. P. 1045–1047. DOI: <https://doi.org/10.1039/C2TA01013E>
  15. *Lu A.-H., Li W.-C., Hao G.-P., Spliethoff B., Bongard H.-J., Schaack B. B., Schüth F.* Easy synthesis of hollow polymer, carbon, and graphitized microspheres // *Angew. Chem. Int. Ed.* 2010. Vol. 49. P. 1615–1618. DOI: <https://doi.org/10.1002/anie.200906445>
  16. *Gong K. P., Du F., Xia Z. H., Durstock M., Dai L. M.* Nitrogen-Doped Carbon Nanotube Arrays with High Electrocatalytic Activity for Oxygen Reduction // *Science*. 2009. Vol. 323. P. 760–764. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.1168049>
  17. *Tang J., Salunkhe R. R., Liu J., Torad N. L., Imura M., Furukawa S., Yamauchi Y.* Thermal conversion of core-shell metal-organic frameworks: a new method for selectively



- functionalized nanoporous hybrid carbon // *J. Am. Chem. Soc.* 2015. Vol. 137. P. 1572–1580. DOI: <https://doi.org/10.1021/ja511539a>
18. *Zhong M., Kim E. K., McGann J. P., Chun S.-E., Whitacre J. F., Jaroniec M., Matyjaszewski K., Kowalewski T.* Electrochemically Active Nitrogen-Enriched Nanocarbons with Well-Defined Morphology Synthesized by Pyrolysis of Self-Assembled Block Copolymer // *J. Am. Chem. Soc.* 2012. Vol. 134. P. 14846–14857. DOI: <https://doi.org/10.1021/ja304352n>
  19. *Kakinoki J.* A model for the structure of 'glassy carbon' // *Acta Cryst.* 1965. Vol. 18. P. 578. DOI: <https://doi.org/10.1107/S0365110X65001342>
  20. *Brenner D. W.* Empirical potential for hydrocarbons for use in simulating the chemical vapor deposition of diamond films // *Phys. Rev. B.* 1990. Vol. 42. P. 9458.
  21. *Glukhova O. E., Kolesnikova A. S., Kossovich E. L., Zhnichkov R. Y.* Super strong nanoindentors for biomedical applications based on bamboo-like nanotubes // *Progress in Biomedical Optics and Imaging – Proceedings of SPIE 2012.* 2012. Vol. 8233. P. 823311. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.907035>
  22. *Glukhova O. E., Kolesnikova A. S.* Empirical modeling of longitudinal tension and compression of graphene nanoparticles and nanoribbons // *Physics of the Solid State.* 2011. Vol. 53, № 9. P. 1957–1962. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063783411090137>
  23. *Glukhova O. E., Kolesnikova A. S.* Mechanical and emission properties of thinnest stable bamboolike nanotubes // *Journal of Physics: Conference Series.* 2012. Vol. 393. P. 012027. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/393/1/012027>
  24. *Glukhova O. E., Saliy I. N., Zhnichkov R. Y., Khvatov I. A., Kolesnikova A. S., Slepchenkov M. M.* Elastic properties of graphene-graphane nanoribbons // *Journal of Physics : Conference Series.* 2010. Vol. 248. P. 012004. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/248/1/012004>

---

**Образец для цитирования:**

*Колесникова А. С., Приходченко К. А.* Влияние легирования атомами кислорода пористых углеродных наноструктур на значения модуля Юнга // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2019. Т. 19, вып. 1. С. 59–68. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-59-68>

---

## **Influence of Doping by Oxygen Atoms of Porous Carbon Nanostructures on Values of Young's Modulus**

**A. S. Kolesnikova, K. A. Prikhodchenko**

Anna S. Kolesnikova, <https://orcid.org/0000-0003-2033-1192>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., 410012 Saratov, Russia, [Kolesnikova.88@mail.ru](mailto:Kolesnikova.88@mail.ru)

Christina A. Prikhodchenko, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., 410012 Saratov, Russia, [kristyans@yandex.ru](mailto:kristyans@yandex.ru)

Porous carbon structures are actively used in various fields of science and technology. The mechanical strength of porous carbon structures with a density of  $1.4 \text{ g/cm}^3$  with different pore sizes and different concentrations of oxygen atoms was investigated. Investigation of the mechanical properties of porous carbon nanostructures was carried out on three models with different sizes of nanopores (0.4–0.8 nm, 0.2–1.12 nm, 0.7–1.3 nm). The nature of the change in Young's modulus of porous nanostructures is determined depending on the concentration and arrangement of oxygen atoms in nanopores.



**Keywords:** porous carbon structures, doping, Young's modulus, oxygen atoms, concentration.

Received: 17.09.2018 / Accepted: 18.12.2018 / Published online: 28.02.2019

**Acknowledgements:** This work was supported by Presidential scholarship (project no. SP-2502.2016.1).

## References

1. Zhao Z., Wang E. F., Yan H., Kono Y., Wen B., Bai L., Shi F., Zhang J., Kenney-Benson C., Park C., Wang Y., Shen G. Nanoarchitected materials composed of fullerene-like spheroids and disordered graphene layers with tunable mechanical properties. *Nature Communications*, 2015, vol. 6, no. 6212, pp. 1–10. DOI: <https://doi.org/10.1038/ncomms7212>
2. Bauer J., Schroer A., Schwaiger R., Kraft O. Approaching theoretical strength in glassy carbon nanolattices. *Nature Materials*, 2016, vol. 15, pp. 438–443. DOI: <https://doi.org/10.1038/NMAT4561>
3. Kolesnikova A. S. Mechanical Properties of Sorbents Depending on Nanopore Sizes. *Physics of the Solid State*, 2017, vol. 59, no. 7, pp. 1336–1339. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063783417070113>
4. Manoharan M. P., Lee H., Rajagopalan R., Foley H. C., Haque M. A. Elastic Properties of 4–6 nm-thick Glassy Carbon Thin Films. *Nanoscale Res Lett.*, 2010, vol. 5, pp. 14–19. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11671-009-9435-2>
5. Suarez-Martinez I., Marks N. A. Effect of microstructure on the thermal conductivity of disordered carbon. *Appl. Phys. Lett.*, 2011, vol. 99, iss. 3, p. 033101. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.3607872>
6. Yao M., Xiao J., Fan X., Liu R., Liu B. Transparent, superhard amorphous carbon phase from compressing glassy carbon. *Applied Physics Letters*, 2014, vol. 104, iss. 2, p. 021916. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4861929>
7. Glukhova O. E., Slepchenkov M. M. Electronic Properties of the Functionalized Porous Glass-Like Carbon. *J. Phys. Chem. C*, 2016, vol. 120, no. 31, pp. 17753–17758. DOI: <https://doi.org/10.1021/acs.jpcc.6b05058>
8. Liang H., Ma X., Yang Z., Wang P., Zhang X., Ren Z., Xuea M., Chen G. Emergence of superconductivity in doped glassy-carbon. *Carbon*, 2016, vol. 99, pp. 585–590. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.carbon.2015.12.046>
9. Feng S., Li W., Shi Q., Li Y., Chen J., Ling Y., Asiri A. M., Zhao D. Synthesis of Nitrogen-Doped Hollow Carbon Nanospheres for CO<sub>2</sub> Capture. *Chem. Commun.*, 2014, vol. 50, pp. 329–331. DOI: <https://doi.org/10.1039/C3CC46492J>
10. Bo X., Bai J., Ju J., Guo L. Highly dispersed Pt nanoparticles supported on poly(ionic liquids) derived hollow carbon spheres for methanol oxidation. *J. Power Sources*, 2011, vol. 196, pp. 8360–8365. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2011.06.068>
11. Qiao Z. A., Guo B., Binder A. J., Chen J., Veith G. M., Dai S. Controlled Synthesis of Mesoporous Carbon Nanostructures via a “Silica-Assisted” Strategy. *Nano Lett.*, 2013, vol. 13, pp. 207–212. DOI: <https://doi.org/10.1021/nl303889h>
12. Bushuev N. A., Glukhova O. E., Grigor'ev Y. A., Ivanov D. V., Kolesnikova A. S., Nikolaev A. A., Shalaev P. D., Shesterkin V. I. Emissivity of a multibeam electron gun with a glassy carbon field-emission cathode. *Technical Physics*, 2016, vol. 61, no. 2, pp. 290–295. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063784216020080>
13. White R. J., Tauer K., Antonietti M., Titirici M. M. Functional Hollow Carbon Nanospheres by Latex Templating. *J. Am. Chem. Soc.*, 2010, vol. 132, pp. 17360–17363. DOI: <https://doi.org/10.1021/ja107697s>



14. Chen A., Yu Y., Lv H., Wang Y., Shen S., Hu Y., Li B., Zhang Y., Zhang J. Thin-walled, mesoporous and nitrogen-doped hollow carbon spheres using ionic liquids as precursors. *J. Mater. Chem. A.*, 2013, vol. 1, pp. 1045–1047. DOI: <https://doi.org/10.1039/C2TA01013E>
15. Lu A.-H., Li W.-C., Hao G.-P., Spliethoff B., Bongard H.-J., Schaack B. B., Schüth F. Easy synthesis of hollow polymer, carbon, and graphitized microspheres. *Angew. Chem. Int. Ed.*, 2010, vol. 49, pp. 1615–1618. DOI: <https://doi.org/10.1002/anie.200906445>
16. Gong K. P., Du F., Xia Z. H., Durstock M., Dai L. M. Nitrogen-Doped Carbon Nanotube Arrays with High Electrocatalytic Activity for Oxygen Reduction. *Science*, 2009, vol. 323, pp. 760–764. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.1168049>
17. Tang J., Salunkhe R. R., Liu J., Torad N. L., Imura M., Furukawa S., Yamauchi Y. Thermal conversion of core–shell metal–organic frameworks: a new method for selectively functionalized nanoporous hybrid carbon. *J. Am. Chem. Soc.*, 2015, vol. 137, pp. 1572–1580. DOI: <https://doi.org/10.1021/ja511539a>
18. Zhong M., Kim E. K., McGann J. P., Chun S.-E., Whitacre J. F., Jaroniec M., Matyjaszewski K., Kowalewski T. Electrochemically Active Nitrogen-Enriched Nanocarbons with Well-Defined Morphology Synthesized by Pyrolysis of Self-Assembled Block Copolymer. *J. Am. Chem. Soc.*, 2012, vol. 134, pp. 14846–14857. DOI: <https://doi.org/10.1021/ja304352n>
19. Kakinoki J. A model for the structure of “glassy carbon”. *Acta Cryst.*, 1965, vol. 18, p. 578. DOI: <https://doi.org/10.1107/S0365110X65001342>
20. Brenner D. W. Empirical potential for hydrocarbons for use in simulating the chemical vapor deposition of diamond films. *Phys. Rev. B*, 1990, vol. 42, p. 9458.
21. Glukhova O. E., Kolesnikova A. S., Kossovich E. L., Zhnichkov R. Y. Super strong nanoindentors for biomedical applications based on bamboo-like nanotubes. *Progress in Biomedical Optics and Imaging – Proceedings of SPIE 2012*, 2012, vol. 8233, p. 823311. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.907035>
22. Glukhova O. E., Kolesnikova A. S. Empirical modeling of longitudinal tension and compression of graphene nanoparticles and nanoribbons. *Physics of the Solid State*, 2011, vol. 53, no. 9, pp. 1957–1962. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063783411090137>
23. Glukhova O. E., Kolesnikova A. S. Mechanical and emission properties of thinnest stable bamboolike nanotubes. *Journal of Physics: Conference Series*, 2012, vol. 393, p. 012027. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/393/1/012027>
24. Glukhova O. E., Saliy I. N., Zhnichkov R. Y., Khvatov I. A., Kolesnikova A. S., Slepchenkov M. M. Elastic properties of graphene-graphane nanoribbons. *Journal of Physics: Conference Series*, 2010, vol. 248, p. 012004. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/248/1/012004>

---

**Cite this article as:**

Kolesnikova A. S., Prikhodchenko K. A. Influence of Doping by Oxygen Atoms of Porous Carbon Nanostructures on Values of Young’s Modulus. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 1, pp. 59–68 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-59-68>

---



УДК 539.384.2

## Моментная контактная нагрузка при одностороннем контакте балок

М. А. Осипенко, А. А. Касаткин

Осипенко Михаил Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики и биомеханики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Россия, 614990, Пермь, Комсомольский просп., д. 29, osipenko.michael@yandex.ru

Касаткин Антон Александрович, аспирант кафедры теоретической механики и биомеханики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Россия, 614990, Пермь, Комсомольский просп., д. 29, dedulyama@yandex.ru

Рассмотрена контактная задача для конструкции, состоящей из двух балок с различными длинами и различными переменными толщинами. Один конец короткой балки зашпелен; совпадающий с ним конец длинной балки закреплен шарнирно. Второй конец каждой балки свободен. К длинной балке приложена заданная нагрузка. Под действием этой нагрузки балки испытывают слабый совместный изгиб с возможным отставанием, то есть имеется односторонний контакт. Трение между балками отсутствует. Изгиб каждой балки описывается моделью Бернулли – Эйлера. Контактная задача состоит в отыскании контактной нагрузки, то есть сил взаимодействия балок. Эта задача имеет ряд известных особенностей, характеризующих как вообще контактные задачи для балочных конструкций, так и контактные задачи для конструкций, содержащих балку, которая не может оставаться в равновесии при любой приложенной к ней нагрузке. Наряду с этими особенностями в рассмотренной контактной задаче появляется еще одна, ранее неизвестная особенность, состоящая в том, что в контактной нагрузке может содержаться сосредоточенный момент. Неотрицательность контактной нагрузки как необходимое условие одностороннего контакта при этом не нарушается, так как сосредоточенный момент находится на конце балок и его «отрицательная часть» расположена за пределами балок, не входя в контактную нагрузку. Предложена математическая постановка контактной задачи, доказана единственность решения и построено аналитическое решение в некоторых частных случаях. Установлена связь рассмотренной задачи с известной задачей о контакте двух консольных балок.

*Ключевые слова:* балка Бернулли – Эйлера, контактная задача, односторонний контакт, контактная нагрузка, сосредоточенный момент, единственность решения, аналитическое решение.

Поступила в редакцию: 23.04.2018 / Принята: 04.07.2018 / Опубликовано онлайн: 28.02.2019

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-69-81>

### ВВЕДЕНИЕ

Контактные задачи для балочных конструкций [1–17] являются своеобразной разновидностью контактных задач теории упругости; основное техническое приложение здесь – расчет листовых рессор [1–5]. В задачах этой разновидности, в отличие от традиционных задачи Герца и задачи о штампе [6, 7, 18], возникает ряд особенностей: сосредоточенные силы в контактной нагрузке, разрывы в распределенной части этой нагрузки, сложный вид области контакта. Если в конструкции содержится балка, которая не может в отдельности находиться в равновесии при произвольной нагрузке, то появляются дополнительные особенности [8]: наличие в постановке задачи условия равновесия такой балки; наличие параметра, описывающего неопределенную часть перемещения этой балки (и подлежащего нахождению наряду с



контактной нагрузкой); необходимость доказательства единственности определения не только контактной нагрузки, но и упомянутого параметра; исключение нулевых внешних нагрузок для обеспечения единственности решения.

В настоящей статье изучается балочная конструкция, в которой появляется еще одна особенность — необходимость расширения множества допустимых контактных нагрузок, причем это расширение имеет неожиданный характер: при наличии одностороннего контакта следует включить в контактную нагрузку сосредоточенный момент, который, казалось бы, не может содержаться в этой нагрузке при таком контакте. Эта конструкция и сопутствующая ей упомянутая особенность контактной нагрузки в литературе ранее не рассматривались.

Сначала кратко рассмотрены две конструкции, в которых данная особенность отсутствует; это требуется для дальнейшего изложения. Затем рассмотрена новая конструкция (похожая на две упомянутые) и ее особенности.

### 1. ОДНОСТОРОННИЙ КОНТАКТ ДВУХ ЗАЩЕМЛЕННЫХ БАЛОК

Рассмотрим две балки с различными длинами  $\tilde{L} > L > 0$  (тильдой обозначаются величины, относящиеся к длинной балке), защемленные в точке  $x = 0$ , находящиеся под заданной нагрузкой  $q(x) \geq 0$  (рис. 1, а).

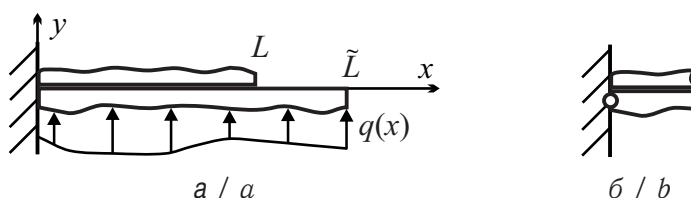


Рис. 1. Балочные конструкции в контактных задачах 1 и 3  
Fig. 1. Beam structures for the contact problems 1 and 3

В отсутствие этой нагрузки балки прямолинейны и плотно прилегают друг к другу. Сечения балок являются прямоугольниками одинаковой ширины  $w$ , но различной переменной толщины; модуль Юнга  $E$  одинаков для обеих балок. Под нагрузкой балки испытывают слабый совместный изгиб с возможным отставанием (односторонний контакт). Трение между балками отсутствует; изгиб каждой балки описывается моделью Бернулли – Эйлера [19]. Обозначим через  $f(x)$  контактную нагрузку. Контактная задача заключается в отыскании  $f(x)$ .

Используя теорию Бернулли – Эйлера, можно найти [5] упругие линии  $y(x)$ ,  $\tilde{y}(x)$  балок и далее расстояние  $r(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$  между балками:

$$r(x) = \int_0^x (x-s)a(s) \left( \int_s^L (t-s)f(t) dt - k(s) \right) ds, \quad (1)$$

где  $0 \leq x \leq L$ ,

$$a(x) = \frac{12}{Ew} \left( \frac{1}{\tilde{h}^3(x)} + \frac{1}{h^3(x)} \right), \quad k(x) = \frac{1}{1 + \tilde{h}^3(x)/h^3(x)} \int_x^{\tilde{L}} (s-x)q(s) ds, \quad (2)$$

$h(x)$ ,  $\tilde{h}(x)$  — переменные толщины сечений (геометрически – при определении функций  $y$  и  $\tilde{y}$  — толщины считаются равными нулю). Будем считать, что  $h(x)$ ,  $\tilde{h}(x) > 0$  дважды непрерывно дифференцируемы, и  $q(x)$  непрерывна при  $0 \leq x \leq L$ , тогда



$a(x) > 0$  непрерывна (для этой функции нужна только непрерывность) и  $k(x) \geq 0$  дважды непрерывно дифференцируема. Условия одностороннего контакта балок при  $0 \leq x \leq L$  состоят в том, что  $f(x) \geq 0$ ,

$$r(x) \geq 0, \tag{3}$$

$$f(x) > 0 \Rightarrow r(x) = 0. \tag{4}$$

Из (3), (4) и (1) должна быть найдена  $f(x)$ , но следует еще указать множество допустимых  $f(x)$  (помимо их неотрицательности). Это множество подбирается так, чтобы (из физических соображений)  $f(x)$  существовала и была единственной. С одной стороны, для обеспечения существования  $f(x)$  множество должно быть достаточно широким. Если, например, искать  $f(x)$  в множестве непрерывных функций, то искомой  $f(x)$  может не оказаться, поскольку [4, 5] (см. ниже)  $f(x)$  может быть разрывной и может содержать сосредоточенные силы ( $\delta$ -функции). С другой стороны, для обеспечения единственности  $f(x)$  множество должно быть достаточно узким. Если, например, допустить любые разрывные функции, то может оказаться много различных  $f(x)$ , удовлетворяющих (3) и (4), так как добавление положительного конечного «точечного выброса» к  $f(x)$  в точке ее положительности не изменит (3) и (4); следовательно, нужно потребовать, например, односторонней непрерывности  $f(x)$ . В итоге, «подходящим» представляется множество функций вида

$$p(x) + \sum_i P_i \delta(x - x_i), \tag{5}$$

где  $p(x) \geq 0$  кусочно-непрерывна, непрерывна слева при  $0 < x \leq L$  и непрерывна справа при  $x = 0$ ;  $P_i \geq 0$ ;  $x_i > 0$ ; сумма конечна. Две функции вида (5) считаются равными, если их разность тождественно равна нулю при  $0 \leq x \leq L$ . Заметим, что условие  $x_i > 0$  существенно, так как добавление к  $f(x)$  слагаемого  $P\delta(x)$  ( $P > 0$ ) не меняет (3) и (4) и, следовательно, приводит к неединственности  $f(x)$ . Окончательно приходим к следующей математической постановке контактной задачи.

**Задача 1.** Найти функцию  $f(x)$  вида (5) такую, что при  $0 \leq x \leq L$  выполнены (3) и (4), где  $r(x)$  выражается формулой (1).

В [4] доказана единственность решения задачи 1. В [5] построено аналитическое решение задачи 1 в некоторых частных случаях (такое построение здесь и далее доказывает существование решения), а именно доказаны следующие утверждения.

**Утверждение 1.** Если  $k''(x) < 0$  при  $0 \leq x \leq L$ , то решение задачи 1 имеет вид (рис. 2, а)

$$f(x) = P\delta(x - L), \tag{6}$$

где

$$P = \int_0^L (L - x)a(x)k(x) dx / \int_0^L (L - x)^2 a(x) dx. \tag{7}$$

**Утверждение 2.** Если  $k''(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq L$  и  $k(L) = 0$ , то решение задачи 1 имеет вид (рис. 2, б)

$$f(x) = k''(x). \tag{8}$$

Условие  $k(L) = 0$  означает, как нетрудно получить из (2), что заданная нагрузка  $q(x)$  равна нулю на выступающей части длинной балки.



**Утверждение 3.** Если  $k''(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq L$  и  $k(L) > 0$ , то решение задачи 1 имеет следующий вид:

- а) если  $\Phi(0) \leq 0$ , то  $f(x)$  выражается формулой (6) (рис. 2, а).
- б) если  $\Phi(0) > 0$ , то (рис. 2, в)

$$f(x) = \frac{k(\lambda)}{L-\lambda} \delta(x-L) + \left(-k'(\lambda) - \frac{k(\lambda)}{L-\lambda}\right) \delta(x-\lambda) + \begin{cases} k''(x) & (0 \leq x \leq \lambda), \\ 0 & (\lambda < x \leq L), \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\Phi(\Lambda) = \int_{\Lambda}^L a(x)(L-x)^2 (k(\Lambda)/(L-\Lambda) - k(x)/(L-x)) dx, \quad (10)$$

$0 < \lambda < L$  — корень уравнения  $\Phi(\Lambda) = 0$ .

В формулах (6), (9) и далее предполагается, что  $\delta(x-L)$  «полностью» содержится на отрезке  $0 \leq x \leq L$ .

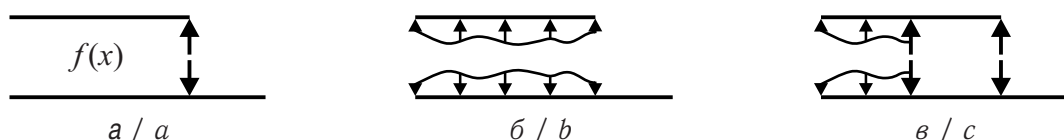


Рис. 2. Варианты контактной нагрузки в задаче 1  
Fig. 2. The types of contact loading for the problem 1

## 2. ОДНОСТОРОННИЙ КОНТАКТ ЗАЩЕМЛЕННОЙ И ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ БАЛОК, РАЗДЕЛЕННЫХ ЗАЗОРОМ

Пусть теперь одна из балок закреплена шарнирно; длины балок  $L$  одинаковы; толщины  $h$  постоянны и одинаковы;  $H > 0$  — зазор между балками (рис. 3, а). Для шарнирно закрепленной балки должно выполняться условие равновесия (равенство нулю суммарного момента сил относительно шарнира)

$$\int_0^L f(x)x dx = \int_0^L q(x)x dx. \quad (11)$$

Используя теорию Бернулли – Эйлера, можно найти (см. [8]) упругие линии балок и далее расстояние  $r(x)$  между балками:

$$r(x) = -Cx + H + a \int_0^x (x-s) \left( \int_s^L (t-s)(f(t) - q(t)/2) dt \right) ds, \quad (12)$$

где  $C$  — неизвестная постоянная, появляющаяся в слагаемом  $Cx$  уравнения упругой линии шарнирно закрепленной балки,  $a = 24/(Ewh^3)$ . Контактная задача заключается теперь в отыскании  $f(x)$  и  $C$ . Будем считать, что  $f(x)$  имеет вид (5). Таким образом, здесь не происходит расширения множества допустимых контактных нагрузок по сравнению с задачей 1. Будем, как и в задаче 1, считать, что  $q(x) \geq 0$  непрерывна при  $0 \leq x \leq L$ , но здесь следует еще предполагать, что  $q(x) \neq 0$ , так как иначе при  $f(x) \equiv 0$  будет неопределенной (неединственной)  $C \leq 0$ . Окончательно приходим к следующей математической постановке контактной задачи.

**Задача 2.** Найти функцию  $f(x)$  вида (5) и число  $C$  такие, что выполнено (11) и при  $0 \leq x \leq L$  выполнены (3) и (4), где  $r(x)$  выражается формулой (12).





В [8] доказана единственность решения задачи 2 и построено аналитическое решение; при построении этого решения существенно использовано условие  $H > 0$ . Установлено, что имеется два варианта контактной нагрузки  $f(x)$ : либо сумма распределенной по некоторому отрезку  $\lambda \leq x \leq L$  нагрузки и сосредоточенной в точке  $x = \lambda$  силы (рис. 3, б), либо одна сосредоточенная в точке  $x = L$  сила (рис. 3, в).

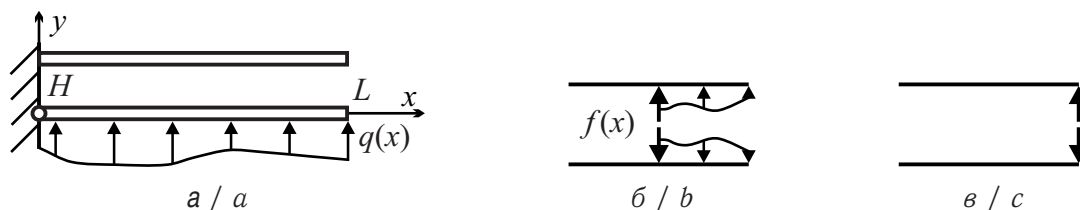


Рис. 3. Балочная конструкция и варианты контактной нагрузки в задаче 2  
 Fig. 3. Beam structure and the types of contact loading for the problem 2

### 3. ОДНОСТОРОННИЙ КОНТАКТ ЗАЦЕМЛЕННОЙ И ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ БАЛОК БЕЗ ЗАЗОРА

#### 3.1. Постановка контактной задачи

Рассмотрим теперь конструкцию задачи 1, но при этом длинная балка является шарнирно закрепленной (рис. 1, б). Это и есть конструкция с новой особенностью. Для шарнирно закрепленной балки должно выполняться условие равновесия, аналогичное (11)

$$\int_0^L f(x)x dx = \int_0^L q(x)x dx, \tag{13}$$

а расстояние  $r(x)$  между балками выражается формулой (1) с добавлением, аналогичным (12):

$$r(x) = -Cx + \int_0^x (x-s)a(s) \left( \int_s^L (t-s)f(t) dt - k(s) \right) ds. \tag{14}$$

Здесь, как и в парагр. 2, будем по указанным там причинам предполагать, что  $q(x) \not\equiv 0$ .

Далее можно сформулировать математическую постановку контактной задачи, аналогичную постановке задачи 2. Можно также доказать единственность решения этой задачи на множестве допустимых  $f(x)$  вида (5). Однако попытка по аналогии с решениями парагр. 1 и 2 построить решения в частных случаях приводит к неожиданному результату: в некоторых случаях решение не существует. Доказать это нетрудно следующим образом (но уже после исследования данной ситуации, см. п. 3.4). Сначала рассматривается более широкое множество допустимых  $f(x)$ . Далее для этого множества доказывается единственность решения. Затем строится решение, принадлежащее расширенному множеству, но не принадлежащее исходному множеству. Отсюда следует, что на исходном множестве решения не существует.

Структура расширенного множества допустимых  $f(x)$  была установлена из следующих эвристических соображений. Было найдено (см. п. 3.7), что некоторое приближение к решению содержит слагаемое  $P(\varepsilon)\delta(x - \varepsilon)$ , где  $\varepsilon > 0$  – малый параметр, а собственно решение  $f(x)$  получается при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , причем тогда  $P(\varepsilon) \rightarrow +\infty$  и  $P(\varepsilon)\varepsilon \rightarrow M < \infty$ . Таким образом, контактная нагрузка  $f(x)$  содержит сосредоточенную при  $x = 0$  (бесконечную) силу и сосредоточенный при  $x = 0$  момент  $M$ . Так



как  $f(x)$  не может (по предположению парагр. 1) содержать сосредоточенную при  $x = 0$  силу, то остается только момент. Это означает, что  $f(x)$  содержит слагаемое  $-2M\delta'(x)$ . Множитель 2 появляется здесь потому, что на отрезке  $0 \leq x \leq L$  расположена только «половина» функции  $-2M\delta'(x)$ , поэтому интеграл от этой функции в левой части (13) равен  $M$ , то есть именно моменту такой нагрузки. Заметим здесь, что слагаемое  $-2M\delta'(x)$  в  $f(x)$  влияет на формулу (13), но, как нетрудно убедиться, не влияет на формулу (14). «Половинное» участие функции  $-2M\delta'(x)$  в контактной нагрузке обеспечивает неотрицательность этой нагрузки. Действительно, функция  $-2M\delta'(x)$  содержит «отрицательную часть» независимо от знака величины  $M$ , но если  $M > 0$ , то условие  $f(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq L$  не нарушается, так как тогда «отрицательная часть»  $-2M\delta'(x)$  расположена при  $x < 0$ .

Также существуют эвристические соображения, по которым следует дополнить контактное условие (4), если в составе контактной нагрузки имеется слагаемое  $-2M\delta'(x)$ . Действительно, это слагаемое положительно (при  $M > 0$ ) не в «самой» точке  $x = 0$ , а в «бесконечно близкой» к ней (справа) точке. Поэтому  $r(x)$  согласно (4) должно обратиться в нуль в этой «бесконечно близкой» точке. Так как  $r(0) = 0$  (как легко получить из (14)), то это означает, что при  $M > 0$  должно выполняться равенство  $r'(0) = 0$ . Заметим, что если это условие не выполнено, то будет неопределенной (неединственной) постоянной  $C$ , так как тогда можно положить  $f(x) = -2M\delta'(x)$ , где  $M$  найдено из (13), и выбрать лишь достаточно большую по модулю  $C$  (чтобы обеспечить условие  $r(x) \geq 0$ ).

Итак, множество допустимых  $f(x)$  имеет вид

$$p(x) + \sum_i P_i \delta(x - x_i) - 2M\delta'(x), \quad (15)$$

где относительно  $p(x)$ ,  $P_i$ ,  $x_i$  и суммы делаются те же предположения, что и для функции (5), и дополнительно предполагается, что  $M \geq 0$ . К контактному условию (4) добавляется, как указано выше, условие:

$$M > 0 \Rightarrow r'(0) = 0. \quad (16)$$

Заметим, что  $r'(0) = -C$ ; это нетрудно получить из (14) и (15). Окончательно приходим к следующей математической постановке контактной задачи.

**Задача 3.** Найти функцию  $f(x)$  вида (15) и число  $C$  такие, что выполнено (13); при  $0 \leq x \leq L$  выполнены (3), (4) и (16);  $r(x)$  всюду выражается формулой (14).

### 3.2. Доказательство единственности решения контактной задачи

**Утверждение 4.** Задача 3 может иметь только одно решение.

**Доказательство.** Пусть  $f(x)$ ,  $C$  и  $f_*(x)$ ,  $C_*$  — два решения задачи 3. По формуле (14) им соответствуют функции  $r(x)$  и  $r_*(x)$ . Обозначим

$$\varphi(x) = f(x) - f_*(x). \quad (17)$$

Так как  $f(x)$  и  $f_*(x)$  имеют вид (15), то  $\varphi(x)$  также имеет вид (15), но  $p(x)$ ,  $P_i$ ,  $M$  могут быть отрицательными. Обозначим

$$A = \int_0^L (r(x) - r_*(x)) \varphi(x) dx. \quad (18)$$



Из (3), (4) и (17) нетрудно установить, что в (18) подинтегральная функция неположительна; следовательно,  $A \leq 0$ . С другой стороны, подставляя (14) в (18) и учитывая (17), можно найти, что

$$A = (C_* - C) \int_0^L \varphi(x)x dx + \int_0^L a(x)J^2(x) dx, \quad (19)$$

где

$$J(x) = \int_x^L (s - x)\varphi(s) ds. \quad (20)$$

Из (13) и (17) следует, что первое слагаемое в (19) равно нулю; тогда из (19) следует, что  $A \geq 0$ ; так как  $A \leq 0$ , то  $A = 0$ . Далее, учитывая (19), (20) и упомянутый выше вид  $\varphi(x)$ , нетрудно вывести из равенства  $A = 0$ , что часть  $\varphi(x)$ , не содержащая слагаемое, пропорциональное  $\delta'(x)$ , тождественно равна нулю при  $0 \leq x \leq L$ . Если же  $\varphi(x) \sim \delta'(x)$ , то из (13) и (17) следует, что и в этом случае  $\varphi(x) \equiv 0$ . Таким образом,  $f(x) \equiv f_*(x)$  при  $0 \leq x \leq L$ . Остается доказать, что  $C = C_*$ . Из (14) следует, что  $r(x) - r_*(x) = (C_* - C)x$ . Предположим, что  $C \neq C_*$ ; тогда  $r(x)$  и  $r_*(x)$  могут обращаться в нуль одновременно только при  $x = 0$ , поэтому при каждом  $0 < x \leq L$  либо  $r(x) > 0$  и тогда  $f(x) = 0$ , либо  $r_*(x) > 0$  и тогда  $f_*(x) = f(x) = 0$ , то есть  $f(x) = 0$  при  $0 < x \leq L$ . Так как кусочно-непрерывная часть  $f(x)$  непрерывна справа при  $x = 0$ , а  $\delta(x)$  не может, как предполагалось выше, содержаться в  $f(x)$ , то из (15) следует, что  $f(x) = -2M\delta'(x)$ ; тогда и  $f_*(x) = -2M\delta'(x)$ . Если  $M > 0$ , то  $r'(0) = -C = 0$  и  $r'_*(0) = -C_* = 0$ , то есть  $C = C_*$ , что противоречит принятому выше предположению. Следовательно,  $M = 0$ ; тогда  $f(x) \equiv 0$  при  $0 \leq x \leq L$ ; это противоречит (13) в принятом предположении непрерывной неотрицательной  $q(x) \not\equiv 0$ . Таким образом,  $C = C_*$ ; тем самым утверждение 4 полностью доказано.  $\square$

### 3.3. Связь решений задач 1 и 3

**Утверждение 5.** Пусть  $f_1(x)$  — решение задачи 1. Если  $M_1 \geq 0$ , где

$$M_1 = \int_0^{\bar{L}} q(x)x dx - \int_0^L f_1(x)x dx, \quad (21)$$

то решение задачи 3 имеет вид

$$f(x) = f_1(x) - 2M_1\delta'(x), \quad C = 0. \quad (22)$$

**Доказательство.** Так как  $f_1(x)$  имеет вид (5), то  $f(x)$  имеет вид (15). Подставляя (22) в (13) и учитывая (21), находим, что (13) выполнено. Далее, при  $C = 0$  вид (14) совпадает с видом (1), однако в (14) следует подставить  $f(x)$  из (22), а в (1) следует подставить  $f_1(x)$ . Как было замечено в п. 3.1, слагаемое  $-2M_1\delta'(x)$  в  $f(x)$  не влияет на (14), поэтому (1) и (14) совпадают при выполнении (22). Так как  $f_1(x)$  — решение задачи 1, то (3) и (4) выполнены. Далее из (14) находим  $r'(0) = -C = 0$ , следовательно (16) выполнено и утверждение 5 доказано.  $\square$

Так как утверждения 1, 2, 3 дают решения задачи 1 в частных случаях, то с помощью утверждения 5 получаем в этих случаях решения задачи 3 при дополнительном условии  $M_1 \geq 0$ . Если это условие не выполнено, то решение задачи 3 нужно строить отдельно.



### 3.4. Решение задачи 3 при условии утверждения 1

Пусть  $k''(x) < 0$  при  $0 \leq x \leq L$ , то есть выполнено условие утверждения 1. Тогда из (6) (для  $f_1(x)$ ) и (21) находим, что неравенство  $M_1 \geq 0$  принимает вид  $Q \geq P$ , где

$$Q = \frac{1}{L} \int_0^{\tilde{L}} q(x)x dx. \quad (23)$$

Возможно любое соотношение между величинами  $Q$  и  $P$ ; в этом нетрудно убедиться на примере:  $q(x) \equiv \text{const}$ ,  $a(x) \equiv \text{const}$ ,  $k(x) \sim (\tilde{L}^2 - x^2)$ .

Если  $Q \geq P$ , то (22) есть решение задачи 3 (рис. 4, а, момент показан дуговой стрелкой), причем если  $Q > P$ , то  $M_1 > 0$ ; это, вместе с установленной выше единственностью решения, доказывает (как предварительно упоминалось в п. 3.1), что решение задачи 3 может не существовать на множестве (5), более узком, чем множество (15). Если  $Q < P$ , то решение задачи 3 строится отдельно; оно сформулировано в нижеследующем утверждении.

**Утверждение 6.** Если  $k''(x) < 0$  при  $0 \leq x \leq L$  и  $Q < P$ , то решение задачи 3 имеет вид (рис. 4, б)

$$f(x) = Q\delta(x - L), \quad C = \frac{Q - P}{L} \int_0^L (L - x)^2 a(x) dx. \quad (24)$$

**Доказательство.** Очевидно, что  $f(x)$  имеет вид (15). Подставляя (24) в (13) и учитывая (23), находим, что (13) выполнено. Подставляя (24) в (14) и учитывая (7), получим, что  $r(0) = 0$ ,  $r(L) = 0$ ,  $r'(0) = -C > 0$  и

$$r''(x) = a(x)(L - x)(Q - b(x)),$$

где  $b(x) = k(x)/(L - x)$ ; при этом  $b'(x) = c(x)/(L - x)^2$ , где  $c(x) = k(x) + k'(x)(L - x)$  и  $c'(x) = k''(x)(L - x)$ . Функция  $f(x)$  может быть положительна только при  $x = L$ , а  $r(L) = 0$ , следовательно, (4) выполнено. Остается доказать (3). Заметим, что  $k(L) > 0$ , так как если  $k(L) = 0$ , то из (2) нетрудно вывести, что  $k''(L) = 0$ ; это противоречит принятому условию  $k''(x) < 0$  при  $0 \leq x \leq L$ . Далее, так как  $c'(x) < 0$  при  $0 \leq x < L$  и  $c(L) = k(L) > 0$ , то  $c(x) > 0$  при  $0 \leq x \leq L$ ; следовательно,  $b(x)$  возрастает при  $0 \leq x < L$ . Поскольку  $Q > b(0)$  (что следует из (23) и (2)), а  $b(L - 0) = +\infty$  (так как  $k(L) > 0$ ), то из возрастания  $b(x)$  следует, что существует  $0 < \xi < L$  такое, что  $Q > b(x)$  (тогда  $r''(x) > 0$ ) при  $0 \leq x < \xi$  и  $Q < b(x)$  (тогда  $r''(x) < 0$ ) при  $\xi < x < L$ . Такой вид  $r''(x)$  вместе с указанными выше условиями  $r'(0) > 0$ ,  $r(0) = 0$ ,  $r(L) = 0$  и несложными геометрическими соображениями приводит к неравенству  $r(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq L$ , и (3) доказано. Условие (16) проверять не нужно, так как в данном случае  $M = 0$ . Утверждение 6 доказано.  $\square$

### 3.5. Решение задачи 3 при условиях утверждения 2

Пусть  $k''(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq L$  и  $k(L) = 0$ , то есть выполнены условия утверждения 2. Тогда из (8) (для  $f_1(x)$ ), (2), (21) находим, что неравенство  $M_1 \geq 0$  принимает вид  $k(0)\tilde{h}^3(0)/h^3(0) \geq Lk'(L)$ . Если  $k(L) = 0$ , то, как упомянуто в парагр. 1,  $q(x) \equiv 0$  при  $L \leq x \leq \tilde{L}$ . Тогда из (2) следует, что  $k'(L) = 0$ ; поэтому неравенство  $M_1 \geq 0$  эквивалентно неравенству  $k(0)\tilde{h}^3(0)/h^3(0) \geq 0$ , которое, очевидно, выполнено. Таким образом, в данном случае решение задачи 3 всегда выражается формулами (22) (рис. 4, в).

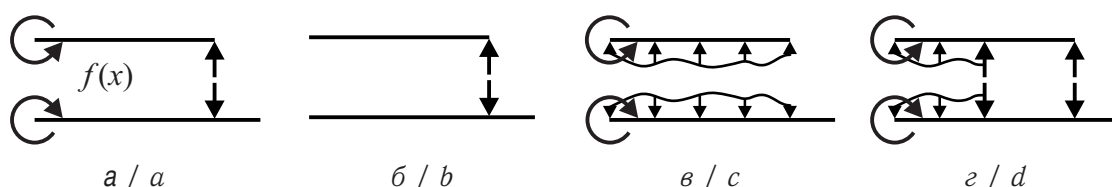


Рис. 4. Варианты контактной нагрузки в задаче 3  
 Fig. 4. The types of contact loading for the problem 3

### 3.6. Решение задачи 3 при условиях утверждения 3

Пусть  $k''(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq L$ ,  $k(L) > 0$  и  $\Phi(0) \leq 0$ , то есть выполнены условия а) утверждения 3. Тогда из (6) (для  $f_1(x)$ ) и (21) находим, что неравенство  $M_1 \geq 0$  принимает, как и в п. 3.4, вид  $Q \geq P$ .

Здесь также возможно любое соотношение между величинами  $Q$  и  $P$ ; в этом нетрудно убедиться на примере:  $q(x) \equiv \text{const}$ ,  $a(x) \equiv \text{const}$ ,  $k(x) \sim (\tilde{L} - x)^2$ .

Если  $Q \geq P$ , то (22) есть решение задачи 3 (рис. 4, а). Если  $Q < P$ , то решение задачи 3 строится отдельно; оно сформулировано в нижеследующем утверждении.

**Утверждение 7.** Если  $k''(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq L$ ,  $k(L) > 0$ ,  $\Phi(0) \leq 0$  и  $Q < P$ , то решение задачи 3 имеет вид (24) (рис. 4, б).

**Доказательство.** утверждения 7 аналогично доказательству утверждения 6.  $\square$

Пусть теперь  $k''(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq L$ ,  $k(L) > 0$  и  $\Phi(0) > 0$ , то есть выполнены условия б) утверждения 3. Тогда из (9) (для  $f_1(x)$ ), (2), (21) находим, что неравенство  $M_1 \geq 0$  эквивалентно неравенству  $k(0)\tilde{h}^3(0)/h^3(0) \geq 0$ , которое, очевидно, выполнено. Таким образом, в данном случае решение задачи 3 всегда выражается формулами (22) (рис. 4, г).

### 3.7. Пример численного решения задачи 3

Задачу 3 можно решить численно. При таком решении искомая контактная нагрузка  $f(x)$  представляется [11] множеством сосредоточенных сил  $P_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ), расположенных в заданных узлах  $x_i$ , разбивающих отрезок  $0 \leq x \leq L$ . Далее проводится итерационное уточнение множества узлов контакта до выполнения (3) и (4) в узлах и условия  $P_i \geq 0$ ; условие (13) также учитывается; условие (16) не учитывается. Численное решение — это значения  $f(x)$  в узлах:  $f(x_i) = P_i/(x_i - x_{i-1})$  (полагаем  $x_0 = 0$ ).

Рассмотрим следующий пример:  $L/\tilde{L} = (8 - 2\sqrt{2})/7$ ,  $h(x) = \tilde{h}(x) = h_0$ ,  $q(x) = q_0$ . Нетрудно установить, что в этом случае выполнены условия б) утверждения 3 и согласно п. 3.6 аналитическое решение задачи 3 получается по формулам (22) и (9):

$$f(x) = P_*\delta(x - L) + P_{**}\delta(x - L/2) + \begin{cases} q_0/2 & (0 \leq x \leq L/2) \\ 0 & (L/2 < x \leq L) \end{cases} - 2M_1\delta'(x), \quad (25)$$

где  $P_* = q_0L(3 + 2\sqrt{2})/16$ ,  $P_{**} = q_0L/16$ ,  $M_1 = q_0L^2(9 + 4\sqrt{2})/32$ .

Численное решение показано точками на рис. 5; рядом с некоторыми точками в скобках указан номер  $i$  узла. Параметры алгоритма:  $N = 24$ ,  $x_i = L \exp((1 - N/i)/2)$  (практика расчетов показала, что узлы должны существенно сгущаться вблизи  $x = 0$ ).

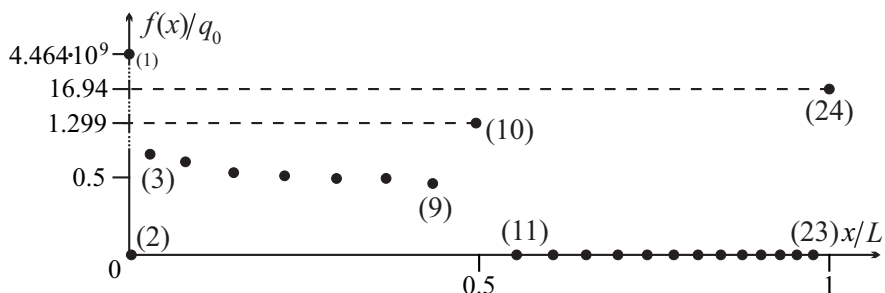


Рис. 5. Численное решение задачи 3

Fig. 5. The numerical solution of the problem 3

Если значения  $f(x_i)/q_0$  равны нулю или порядка единицы, то они интерпретируются как кусочно-непрерывная часть  $f(x)$ . На рис. 5 видно, что  $f(x_i)/q_0$  при  $3 \leq i \leq 9$  и  $11 \leq i \leq 23$  хорошо совпадают с третьим слагаемым в (25) ( $f(x_2)/q_0 = 0$ , а не близко к  $1/2$ , но это – незначительная погрешность, так как  $x_2/L = 0.004087$  мало).

Если значения  $f(x_i)/q_0$  порядка  $L/(x_i - x_{i-1})$ , то они интерпретируются как сосредоточенные силы в  $f(x)$ . На рис. 5 такие силы обнаруживаются при  $i = 24$  и  $i = 10$ , что хорошо соответствует первому и второму слагаемым в (25). Величина силы  $P_i = (f(x_i) - (f(x_{i-1}) + f(x_{i+1}))/2)(x_i - x_{i-1})$  (среднее арифметическое значений  $f(x)$  в соседних узлах вычитается из  $f(x_i)$ , чтобы устранить «примесь» кусочно-непрерывной части  $f(x)$ ). Численные значения  $P_{24}/(q_0L) = 0,3643$  и  $P_{10}/(q_0L) = 0.06626$  хорошо совпадают с аналитическими  $P_*/(q_0L) = (3 + 2\sqrt{2})/16$  и  $P_{**}/(q_0L) = 1/16$  в (25).

Если значение  $f(x_1)/q_0$  порядка  $(L/x_1)^2$  (то есть аномально велико), то оно интерпретируется как сосредоточенный при  $x = 0$  момент в  $f(x)$ . Такая точка на рис. 5 присутствует, что хорошо соответствует последнему слагаемому в (25). Величина момента  $M_1 = f(x_1)x_1^2$ ; численное значение  $M_1/(q_0L^2) = 0.4581$  хорошо совпадает с аналитическим  $M_1/(q_0L^2) = (9 + 4\sqrt{2})/32$  в (25).

Таким образом, численное решение подтверждает аналитическое; в частности, подтверждается необходимость учета контактного сосредоточенного момента.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный ранее авторами подход к математической постановке и решению контактных задач для балочных конструкций [4, 5, 8] дал возможность обнаружить новую, неожиданную особенность в одной из задач этого класса. Естественная модификация данного подхода, учитывающая обнаруженную особенность, позволила сформулировать математическую постановку этой контактной задачи, доказать единственность решения и построить аналитическое решение в некоторых частных случаях. Можно надеяться, что данный подход окажется успешным в применении к более сложным контактным задачам, например, задачам 1 и 3 при отказе от предположения о постоянстве знака функции  $k''(x)$ .

## Библиографический список

1. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьев В. И. Расчеты на прочность в машиностроении : в 3 т. М. : Машгиз, 1956. Т. 1. 884 с.
2. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М. : Наука, 1973. 400 с.



3. Пархиловский И. Г. Автомобильные листовые рессоры. М. : Машиностроение, 1978. 232 с.
4. Osipenko M. A., Nyashin Yu. I., Rudakov R. N. A contact problem in the theory of leaf spring bending // Int. J. Solids Struct. 2003. Vol 40, iss. 12. P. 3129–3136. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00112-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00112-4)
5. Осипенко М. А. Контактная задача об изгибе двухлистовой рессоры с листами переменной толщины // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2014. № 1(27). С. 90–94.
6. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М. : Мир, 1989. 510 с.
7. Кузнецов С. А. Механика контактного взаимодействия. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2014. 72 с.
8. Осипенко М. А., Няшин Ю. И., Касаткин А. А. Особенности контактных задач для систем струн и балок со слабо закрепленными элементами // Вестн. ПНИПУ. Механика. 2015. № 1. С. 121–129. DOI: [10.15593/pern.mech/2015.1.08](https://doi.org/10.15593/pern.mech/2015.1.08)
9. Александров В. М. Некоторые контактные задачи для балок, пластинок и оболочек // Инженерный журн. 1965. Т. 5, № 4. С. 782–785.
10. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М. : Машиностроение, 1980. 415 с.
11. Li H., Dempsey J. P. Unbonded Contact of Finite Timoshenko Beam on Elastic Layer // Journal of Engineering Mechanics. 1988. Vol. 114, № 8. P. 1265–1284. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1988\)114:8\(1265\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1988)114:8(1265))
12. Кравчук А. С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М. : Изд-во МГАПИ, 1997. 340 с.
13. Осипенко М. А., Няшин Ю. И. Об одном подходе к решению некоторых одномерных контактных задач // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 77–84.
14. Shi M., Srisupattarawanit T., Schiefer F., Ostermeyer G.-P. On the Wellbore Contact of Drill Strings in a Finite Element Model // Proc. Appl. Math. Mech. 2013. № 13. P. 109–110. DOI: <https://doi.org/10.1002/pamm.201310050>
15. Kim J. H., Ahn Y. J., Jang Y. H., Barber J. R. Contact problems involving beams // Int. J. Solids Struct. 2014. № 51. P. 4435–4439. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.09.013>
16. Ватульян А. О., Васильев Л. В. Об определении параметров закрепления неоднородной балки при наличии затухания // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 449–456. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-4-449-456>
17. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Изгиб трехслойной балки локальными нагрузками в температурном поле // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 69–83. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-1-69-83>
18. Александров В. М., Чебаков М. И. Введение в механику контактных взаимодействий. М. ; Ростов н/Д : ООО «ЦВВР», 2007. 114 с.
19. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М. : Наука, 1988. 711 с.

---

**Образец для цитирования:**

Осипенко М. А., Касаткин А. А. Моментная контактная нагрузка при одностороннем контакте балок // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 1. С. 69–81. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-69-81>

---



## A Couple Contact Loading at the Unilateral Contact of Beams

M. A. Osipenko, A. A. Kasatkin

Michael A. Osipenko, <https://orcid.org/0000-0003-3267-0618>, Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolsky Ave., 614990 Perm, Russia, [osipenko.michael@yandex.ru](mailto:osipenko.michael@yandex.ru)

Anton A. Kasatkin, Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolsky Ave., 614990 Perm, Russia, [dedulyama@yandex.ru](mailto:dedulyama@yandex.ru)

The contact problem for the structure consisting of two beams is considered. The beams have the different lengths and the different variable thicknesses. One end of the shorter beam is clamped coinciding with the hinged end of the longer beam. The other ends of the beams are free. The given loading is applied to the longer beam. The beams undergo the weak joint bending with the unilateral (receding) contact. There is no friction between the beams. The bending of each beam is described by Bernoulli – Euler model. The contact problem is to find the contact loading, i.e. the forces of interaction of beams. This problem has a number of well-known characteristic features. Some of them inhere in the contact problems for the beam structures on the whole. The others inhere in the structures containing the beam that cannot be in the equilibrium for the arbitrary loading. Besides, this problem has the novel peculiarity consisting in the appearance of the concentrated couple in the contact loading. The non-negativity of the contact loading, as the necessary condition of the unilateral contact, is not spoiled because the concentrated couple is at the end of the beams and its “negative part” is located outside the beams and does not belong to the contact loading. The mathematical formulation of the contact problem is propounded. The uniqueness of the solution of this problem is proved. The analytical solution is constructed in some special cases. The relation between the problem under consideration and the well-known contact problem for two cantilever beams is established.

**Keywords:** Bernoulli – Euler beam, contact problem, unilateral contact, contact loading, concentrated couple, uniqueness of solution, analytical solution.

Received: 23.04.2018 / Accepted: 04.07.2018 / Published online: 28.02.2019

### References

1. Ponomaryov S. D., Biederman V. L., Likharev K. K., Makushin V. M., Malinin N. N., Feodosiev V. I. *Raschety na prochnost v mashinostroenii* [Stress Calculation in Mechanical Engineering]. Vol. 1. Moscow, Mashgiz, 1956. 884 p. (in Russian).
2. Feodosyev V. I. *Selected Problems and Questions in Strength of Materials*. Moscow, Mir, 1977. 432 p. (Rus. ed.: Moscow, Nauka, 1973. 400 p.)
3. Parhilovskii I. G. *Avtomobilnye listovye resory* [Automotive Leaf Springs]. Moscow, Mashinostroenie, 1978. 232 p. (in Russian).
4. Osipenko M. A., Nyashin Yu. I., Rudakov R. N. A contact problem in the theory of leaf spring bending. *Int. J. Solids Struct.*, 2003, no. 40, iss. 12, pp. 3129–3136. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00112-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00112-4)
5. Osipenko M. A. The contact problem for bending of a two-leaf spring with variable thicknesses of leaves. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2014, no. 1(27), pp. 90–94 (in Russian).
6. Johnson K. L. *Contact Mechanics*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1985. 452 p. (Rus. ed.: Moscow, Mir, 1989. 510 p.)
7. Kuznetsov S. A. *Mehanika kontaktnogo vzaimodeystviya* [Contact Mechanics]. Kazan, Kazan Univ., 2014. 72 p. (in Russian).





8. Osipenko M. A., Nyashin Yu. I., Kasatkin A. A. Singularities of contact problems for systems of strings and beams with weakly restrained elements. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 1, pp. 121–129 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.1.08>
9. Aleksandrov V. M. Some Contact Problems for the Beams, Plates and Shells. *Inzhenerny Zhurnal*, 1965, vol. 5, no. 4, pp. 782–785 (in Russian).
10. Grigoluk E. I., Tolkachov V. M. *Kontaknyye zadachi teorii plastin i obolochek* [The Contact Problems for Plates and Shells]. Moscow, Mashinostroenie, 1980. 415 p. (in Russian).
11. Li H., Dempsey J. P. Unbonded Contact of Finite Timoshenko Beam on Elastic Layer. *Journal of Engineering Mechanics*. 1988, July, vol. 114, no. 8, pp. 1265–1284. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1988\)114:8\(1265\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1988)114:8(1265))
12. Kravtchuk A. S. *Variatsionnyye i kvazivariatsionnyye neravenstva v mekhanike* [Variational and quasi-variational inequalities in mechanics]. Moscow, MGAPI, 1997. 340 p. (in Russian).
13. Osipenko M. A., Nyashin Yu. I. A Certain Approach to Solving of Some One-Dimensional Contact Problems. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 1, pp. 77–84 (in Russian).
14. Shi M., Srisupattarawanit T., Schiefer F., Ostermeyer G.-P. On the Wellbore Contact of Drill Strings in a Finite Element Model. *Proc. Appl. Math. Mech.*, 2013, no. 13, pp. 109–110. DOI: <https://doi.org/10.1002/pamm.201310050>
15. Kim J. H., Ahn Y. J., Jang Y. H., Barber J. R. Contact problems involving beams *Int. J. Solids Struct.*, 2014, no. 51, pp. 4435–4439. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.09.013>
16. Vatulyan A. O., Vasilev L. V. Determination of Attaching Parameters of Inhomogeneous Beams in the Presence of Damping. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 449–456 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-4-449-456>
17. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Bending of a Sandwich Beam by Local Loads in the Temperature Field. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 69–83. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-1-69-83>
18. Aleksandrov V. M., Chebakov M. I. *Vvedeniye v mehaniku kontaknykh vzaimodeystvii* [Introduction to the Contact Mechanics]. Moscow, Rostov-on-Don, LLC “ZVVR”, 2007. 114 p. (in Russian).
19. Rabotnov Yu. N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of Deformable Solids]. Moscow, Nauka, 1988. 711 p. (in Russian).

---

**Cite this article as:**

Osipenko M. A., Kasatkin A. A. A Couple Contact Loading at the Unilateral Contact of Beams. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 1, pp. 69–81 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-69-81>

---



УДК 531.13

## УВОД НАНОСПУТНИКА С НИЗКОЙ ОРБИТЫ С ПОМОЩЬЮ ИОННОГО ПОТОКА

**В. В. Рязанов, А. С. Ледков**

Рязанов Владимир Владимирович, аспирант, инженер кафедры теоретической механики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, Россия, 443086, Самара, Московское шоссе, д. 34, rvv345@inbox.ru

Ледков Александр Сергеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, Россия, 443086, Самара, Московское шоссе, д. 34, ledkov@inbox.ru

Работа посвящена проблеме удаления наноспутников формата CubSat3U бесконтактным способом с помощью ионного потока, создаваемого двигателем активного космического аппарата с низкой околоземной орбиты. Преимуществом такого способа является отсутствие необходимости дополнительных средств стыковки и захвата. Разработана математическая модель, описывающая плоское движение наноспутника под действием ионного потока с учетом гравитационных сил. Для моделирования силового воздействия ионного потока на CubSat3U применены два подхода. Первый подразумевает использование известных безразмерных аэродинамических коэффициентов. Второй основан на разбиении тела на треугольники и вычислении воздействия на каждый из них, при этом применена гипотеза о полном диффузном отражении частиц от поверхности. Проведено моделирование спуска наноспутника с низкой орбиты до поверхности Земли и показано, что оба подхода дают близкие результаты, в частности разница во времени спуска с высоты 500 км не превышает 4 %, и аэродинамические характеристики могут быть использованы на этапе предварительного проектирования программы увода нефункционирующего спутника. Полученные результаты можно использовать при управлении ионным потоком и при моделировании движения системы бесконтактного удаления космического мусора.

*Ключевые слова:* космический мусор, бесконтактный способ, ионный поток, аэродинамические коэффициенты, наноспутник.

Поступила в редакцию: 28.05.18 / Принята: 15.09.18 / Опубликовано онлайн: 28.02.2019

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-82-93>

### ВВЕДЕНИЕ

Техногенное загрязнение околоземного космического пространства является существенным негативным фактором, влияющим на качество функционирования космических аппаратов (КА). При столкновении с космическим мусором КА может выйти из строя. Сегодня наибольшую опасность представляет крупногабаритный космический мусор, к которому относят нефункционирующие аппараты, верхние ступени ракет, разгонные блоки. Взаимные столкновения таких крупных объектов могут приводить к появлению нового более мелкого мусора. Согласно исследованиям Д. J. Kessler, В. G. Cour-Palais [1], сложившийся подход к космической деятельности и игнорирование проблемы засоренности орбит космическим мусором приведет к неконтролируемому росту космического мусора и сделает невозможным вывод новых КА и использование околоземного пространства. Тем самым для человечества доступ к космосу будет закрыт [1, 2].



В научной среде рассматриваются различные варианты уборки космического мусора [3], которые можно разделить на два вида: контактный способ, к которому относят удаление с помощью вспомогательных устройств, таких как гарпун [4], сеть [5], механическая рука [6], «щупальцы» [7], и бесконтактный способ взаимодействия. К нему относят уборку с помощью пены [8], лазерных установок [9], внешнего ионного потока [10], кулоновских сил [11, 12]. В статье рассматривается удаление нефункционирующих спутников с помощью ионного потока, который создается одним из двигателей активного космического аппарата. Активный космический аппарат спускает космический мусор до границы атмосферы, после чего переходит к уборке следующего объекта.

В задаче уборки космического мусора ионным потоком принципиальное значение имеет моделирование потока. В [13] описана модель расширения ионного потока в вакууме. В статье [14] предложены различные способы моделирования ионного потока и оценки его физического влияния на разрушение космического мусора. Произведен анализ динамики и управления сферического и цилиндрических тел под действием ионного потока. В статье [15] рассматриваются две фазы миссии по удалению космического мусора: фаза подлета с дальнего расстояния и фаза сближения с объектом. На этапе увода объекта космического мусора необходимо знать положение нефункционирующего спутника по отношению к набегающему ионному потоку и расстояние до цели от сопла двигателя для определения максимального значения силы от ионного потока. В данной работе, в отличие от [14, 15], учитывается движение космического мусора вокруг центра масс. Для вычисления передаваемой силы от ионного потока предлагается рассмотреть и сравнить два подхода. Первый подразумевает использование известных безразмерных аэродинамических коэффициентов. Второй основан на разбиении тела на треугольники и вычислении воздействия на каждый из них, при этом применена гипотеза о полном диффузном отражении частиц от поверхности.

В статье рассматривается увод с орбиты наноспутника формата CubSat3U. Наноспутники не относятся к крупногабаритному космическому мусору, они могут служить удобной базой для проведения орбитальных экспериментов с целью отработки новой технологии бесконтактного увода космического мусора. Наноспутник может быть оснащен датчиками, измеряющими параметры его движения, что позволит верифицировать и, по необходимости, уточнить используемые математические модели. Целью работы является моделирование и анализ движения наноспутника формата CubSat3U под воздействием ионного потока на низких околоземных орбитах. Предполагается, что CubSat3U полностью находится внутри ионного потока, а система управления активного космического аппарата удерживает его на постоянном расстоянии от наноспутника. Рассматривается спуск наноспутника с низкой околоземной орбиты до поверхности Земли. Проводится сравнение результатов при уводе КА на низкую орбиту в случае расчета силы методом, использующим аэродинамические характеристики объекта удаления, с методом полного диффузного отражения ионов от его поверхности.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Операцию увода наноспутника с орбиты можно разделить на два этапа: орбитальный полет до границы атмосферы и неконтролируемый спуск до поверхности. На первом этапе на наноспутник действуют внешний ионный поток и гравитационная сила. На втором этапе — аэродинамические и гравитационные силы. В данном



параграфе будет описан метод расчета сил и моментов от ионного потока активного космического аппарата с помощью аэродинамических характеристик, а также рассмотрена модель плоского движения наноспутника с учетом движения вокруг центра масс под действием силы внешнего ионного потока и гравитационной силы. Кроме того, будут записаны уравнения неуправляемого движения наноспутника в атмосфере.

### 1.1. Построение модели ионного потока

Одной из главных задач при моделировании движения объекта космического мусора под действием ионного потока является определение сил и моментов, получаемых от внешнего ионного потока. В научной литературе приводятся различные модели распространения ионного потока [10]. Для определения распределения плотности ионов по длине потока воспользуемся самоподобной моделью распространения ионов, рассмотренной в [10, 16].

Самоподобная модель строится на предположении, что характер распространения ионов можно описать с помощью безразмерной функции подобия  $h(\tilde{z})$ , которая может быть найдена из дифференциального уравнения при начальных условиях  $h(0) = 1$

$$h' = \sqrt{\frac{12 \cdot \ln(h)}{M_0^2} + h'(0)},$$

где  $M_0 = \sqrt{\frac{m_i \cdot u_i^2}{\gamma \cdot T_{e0}}}$  — число Маха в начале дальней области ионного потока,  $m_i$  — масса ионов (ксенона),  $u_i$  — скорость ионов в начале дальней области,  $\gamma$  — полнотропный коэффициент охлаждения,  $T_{e0}$  — температура электрона на выходе из сопла двигателя. Модель распространения ионов зависит от угла полураствора потока  $\alpha_0 = \arctan(h'(0))$ . При больших значениях  $M_0$  характер распространения ионов приобретает коническую форму, и функцию самоподобия  $h$  можно записать в виде  $h(\tilde{z}) = 1 + \tilde{z} \operatorname{tg} \alpha_0$ .

Плотность ионов в любой точке потока можно определить как [13]

$$n(d, z) = \frac{n_0}{h^2(\tilde{z})} \cdot \exp\left(-C^2 \cdot \frac{d^2}{R_0^2 \cdot h^2(\tilde{z})}\right), \quad (1)$$

где  $n_0$  — плотность потока ионов на выходе из сопла двигателя;  $C^2 = 3$  — безразмерная величина, определяющая процент сохранения ионов в потоке радиуса  $d \leq R_0$ ;  $R_0$  — радиус ионного потока на выходе из сопла двигателя. Для упрощения модели считают, что аксиальная составляющая скорости ионов не меняется:  $u_z(d, z) = u_0$ .

Для вычисления передаваемой силы используются различные подходы, такие как интегрирование элементарной силы по поверхности объекта [16], интегрирование по центральной проекции уводимого объекта на выбранную плоскость [17]. В данной статье будут рассмотрены два способа: первый способ использует известные безразмерные аэродинамические характеристики КА, которые рассчитываются на ранних этапах проектирования. Второй способ основывается на разбиении тела на треугольники и использовании гипотезы о полном диффузном отражении частиц от обдуваемой поверхности. Для каждого треугольника вычисляются момент и сила от ионного потока в виде проекции на оси орбитальной системы координат. Программа расчета ионных сил и моментов была разработана в рамках исследования [18].

Для вычисления сил ионного потока с помощью аэродинамических характеристик нужно знать на расстоянии  $d$  от источника плотность потока ионов  $\rho_i = m_i n(d, z)$ ,



где  $n(d, z)$  вычисляется по формуле (1). В этом случае проекция силы  $F_x, F_y$  и момента  $M_z$  ионного потока на оси орбитальной системы координат (рис. 1) могут быть найдены следующим образом:

$$F_x = c_y q_i S, \quad F_y = c_x q_i S, \quad M_z = m_z q_i S l, \quad (2)$$

где  $c_x, c_y, m_z$  — безразмерные коэффициенты силы аэродинамического сопротивления, подъемной силы и момента тангажа соответственно,  $S$  — площадь мидаля,  $l$  — характерный размер тела,  $q_i = \frac{\rho_i u_i^2}{2}$  — скоростной напор ионного потока.

### 1.2. Уравнения орбитального движения наноспутника

Для описания движения наноспутника под действием ионного потока с учетом влияния гравитационных сил введем прямоугольные инерциальную  $O_3 X_t Y_t$ , орбитальную  $O_3 X_o Y_o$  и связанную  $O_c X_c Y_c$  системы координат. Центр  $O_3$  инерциальной СК лежит в центре масс Земли. Ось  $X_t$  проходит через перигей орбиты наноспутника. Центр связанной системы координат наноспутника лежит в его центре масс  $O_c$ . Ось  $X_c$  направлена по продольной оси наноспутника. Ось  $Y_c$  лежит в плоскости его симметрии. Ось  $X_o$  орбитальной системы координат направлена вдоль радиус-вектора центра масс  $r$ , ось  $Y_o$  по направлению движения. Системы координат приведены на рис. 1.

Для получения уравнений движения воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_j, \quad (3)$$

где  $L = T - U$  — Лагранжиан системы,  $q_i = \{\nu, r, \varphi\}$  — обобщенные координаты,  $\nu$  — угол истинной аномалии,  $r$  — расстояние от центра масс земли до центра масс наноспутника,  $\varphi$  — угол отклонения оси  $O_c X_c$  от оси  $O_3 X_o$ ,  $Q_j$  — обобщенные непотенциальные силы.

Кинетическая энергия системы находится в следующем виде:

$$T = \frac{m(r^2 \dot{\nu}^2 + \dot{r}^2)}{2} + \frac{I_z (\dot{\nu} - \dot{\varphi})^2}{2}. \quad (4)$$

Потенциальная энергия системы будет иметь вид [18]

$$U = -\frac{\mu m}{r} - \frac{\mu(I_x + I_y + I_z)}{2r^3} + \frac{3\mu(I_x \cos^2 \varphi + I_y \sin^2 \varphi + I_z)}{2r^3}, \quad (5)$$

где  $\mu$  — гравитационный параметр,  $J_x, J_y, J_z$  — моменты инерции наноспутника.

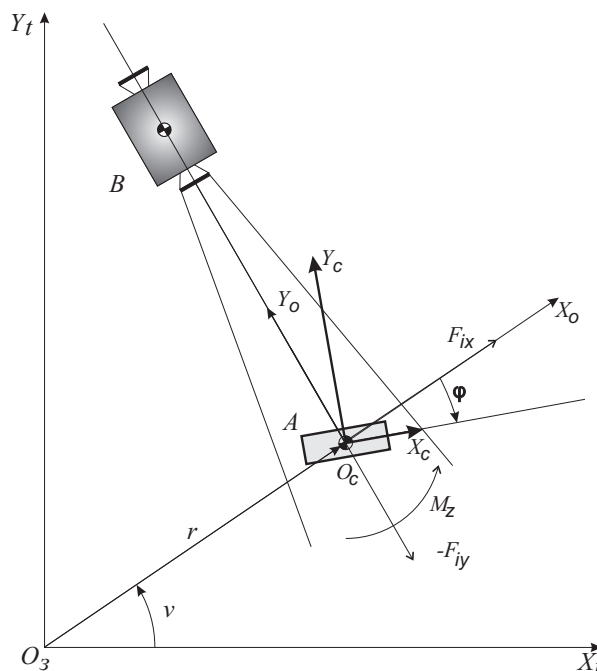


Рис. 1. Системы координат  
Fig. 1. Coordinate systems



Обобщенные непотенциальные силы могут быть найдены как

$$Q_\varphi = -M_z, \quad Q_r = F_{ix}, \quad Q_\nu = F_{iy}r + M_z, \quad (6)$$

где  $F_{ix}$ ,  $F_{iy}$  — проекции силы ионного потока на оси орбитальной СК.

После подстановки кинетической (4) и потенциальной (5) энергий в (3) получим систему дифференциальных уравнений. Разрешим ее относительно вторых производных [18]:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= r\dot{\nu}^2 - \frac{\mu}{r^2} + \frac{3\mu(3I_x \cos^2 \varphi + 3I_y \sin^2 \varphi - I_x - I_y + 2I_z)}{2mr^4} + \frac{Q_r}{m}, \\ \ddot{\nu} &= -\frac{2\dot{r}\dot{\nu}}{r} + \frac{3\mu(I_x - I_y) \cos \varphi \sin \varphi}{mr^5} + \frac{Q_\varphi + Q_\nu}{mr^2}, \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{2\dot{r}\dot{\nu}}{r} + \frac{3\mu(I_x - I_y) \cos \varphi \sin \varphi (I_z + mr^2)}{I_z mr^5} + \frac{Q_\varphi}{I_z} + \frac{Q_\varphi + Q_\nu}{mr^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Первые два уравнения системы (7) описывают движение центра масс наноспутника, а последнее — движение вокруг центра масс.

### 1.3. Уравнения движения наноспутника в атмосфере

При спуске в атмосфере космический аппарат испытывает тепловые и динамические нагрузки, которые должны приниматься во внимание при проектировании КА и разработке программы его полета. Моделирование неуправляемого спуска наноспутника в атмосфере будем проводить при следующих допущениях: движение происходит под действием только силы тяжести и аэродинамической силы, поле тяготения центральное, движение воздушных масс не учитывается.

Движение наноспутника можно представить как относительное движение центра масс и вращение вокруг центра масс [19, 20]:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -c_x q \frac{S}{m} - g(H) \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= c_y q \frac{S}{mV} - \frac{g(H)}{V} \cos \theta + \frac{V \cos \theta}{R_E + H}, \\ \dot{H} &= V \sin \theta, \\ I_z \ddot{\alpha} - m_z(\alpha) q S l &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $S$  — площадь миделя,  $m$  — масса наноспутника,  $R_E$  — радиус Земли,  $V$  — скорость центра масс наноспутника,  $H$  — расстояние от поверхности земли до центра масс КА,  $\theta$  — угол наклона траектории в атмосферу,  $g(H) = g_0 \left( \frac{R_E}{R_E + H} \right)^2$  — ускорение свободного падения,  $g_0$  — ускорение свободного падения над средним уровнем моря,  $q = \rho(H) \frac{V^2}{2}$  — скоростной напор,  $\rho(H)$  — плотность атмосферы,  $\alpha$  — угол атаки,  $l$  — характерный размер тела,  $J_z$  — момент инерции тела относительно оси  $O_z$  связанной системы координат. Первые три уравнения системы (8) описывают движение центра масс, последнее уравнение описывает движение вокруг центра масс.

Для оценки возможности разрушения наноспутника при спуске в атмосферу необходимо вычислить конвективный тепловой поток  $q_{\text{конвект}}$  и суммарное количество тепла, подводимого на лобовом участке поверхности за все время спуска  $Q$  [19, 21]:

$$q_{\text{конвект}} = b_{\text{emp}} \rho(H)^{1/2} V^{3.15}, \quad (9)$$



$$Q = \int_t q_{\text{конвект}} dt, \tag{10}$$

где  $b_{emp} = 5.5164 \cdot 10^{-5} \text{ кг}^{1/2} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}^{-1.15}$  — эмпирический коэффициент.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

Рассмотрим спуск наноспутника с круговой орбиты высотой 500 км. Моделирование будем производить до верхней границы атмосферы ( $H = 100 \text{ км}$ ). Наноспутник имеет массу  $m = 3.019 \text{ кг}$ , моменты инерции  $J_x = 0.0047 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $J_y = J_z = 0.0241 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , площадь миделя  $S = 0.01 \text{ м}^2$ . Расстояние от сопла двигателя КА до объекта космического мусора составляет 15 м, скорость истечения ионов  $u_i = 38000 \text{ м/с}$ , число ионов на выходе  $n_0 = 2.6 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$ . Угол полураствора ионного потока  $\alpha_0 = 15^\circ$ .

Проведем сравнение результатов интегрирования системы уравнений (7), описывающих плоское движение наноспутника, при двух различных способах расчета передаваемой силы от ионного потока (рис. 2).

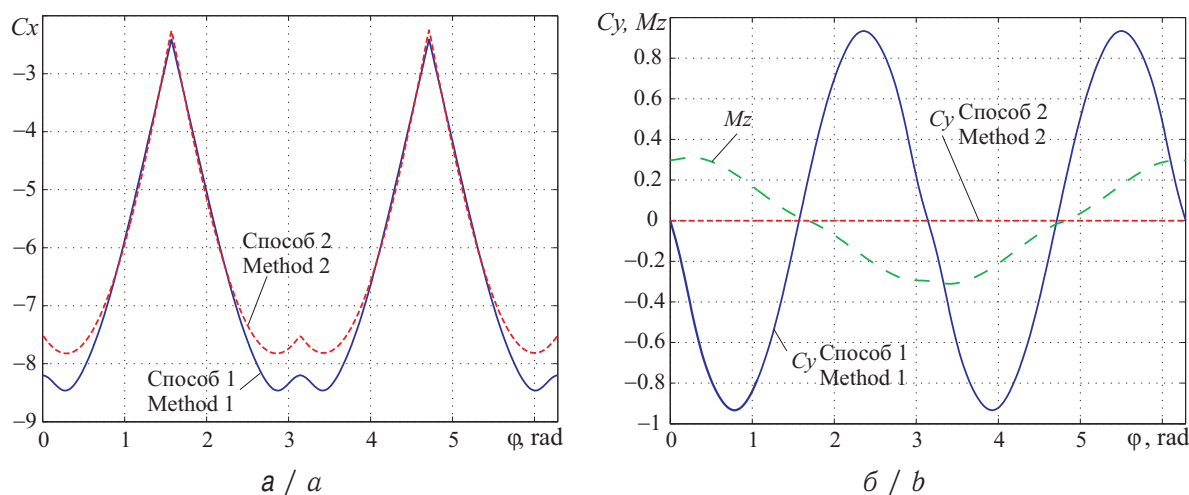


Рис. 2. Безразмерные коэффициенты ионного потока  
 Fig. 2. Dimensionless ion beam coefficients

В первом способе расчет силы будет происходить с помощью известных аэродинамических характеристик объекта удаления (рис. 2, сплошная линия). Во втором способе вычисление силы будет выполнено с использованием модели полного диффузного отражения ионов от поверхности (рис. 2, пунктирная линия). Безразмерные коэффициенты подъемной силы будут заметно различаться, при этом различие в коэффициентах силы сопротивления составляет не более 7.58%.

Сравнение результатов спуска при двух различных способах расчета силы от ионного потока приведены на рис. 3.

Время спуска наноспутника при расчете силы с помощью модели полного диффузного отражения составляет 12.93 дня. При использовании аэродинамических характеристик время спуска составляет 12.5 дней. Разница в 3.3% говорит о возможности использования первого способа при оценке силы от внешнего ионного потока. В первом случае спуск происходит быстрее (рис. 3, а), соответственно и изменение угла истинной аномалии будет происходить быстрее, что можно наблюдать на рис. 3, б.

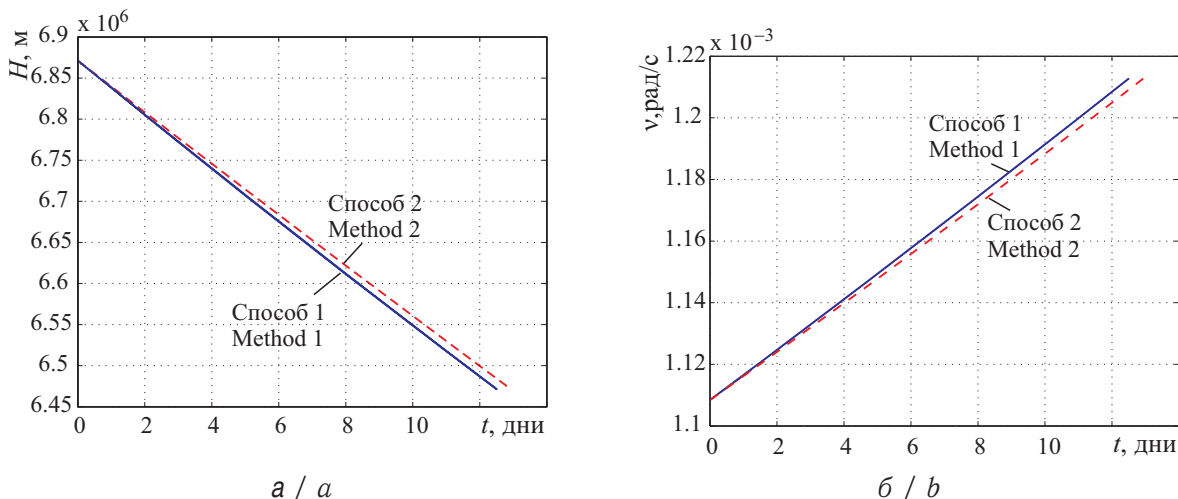


Рис. 3. Зависимость высоты (а) и угла истинной аномалии (б) от времени  
Fig. 3. Dependence of the height (a) and of the angle of true anomaly (b) of the time

На рис. 4, а показаны два графика изменения угла  $\varphi$ , полученные для двух способов расчета силы. Видно, что фазы колебаний угла  $\varphi$  быстро расходятся, при этом амплитуды остаются близкими на достаточно длительном промежутке времени. За 12.5 дней разница в амплитуде составляет 0.25 рад.

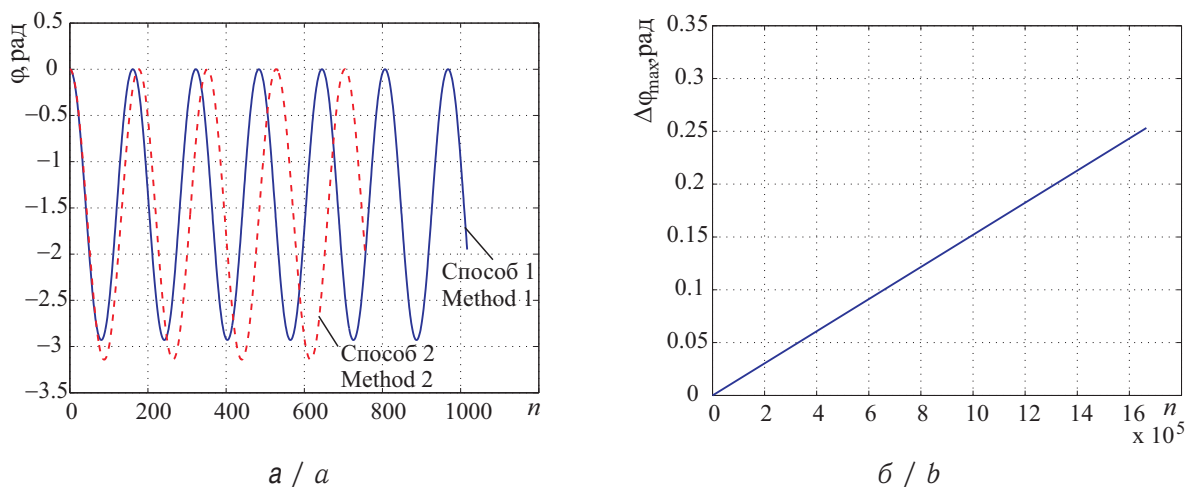


Рис. 4. Изменение угла  $\varphi$  (а) и разница амплитуд (б)  
Fig. 4. The change in the angle  $\varphi$  (a) and the amplitude difference (b)

При достижении высоты 100 км наноспутник будет совершать баллистический спуск в атмосфере. В первом случае расчета, когда для вычисления сил ионного потока используются аэродинамические характеристики, время спуска составляет 21.06 мин. Во втором случае время спуска будет на 6 с больше. Таким образом, выбор метода расчета передаваемой силы на орбитальном участке почти не влияет на время спуска в атмосфере.

Для оценки тепловых и динамических нагрузок, действующих на наноспутник при движении в атмосфере, построим функциональные зависимости тепловых нагрузок и скоростного напора от параметров на границе атмосферы. Для сгорания наноспутника в атмосфере тепловые нагрузки должны быть максимизированы. Рассмотрим неконтролируемый спуск с высоты  $H=100$  км в плотные слои атмосферы при





различных значениях угла входа  $\theta = -15^\circ \dots -2^\circ$  и скорости  $V = 5000 \dots 7600$  м/с с учетом движения вокруг центра масс. Результаты моделирования показаны на рис. 5.

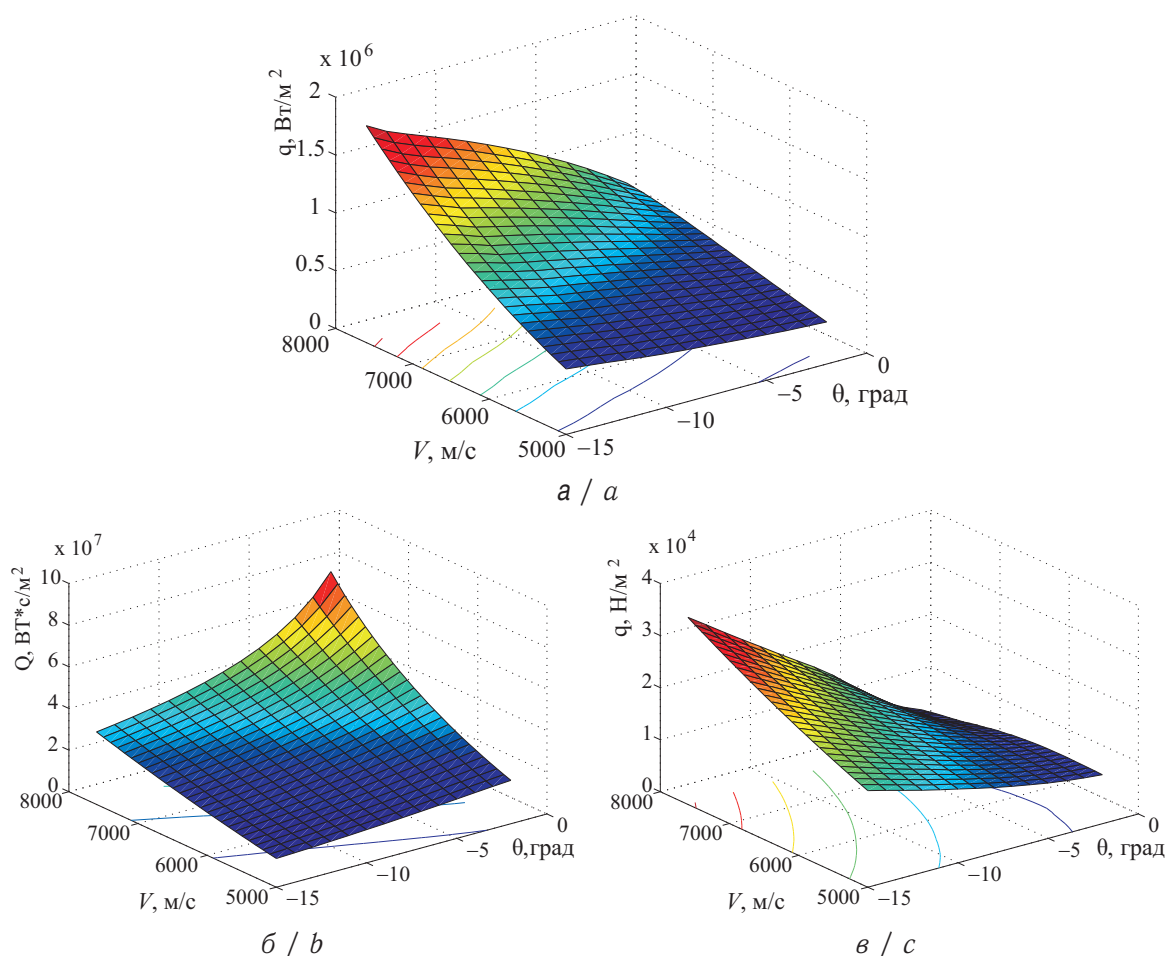


Рис. 5. Поверхность конвективного тепла (а), суммарного тепла (б) и скоростного напора (в)  
Fig. 5. The surface of convective heat (a), total heat (b) and velocity head (c)

Максимальное значение конвективного тепла (9) и скоростного напора достигается при максимальных значениях угла входа в атмосферу и скорости. Суммарное тепло (10), получаемое наноспутником при спуске, достигается при минимальном угле входа в атмосферу и максимальной скорости входа. Время спуска в данном случае максимально. Данные результаты могут использоваться для расчетов системы теплозащиты при определении возможности разрушения (сгорания) объекта космического мусора до достижения им поверхности земли.

## ВЫВОД

В статье рассмотрена модельная задача по бесконтактному методу увода космического мусора с помощью ионного потока. В качестве объекта удаления рассматривается наноспутник. Моделирование происходит с учетом движения вокруг центра масс КА и с учетом гравитационной силы и силы ионного потока. Рассмотрен увод наноспутника с высоты 500 км до поверхности Земли. Показано, что аэродинамические характеристики космического мусора могут быть использованы для предварительной оценки времени его увода с орбиты. Были построены поверхности скоростного напора, конвективного тепла и суммарного тепла при баллистическом неконтролируемом спуске наноспутника при различной скорости и углах входа в



атмосферу с целью выбора параметров для максимизации тепловых нагрузок. Результаты работы могут быть использованы для подготовки эксперимента с целью отработки технологии и уточнения математических моделей.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-19-10158).

### Библиографический список

1. *Kessler D. J., Cour-Palais B. G.* Collision frequency of artificial satellites: the creation of a debris belt // *Journal of Geophysical Research*. 1978. Vol. 83, iss. A6. P. 2637–2646. DOI: <https://doi.org/10.1029/JA083iA06p02637>
2. *Вениаминов С. С., Червонов А. М.* Космический мусор — угроза человечеству. М. : Ин-т космических исследований РАН, 2012. 192 с.
3. *Shan M., Guo J., Gill E.* Review and comparison of active space debris capturing and removal methods // *Progress in Aerospace Sciences*. 2016. Vol. 80. P. 18–32. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2015.11.001>
4. *Dudziak R., Tuttle S., Barraclough, S.* Harpoon technology development for the active removal of space debris // *Advances in Space Research*. 2015. Vol. 56, iss. 5. P. 509–527. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2015.04.012>
5. *Benvenuto R., Salvi S., Lavagna M.* Dynamics analysis and GNC design of flexible systems for space debris active removal // *Acta Astronautica*. 2015. Vol. 110. P. 247–265. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2015.01.014>
6. *Larouche B. P., Zhu Z. H.* Autonomous robotic capture of non-cooperative target using visual servoing and motion predictive control // *Autonomous Robots*. 2014. Vol. 37, iss. 2. P. 157–167. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10514-014-9383-2>
7. *McMahan W., Chitrakaran V., Csencsits M., Dawson D., Walker I. D., Jones B. A., Pritts M., Dienno D., Grissom M., Rahn C. D.* Field trials and testing of the octarm continuum manipulator // *IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation*. Orlando, Florida, 2006. P. 2336–2341.
8. *Andrenucci M., Pergola P., Ruggiero A.* Active removal of space debris-expanding foam application for active debris removal : ESA Final Report. Pisa, 2011. 132 p. URL: [https://www.esa.int/gsp/ACT/doc/ARI/ARI%20Study%20Report/ACT-RPT-MAD-ARI-10-6411-Pisa-Active\\_Removal\\_of\\_Space\\_Debris-Foam.pdf](https://www.esa.int/gsp/ACT/doc/ARI/ARI%20Study%20Report/ACT-RPT-MAD-ARI-10-6411-Pisa-Active_Removal_of_Space_Debris-Foam.pdf) (дата обращения: 21.05.2018).
9. *Phipps C. R.* A laser-optical system to re-enter or lower low earth orbit space debris // *Acta Astronautica*. 2014. Vol. 93. P. 418–429. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.07.031>
10. *Merino M., Ahedo E., Bombardelli C., Urrutxua H., Pelaez J.* Ion Beam Shepherd Satellite for Space Debris Removal // *Progress in Propulsion Physics*. 2013. Vol. 4. P. 789–802. DOI: <https://doi.org/10.1051/eucass/201304789>
11. *Schaub H., Parker G. G., King L. B.* Challenges and prospects of Coulomb spacecraft formation control // *Journal of Astronautical Sciences*. 2004. Vol. 52, iss 1. P. 169–193.
12. *Aslanov V. S.* Exact solutions and adiabatic invariants for equations of satellite attitude motion under Coulomb torque // *Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 90, iss. 4. P. 2545–2556. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3822-5>
13. *Cichocki F., Merino M., Ahedo E.* Modeling and simulation of EP plasma plume expansion into vacuum // 50th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference. Cleveland, OH, 2014. P. 5008–5024. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2014-3828>
14. *Bombardelli C., Merino M., Ahedo E., Pelaez J., Urrutxua H., Iturri-Torreay A., Herrera-Montojoy J.* Ariadna call for ideas: Active removal of space debris ion beam shepherd for contactless debris removal : ESA Final Report. Madrid, 2011. 90 p.



- URL: [https://www.esa.int/gsp/ACT/doc/ARI/ARI%20Study%20Report/ACT-RPT-MAD-ARI-10-6411c-1107-FR-Ariadna-Ion\\_Beam\\_Shepherd\\_Madrid\\_4000101447.pdf](https://www.esa.int/gsp/ACT/doc/ARI/ARI%20Study%20Report/ACT-RPT-MAD-ARI-10-6411c-1107-FR-Ariadna-Ion_Beam_Shepherd_Madrid_4000101447.pdf) (дата обращения: 21.05.2018).
15. *Zuiani F., Vasile M.* Preliminary design of debris removal missions by means of simplified models for low-thrust, many-revolution transfers // *Journal of Aerospace Engineering*. 2012. Vol. 2012. Article ID 836250. 22 p. DOI: <https://doi.org/10.1155/2012/836250>
  16. *Cichocki F., Merino M., Ahedo E., Smirnova M., Mingo A., Dobkevicius M.* Electric Propulsion Subsystem Optimization for “Ion Beam Shepherd” missions // *Journal of Propulsion and Power*. 2016. Vol. 33, iss. 2. P. 370–379. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.B36105>
  17. *Alpatov A., Cichocki F., Fokov A., Khoroshylov S., Merino M., Zakrzhevskii A.* Determination of the force transmitted by an ion thruster plasma plume to an orbital object // *Acta Astronautica*. 2016. Vol. 119. P. 241–251. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2015.11.020>
  18. *Aslanov V. S., Ledkov A. S.* Attitude motion of cylindrical space debris during its removal by ion beam // *Mathematical Problems in Engineering*. 2017. Vol. 2017. Article ID 1986374. 7 p. DOI: <https://doi.org/10.1155/2017/1986374>
  19. *Aslanov V. S., Ledkov A. S.* Tether-assisted re-entry capsule deorbiting from an elliptical orbit // *Acta Astronautica*. 2017. Vol. 130. P. 180–186. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2016.10.028>
  20. *Липницкий Ю. М., Красильников А. В., Покровский А. Н., Шманенков В. Н.* Нестационарная аэродинамика баллистического полета. М. : Физматлит, 2003. 176 с.
  21. *Андреевский В. В.* Динамика спуска космических аппаратов на Землю. М. : Машиностроение, 1970. 235 с.

---

**Образец для цитирования:**

*Рязанов В. В., Ледков А. С.* Увод наноспутника с низкой орбиты с помощью ионного потока // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2019. Т. 19, вып. 1. С. 82–93. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-82-93>

---

## Descent of Nanosatellite from Low Earth Orbit by Ion Beam

V. V. Ryazanov, A. S. Ledkov

Vladimir V. Ryazanov, <https://orcid.org/0000-0002-3890-0472>, Samara National Research University, 34 Moscovskoe Shosse, 443086 Samara, Russia, [rvv345@inbox.ru](mailto:rvv345@inbox.ru)

Alexander S. Ledkov, <https://orcid.org/0000-0003-2989-889X>, Samara National Research University, 34 Moscovskoe Shosse, 443086 Samara, Russia, [ledkov@inbox.ru](mailto:ledkov@inbox.ru)

The work is devoted to the problem of contactless CubSat3U nanosatellites removal from low Earth orbit by means of an ion beam, which is created by the engine of an active spacecraft. The advantage of this method is that there is no need for additional means of docking and gripping. A mathematical model of the nanosatellite plane motion under the action of the ion beam and gravitational forces is developed. Two approaches are used to simulate the ion beam impact on nanosatellite. The first one involves the use of known dimensionless aerodynamic coefficients. The second approach is based on the division of the body into triangles and the calculation of the effect of the beam on each of them. Wherein the hypothesis of a complete diffuse reflection of particles from the surface of the body is used. The descent of the nanosatellite from a low Earth orbit to the surface has been simulated. It is shown that both approaches give close results, in particular, the difference in the descent time from an altitude of 500 km does not exceed 4 %. The closeness of the results allows



to use aerodynamic characteristics at the stage of preliminary design of the non-functioning satellite removal missions. The obtained results can be used for the ion beam control development and for modeling the motion of the system of contactless space debris removal.

**Keywords:** space debris, noncontact method, ion beam, aerodynamic coefficients, nanosatellite.

Received: 28.05.18 / Accepted: 15.09.18 / Published online: 28.02.2019

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 16-19-10158).

## References

1. Kessler D. J., Cour-Palais B. G. Collision frequency of artificial satellites: the creation of a debris belt. *Journal of geophysical research*, 1978, vol. 83, iss. A6, pp. 2637–2646. DOI: <https://doi.org/10.1029/JA083iA06p02637>
2. Veniaminov S. S., Chervonov A. M. *Kosmicheskij musor — ugroza chelovechestvu* [Space debris — a threat to mankind]. Moscow, Space Research Institute, RAS, 2012, 192 p. (in Russian).
3. Shan M., Guo J., Gill E. Review and comparison of active space debris capturing and removal methods. *Progress in Aerospace Sciences*, 2016, vol. 80, pp. 18–32. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2015.11.001>
4. Dudziak R., Tuttle S., Barraclough, S. Harpoon technology development for the active removal of space debris. *Advances in Space Research*, 2015, vol. 56, iss. 5, pp. 509–527. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2015.04.012>
5. Benvenuto R., Salvi S., Lavagna M. Dynamics analysis and GNC design of flexible systems for space debris active removal. *Acta Astronautica*, 2015, vol. 110, pp. 247–265. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2015.01.014>
6. Larouche B. P., Zhu Z. H. Autonomous robotic capture of non-cooperative target using visual servoing and motion predictive control. *Autonomous Robots*, 2014, vol. 37, iss. 2, pp. 157–167. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10514-014-9383-2>
7. McMahan W., Chitrakaran V., Csencsits M., Dawson D., Walker I. D., Jones B. A., Pritts M., Dienno D., Grissom M., Rahn C. D. Field trials and testing of the octarm continuum manipulator. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Orlando, Florida, 2006, pp. 2336–2341.
8. Andrenucci M., Pergola P., Ruggiero A. *Active removal of space debris-expanding foam application for active debris removal* : ESA Final Report, Pisa, 2011. 132 p. Available at: [https://www.esa.int/gsp/ACT/doc/ARI/ARI%20Study%20Report/ACT-RPT-MAD-ARI-10-6411-Pisa-Active\\_Removal\\_of\\_Space\\_Debris-Foam.pdf](https://www.esa.int/gsp/ACT/doc/ARI/ARI%20Study%20Report/ACT-RPT-MAD-ARI-10-6411-Pisa-Active_Removal_of_Space_Debris-Foam.pdf) (accessed 21 May 2018).
9. Phipps C. R. A laser-optical system to re-enter or lower low earth orbit space debris. *Acta Astronautica*, 2014, vol. 93, pp. 418–429. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.07.031>
10. Merino M., Ahedo E., Bombardelli C., Urrutxua H., Pelaez J. Ion Beam Shepherd Satellite for Space Debris Removal. *Progress in Propulsion Physics*, 2013, vol. 4, pp. 789–802. DOI: <https://doi.org/10.1051/eucass/201304789>
11. Schaub H., Parker G. G., King L. B. Challenges and prospects of Coulomb spacecraft formation control. *Journal of Astronautical Sciences*, 2004, vol. 52, iss 1, pp. 169–193.
12. Aslanov V. S. Exact solutions and adiabatic invariants for equations of satellite attitude motion under Coulomb torque. *Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 90, iss. 4, pp. 2545–2556. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3822-5>
13. Cichocki F., Merino M., Ahedo E. Modeling and simulation of EP plasma plume expansion into vacuum. *50th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*, Cleveland, OH, 2014, pp. 5008–5024. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2014-3828>



14. Bombardelli C., Merino M., Ahedo E., Pelaez J., Urrutxua H., Iturri-Torreay A., Herrera-Montojoy J. *Ariadna call for ideas: Active removal of space debris ion beam shepherd for contactless debris removal* : ESA Final Report, Madrid, 2011. 90 p. Available at: [https://www.esa.int/gsp/ACT/doc/ARI/ARI%20Study%20Report/ACT-RPT-MAD-ARI-10-6411c-1107-FR-Ariadna-Ion\\_Beam\\_Shepherd\\_Madrid\\_4000101447.pdf](https://www.esa.int/gsp/ACT/doc/ARI/ARI%20Study%20Report/ACT-RPT-MAD-ARI-10-6411c-1107-FR-Ariadna-Ion_Beam_Shepherd_Madrid_4000101447.pdf) (accessed 21 May 2018).
15. Zuiani F., Vasile M. Preliminary design of debris removal missions by means of simplified models for low-thrust, many-revolution transfers. *Journal of Aerospace Engineering*, 2012, vol. 2012, article ID 836250, 22 p. DOI: <https://doi.org/10.1155/2012/836250>
16. Cichocki F., Merino M., Ahedo E., Smirnova M., Mingo A., Dobkevicius M. Electric Propulsion Subsystem Optimization for “Ion Beam Shepherd” missions. *Journal of Propulsion and Power*, 2016, vol. 33, iss. 2, pp. 370–379. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.B36105>
17. Alpatov A., Cichocki F., Fokov A., Khoroshylov S., Merino M., Zakrzhevskii A. Determination of the force transmitted by an ion thruster plasma plume to an orbital object. *Acta Astronautica*, 2016, vol. 119, pp. 241–251. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2015.11.020>
18. Aslanov V. S., Ledkov A. S. Attitude motion of cylindrical space debris during its removal by ion beam. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, vol. 2017, article ID 1986374, 7 p. DOI: <https://doi.org/10.1155/2017/1986374>
19. Aslanov V. S., Ledkov A. S. Tether-assisted re-entry capsule deorbiting from an elliptical orbit. *Acta Astronautica*, 2017, vol. 130, pp. 180–186. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2016.10.028>
20. Lipnickij Ju. M., Krasil'nikov A. V., Pokrovskij A. N., Shmanenkov V. N. *Nestacionarnaja ajerodinamika ballisticheskogo poleta* [Unsteady aerodynamics of ballistic flight]. Moscow, Fizmatlit, 2003. 176 p. (in Russian).
21. Andreevskij V. V. *Dinamika spuska kosmicheskikh apparatov na Zemlju* [The dynamics of descent of space vehicles to Earth]. Moscow, Mashinostroenie, 1970. 235 p. (in Russian).

---

**Cite this article as:**

Ryazanov V. V., Ledkov A. S. Descent of Nanosatellite from Low Earth Orbit by Ion Beam. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 1, pp. 82–93 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-82-93>

---



# ИНФОРМАТИКА

## Hybrid Automation Extended Model

D. K. Andreichenko, K. P. Andreichenko, I. A. Batraeva

Dmitry K. Andreichenko, <https://orcid.org/0000-0003-0525-984X>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., 410012 Saratov, Russia, andreichenkodk@gmail.com

Konstantin P. Andreichenko, <https://orcid.org/0000-0002-8729-4317>, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St., 410054 Saratov, Russia, kp\_andreichenko@renet.ru

Inna A. Batraeva, <https://orcid.org/0000-0002-6539-8473>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., 410012 Saratov, Russia, batraeva-ia@info.sgu.ru

An extended model of hybrid automata for dynamic systems is considered, where, along with a discrete control subsystem and control objects with lumped parameters, there are control objects with distributed parameters (linear and stationary from the point of view of automatic control theory). The possibility of software implementation of an extended model of hybrid automata on embedded computing systems is shown.

*Keywords:* hybrid automata, hybrid dynamical systems, embedded computing systems.

Received: 21.10.2018 / Accepted: 22.12.2018

Published online: 28.02.2019

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-94-104>

### 1. INTRODUCTION. MODEL OF THE HYBRID AUTOMATA

A hybrid automaton is a mathematical model of a hybrid system, where the switchings of a discrete control subsystem are modeled based on automata theory, and the motion of control objects with lumped parameters is based on Cauchy problems for ordinary differential equations [1–7].

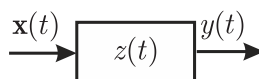
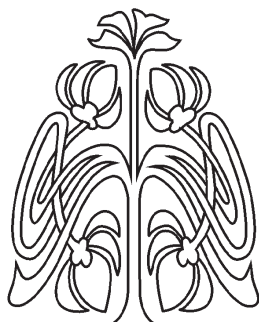
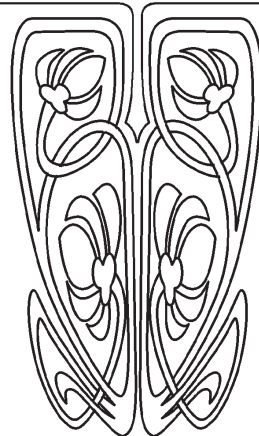


Fig. 1. Structural scheme

We consider the input-output model of a dynamic system with time  $t \in \mathbb{R}$ , a piecewise continuous input function  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow X \subset \mathbb{R}^{N_x}$ , an output function  $y(t)$ ,  $y : \mathbb{R} \rightarrow Y$  and a function  $z(t)$ ,  $z : \mathbb{R} \rightarrow Z$ , characterizing the time variation of the state of a dynamic system (Fig. 1). The system contains discrete control elements and control objects with lumped parameters interacting with each other.



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





Respectively

$$\begin{aligned} Z &= S \times Z_c, \quad |S| < \infty, \quad Z_c \in \mathbb{R}^{N_{zc}}, \quad z = (s, \mathbf{z}_c), \quad s \in S, \quad \mathbf{z}_c \in Z_c, \\ Y &= Y_d \times Y_c, \quad |Y_d| < \infty, \quad Y_c \in \mathbb{R}^{N_y}, \quad y = (y_d, \mathbf{y}_c), \quad y_d \in Y_d, \quad \mathbf{y}_c \in Y_c. \end{aligned} \quad (1)$$

Here  $S$  is the finite set of states of the discrete subsystem,  $Y_d$  is the finite set of values of the discrete outputs,  $Z_c$  is the set of states of the continuous subsystem,  $Y_c$  is the set of values of the continuous outputs. The time evolution of a discrete control subsystem is characterized by a sequence of pairs of time intervals and the values of the states of the discrete subsystem that remain on them  $\{([0, t_1], s_0), ([t_1, t_2], s_1), \dots, ([t_j, t_{j+1}], s_j), \dots\}$ . Therefore

$$T = \{t_1, t_2, \dots, t_j, t_{j+1}, \dots\} \quad (2)$$

is the sequence of switching times. The classic model of the hybrid automaton [1–7] is a tuple

$$A_H = \langle Z, X, Y, z_0, R, f_p, \mathbf{f}_r, \mathbf{f}_c, f_o \rangle \quad (3)$$

where  $z_0 = (s_0, \mathbf{z}_{c0}) \in Z = S \times Z_c$  is the initial state of the system;  $R = \{(s_k, s_j)\} \subset S \times S$  is the set of arcs of the oriented graph  $(S, R)$  which determines the possible transitions between the states of the discrete subsystem during its switching;  $f_p : \mathbb{R} \times X \times R \times Z_c \rightarrow \{0, 1\}$  is a predicate function that allows or prohibits switching of a discrete subsystem. For the sequence of switching times (2) is true

$$f_p(t_j, \mathbf{x}|_{t_{j-0}}, (s_{j-1}, s_j), \mathbf{z}_c|_{t_{j-0}}) = 1, \quad t_j \in T, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Function  $\mathbf{f}_r : \mathbb{R} \times X \times R \times Z_c \rightarrow Z_c$  is a function of updating initial conditions at discrete switching

$$\mathbf{z}_c|_{t_{j+0}} = \mathbf{f}_r(t_j, \mathbf{x}|_{t_{j-0}}, (s_{j-1}, s_j), \mathbf{z}_c|_{t_{j-0}}), \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Function  $\mathbf{f}_c : \mathbb{R} \times X \times S \times Z_c \rightarrow Z_c$  is a derivative function defining the right-hand sides of ordinary differential equations, which model the dynamics of a continuous subsystem over time intervals corresponding to persisting states of the discrete subsystem

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_c &= \mathbf{f}_c(t, \mathbf{x}, s_0, \mathbf{z}_c), \quad \mathbf{z}_c(0) = \mathbf{z}_{c0}, \quad t \in [0, t_1], \quad (\dot{\phantom{x}}) = d(\phantom{x})/dt, \\ \dot{\mathbf{z}}_c &= \mathbf{f}_c(t, \mathbf{x}, s_j, \mathbf{z}_c), \quad \mathbf{z}_c(t_j) = \mathbf{z}_c|_{t_{j+0}}, \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Here  $\mathbf{z}_c|_{t_{j+0}}$  and  $\mathbf{z}_c|_{t_{j-0}}$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$  are connected by equation (5).

$f_0 : \mathbb{R} \times X \times S \times Z_c \rightarrow Y$  is an output function

$$y = f_0(t, \mathbf{x}, s_j, \mathbf{z}_c), \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

In order for the hybrid automaton to be deterministic, it is required that when  $t \geq 0$  the predicate function  $f_p$  can take the value 1 on no more than one arc of the graph  $(S, R)$ , originating from the current state of the discrete subsystem. The hybrid automaton is effectively software implemented on embedded computing systems. It is of interest to include this class of mathematical models of control objects with distributed parameters [8], and, accordingly, initial-boundary problems for partial differential equations, but with the possibility of efficient software implementation on embedded computing systems.



## 2. SPECIFICATION OF THE ORIGINAL MODEL

Depending on the specific type of predicate  $f_p$  and function  $\mathbf{f}_r$ , at the moment of time  $t_j \in T, j = 1, 2, 3, \dots$  there can be either a single switches of the states of the discrete subsystem or a cascade of switching. However, the switching cascade is undesirable due to energy and structural constraints. We assume that switching cascades are excluded, and in (2)

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_j < t_{j+1} < \dots \quad (8)$$

We assume that the initial state of a dynamical system is an equilibrium state, from which the dynamical system is derived by varying the input vector function with time  $t \geq 0$ . Those

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 = \text{const}, \quad t < 0; \quad f_c(t, \mathbf{x}_0, s_0, \mathbf{z}_{c0}) = 0, \quad t \leq 0 \quad (9)$$

Formally, the sequence of Cauchy problems (6) is equivalent to one Cauchy problem

$$\dot{\mathbf{z}}_c = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}_c), \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}_c) = \sum_{j=1,2,3,\dots} (\mathbf{z}_c|_{t_j+0} - \mathbf{z}_c|_{t_j-0})\delta(t - t_j) + \begin{cases} \mathbf{f}_c(t, \mathbf{x}, s_0, \mathbf{z}_c), & t \in [0, t_1], \\ \mathbf{f}_c(t, \mathbf{x}, s_j, \mathbf{z}_c), & t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (10)$$

$$\mathbf{z}_c(0) = \mathbf{z}_{c0} \quad (11)$$

where  $\delta(t)$  is the Dirac impulse function. In (10)  $\mathbf{z}_c|_{t_j+0}$  and  $\mathbf{z}_c|_{t_j-0}, j = 1, 2, 3, \dots$  are related by equation (5). If the continuous dynamic subsystem contains some links with constant or variable positive lag periods, and  $\tau_{\max}$  is the maximum lag time, the initial conditions (11) take the form

$$\mathbf{z}_c(t) = \mathbf{z}_{c0}, \quad t \in [-\tau_{\max}, 0]. \quad (12)$$

The mathematical model of the hybrid automaton (1)–(7) or (1)–(5), (7), (8)–(10), (12) is the most feasible mathematical model in the MATLAB / Simulink / Stateflow dynamic system simulation software. MATLAB/ Simulink standard tools provide the generation of program code for the software implementation of this class of dynamic systems on embedded computing systems. For further, it is advisable to separate linear and nonlinear terms as a function of derivatives

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_c(t, \mathbf{x}, s, \mathbf{z}_c) &= B\mathbf{x} + C\mathbf{z}_c + \sum_{k=1}^{N_\tau} C_k^{(\tau)} \mathbf{z}_c(t - \tau_k) + \mathbf{f}_c^{(1)}(t, \mathbf{x}, s, \mathbf{z}_c), \\ \mathbf{f}_c^{(1)} &: \mathbb{R} \times X \times S \times Z_c \rightarrow Z_c, \\ B &= \text{const} \in \mathbb{R}^{(N_{z_c}, N_x)}, \quad C = \text{const} \in \mathbb{R}^{(N_{z_c}, N_{z_c})}, \\ \tau_k &= \text{const}, \quad 0 < \tau_k < \tau_{\max}, \quad C_k^{(\tau)} = \text{const} \in \mathbb{R}^{(N_{z_c}, N_{z_c})}, \quad k = \overline{1, N_\tau}. \end{aligned} \quad (13)$$

Accordingly, equation (10) takes the form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_c &= B\mathbf{x} + C\mathbf{z}_c + \sum_{k=1}^{N_\tau} C_k^{(\tau)} \mathbf{z}_c(t - \tau_k) + \mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}_c), \\ \mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}_c) &= \sum_{j=1,2,3,\dots} (\mathbf{z}_c|_{t_j+0} - \mathbf{z}_c|_{t_j-0})\delta(t - t_j) + \begin{cases} \mathbf{f}_c^{(1)}(t, \mathbf{x}, s_0, \mathbf{z}_c), & t \in [0, t_1], \\ \mathbf{f}_c^{(1)}(t, \mathbf{x}, s_k, \mathbf{z}_c), & t \in [t_k, t_{k+1}], \end{cases} \\ &k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (14)$$

In (15)  $\mathbf{z}_c|_{t_j+0}$  and  $\mathbf{z}_c|_{t_j-0}, j = 1, 2, 3, \dots$  are connected by the equation (6).





### 3. CONTROL OBJECTS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

A dynamic system can contain not only a discrete controlling subsystem and control objects with lumped parameters, but also control objects with distributed parameters, dynamically connected with them across the boundaries. It is a hybrid dynamical system (HDS) [9], and its model equations contain a system of ordinary differential equations and partial differential equations with corresponding initial conditions connected by means of boundary conditions and constraint's conditions. In many cases that are important for applications from the point of view of the automatic control theory, objects with distributed parameters are linear and stationary. In this case, the considered non-linear HDS of a special type correspond to equations (1)–(5), (7)–(9), (15) and equations

$$\dot{\mathbf{z}}_c = B\mathbf{x} + C\mathbf{z}_c + A\mathbf{h} + \sum_{k=1}^{N_\tau} C_k^{(\tau)} \mathbf{z}_c(t - \tau_k) + \mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}_c), \quad \mathbf{h} = \int_S \mathbb{L}^{(H)} \mathbf{u} dS, \quad (16)$$

$$\partial \mathbf{u} / \partial t = \mathbb{L}_1^{(F)} \mathbf{u} + L_2^{(F)} \mathbf{x} + L_3^{(F)} \mathbf{z}_c + L_4^{(F)} \dot{\mathbf{z}}_c + L_5^{(F)} \mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}_c), \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad (16)$$

$$\left( \mathbb{L}_1^{(G)} \mathbf{u} + L_2^{(G)} \mathbf{x} + L_3^{(G)} \mathbf{z}_c + L_4^{(F)} \mathbf{f}_3(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}_c) \right) \Big|_S = 0, \quad S = \partial\Omega,$$

$$\mathbf{z}_c(t) = \mathbf{z}_{c0}, \quad t \in [-\tau_{\max}, 0]; \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}). \quad (17)$$

Here  $\mathbf{h}(t)$ ,  $\mathbf{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_h}$  is the function characterizing the constraint's conditions;  $A = \text{const} \in \mathbb{R}^{(N_y, N_h)}$ ,

$$\mathbf{f}_{2,3}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}_c) = \begin{cases} \mathbf{f}_c^{(2,3)}(t, \mathbf{x}, s_0, \mathbf{z}_c), & t \in [0, t_1], \\ \mathbf{f}_c^{(2,3)}(t, \mathbf{x}, s_j, \mathbf{z}_c), & t \in [t_j, t_{j+1}], \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

$\mathbf{f}_c^{(2)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N_x} \times S \times \mathbb{R}^{N_{z_c}} \rightarrow \mathbb{R}^{N_2}$ ,  $\mathbf{f}_c^{(3)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N_x} \times S \times \mathbb{R}^{N_{z_c}} \rightarrow \mathbb{R}^{N_3}$  are nonlinear functions that simulate the effects of switching in the discrete subsystem;  $\mathbf{r} \in \Omega \subset \mathbb{R}^{N_r}$  are independent spatial coordinates of individual points of control objects with distributed parameters and their area;  $L_2^{(F)} = L_2^{(F)}(\mathbf{r})$ ,  $L_2^{(F)} : \mathbb{R}^{N_r} \rightarrow \mathbb{R}^{(N_{z_c}, N_x)}$ ,  $L_{3,4}^{(F)} = L_{3,4}^{(F)}(\mathbf{r})$ ,  $L_{3,4}^{(F)} : \mathbb{R}^{N_r} \rightarrow \mathbb{R}^{(N_{z_c}, N_{z_c})}$ ,  $L_5^{(F)} = L_5^{(F)}(\mathbf{r})$ ,  $L_5^{(F)} : \mathbb{R}^{N_r} \rightarrow \mathbb{R}^{(N_{z_c}, N_2)}$ ,  $L_2^{(G)} = L_2^{(G)}(\mathbf{r})$ ,  $L_2^{(G)} : \mathbb{R}^{N_r} \rightarrow \mathbb{R}^{(N_G, N_x)}$ ,  $L_3^{(G)} = L_3^{(G)}(\mathbf{r})$ ,  $L_3^{(G)} : \mathbb{R}^{N_r} \rightarrow \mathbb{R}^{(N_G, N_{z_c})}$ ,  $L_4^{(G)} = L_4^{(G)}(\mathbf{r})$ ,  $L_4^{(G)} : \mathbb{R}^{N_r} \rightarrow \mathbb{R}^{(N_G, N_3)}$  are matrices that do not depend on time  $t$  (similar to [10]);  $\mathbb{L}_1^{(F)} : (\mathbb{R}^{N_r} \rightarrow \mathbb{R}^{N_u}) \rightarrow (\mathbb{R}^{N_r} \rightarrow \mathbb{R}^{N_u})$ ,  $\mathbb{L}_1^{(H)} : (\mathbb{R}^{N_r} \rightarrow \mathbb{R}^{N_u}) \rightarrow (\mathbb{R}^{N_r} \rightarrow \mathbb{R}^{N_h})$  are linear unbounded operators which do not depend on time  $t$ ;  $\mathbb{L}_1^{(G)} : (\mathbb{R}^{N_r} \rightarrow \mathbb{R}^{N_u}) \rightarrow (\mathbb{R}^{N_r} \rightarrow \mathbb{R}^{N_G})$  is a linear bounded or unbounded operator that does not depend on time  $t$ ;  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{u} : \mathbb{R}^{N_r} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_u}$ . We assume that the initial conditions (17) correspond to the equilibrium state, i.e.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 = \text{const}, \quad t < 0,$$

$$\mathbf{f}_k^{(c)}(t, \mathbf{x}_0, s_0, \mathbf{z}_{c0}) = \mathbf{f}_k^{(c)}(0, \mathbf{x}_0, s_0, \mathbf{z}_{c0}), \quad t \leq 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$B\mathbf{x}_0 + \left( C + \sum_{k=1}^{N_\tau} C_k^{(\tau)} \right) \mathbf{z}_{c0} + A\mathbf{h}_0 + \mathbf{f}_1^{(c)}(0, \mathbf{x}_0, s_0, \mathbf{z}_{c0}) = 0, \quad \mathbf{h}_0 = \int_S \mathbb{L}^{(H)} \mathbf{u}_0 dS, \quad (19)$$

$$\mathbb{L}_1^{(F)} \mathbf{u}_0 + L_2^{(F)} \mathbf{x}_0 + L_3^{(F)} \mathbf{z}_{c0} + L_5^{(F)} \mathbf{f}_2^{(c)}(0, \mathbf{x}_0, s_0, \mathbf{z}_{c0}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega,$$

$$\left( \mathbb{L}_1^{(G)} \mathbf{u}_0 + L_2^{(G)} \mathbf{x}_0 + L_3^{(G)} \mathbf{z}_{c0} + L_4^{(F)} \mathbf{f}_3^{(c)}(0, \mathbf{x}_0, s_0, \mathbf{z}_{c0}) \right) \Big|_S = 0, \quad S = \partial\Omega.$$



#### 4. LINEARIZED SYSTEM TRANSFER FUNCTIONS

Consider (16) and (17) under the assumption  $\mathbf{z}_{c0} = 0$ ,  $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}) = 0$ .

The one-sided direct and inverse integral Laplace transform in time  $t$  is

$$\tilde{f}(\lambda) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t} dt, \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{f}(\lambda)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tilde{f}(\lambda)e^{\lambda t} d\lambda, \quad (20)$$

$$\sigma \geq \sigma_a, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Here  $\sigma_a$  is the abscissa of absolute convergence of the Laplace integral. Denote formally

$$\tilde{\mathbf{f}}_k(\lambda) = \mathcal{L}[\mathbf{f}_k(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{z}_c(t))], \quad k = 1, 2, 3. \quad (21)$$

Under homogeneous initial conditions  $\mathbf{z}_{c0} = 0$ ,  $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}) = 0$  the equations (16), (17) after Laplace transform take the form

$$\lambda \tilde{\mathbf{z}}_c = B \tilde{\mathbf{x}} + \left( C + \sum_{k=1}^{N_\tau} C_k^{(\tau)} e^{-\tau_k \lambda} \right) \tilde{\mathbf{z}}_c + A \tilde{\mathbf{h}} + \tilde{\mathbf{f}}_1, \quad (22)$$

$$\lambda \tilde{\mathbf{u}} = \mathbb{L}_1^{(F)} \tilde{\mathbf{u}} + L_2^{(F)} \tilde{\mathbf{x}} + (L_3^{(F)} + \lambda L_4^{(F)}) \tilde{\mathbf{z}}_c + L_5^{(F)} \tilde{\mathbf{f}}_2, \quad \mathbf{r} \in \Omega,$$

$$\left( \mathbb{L}_1^{(G)} \tilde{\mathbf{u}} + L_2^{(G)} \tilde{\mathbf{x}} + L_3^{(G)} \tilde{\mathbf{z}}_c + L_4^{(F)} \tilde{\mathbf{f}}_3 \right) \Big|_S = 0, \quad S = \partial\Omega; \quad \tilde{\mathbf{h}} = \int_S \mathbb{L}^{(H)} \tilde{\mathbf{u}} dS. \quad (23)$$

From linearity (23) follows

$$\tilde{\mathbf{h}} = B_u(\lambda) \tilde{\mathbf{x}} + C_u(\lambda) \tilde{\mathbf{z}}_c + C_2(\lambda) \tilde{\mathbf{f}}_2 + C_3(\lambda) \tilde{\mathbf{f}}_3, \quad B_u(\bar{\lambda}) = \overline{B_u(\lambda)}, \quad C_{u,2,3}(\bar{\lambda}) = \overline{C_{u,2,3}(\lambda)}. \quad (24)$$

Let be  $\mathbf{e}_1^{(N)} = (1, 0, 0, \dots, 0)^T$ ,  $\mathbf{e}_2^{(N)} = (0, 1, 0, \dots, 0)^T$ , ...,  $\mathbf{e}_N^{(N)} = (0, 0, 0, \dots, 1)^T$ .

From linearity (23), similarly to [10], linear boundary-value problems follow for finding separate columns of matrices  $B_u(\lambda)$ ,  $C_u(\lambda)$ ,  $C_2(\lambda)$ ,  $C_3(\lambda)$  with fixed values  $\lambda$

$$\lambda \mathbf{v} = \mathbb{L}_1^{(F)} \mathbf{v} + L_2^{(F)} \mathbf{e}_j^{(N_x)}, \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad \left( \mathbb{L}_1^{(G)} \mathbf{v} + L_2^{(G)} \mathbf{e}_j^{(N_x)} \right) \Big|_S = 0,$$

$$B_u(\lambda) \mathbf{e}_j^{(N_x)} = \int_S \mathbb{L}^{(H)} \mathbf{v} dS, \quad j = \overline{1, N_x},$$

$$\lambda \mathbf{v} = \mathbb{L}_1^{(F)} \mathbf{v} + (L_3^{(F)} + \lambda L_3^{(F)}) \mathbf{e}_j^{(N_{zc})}, \quad \mathbf{r} \in \Omega,$$

$$\left( \mathbb{L}_1^{(G)} \mathbf{v} + L_3^{(G)} \mathbf{e}_j^{(N_{zc})} \right) \Big|_S = 0, \quad C_u(\lambda) \mathbf{e}_j^{(N_{zc})} = \int_S \mathbb{L}^{(H)} \mathbf{v} dS, \quad j = \overline{1, N_{zc}}, \quad (25)$$

$$\lambda \mathbf{v} = \mathbb{L}_1^{(F)} \mathbf{v} + L_5^{(F)} \mathbf{e}_j^{(N_2)}, \quad \mathbf{r} \in \Omega,$$

$$\left( \mathbb{L}_1^{(G)} \mathbf{v} \right) \Big|_S = 0, \quad C_2(\lambda) \mathbf{e}_j^{(N_2)} = \int_S \mathbb{L}^{(H)} \mathbf{v} dS, \quad j = \overline{1, N_2},$$

$$\lambda \mathbf{v} = \mathbb{L}_1^{(F)} \mathbf{v}, \quad \mathbf{r} \in \Omega,$$

$$\left( \mathbb{L}_1^{(G)} \mathbf{v} + L_4^{(G)} \mathbf{e}_j^{(N_3)} \right) \Big|_S = 0, \quad C_3(\lambda) \mathbf{e}_j^{(N_3)} = \int_S \mathbb{L}^{(H)} \mathbf{v} dS, \quad j = \overline{1, N_3}.$$

For small and medium values of  $\lambda$  linear boundary value problems (25) can be solved numerically. When  $|\lambda| \gg 1$  they are asymptotic integration. Substituting (24) into (22) leads to the result

$$\left[ \lambda E - C - \sum_{k=1}^{N_\tau} C_k^{(\tau)} e^{-\tau_k \lambda} - AC_u(\lambda) \right] \tilde{\mathbf{z}}_c = (B + AB_u(\lambda)) \tilde{\mathbf{x}} +$$



$$+\tilde{\mathbf{f}}_1 + AC_2(\lambda)\tilde{\mathbf{f}}_2 + AC_3(\lambda)\tilde{\mathbf{f}}_3, \quad E = \text{diag}(1, 1, \dots, 1), \quad (26)$$

where it comes from

$$\tilde{\mathbf{z}}_c = \Phi(\lambda)\tilde{\mathbf{x}} + \sum_{k=1}^3 \Phi_k(\lambda)\tilde{\mathbf{f}}_k. \quad (27)$$

In (27) the transfer function matrices are represented as quasi-rational fractions [9,10]

$$\begin{aligned} \Phi_1(\lambda) &= \left[ \lambda E - C - \sum_{k=1}^{N_\tau} C_k^{(\tau)} e^{-\tau_k \lambda} - AC_u(\lambda) \right]^{-1} = Q_1(\lambda)/D(\lambda), \\ \Phi(\lambda) &= \Phi_1(\lambda)(B + AB_u(\lambda)) = Q(\lambda)/D(\lambda), \\ \Phi_2(\lambda) &= \Phi_1(\lambda)AC_2(\lambda) = Q_2(\lambda)/D(\lambda), \quad \Phi_3(\lambda) = \Phi_1(\lambda)AC_3(\lambda) = Q_3(\lambda)/D(\lambda), \\ D(\lambda) &= \det \left[ \lambda E - C - \sum_{k=1}^{N_\tau} C_k^{(\tau)} e^{-\tau_k \lambda} - AC_u(\lambda) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Here  $D : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  is the characteristic quasi-polynomial of HDS,  $Q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{(N_{zc}, N_x)}$ ,  $Q_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{(N_{zc}, N_{zc})}$ ,  $Q_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{(N_{zc}, N_2)}$ ,  $Q_3 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{(N_{zc}, N_3)}$  are matrices whose elements are perturbing quasi-polynomials of HDS. In [10] the conditions for the analyticity of the functions  $B_u(\lambda)$  and  $C_u(\lambda)$ , as well as the characteristic and perturbing quasi-polynomials  $D(\lambda)$  and  $Q(\lambda)$  are formulated and proved in the domain  $|\lambda| \gg 1$ ,  $\text{Re } \lambda > -|\lambda| \sin \alpha$ ,  $0 < \alpha < \pi/2$  (conditions with respect to the functions  $C_2(\lambda)$  and  $C_3(\lambda)$ , as well as perturbing quasi-polynomials  $Q_1(\lambda)$ ,  $Q_2(\lambda)$  and  $Q_3(\lambda)$  can be formulated and proved similarly). In particular, with sufficiently general assumptions, this is true for a number of typical mathematical models of control objects with distributed parameters (heat conduction and diffusion processes, damping and supporting layers of a viscous incompressible fluid, the dynamics of an elastic medium with a small but finite energy dissipation).

As a rule, for the most common mathematical models of control objects with distributed parameters

$$\begin{aligned} \|B_u(\lambda)\| &= \bar{o}(|\lambda|), \quad \|C_u(\lambda)\| = \bar{o}(|\lambda|), \quad \|C_2(\lambda)\| = \bar{o}(|\lambda|), \quad \|C_3(\lambda)\| = \bar{o}(|\lambda|), \\ \lambda &\rightarrow \infty, \quad \text{Re } \lambda > -|\lambda| \sin \alpha, \quad 0 < \alpha < \pi/2. \end{aligned} \quad (29)$$

## 5. HYBRID AUTOMATA MODEL EXTENSION

**Definition 1.** By the extended model of a hybrid automaton, we mean a mathematical model in which the switching dynamics of a discrete subsystem is modeled by equations (1)–(5), (7), (12), and the dynamics of a continuous subsystem is modeled by some integral or integro-differential equations.

**Lemma 1.** *If the functions  $B_u(\lambda)$ ,  $C_u(\lambda)$ ,  $C_2(\lambda)$ ,  $C_3(\lambda)$  are analytic with  $|\lambda| \gg 1$ ,  $\text{Re } \lambda > -|\lambda| \sin \alpha$ ,  $0 < \alpha < \pi/2$ , and conditions (29) are satisfied, then under homogeneous initial conditions  $\mathbf{z}_{c0} = 0$ ,  $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}) = 0$  the nonlinear HDS (16), (17) reduces to a nonlinear integral convolution type equation.*

**Proof.** In this case

$$\Phi(\lambda) \rightarrow 0, \quad \Phi_k(\lambda) \rightarrow 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \text{Re } \lambda > -|\lambda| \sin \alpha, \quad 0 < \alpha < \pi/2 \quad (30)$$



and transfer functions are analytical in domain (30). In this case, for  $t \neq 0$  and sufficiently large  $\sigma$  the Mellin integral (20) for inversion of the Laplace transform converges, and there exist matrices of impulse transition functions

$$\begin{aligned} F(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\Phi(\lambda)], \quad F_k(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi_k(\lambda)], \\ \|F(t)\| &< \infty, \quad \|F_k(t)\| < \infty, \quad 0 < t < \infty \\ F(t) &= F_k(t) \equiv 0, \quad t < 0, \quad k = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{31}$$

wherein

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} F_1(t) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \Phi_1(\lambda) = E, \quad \lim_{t \rightarrow +0} \int_0^t F(\xi) d\xi = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \Phi(\lambda) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow +0} \int_0^t F_k(\xi) d\xi &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \Phi_k(\lambda) = 0, \quad k = 2, 3. \end{aligned} \tag{32}$$

Reversing the integral Laplace transform in (27), we find

$$\mathbf{z}_c(t) = \int_0^t \left[ F(t - \xi) \mathbf{x}(\xi) + \sum_{k=1}^3 F_k(t - \xi) \mathbf{f}_k(\xi, \mathbf{x}(\xi), \mathbf{z}_c(\xi)) \right] d\xi. \tag{33}$$

Equation (33) is a non-linear integral equation of convolution type for the unknown function  $\mathbf{z}_c(t)$ . □

When  $0 < t \ll 1$  and when  $t \gg 1$  for the inversion of the integral Laplace transform in (31) approximate formulas can be obtained on the basis of its asymptotic properties. For medium values of  $t$  the inversion of the Laplace transform in (31) can be performed numerically.

**Lemma 2.** *If the initial conditions (17) correspond to the equilibrium state, i.e. conditions (19) are fulfilled, functions  $B_u(\lambda), C_u(\lambda), C_2(\lambda), C_3(\lambda)$  are analytic with  $|\lambda| \gg 1, \operatorname{Re} \lambda > -|\lambda| \sin \alpha, 0 < \alpha < \pi/2$ , and conditions (29) are satisfied, then nonlinear HDS (16), (17) reduces to a nonlinear integral convolution type equation.*

**Proof.** Putting  $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_c^*(t) = \mathbf{z}_c(t) - \mathbf{z}_{c_0}, \mathbf{u}^*(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}_0(\mathbf{r}), \mathbf{h}^*(t) = \mathbf{h}(t) - \mathbf{h}_0, \mathbf{f}_k^*(t, \mathbf{x}^*, \mathbf{z}_c^*) = \mathbf{f}_k(t, \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}^*(t), \mathbf{z}_{c_0} + \mathbf{z}_c^*(t)) - \mathbf{f}_k(0, \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_{c_0})$ , we obtain a system of equations for quantities  $()^*$ , similar to (16) with homogeneous initial conditions, whence it follows  $\mathbf{z}_c^*(t) = \int_0^t [F(t - \xi) \mathbf{x}^*(\xi) + \sum_{k=1}^3 F_k(t - \xi) \mathbf{f}_k^*(\xi, \mathbf{x}^*(\xi), \mathbf{z}_c^*(\xi))] d\xi$ . We get

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_c(t) &= \mathbf{z}_{c_0} + \int_0^t [F(t - \xi)(\mathbf{x}(\xi) - \mathbf{x}_0) + \\ &+ \sum_{k=1}^3 F_k(t - \xi) [\mathbf{f}_k(\xi, \mathbf{x}(\xi), \mathbf{z}_c(\xi)) - \mathbf{f}_k(0, \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_{c_0})]] d\xi \end{aligned} \tag{34}$$

after returning to the original variables. □

**Theorem 1.** *If the initial conditions (17) correspond to the equilibrium state, i.e. conditions (19) are fulfilled, functions  $B_u(\lambda), C_u(\lambda), C_2(\lambda), C_3(\lambda)$  are analytic with  $|\lambda| \gg 1, \operatorname{Re} \lambda > -|\lambda| \sin \alpha, 0 < \alpha < \pi/2$ , and conditions (29) are fulfilled, then nonlinear special type HDS is isomorphic to an extended model of a hybrid automaton in which the dynamics of a continuous subsystem is modeled by a nonlinear integral convolution type equation.*



**Proof.** On the basis of Lemmas 1 and 2 and using (15) and (33), we find

$$\begin{aligned}
 \mathbf{z}_c(t) &= \mathbf{z}_{c_0} + \int_0^t [F(t-\xi)(\mathbf{x}(\xi) - \mathbf{x}_0) + \\
 &+ \sum_{k=1}^3 F_k(t-\xi)[\mathbf{f}_c^{(k)}(\xi, \mathbf{x}(\xi), s_{d_0}, \mathbf{z}_c(\xi)) - \mathbf{f}_c^{(k)}(\xi, \mathbf{x}_0, s_{d_0}, \mathbf{z}_{c_0})] d\xi, \quad t \in [0, t_1], \\
 \mathbf{z}_c(t) &= \mathbf{z}_{c_0} + \sum_{j=1}^m (\mathbf{z}_c|_{t_j+0} - \mathbf{z}_c|_{t_j-0}) F_1(t-t_j) + \int_0^t [F(t-\xi)(\mathbf{x}(\xi) - \mathbf{x}_0) + \\
 &+ \sum_{k=1}^3 F_k(t-\xi)[\mathbf{f}_c^{(k)}(\xi, \mathbf{x}(\xi), s_{d_m}, \mathbf{z}_c(\xi)) - \mathbf{f}_c^{(k)}(0, \mathbf{x}_0, s_{d_0}, \mathbf{z}_{c_0})] d\xi, \\
 &t \in [t_m, t_{m+1}], \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad t_m \in T.
 \end{aligned} \tag{35}$$

The extended model of the hybrid automaton corresponds to equations (1)-(5), (7), (12) and (35), where  $\mathbf{z}_c|_{t_j+0}$  and  $\mathbf{z}_c|_{t_j-0}$  are related by equation (5).  $\square$

The generalized degree  $n \in \mathbb{R}$  of the characteristic quasi-polynomial  $D(\lambda)$  is determined from the condition [9, 10]

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-n} D(\lambda) = c_a, \quad 0 < |c_a| < \infty, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} \lambda > \sigma_0, \quad \sigma_0 \in (-\infty, 0) \tag{36}$$

When conditions (29) are fulfilled,  $n = N_{z_c}$ , and condition (36) is fulfilled in a wider domain  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{Re} \lambda > -|\lambda| \sin \alpha$ ,  $0 < \alpha < \pi/2$ .

The numerical solution of auxiliary linear boundary value problems (25) with  $|\lambda| < R$ ,  $R \gg 1$ ,  $\operatorname{Re} \lambda > -\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$  is performed on the basis of the Galerkin projection method [10]. In the considered domain, the absence of singularities of functions  $B_u(\lambda)$ ,  $C_u(\lambda)$ ,  $C_2(\lambda)$ ,  $C_3(\lambda)$  and, consequently, of the characteristic and perturbing quasi-polynomials  $D(\lambda)$ ,  $Q(\lambda)$ ,  $Q_1(\lambda)$ ,  $Q_2(\lambda)$ ,  $Q_3(\lambda)$  is verified numerically on the basis of principle of argument. The presence of singularities of the characteristic and perturbing quasi-polynomials when  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  means the instability of control objects with distributed parameters as such and requires a change in the parameters of the designed system. Further, we assume that the functions  $B_u(\lambda)$ ,  $C_u(\lambda)$ ,  $C_2(\lambda)$ ,  $C_3(\lambda)$ , and also  $D(\lambda)$ ,  $Q(\lambda)$ ,  $Q_1(\lambda)$ ,  $Q_2(\lambda)$ ,  $Q_3(\lambda)$  are analytic in domain  $\operatorname{Re} \lambda > \sigma_0$ ,  $\sigma_0 \in (-\infty, 0)$ .

If the quasi-polynomial  $D(\lambda)$  is analytic with  $\operatorname{Re} \lambda > \sigma_0$ ,  $\sigma_0 \in (-\infty, 0)$  and is stable, that is, all its roots (zeros) lie strictly to the left of the imaginary axis  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ , then according to the theorem on the stable quasi-polynomial [9]

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg D(i\omega) = \frac{1}{2} n \pi. \tag{37}$$

When optimizing the frequency change step  $\omega$  (37) this is a “fast” algorithm for checking the stability of linearized HDS [9].

**Theorem 2.** *If the initial conditions (17) correspond to the equilibrium state, the functions  $B_u(\lambda)$ ,  $C_u(\lambda)$ ,  $C_2(\lambda)$ ,  $C_3(\lambda)$  are analytic with  $|\lambda| \gg 1$ ,  $\operatorname{Re} \lambda > -|\lambda| \sin \alpha$ ,  $0 < \alpha < \pi/2$ , conditions (29) are satisfied, and the characteristic quasi-polynomial  $D(\lambda)$  is stable, then the kernel of nonlinear integral equations of convolution type (35) decays exponentially.*

**Proof.** By the conditions of the theorem, the characteristic quasi-polynomial  $D(\lambda)$  is analytic in domain  $\operatorname{Re} \lambda > \sigma_0$ ,  $\sigma_0 \in (-\infty, 0)$ .

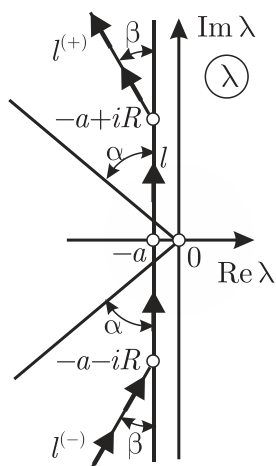


Fig. 2. Integration contour

All the roots (zeros) of  $D(\lambda)$  lie strictly to the left of the imaginary axis  $\text{Re } \lambda = 0$ . Consequently, all the singular points of the transfer functions (28) lie strictly to the left of the imaginary axis  $\text{Re } \lambda = 0$ . If conditions (29) are true, then from (30) it follows that the singular points of the transfer functions cannot be in the domain  $\text{Re } \lambda > -|\lambda| \sin \alpha$ ,  $0 < \alpha < \pi/2$ ,  $|\lambda| \gg 1$ . In formulas (31) the path of integration in the Mellin integral (20) for inversion of the Laplace transform can be along a straight line  $\text{Re } \lambda = -a$ ,  $a > 0$ . Further, it can be deformed into the contour  $l^{(-)} \cup l \cup l^{(+)}$  (Fig. 2), completely lying in the domain where the transfer functions are analytical. In particular,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l^{(-)} \cup l \cup l^{(+)}} \Phi(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda, \quad l = \{\lambda = -a + i\omega, \quad \omega \in [-R, R]\},$$

$$l^{(\pm)} = \{\lambda = -a \pm iR \pm ie^{\pm i\beta} \xi, \quad \xi \in [0, \infty)\}, \quad R \gg 1, \quad 0 < \beta < \alpha < \pi/2, \quad a > 0,$$

$$\int_l \Phi(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda = \frac{1}{t} \left[ (\Phi(\lambda) e^{\lambda t}) \Big|_{\lambda=-a-iR}^{\lambda=-a+iR} - \int_{l^{(\pm)}} \Phi'(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda \right] = \bar{o}(e^{-at}), \quad t \rightarrow \infty,$$

$$\left| \int_{l^{(\pm)}} \Phi(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda \right| \leq M e^{-at} \int_0^\infty e^{-\xi t \sin \beta} d\xi = \frac{M}{t \sin \beta} e^{-at} = \bar{o}(e^{-at}), \quad t \rightarrow \infty,$$

$$M = \max_{\xi \in [0, \infty)} |\Phi(-a \pm iR \pm ie^{\pm i\beta} \xi)| < \infty.$$

Those  $F(t) = \bar{o}(e^{-at})$ ,  $t \rightarrow \infty$ , and similarly  $F_k(t) = \bar{o}(e^{-at})$ ,  $t \rightarrow \infty$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $a > 0$ . □

**Corollary 2.** *Under the conditions of Theorem 2, the asymptotic complexity of the numerical implementation of the extended model of a hybrid automaton based on integral equations (35) has the same order as the asymptotic complexity of the numerical implementation of the model of a hybrid automaton based on Cauchy problems for ordinary differential equations (6).*

**Remark 1.** The numerical integration of linear boundary value problems (25) and the numerical inversion of the integral Laplace transform in (31) can be performed on a sufficiently powerful computing system. Further numerical solution of integral equations (35) can be performed on the embedded computer system.

## References

1. Kashevnik A. M., Ponomarev A. V., Savosin S. V. Hybrid Systems Control Based on Smart Space Technology. *SPIIRAS Proceedings*, 2014, iss. 4(35), pp. 212–226 (in Russian).
2. Meslem N., Ramdani M., Candau Y. Guaranteed Parameter Set Estimation for Monotone Dynamical Systems Using Hybrid Automata. In: *Reliable Computing*, Springer Verlag, 2010, pp. 88–104.
3. Karoui M. F., Alla H., Chatti A. Monitoring of dynamic processes by rectangular hybrid automata. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2010, vol. 4, iss. 4, pp. 766–774. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2010.05.004>



4. Thiagarajan P. S., Yang S. Modular discrete time representation of distributed hybrid automata. *Theoretical Computer Science*, 2012, vol. 429, pp. 292–304. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2011.12.050>
5. Konečný M., Taha W., Bartha F. A., Duracz J., Duracz A., Ames A. D. Enclosing the behavior of a hybrid automation up to and beyond a Zeno point. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2016, vol. 20, pp. 1–20. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2015.10.004>
6. Elmetennani S., Laleg-Kirati T.M., Djemai M., Tadjine M. New MPPT algorithm for PV applications based on hybrid dynamical approach. *Journal of Process Control*, 2016, vol. 48, pp. 14–24. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2016.10.001>
7. Iovine A., Valentini F., De Santis E., Di Benedetto M. D., Pratesi M. Safe human-inspired mesoscopic hybrid automation for autonomous vehicles. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2017, vol. 25, pp. 192–210. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2016.08.008>
8. Shornikov Yu., Bessonov A., Dostovalov D. Specification and instrumental analysis of hybrid systems. *Science Bulletin of the Novosibirsk State Technical University*, 2015, no. 4(61), pp. 101–117 (in Russian). DOI: <http://dx.doi.org/10.17212/1814-1196-2015-4-101-117>
9. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. On the theory of hybrid dynamical systems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2000, vol. 39, no. 3, pp. 383–398.
10. Portenko M. S., Melnichuk D. V., Andreichenko D. K. Analyticity conditions of characteristic and disturbing quasipolynomials of hybrid dynamical systems. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, no. 2, pp. 208–217 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-2-208-217>

---

**Cite this article as:**

Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Batraeva I. A. Hibrid Automation Extended Model. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 1, pp. 94–104. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-94-104>

---

УДК 519.713.8 : 517.935.2

## Расширенная модель гибридного автомата

Д. К. Андрейченко, К. П. Андрейченко, И. А. Батраева

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83, [andreichenkodk@gmail.com](mailto:andreichenkodk@gmail.com)

Андрейченко Константин Петрович, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, Саратов, ул. Политехническая, д. 77, [kp\\_andreichenko@renet.ru](mailto:kp_andreichenko@renet.ru)

Батраева Инна Александровна, кандидат физико-математических наук, и.о. заведующего кафедрой технологий программирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83, [batraevaia@info.sgu.ru](mailto:batraevaia@info.sgu.ru)



Рассмотрена расширенная модель гибридных автоматов для динамических систем, где наряду с дискретной управляющей подсистемой и объектами управления с сосредоточенными по пространству параметрами имеются объекты управления с распределенными по пространству параметрами (линейные и стационарные с точки зрения теории автоматического управления). Показана возможность программной реализации расширенной модели гибридных автоматов на встроенных вычислительных системах.

*Ключевые слова:* гибридные автоматы, гибридные динамические системы, встроенные вычислительные системы.

---

**Образец для цитирования:**

*Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Batraeva I. A. Hybrid Automation Extended Model [Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Батраева И. А. Расширенная модель гибридного автомата] // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 1. С. 94–104. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-94-104>*

---





## Multiple Hedging on Energy Market

E. Yu. Karatetskaia, V. V. Lakshina

Efrosiniia Yu. Karatetskaia, <https://orcid.org/0000-0003-3932-9447>, Institute for Statistical Studies and Economics of Knowledge, National Research University Higher School of Economics, 11 Myasnitskaya St., 101000 Moscow, Russia, [ekarateczkaya@hse.ru](mailto:ekarateczkaya@hse.ru)

Valeriya V. Lakshina, <https://orcid.org/0000-0003-1447-9377>, National Research University Higher School of Economics, 136 Rodionov St., 603093 Nizhniy Novgorod, Russia, [vlakshina@hse.ru](mailto:vlakshina@hse.ru)

The article is devoted to the calculation of the dynamic hedge ratio based on three different types of volatility models, among which S-BEKK-GARCH model takes into account cross-sectional dependence. The hedging strategy is built for eight stock-futures pairs on energy market in Russia.

*Keywords:* multivariate volatility models, spatial specifications, dynamic hedge ratio, energy market.

Received: 14.08.2018 / Accepted: 01.10.2018 / Published online: 28.02.2019

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-105-113>

### INTRODUCTION

Energy market can significantly influence economy on different levels. Therefore, hedging of energy price risk has become an important issue for households, firms and policy makers. Due to recent increase of energy price volatility a wide range of papers devoted to volatility estimation and hedging strategy building have been published (see in [1, 2]).

The original hedging strategies assumed that conditional volatility is unchanged in time [3], i. e. they were static. Later new approaches have been proposed including dynamic hedging strategies, as well as cross-hedging. Futures contracts are one of the most widely used financial assets for hedging due to such features as fixed term of expiration, low transaction cost, high liquidity and low margin requirement.

Dynamic hedging strategies, based on a time-dependent optimal hedge ratio, allow managing a portfolio of different assets considering cross-correlation of spot and futures contracts. To calculate the optimal hedge ratio, the first step is to investigate the time-varying volatility transmission among the assets using one of the parametric models, for example, VAR-GARCH [4], BEKK-GARCH [5], Markov switching GARCH [6].

In [4] VAR-GARCH and CCC-GARCH (constant conditional correlations) models are used to define volatility spillovers between oil and stock prices and the authors come to the conclusion that a better understanding of such links is crucial for portfolio management. The results also show that for all the pairs, consisted of oil and stock from some economic sector, short position of financial sector stock is the most effective strategy to hedge oil price risks.

Time-varying conditional correlations and hedge ratios of Goldman Sach's Energy index pared with S&P 500 are examined in [7]. The authors implement a BEKK-GARCH specification for conditional variances and include US dollar index as an independent variable in mean equation. According to their empirical results, energy index show better performance as a hedge instrument for equities during extreme downturns.



The linkage of crude oil market (proxy of oil price is the West Texas Intermediate crude oil price) and stock markets of the G-7 countries are studied in [5]. They combine a bivariate BEKK-GARCH model with wavelet approach in order to analyze volatility spillovers and compute hedging ratios and optimal weights that are varying across scales.

Moreover, Wang and Liu [8] investigate volatility spillovers and dynamic correlations between crude oil and stock markets using BEKK-, CCC- and DCC-GARCH models. They focus on the dynamic relationships between markets in countries that have been divided into oil-exporting and oil-importing. As a result, in this hedging strategy crude oil risk can be better hedged by indices of oil-exporting countries. It happens because of the higher level of sensitivity to geopolitical events compared to oil-importing countries.

In [9] an attempt is made to investigate the time-varying correlations using the multivariate DECO-FIEGARCH approach. As for hedging, their results show that gold could be better instrument than oil while reducing stock price risk.

There is a large number of different approaches that increase hedging efficiency. Ghoddusi and Emamzadehfard [10] apart from estimation of contagion effects consider the maturity of the futures contracts and build three different hedge estimation methods, based on OLS, error correction model and GARCH. Among them OLS hedging strategy shows the best performance on short and long horizons.

For example, the researchers [2] implement quantile hedge ratio and compare it with minimum variance for three energy-related commodities: crude oil, heating oil and natural gas. In a case of long hedging horizons, they firstly use wavelet analysis to decompose the daily return series and find that on horizon of four weeks the both ratios for crude oil and heating oil converge.

The aim of this paper is to introduce spatial effects, i. e. cross-sectional dependencies, in building the hedging strategy. The idea to take into account cross-sectional dependencies in finance came from spatial econometrics and was introduced by [11]. Their model is based on the assumption that a lot of the cross-sectional dependencies between the stock returns can be captured by three different types of dependence: a general dependence, dependence within industrial branches, and dependence based on geographic locations.

For instance, authors [12] focus on the modelling of dependencies among the world financial markets and ability to forecast them. They propose a simple FDI-based measure of financial distance. The use of this measure in model significantly reduces the mean squared error in returns prediction and helps to capture the dependencies in world financial markets.

There is already some evidence that spatial models are good in optimal hedging ratio calculation, forecasting, modeling the effects of contamination and volatility spillovers in comparison with other multivariate models [13–15].

In this paper, we build hedging strategy following methodology of time-variant hedge ratio computation described in [16]. In contrast to previous studies, we rely on such multivariate volatility model as BEKK-GARCH with spatial effects and use generalized orthogonal (GO-GARCH) and dynamic conditional correlations (DCC) GARCH models as a benchmark, (for more details, see [17,18]). The comparison was made using hedging effectiveness proposed by [3]. We use data from Russian financial market, investigating eight companies from energy sector during 2011–2018.

The rest of the paper is organized as follows: section 1 gives a short description of



multivariate GARCH models used in the article. Section 2 describes methodology of hedging strategy building. Section 3 provides information about the dataset. Section 4 reports estimation results and section 4 concludes.

## 1. MULTIVARIATE GARCH MODELS

Let  $x_t$ ,  $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})'$  be a portfolio consisted of  $n$  assets at time moment  $t$ .  $x_t$  is represented as a sum of its mathematical expectation  $E(x_t|\mathcal{F}_t)$ , conditional on all available at  $t - 1$  information, and innovations  $y_t$ ,

$$x_t = E(x_t|\mathcal{F}_{t-1}) + y_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (1)$$

Innovations  $y_t$  conditional on volatility  $H_t$  are distributed normally with zero mean,

$$y_t|H_t \sim N(0, H_t). \quad (2)$$

For the purposes of hedging strategy building, we focus our attention on volatility matrix  $H_t$ . Its specifications used in the paper are described below.

### 1.1. S-BEKK model

The spatial specification of the multivariate model of generalized autoregressive conditional heteroscedasticity (spatial BEKK) allows to take into account both temporal and spatial effects in the dynamics of volatility [17]. Such effects are modelled using weight matrix that is given exogenously and can be defined either as a binary matrix or as a function of the economic distances [19].

The variance-covariance matrix  $H_t$  in spatial BEKK model has the following structure:

$$H_t = C'C + A'_{t-1}y_{t-1}y'_{t-1}A_{t-1} + B'_{t-1}H_{t-1}B_{t-1}, \quad (3)$$

where coefficient matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  are defined in (4)–(7) and contain spatial component in dynamic weight matrices  $W_t$ .

$$A_{t-1} = \text{diag}(a_0) + \text{diag}(a_1)W_{t-1}, \quad (4)$$

$$B_{t-1} = \text{diag}(b_0) + \text{diag}(b_1)W_{t-1}, \quad (5)$$

$$C'C = D^{-1}\text{diag}(d_0)(D')^{-1}, \quad (6)$$

where constant matrix  $D$  is computing as:

$$D = I_n - \text{diag}(d_1)\overline{W}, \quad (7)$$

where  $\overline{W}$  — mean value of dynamic weight matrix  $W_t$ .

Although parameter matrices have parameters only on main diagonals, such parametrization implies that parameter matrices are complete, owing to the presence of weight matrices. As a result, the model (3)–(7) provides plausible volatility dynamics together with reduced number of parameters, which is linear in  $n$ . In contrast, in original BEKK model [20] complete parameter matrices are obtained by at least  $O(n^2)$  parameters.

The dynamic weight matrix  $W_t$  contains information about economic distance between assets and each element of matrix in time  $t$ ,  $w_{ijt}$  is computed as follows,

$$w_{ijt} = \left(1 - \left(\frac{d_{ijt}}{b}\right)^2\right)^2, \text{ if } j \text{ is one of the neighbours for } i. \quad (8)$$



In this matrix element  $d_{ijt}$  is the economic distance between assets (see section 3 for more details).

### 1.2. DCC-GARCH

The DCC model, proposed by [21], is defined as follows,

$$H_t = D_t R_t D_t, D_t = \text{diag} \left( \sqrt{h_t} \right), \quad (9)$$

$$h_t = \omega + A y_{t-1} \odot y_{t-1} + B h_{t-1}, \quad (10)$$

$$R_t = (\text{diag}(Q_t))^{-\frac{1}{2}} Q_t (\text{diag}(Q_t))^{-\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

$$Q_t = (1 - \alpha - \beta) \bar{Q} + \alpha \varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1} + \beta Q_{t-1}, \quad (12)$$

$A, B$  — diagonal matrices of parameters;  $D_t$  — diagonal matrix of conditional standard deviations of  $y_t$ ;  $\bar{Q}_t$  — unconditional variance matrix;  $R_t$  — conditional correlation matrix with unities on the main diagonal.

### 1.3. GO-GARCH

The GO-GARCH model is a special case of the BEKK model [22]. In this model the volatility matrix is parametrized as follows,

$$H_t = X V_t X', \quad (13)$$

where  $V_t$  — diagonal  $n \times n$  matrix with univariate GARCH processes on the main diagonal;  $X$  —  $n \times n$  matrix based on singular value decomposition, which is not time depended (see [22] for details).

## 2. DYNAMIC HEDGE RATIO

In this paper we implement multiple hedging approach instead of traditional one, where only two assets — spot and futures — are in the portfolio. Following [12], we compute the portfolio return  $y_p$  for the investor, who holds  $n$  spot positions, which are hedged with futures contracts, as

$$y_p = \omega' y_s - \beta' y_f, \quad (14)$$

where  $y_s$  — stock returns,  $y_f$  — futures returns,  $\omega$  —  $n \times 1$  vector of weights in unhedged portfolio,  $\beta$  —  $n \times 1$  vector of hedge ratios.

The optimal vector of hedge ratios  $\beta^*$  in a case of minimum-variance approach can be obtained through

$$\frac{d\text{Var}(y_p)}{d\beta} = (\beta' H^f)' - (\omega' H^{sf})' = 0, \quad (15)$$

where  $H^{sf}$  and  $H^f$  are variance-covariance matrices for the spot-futures pairs and futures respectively.

Therefore, the optimal vector of hedge ratios is:

$$\beta_t^* = \left( H_t^f \right)^{-1} H_t^{sf} \omega. \quad (16)$$

Without loss of generality we take unit vector for  $\omega$ .



In the framework of the study we compare hedging strategies by hedging efficiency calculated as financial results of the portfolio (the sum of logarithmic returns) on forecast subsample and Sharp ratio.

Sharp ratio  $SR$  is obtained as

$$SR = \frac{y_p - y_n}{\sqrt{\text{Var}(y_p)}}, \quad (17)$$

where  $y_n$  — risk free ratio.

### 3 . DATA DESCRIPTION

Our sample covers the data of eight companies from energy sector in Russia. The list of companies can be seen in Table 1. All the data are obtained from the Finam website (<https://www.finam.ru/>). Descriptive statistics of spot assets' returns can be found in Appendix, Table A1.

Table 1

Tickers of spot assets			
Company	Ticker	Company	Ticker
FSK YeES	FEES	Rosneft	ROSN
Gazprom	GAZP	RusHydro	HYDR
Lukoil	LKOH	Surgutneftegas	SNGS
Novatek	NVTK	Tatneft	TATN

The close price was used as the daily price for both spot assets and futures. The dates range from June 20, 2011 until July 12, 2018 excluding public holidays, therefore the full sample contains 1681 observations.

The economic distances for weight matrices are calculated as a difference in trade volume (see example of weight matrix in Appendix, Table A2). Using a difference in trading volume as a proxy is caused by the fact that it is an endogenous variable and correlates with different measures of volatility [23]. [24] also point out that volatility of trading volume contains information about the intensity of trading deals and incorporates the price effects of market activity arising because of speculators' or hedgers' strategies.

Econometric calculations were carried out on Amazon Elastic Compute Cloud service with RStudio Amazon Machine Image (AMI) installed (<https://aws.amazon.com/>). The AMI contains R version 3.3.1 running on Ubuntu 16.04 LTS (the AMI was developed by Louis Aslett, [www.louisaslett.com/RStudio\\_AMI/](http://www.louisaslett.com/RStudio_AMI/)).

### 4 . EMPIRICAL RESULTS

The empirical results of this work include the evaluation of three multivariate GARCH models, namely DCC, GO-GARCH and S-BEKK; building three different hedging strategy based on them; comparison of the strategies obtained by hedging efficiency and Sharp ratio for the hedged portfolio.

Optimal minimum-variance hedge ratios are calculated according to (16) for the predicted values of volatility. As a forecast subsample we use the last one-third of the sample which include 560 observations.

The average, maximum and minimum values of the optimal HR are presented in Appendix, Table A3. The average values for S-BEKK model vary from 0.161 to 1.949. It should be noted that only for model with spatial effects the minimum value of HR is negative in the case of NVTK, FEES and HYDR. For others the values of optimal HR change from 0.303 to 1.493.

The hedging efficiency measures are presented in Table 2. The unconditional variance of portfolio is slightly different for the DCC and GO-GARCH models.



Table 2

Results on forecast subsample

Model	HE	SR	Var
S-BEKK	41.657	1.588	21.066
DCC	27.679	1.193	16.326
GO-GARCH	22.647	0.881	16.405

Note. HE — hedging efficiency, SR — Sharp ratio, Var — portfolio variance.

Hedging, based on the model with spatial effects (S-BEKK), allows to reduce portfolio risk to 21% from an initial value of 68% for non-hedged portfolio.

The S-BEKK model turns out to be the most effective and allows to achieve the greatest financial result — 42% and shows the highest value of Sharp Ratio — 1.588 (considering the risk free ratio — 8.2%<sup>1</sup>).

## CONCLUSION

In this study we incorporate spatial dependencies between assets into hedging strategy. To calculate the economic distance we apply the difference between assets' trade volumes as a measure of economic proximity. The obtained hedge ratios are time-variant and calculated for such volatility models as DCC, GO-GARCH and S-BEKK GARCH. Therefore, the consideration of spatial effects in the S-BEKK model allows to increase the hedging efficiency to 42% and decrease risk to 21%.

The current research can be continued in several directions. First, portfolio can be supplemented by assets in other countries. Secondly, the financial indicator which is used for weight matrices computation can be changed to achieve better results in the estimation of volatility.

We believe that the results obtained in the paper could provide important implications for portfolio and risk management practitioners.

## References

1. Cotter J., Hanly J. A utility based approach to energy hedging. *Energy Economics*, 2012, vol. 34, iss. 3, pp. 817–827.
2. Shrestha K., Subramaniam R., Peranginangin Y. Quantile hedge ratio for energy markets. *Energy Economics*, 2018, vol. 71, iss. 3, pp. 253–272.
3. Ederington L. The hedging performance of the new futures markets. *The Journal of Finance*, 1979, vol. 34, iss. 1, pp. 157–170.
4. Mohamed El Hedi Arouri, Jamel Jouini, Duc Khuong Nguyen. On the impacts of oil price fluctuations on European equity markets: Volatility spillover and hedging effectiveness. *Energy Economics*, 2012, vol. 34, no. 2, iss. 2, pp. 611–617. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.eneco.2011.08.009>
5. Khalfaoui R., Boutahar M., Boubaker H. Analyzing volatility spillovers and hedging between oil and stock markets: Evidence from wavelet analysis. *Energy Economics*, 2015, vol. 49, iss. C, pp. 540–549.
6. Billio M., Casarin R., Osuntuyi A. Markov switching GARCH models for Bayesian hedging on energy futures markets. *Energy Economics*, 2018, vol. 70, iss. C, pp. 545–562.
7. Olson E., Vivian A. J., Wohar M. E. The relationship between energy and equity markets: Evidence from volatility impulse response functions. *Energy Economics*, 2014, vol. 43, iss. C, pp. 297–305.
8. Wang Y., Liu L. Crude oil and world stock markets: volatility spillovers, dynamic correlations, and hedging. *Empirical Economics*, 2016, vol. 50, iss. 4, pp. 1481–1509.

<sup>1</sup>As a risk free rate we take the return of 20-year Russian federal loan bonds



9. Walid Mensi, Shawkat Hammoudeh, Sang Hoon Kang. Risk spillovers and portfolio management between developed and BRICS stock markets. *The North American Journal of Economics and Finance*, 2017, vol. 41, pp. 133–155. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.najef.2017.03.006>
10. Ghoddsi H., Emamzadehfard S. Optimal hedging in the US natural gas market: The effect of maturity and cointegration. *Energy Economics*, 2017, vol. 63, iss. C, pp. 92–105.
11. Arnold M., Stahlberg S., Wied D. Modeling different kinds of spatial dependence in stock returns. *Empirical Economics*, 2013, vol. 44, iss. 2, pp. 761–774.
12. Fernández-Avilés G., Montero J., Orlov A. Spatial modeling of stock market comovements. *Finance Research Letters*, 2012, vol. 9, iss. 4, pp. 202–212.
13. Huaying Gu, Zhixue Liu, Yingliang Weng. Time-varying correlations in global real estate markets: A multivariate GARCH with spatial effects approach. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2017, vol. 471, pp. 460–472. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2016.12.056>
14. Anatolyev S., Khrapov S. *Do spatial structures yield better volatility forecasts?* 2016. Available at: [https://editorialexpress.com/cgi-bin/conference/download.cgi?db\\_name=EAAESEM2016&paper\\_id=1191](https://editorialexpress.com/cgi-bin/conference/download.cgi?db_name=EAAESEM2016&paper_id=1191) (accessed 18 May 2018).
15. Chen X., Tian Y. Impact Effects and Spatial Volatility Spillover Effects of Sovereign Credit Rating Downgrades-Empirical Analysis of Multivariate Spatial-BEKK-GARCH Model Based on Symbolic Transfer Entropy. *Boletín Técnico*, 2017, vol. 55, no. 9, pp. 614–623.
16. Fernández V. Multi-period hedge ratios for a multi-asset portfolio when accounting for returns comovement. *The Journal of Futures Markets*, 2008, vol. 28, iss. 2, pp. 182–207.
17. Massimiliano Caporin, Paolo Paruolo. Proximity-Structured Multivariate Volatility Models. *Econometric Reviews*, 2015, vol. 34, iss. 5, pp. 559–593. DOI: <https://doi.org/10.1080/07474938.2013.807102>
18. Luc Bauwens, Sébastien Laurent, Jeroen V. K. Rombouts. Multivariate GARCH models: a survey. *Journal of Applied Econometrics*, 2006, vol. 21, iss. 1, pp. 79–109. DOI: <https://doi.org/10.1002/jae.842>
19. Borovkova S. A., Lopuhaa Rik. Spatial GARCH: A Spatial Approach to Multivariate Volatility Modeling. *Econometric Reviews*, 2015, vol. 34, iss. 5, pp. 559–593. DOI: <https://doi.org/10.1080/07474938.2013.807102>
20. Robert F. Engle, Kenneth F. Kroner. Multivariate Simultaneous Generalized ARCH. *Econometric Theory*, 1995, vol. 11, iss. 1, pp. 122–150. DOI: <https://doi.org/10.1017/s0266466600009063>
21. Engle R. Dynamic Conditional Correlation. *Journal of Business & Economic Statistics*, 2002, vol. 20, no. 3, iss. 3, pp. 339–350. DOI: <https://doi.org/10.1198/073500102288618487>
22. van der Weide R. GO-GARCH: a multivariate generalized orthogonal GARCH model. *Journal of Applied Econometrics*, 2002, vol. 17, iss. 5, pp. 549–564. DOI: <https://doi.org/10.1002/jae.688>
23. Cont R. Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 2001, vol. 1, iss. 2, pp. 223–236.
24. Bessembinder H., Seguin Paul J. Price Volatility, Trading Volume, and Market Depth: Evidence from Futures Markets. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1993, vol. 28, iss. 1, pp. 21–39.



**Appendix**

*Table A1*

Descriptive statistics of spot assets' return

Statistic	Mean	St. Dev.	Min	Q(25)	Median	Q(75)	Max
LKOH	0.055	1.564	-10.280	-0.820	0.048	0.911	9.240
GAZP	-0.019	1.641	-14.959	-0.927	-0.083	0.907	7.620
NVTK	0.058	1.945	-17.038	-0.981	0.024	1.054	9.363
ROSN	0.032	1.681	-8.054	-0.945	0.000	1.004	7.059
SNGS	0.003	1.785	-10.911	-0.935	0.000	0.926	8.750
TATN	0.086	2.165	-9.244	-1.163	0.052	1.299	11.730
FEES	-0.041	2.806	-24.655	-1.321	-0.050	1.211	15.551
HYDR	-0.040	2.140	-9.932	-1.178	-0.058	1.068	12.467

Note. Q(25) and Q(75) – 25%th and 75%th quantiles respectively. The rest designations are self-explanatory.

*Table A2*

Mean value of weight matrix, x100

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0.00	7.25	7.22	7.23	7.25	7.23	7.19	7.19	7.20	7.20	6.72	7.19	6.95	6.95	6.86	0.38
2	7.25	0.00	7.22	7.23	7.25	7.24	7.19	7.20	7.20	7.21	6.71	7.19	6.94	6.94	6.86	0.38
3	7.24	7.24	0.00	7.21	7.25	7.23	7.19	7.17	7.19	7.17	6.73	7.17	6.94	6.96	6.87	0.43
4	7.25	7.25	7.21	0.00	7.24	7.24	7.18	7.19	7.19	7.18	6.72	7.20	6.93	6.95	6.86	0.40
5	7.25	7.26	7.23	7.24	0.00	7.24	7.19	7.18	7.19	7.20	6.70	7.19	6.94	6.94	6.86	0.39
6	7.25	7.26	7.23	7.24	7.24	0.00	7.16	7.18	7.18	7.19	6.73	7.18	6.94	6.98	6.85	0.39
7	7.23	7.23	7.20	7.22	7.22	7.20	0.00	7.19	7.19	7.18	6.72	7.18	6.92	6.97	6.91	0.43
8	7.23	7.23	7.19	7.20	7.21	7.20	7.20	0.00	7.20	7.19	6.74	7.20	6.98	6.96	6.90	0.38
9	7.22	7.21	7.18	7.19	7.19	7.19	7.17	7.17	0.00	7.24	6.76	7.25	6.99	6.98	6.88	0.37
10	7.21	7.23	7.18	7.19	7.21	7.20	7.18	7.18	7.23	0.00	6.73	7.25	6.96	6.98	6.88	0.39
11	6.92	6.85	6.99	6.94	6.84	6.90	6.86	6.88	6.89	6.87	0.00	6.92	6.91	6.87	7.02	3.36
12	7.21	7.21	7.17	7.20	7.19	7.19	7.16	7.17	7.25	7.28	6.74	0.00	6.96	7.00	6.89	0.40
13	7.06	7.03	7.05	7.03	7.10	7.05	7.02	7.02	7.07	7.06	6.72	7.08	0.00	7.20	6.92	1.59
14	7.06	7.04	7.05	7.04	7.03	7.14	7.11	7.04	7.10	7.08	6.81	7.14	6.99	0.00	6.97	1.40
15	6.96	6.96	7.00	6.97	6.96	6.97	7.12	7.03	7.04	6.99	7.01	7.02	6.96	6.92	0.00	2.10
16	4.17	4.11	5.12	4.77	4.49	4.91	5.45	7.35	4.45	4.06	15.1	4.53	11.5	10.0	10.0	0.00

Note. (1)–(8) and (9)–(16) are spot and futures tickers respectively as listed in Table 1.

*Table A3*

Statistics for optimal hedge ratio

Model	S-BEKK			DCC			GO-GARCH		
	max	min	mean	max	min	mean	max	min	mean
LKOH	2.423	0.548	1.544	1.060	0.841	0.870	0.865	0.303	0.852
GAZP	2.645	0.250	1.799	0.978	0.874	0.876	0.892	0.679	0.692
NVTK	1.078	-0.940	0.300	1.214	1.113	1.210	1.104	1.052	1.102
ROSN	2.482	0.199	0.961	0.882	0.691	0.705	1.219	1.103	1.110
SNGS	0.906	-0.667	0.161	0.527	0.366	0.400	0.620	0.552	0.558
TATN	2.678	0.155	1.286	1.493	1.178	1.231	1.188	1.171	1.172
FEES	1.479	-0.392	0.731	1.040	0.703	0.724	0.974	0.810	0.822
HYDR	2.470	-0.278	0.949	0.883	0.870	0.874	1.048	0.822	0.861

Note. Max, min and mean correspond to maximum, minimum and mean values of optimal hedge ratio.





---

**Cite this article as:**

Karatetskaia E. Yu., Lakshina V. V. Multiple Hedging on Energy Market. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 1, pp. 105–113. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-105-113>

---

УДК 519.25

## **Многократное хеджирование на энергетическом рынке**

**Е. Ю. Каратецкая, В. В. Лакшина**

Каратецкая Ефросиния Юрьевна, студент, сотрудник Института статистических исследований и экономики знаний, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия, 101000, Москва, ул. Мясницкая, д. 11, [ekarateczkaya@hse.ru](mailto:ekarateczkaya@hse.ru)

Лакшина Валерия Владимировна, старший преподаватель кафедры математической экономики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия, 603093, Нижний Новгород, ул. Родионова, д. 136, [vlakshina@hse.ru](mailto:vlakshina@hse.ru)

Статья посвящена расчету динамического коэффициента хеджирования на основании трех многомерных моделей волатильности, среди которых модель на S-BEKK-GARCH, построенная с учетом кросс-секционных зависимостей между активами. Стратегия хеджирования рассчитана для 8 пар «актив-фьючерс» энергетического рынка России.

*Ключевые слова:* многомерные модели волатильности, пространственные спецификации, динамический коэффициент хеджирования, энергетический рынок.

Поступила в редакцию: 14.08.2018 / Принята: 01.10.2018 / Опубликовано онлайн: 28.02.2019

---

**Образец для цитирования:**

*Karatetskaia E. Yu., Lakshina V. V. Multiple Hedging on Energy Market [Каратецкая Е. Ю., Лакшина В. В. Многократное хеджирование на энергетическом рынке] // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 1. С. 105–113. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-105-113>*

---



УДК 519.7

## О протоколах аутентификации с нулевым разглашением знания

С. М. Рацеев, М. А. Ростов

Рацеев Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, Россия, 432017, Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42, ratseevsm@mail.ru

Ростов Михаил Александрович, студент кафедры информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, Россия, 432017, Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42

В работе приводится сравнительный анализ производительности протокола аутентификации Шнорра и протокола аутентификации на основе задачи о нахождении гамильтонова цикла в графе. Показано, что с применением технологии CUDA производительность протоколов на графах не уступает производительности протокола Шнорра. Важность такого исследования заключается в том, что протоколы на графах (протокол аутентификации на основе доказательства изоморфизма графов, протокол аутентификации на основе задачи о нахождении гамильтонова цикла в графе и т. д.) обладают свойством нулевого разглашения знания. Данные протоколы основаны на  $NP$ -полных задачах, поэтому являются независимыми от квантовых вычислений, а именно устойчивы к квантовым атакам. Также в работе приводятся модифицированные алгоритмы двухшаговых протоколов аутентификации на основе асимметричных шифров с использованием эллиптических кривых.

*Ключевые слова:* протокол аутентификации, нулевое разглашение, эллиптическая кривая, технология CUDA.

Поступила в редакцию: 24.05.2018 / Принята: 18.12.2018 / Опубликовано онлайн: 28.02.2019

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-114-121>

### ВВЕДЕНИЕ

Протоколы аутентификации разделяют на следующие классы: протоколы, основанные на паролях (слабая аутентификация); протоколы, использующие технику «запрос-ответ» (сильная аутентификация); протоколы, основанные на технике доказательства знания; протоколы аутентификации, основанные на протоколах доказательства знания с нулевым разглашением.

В парольных схемах нарушитель может запомнить передаваемые сообщения и в следующий раз использовать эту информацию. В протоколах типа «запрос-ответ» нарушитель, контролируя канал связи, может навязывать специально подобранные запросы и, анализируя ответы, получить информацию о секрете. Чтобы избежать этого, применяют протоколы доказательства знания (некоторой секретной информации), которые обладают дополнительным свойством нулевого разглашения секрета. Более подробную информацию о данных протоколах можно найти, например, в работах [1, 2].

Хорошо известный протокол аутентификации Шнорра [3] основан на трудной задаче дискретного логарифмирования. В ходе выполнения данного протокола не происходит никакой (дополнительной) утечки информации о секретном ключе. Существуют также протоколы аутентификации на основе техники доказательств знания, построенных на основе  $NP$ -полных задач. Такими протоколами, в частности,



являются протокол аутентификации на основе доказательства изоморфизма графов, протокол аутентификации на основе задачи о нахождении гамильтонова цикла в графе и т.д. Эти протоколы основаны на  $NP$ -полных задачах и поэтому являются независимыми от квантовых вычислений.

Целью данной работы является попытка ускорения протоколов аутентификации с использованием графов на основе применения технологии CUDA (Compute Unified Device Architecture), в результате чего будет показано, что данные протоколы не уступают в скорости некоторым протоколам аутентификации на примере протокола Шнорра. В качестве испытуемых берутся протокол аутентификации Шнорра и протокол аутентификации на основе задачи о нахождении гамильтонова цикла в графе.

Также в данной работе исследуются протоколы аутентификации на основе асимметричных шифров. Преимущество таких протоколов в том, что они являются двухшаговыми. В данной работе приводятся некоторые протоколы аутентификации на основе асимметричных шифров с использованием эллиптических кривых. Сам принцип функционирования криптосистем на эллиптических кривых подробно изложен в [4]. Безопасность криптосистем на эллиптических кривых ECC (Elliptic Curve Cryptography), как правило, основана на трудности решения задачи дискретного логарифмирования в группе точек эллиптической кривой [4]. Исследования показывают, что в классе криптосистем с открытым ключом криптосистемы на эллиптических кривых превосходят классические криптосистемы на основе модулярной арифметики как минимум по двум важным параметрам: степени защищенности в расчете на каждый бит ключа и быстрдействию при аппаратной и программной реализации. Наглядно это демонстрируется в работе [5].

## 1 . ПРОТОКОЛ АУТЕНТИФИКАЦИИ ШНОРРА

Протокол аутентификации Шнорра [3] основан на трудной задаче дискретного логарифмирования. Пусть  $p$  — простое число,  $q$  — простой делитель числа  $p - 1$ ,  $g \in \mathbb{Z}_p$ , имеющий порядок  $q$ . Абонент  $A$  выбирает случайное число  $x$ , для которого выполнено  $1 \leq x \leq q - 1$ , и вычисляет значение открытого ключа  $y = g^{-x} \pmod{p}$ .

Число  $x$  — секретный ключ, элементы  $p, q, g, y$  — открытые параметры протокола. Протокол аутентификации Шнорра имеет следующий вид:

- 1) доказывающий  $A$  генерирует случайное целое число  $k$ , где  $1 \leq k \leq q - 1$ , вычисляет  $r = g^k \pmod{p}$  и отправляет проверяющему  $B$  значение  $r$ ;
- 2) проверяющий  $B$  генерирует случайный число  $a$  из диапазона от 0 до  $2^t - 1$ , которое передает абоненту  $A$ ;
- 3) абонент  $A$  вычисляет и передает проверяющему  $B$  значение  $s = k + ax \pmod{q}$ ;
- 4) проверяющий  $B$  проверяет выполнение сравнения  $r \equiv g^s y^a \pmod{p}$ . Если оно выполнено, то доказательство принимается, в противном случае — отвергается.

## 2 . ИТЕРАТИВНЫЙ И ТРЕХШАГОВЫЙ ПРОТОКОЛЫ АУТЕНТИФИКАЦИИ НА ОСНОВЕ ЗАДАЧИ О НАХОЖДЕНИИ ГАМИЛЬТОНОВА ЦИКЛА В ГРАФЕ

Гамильтоновым циклом в графе называется непрерывный путь, проходящий через все вершины графа ровно по одному разу. Понятно, что если в графе  $n$  вершин (занумерованных числами  $1, 2, \dots, n$ ) и в нем имеется гамильтонов цикл, то путем перебора всех перестановок симметрической группы  $S_n$  мы найдем гамильтонов цикл  $(\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(n))$  для некоторой перестановки  $\tau \in S_n$ . Так как  $|S_n| = n!$ , то



уже при сравнительно небольших значениях  $n$  такой подход становится практически нереализуемым. Доказано, что задача нахождения гамильтонова цикла в графе является  $NP$ -полной (для ее решения неизвестны алгоритмы, существенно более быстрые, чем метод перебора).

Рассмотрим протокол, в котором абонент  $A$  будет доказывать абоненту  $B$ , что он знает гамильтонов цикл в некотором графе  $G$  так, чтобы абонент  $B$  не получил никаких знаний об этом цикле (доказательство с нулевым разглашением). Пусть абонент  $A$  знает гамильтонов цикл в графе  $G$  из  $n$  вершин, который передал ему доверенный центр. Он может это доказывать абоненту  $B$  (и всем, кто имеет этот граф) с помощью описываемого ниже протокола.

Протокол доказательства состоит из следующих шагов:

- 1) абонент  $A$  случайно выбирает перестановку  $\sigma \in S_n$  и применяет ее к номерам вершин графа  $G$ , получив при этом граф  $H = \sigma(G)$ . Понятно, что графы  $G$  и  $H$  изоморфны. Зная гамильтонов цикл в графе  $G$ , абонент  $A$  знает гамильтонов цикл и в графе  $H$ . Граф  $H$  передается проверяющему  $B$ ;
- 2) абонент  $B$ , получив граф  $H$ , случайным образом выбирает  $a \in \{0, 1\}$  и передает  $a$  абоненту  $A$ ;
- 3) если  $a = 0$ , то абонент  $A$  предоставляет абоненту  $B$  перестановку  $\sigma$  (тем самым показывая, что он знает изоморфизм графов  $G$  и  $H$ ). Если  $a = 1$ , то абонент  $A$  предоставляет проверяющему  $B$  гамильтонов цикл графа  $H$ ;
- 4) проверяющий  $B$  проверяет, что в случае  $a = 0$  предъявленная перестановка  $\sigma$  действительно переводит граф  $G$  в граф  $H$ , а в случае  $a = 1$  проверяет гамильтонов цикл графа  $H$ .

Эти четыре шага повторяются независимо  $t$  раз. Трехшаговый протокол для предыдущего случая примет следующий вид:

- 1) абонент  $A$  случайно выбирает перестановки  $\sigma_i \in S_n$  и применяет их к номерам вершин графа  $G$ , получив при этом графы  $H_i = \sigma_i(G)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , которые передаются абоненту  $B$ ;
- 2) проверяющий  $B$  генерирует случайную битовую строку  $(a_1, \dots, a_m) \in \{0, 1\}^m$  и передает ее абоненту  $A$ ;
- 3) при  $a_i = 0$  абонент  $A$  фиксирует перестановку  $\sigma_i$ , при  $a_i = 1$  — перестановку, являющуюся гамильтоновым циклом графа  $H_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Данные перестановки передаются абоненту  $B$ ;
- 4) абонент  $B$  проверяет, что в случае  $a_i = 0$  предъявленная перестановка  $\sigma_i$  действительно переводит граф  $G$  в граф  $H_i$ , а в случае  $a_i = 1$  проверяет гамильтонов цикл графа  $H_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

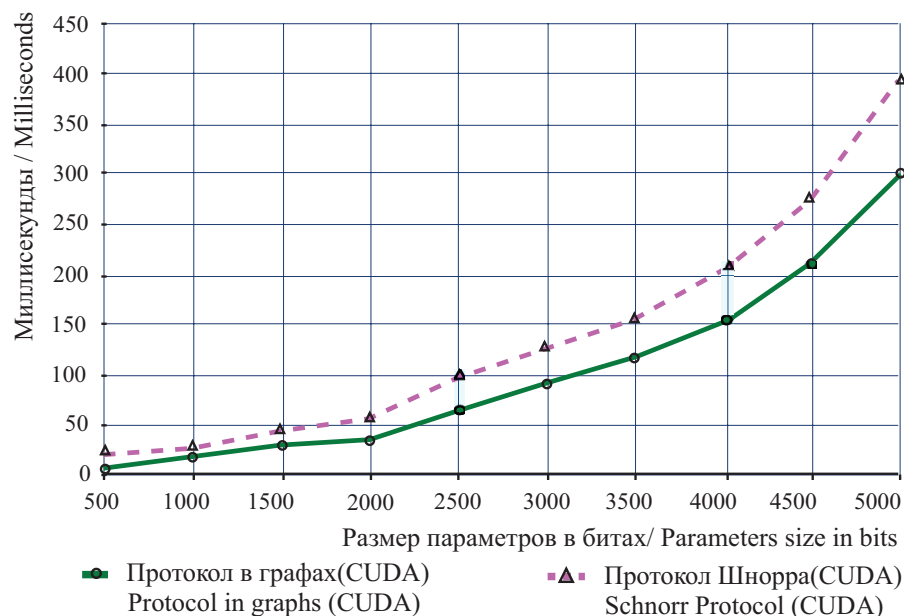
Приведенный выше протокол аутентификации на основе задачи о нахождении гамильтонова цикла в графе был реализован вторым автором на следующих широко используемых языках программирования: Java, C, C#, PHP. В работе [6] показано, что асимптотически хорошие скорости выполнения протокола показывают языки C и Java. Также для данного протокола в рамках исследования применялась технология CUDA. В работе [6] показано, что технология CUDA имеет очень высокую скорость выполнения по сравнению с самой быстрой реализацией на языке C.



### 3. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРОТОКОЛА ШНОРРА И ТРЕХШАГОВОГО ПРОТОКОЛА НА ОСНОВЕ ЗАДАЧИ О НАХОЖДЕНИИ ГАМИЛЬТОНОВА ЦИКЛА В ГРАФЕ

Хорошо известно, что на современном этапе развития информационных технологий одним из основных факторов увеличения вычислительной мощности является использование графических процессоров. Одними из наиболее эффективно используемых графических процессоров (GPU — graphics processing unit) для выполнения общих вычислений являются видеоускорители компании nVidia с архитектурой CUDA (Compute Unified Device Architecture). Вычислительные задачи, реализованные на CUDA, получают значительное ускорение в таких областях, как молекулярная динамика [7, 8], астрофизика [9], медицинская диагностика [10] и т. д.

На рисунке приведены графики зависимости времени выполнения трехшаговых протоколов (протокола Шнорра и протокола на основе задачи о нахождении гамильтонова цикла в графе при  $m = 12$ ) от размера параметров в битах. Оба протокола реализованы с использованием технологии CUDA. При этом для первого протокола учитывается количество значащих бит двоичного представления простого числа  $p$ , для второго протокола — количество значащих бит двоичного представления числа  $n!$ , где  $n$  — число вершин графа  $G$ .



Графики зависимости времени выполнения (в миллисекундах) трехшаговых протоколов от размера параметров в битах  
 Graphs of execution time (in milliseconds) of three-step protocols on the size of the parameters in bits

На данном рисунке видно, что применение технологии CUDA значительно улучшает производительность протоколов аутентификации на основе графов (для протокола аутентификации на основе доказательства изоморфизма графов ситуация аналогична). Более того, протоколы на основе графов с применением технологии CUDA имеют более высокую производительность нежели протокол Шнорра. И эта разница в производительности становится все более заметна с ростом числа вершин графа. Высокая производительность вычислений протоколов на графах достигается за счет более удобного взаимодействия с блоками памяти в графическом процессоре, так как матричные вычисления наиболее оптимизированы для такого рода расчетов.



Тесты проводились на ПК со следующими характеристиками: ОС Windows 10, GPU GeForce GTX 1050 2 Gb, ОЗУ DDR3 8 Gb, CPU Intel Core i5 3,2 GHz.

#### 4. ПРОТОКОЛЫ АУТЕНТИФИКАЦИИ НА ОСНОВЕ АСИММЕТРИЧНЫХ ШИФРОВ

Построение протоколов с нулевым разглашением можно реализовать, используя известные алгоритмы открытого шифрования. В качестве секретной информации, которой владеет доказывающая сторона  $A$ , будет использоваться секретный ключ  $x$  асимметричного шифра. Пусть  $D_x$  — алгоритм расшифрования на секретном ключе  $x$ ,  $E_y$  — алгоритм шифрования на открытом ключе  $y$ . Проверяющая сторона шифрует некоторое сообщение  $M$  на открытом ключе  $y$  и передает криптограмму  $C = E_y(M)$  абоненту  $A$ . Абонент  $A$  демонстрирует владение секретной информацией  $x$  тем, что расшифровывает сообщение своим секретным ключом:  $M = D_x(C)$  и передает сообщение  $M$  проверяющей стороне  $B$ . Для проверяющей стороны  $B$  это не несет никакой дополнительной информации о секретном ключе  $x$ , так как у  $B$  до этого было то же самое сообщение  $M$ . При этом при построении протоколов с нулевым разглашением знания нужен некоторый механизм, который позволит владельцу секретного ключа (доказывающему  $A$ ) до передачи восстановленного сообщения  $M$  проверяющему  $B$  убедиться в том, что последнее уже известно проверяющему  $B$ .

В качестве такого механизма могут использоваться алгоритмы хеширования (хеш-функции). Данный механизм используется в протоколах с нулевым разглашением, описанных в стандарте [11].

В стандарте [11] регламентируется формирование запроса в виде пары значений  $(C, H)$ , где  $C$  — шифртекст, полученный путем шифрования некоторого сообщения  $M$  по открытому ключу доказывающего  $A$  и  $H$  — значение хеш-функции, вычисленное от сообщения  $M$  с использованием некоторой специфицированной хеш-функции  $h$ :  $H = h(M)$ . Получая запрос  $(C, H)$ , доказывающий имеет возможность убедиться в том, что восстановленное им из шифртекста  $C$  сообщение  $M$  известно проверяющему. Для этого достаточно вычислить значение хеш-функции от восстановленного сообщения и сравнить его со значением второго элемента запроса.

В соответствии с [11] двухшаговый протокол с нулевым разглашением знания включает следующие шаги:

- 1) проверяющий  $B$  выбирает произвольное сообщение  $M$  и, используя специфицированный алгоритм открытого шифрования  $E_y$  и открытый ключ  $y$  доказывающего, зашифровывает сообщение:  $C = E_y(M)$ . Затем, используя специфицированную хеш-функцию  $h$ , вычисляет значение хеш-функции от  $M$ :  $H = h(M)$ . После этого он отправляет доказывающему  $A$  пару значений  $(C, H)$  в качестве своего запроса;
- 2) доказывающий  $A$  расшифровывает криптограмму  $C$ , используя свой личный секретный ключ  $x$ , в результате чего получает сообщение  $\tilde{M} = D_x(C)$ . Затем он вычисляет значение хеш-функции от  $\tilde{M}$ :  $\tilde{H} = h(\tilde{M})$ , сравнивает значения  $\tilde{H}$  и  $H$  и если  $\tilde{H} = H$ , то отправляет проверяющему значение  $\tilde{M}$  в качестве своего ответа;
- 3) если выполнено равенство  $\tilde{M} = M$ , то проверяющий  $B$  принимает доказательство; если равенство не выполнено, то отвергает.

**Протокол аутентификации на основе шифра Эль-Гамала с использованием эллиптических кривых.** Пусть  $q$  — некоторый (достаточно большой) простой делитель числа  $|E|$ , где  $E$  — эллиптическая кривая, и некоторая точка  $G \in E$  имеет порядок  $q$ .



Общедоступные параметры системы:  $q, G, E$ . Абонент  $A$  выбирает секретный ключ  $x, 0 < x < q$ , и вычисляет открытый ключ  $Y = [x]G$ . Протокол аутентификации имеет следующий вид:

- 1) проверяющий  $B$  генерирует случайную точку  $M = [r]G \in E$  для некоторого случайного  $r, 0 < r < q$ , генерирует случайным образом некоторое число  $k, 0 < k < q$ , вычисляет точки эллиптической кривой

$$C_1 = [k]G, \quad C_2 = M + [k]Y,$$

вычисляет  $H = h(M)$  и отправляет доказывающему  $A$  тройку значений  $(C_1, C_2, H)$ ;

- 2) доказывающий  $A$  вычисляет  $\tilde{M} = C_2 + [q - x]C_1, \tilde{H} = h(\tilde{M})$ . Если  $\tilde{H} = H$ , то отправляет проверяющему значение  $\tilde{M}$  в качестве своего ответа.
- 3) после этого проверяющий  $B$  проверяет равенство  $\tilde{M} = M$ .

**Протокол аутентификации на основе схемы Диффи – Хеллмана с использованием эллиптических кривых.** Пусть  $q$  – некоторый (достаточно большой) простой делитель числа  $|E|$ , где  $E$  – эллиптическая кривая. Пусть некоторая точка  $G \in E$  имеет порядок  $q$ . Абонент  $A$  выбирает случайное число (секретный ключ)  $x, 1 \leq x \leq q - 1$ , и вычисляет значение открытого ключа  $Y = [x]G$ . Протокол аутентификации имеет следующий вид:

- 1) проверяющий  $B$  генерирует случайное число  $k, 1 < k < q - 1$ , вычисляет точки эллиптической кривой  $E$  и соответствующее значение хеш-функции:

$$C = [k]G, \quad Z = [k]Y, \quad H = h(Z)$$

и отправляет доказывающему  $A$  пару значений  $(C, H)$ ;

- 2) доказывающий  $A$  вычисляет  $\tilde{Z} = [x]C, \tilde{H} = h(\tilde{Z})$ . Если  $\tilde{H} = H$ , то отправляет проверяющему точку эллиптической кривой  $\tilde{Z}$  в качестве своего ответа;
- 3) после этого проверяющий  $B$  проверяет равенство  $\tilde{Z} = Z$ .

В работе [2] предложен подход к синтезу двухшаговых протоколов с нулевым разглашением секрета, основанных на асимметричных шифрах, отличающийся использованием меток, встраиваемых в шифруемое сообщение. Для данных алгоритмов также можно применить эллиптические кривые, как и в протоколах, рассмотренных выше.

### Библиографический список

1. Черемушкин А. В. Криптографические протоколы. Основные свойства и уязвимости. М. : ИЦ «Академия», 2009. 272 с.
2. Молдовян А. А., Молдовян Д. Н., Левина А. Б. Протоколы аутентификации с нулевым разглашением секрета. СПб. : Университет ИТМО, 2016. 55 с.
3. Schnorr C. P. Efficient Identification and Signatures for Smart Cards // Advances in Cryptology – CRYPTO'89. Proceedings. CRYPTO 1989. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 435. N. Y. : Springer, 1990. P. 239–252. DOI: [https://doi.org/10.1007/0-387-34805-0\\_22](https://doi.org/10.1007/0-387-34805-0_22)
4. Hankerson D., Menezes A., Vanstone S. Guide to Elliptic Curve Cryptography. N. Y. : Springer-Verlag, 2004. 358 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/b97644>



5. An Elliptic Curve Cryptography (ECC) Primer: why ECC is the next generation of public key cryptography. The Certicom Corp. 'Catch the Curve' White Paper Series, June 2004. 24 p. URL: <https://www.certicom.com/content/dam/certicom/images/pdfs/WP-ECCprimer.pdf> (дата обращения: 05.09.2018).
6. Рацеев С. М., Ростов М. А. Методы ускорения и усовершенствования протокола аутентификации с нулевым разглашением на основе задачи о нахождении гамильтонова цикла в графе // Научные ведомости БелГУ. Экономика. Информатика. 2017. № 16(265), вып. 43. С. 131–137.
7. Stone J. E., Phillips J. C., Freddolino P. L., Hardy D. J., Trabuco L. G., Schulten K. Accelerating molecular modeling applications with graphics processors // J. Comput. Chem. 2007. Vol. 28, № 16. P. 2618–2640. DOI: <https://doi.org/10.1002/jcc.20829>
8. Van Meel J. A., Arnold A., Frenkel D., Zwart S. P., Belleman R. Harvesting graphics power for MD simulations // Molecular Simulation. 2008. Vol. 34, № 3. P. 259–266. DOI: <https://doi.org/10.1080/08927020701744295>
9. Harris C., Haines K., Staveley-Smith L. GPU accelerated radio astronomy signal convolution // Exp. Astron. 2008. Vol. 22, iss. 1–2. P. 129–141. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10686-008-9114-9>
10. Muyan-Ozcelik P., Owens J. D., Xia J., Samant S. S. Fast deformable registration on the GPU: A CUDA implementation of demons // Proc. Int. Conf. Computational Science and its Applications. Perugia, Italy, 2008. P. 223–233. DOI: <https://doi.org/10.1109/ICCSA.2008.22>
11. ISO/IEC 9798-5:2009(E) «Information technology – Security techniques – Entity authentication – Part 5: Mechanisms using zero-knowledge technique». URL: <https://www.iso.org/standard/50456.html> (дата обращения: 05.09.2018).

---

**Образец для цитирования:**

Рацеев С. М., Ростов М. А. О протоколах аутентификации с нулевым разглашением знания // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 1. С. 114–121. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-114-121>

---

## Zero-Knowledge Proof Authentication Protocols

S. M. Ratseev, M. A. Rostov

Sergey M. Ratseev, <http://orcid.org/0000-0003-4995-9418>, Ulyanovsk State University, 42 L. Tolstoy St., 432017 Ulyanovsk, Russia, [ratseevsm@mail.ru](mailto:ratseevsm@mail.ru)

Mihail A. Rostov, Ulyanovsk State University, 42 L. Tolstoy St., 432017 Ulyanovsk, Russia

The paper presented the comparative analysis of the authentication Shnorr's protocol and the authentication protocol based on the task of finding a Hamilton cycle in the graph. It is shown that with the use of CUDA technology the productivity of protocols on graphs is as high as Shnorr's protocol productivity. The importance of such research is that protocols on graphs (the authentication protocol on the basis of the proof of graph isomorphism, the authentication protocol based on the task of finding a Hamilton cycle in the graph, etc.) have the property of zero-knowledge proof. These protocols are based on  $NP$  complete tasks therefore they are independent of quantum computings, namely, are resistant to the quantum attacks. Also the modified algorithms of two-step authentication protocols with zero-knowledge proof based on asymmetric ciphers with the use of elliptic curves are also given.

**Keywords:** authentication protocol, zero-knowledge proof, elliptic curve, CUDA technology.

Received: 24.05.2018 / Accepted: 18.12.2018 / Published online: 28.02.2019





## References

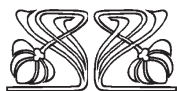
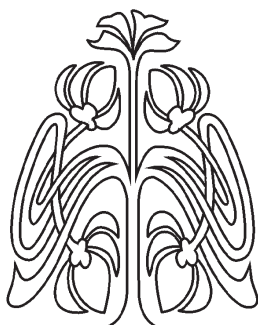
1. Cheremushkin A. V. *Kriptograficheskie protokoly. Osnovnye svoistva i uyazvimosti* [Cryptographic Protocols. Basic Properties and Vulnerability]. Moscow, IC "Akademiya", 2009. 272 p. (in Russian).
2. Moldovyan A. A., Moldovyan D. N., Levina A. B. *Protokoly autentifikatsii s nulevym razglasheniem sekreta* [Authentication protocols with zero-knowledge proof]. St. Petersburg, ITMO Univ., 2016. 55 p. (in Russian).
3. Schnorr C. P. Efficient Identification and Signatures for Smart Cards. *Advances in Cryptology – CRYPTO'89. Proceedings. CRYPTO 1989. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 435. New York, Springer, 1990, pp. 239–252. DOI: [https://doi.org/10.1007/0-387-34805-0\\_22](https://doi.org/10.1007/0-387-34805-0_22)
4. Hankerson D., Menezes A., Vanstone S. *Guide to Elliptic Curve Cryptography*. New York, Springer-Verlag, 2004. 358 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/b97644>
5. *An Elliptic Curve Cryptography (ECC) Primer: why ECC is the next generation of public key cryptography*, The Certicom Corp. 'Catch the Curve' White Paper Series, June 2004. 24 p. Available at: <https://www.certicom.com/content/dam/certicom/images/pdfs/WP-ECCprimer.pdf> (accessed 05 September 2017).
6. Ratseev S. M., Rostov M. A. Methods of an acceleration and enhancement of the cryptography authentication protocol with zero disclosure of knowledge on the basis of the task about finding of a hamilton cycle in the graph. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Economics. Computer Science*, 2017, no. 16(265), iss. 43, pp. 131–137 (in Russian).
7. Stone J. E., Phillips J. C., Freddolino P. L., Hardy D. J., Trabuco L. G., Schulten K. Accelerating molecular modeling applications with graphics processors. *J. Comput. Chem.*, 2007, vol. 28, no. 16, pp. 2618–2640. DOI: <https://doi.org/10.1002/jcc.20829>
8. Van Meel J. A., Arnold A., Frenkel D., Zwart S. P., Belleman R. Harvesting graphics power for MD simulations. *Molecular Simulation*, 2008, vol. 34, no. 3, pp. 259–266. DOI: [10.1080/08927020701744295](https://doi.org/10.1080/08927020701744295)
9. Harris C., Haines K., Staveley-Smith L. GPU accelerated radio astronomy signal convolution. *Exp. Astron.*, 2008, vol. 22, iss. 1–2, pp. 129–141. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10686-008-9114-9>
10. Muyan-Ozcelik P., Owens J. D., Xia J., Samant S. S. Fast deformable registration on the GPU: A CUDA implementation of demons. In: *Proc. Int. Conf. Computational Science and its Applications*, Perugia, Italy, 2008, pp. 223–233. DOI: <https://doi.org/10.1109/ICCSA.2008.22>
11. ISO/IEC 9798-5:2009(E): *Information technology – Security techniques – Entity authentication – Part 5: Mechanisms using zero-knowledge technique*. Available at: <https://www.iso.org/standard/50456.html> (accessed 05 September 2018).

---

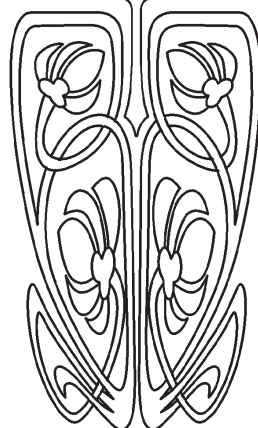
### Cite this article as:

Ratseev S. M., Rostov M. A. Zero-Knowledge Proof Authentication Protocols. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 1, pp. 114–121 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-114-121>

---



**ПОДПИСКА**



**Подписка на II полугодие 2019 года**

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год

Цена свободная

Оформить подписку онлайн можно в интернет-каталоге «Пресса по подписке» ([www.akc.ru](http://www.akc.ru))

**Адрес издательства:**

410012, Саратов, Астраханская, 83

**Тел.:** +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89

**Факс:** +7(845-2) 27-85-29

**E-mail:** [izvestiya@info.sgu.ru](mailto:izvestiya@info.sgu.ru)

**Адрес редколлегии серии:**

410012, Саратов, Астраханская, 83,  
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,  
механико-математический факультет

**Тел./факс:** +7(845-2) 26-15-54

**E-mail:** [mml@info.sgu.ru](mailto:mml@info.sgu.ru)

**Website:** <http://mml.sgu.ru/>