УДК 539.374

МГНОВЕННО-НЕРАСТЯЖИМЫЕ ДИРЕКТОРЫ В КИНЕМАТИКЕ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ СРЕД КУЛОНА – МОРА

Ю. Н. Радаев

Радаев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН, Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Рассматриваются трехмерные течения идеально-пластических сред, подчиняющихся критерию текучести Кулона – Мора. С прикладной точки зрения речь идет о моделировании состояний и достаточно медленных процессов движения сыпучих неплотносвязанных сред. Основой математического моделирования выступает представление об асимптотических директорах симметричного тензора напряжений и приращения (инкремента) тензора деформации, а также об ортогональных им направлениях (ориентированных вдоль мгновенно-нерастяжимых директоров), расположенных в плоскости ортогональной главной оси инкремента тензора деформации, соответствующей промежуточному главному приращению деформации. В асимптотических осях получены канонические диадные представления для тензора напряжений и приращения тензора деформации. Проанализированы уравнения ассоциированного закона течения, которые затем используются при изучении кинематики необратимого течения. Показано, что дилатация оказывается всегда положительной (кроме случая, когда среда Кулона – Мора вырождается в идеально-пластическую среду без внутреннего трения, подчиняющуюся критерию текучести Треска). Установлено, что в процессе течения сред Кулона – Мора материальные волокна, ориентированные вдоль мгновенно-нерастяжимых директоров, мгновенно не удлиняются и не укорачиваются. Получено диадное представление приращения тензора деформации в терминах мгновенно-нерастяжимых директоров.

Ключевые слова: пластичность, текучесть, течение, критерий Кулона – Мора, приращение тензора деформации, ассоциированный закон течения.

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-467-483

1. ВВОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Сыпучие среды состоят из множества отдельных однородных частиц, которые могут взаимодействовать друг с другом. Такие среды способны сопротивляться исключительно сжимающим нормальным напряжениям и не оказывают никакого сопротивления растягивающим. В настоящее время в механике сыпучих сред используются две основные математические модели: сплошная (континуальная) и зернистая (дискретная). Во втором случае среда считается состоящей из соприкасающихся твердых зерен правильной формы, например, сферической или многогранной и обычно называется гранулированной средой. В первом случае, сыпучие среды (их состояния и течения) прекрасно моделируются однородной изотропной сплошной средой и характеризуются подвижностью составляющих их частиц, способностью в известных пределах сохранять свою форму, отсутствием сопротивления растяжению, а также зависимостью сдвиговых напряжений от нормальных сжимающих напряжений. Среда Кулона – Мора, характеризующаяся взаимным трением элементов, традиционно рассматривается как важнейшее обобщение модели идеально-пластического поведения сплошных деформируемых сред.

В настоящей работе предложена континуальная схема моделирования сжимаемых течений сред Кулона – Мора, а также обобщенных пластических тел Прандтля, основанная на представлении об асимптотических направлениях тензора напряжений и приращения тензора деформации; т.е. будет использоваться представление о сыпучей среде как об изотропном континууме, элементы которого подвергаются воздействию сил внутреннего трения и сцепления. По этой причине при исследовании ее напряженного состояния естественно также воспользоваться понятием о непрерывно распределенных на двумерных элементах внутренних силах и классической концепцией напряжений. Следовательно, можно вести речь о нормальном и касательном напряжениях, действующих на данной двумерной элементарной площадке. В механике сыпучих сред, так же как и в теории идеально-пластического тела, для анализа напряженного состояния широко применяются графические построения. Наиболее известными из них следует признать круговые графики напряжений, так называемые круги Мора (см., например, [1]).

При моделировании механического поведения деформируемых сред механика континуума должна учитывать возможные функциональные или дифференциальные связи, ограничивающие деформации и напряжения. Такие связи существенно влияют на аналитические представления деформации, передающиеся через двумерные плоские элементы силовых воздействий (внутренних напряжений). Весьма показательной в этом смысле является модель идеально-пластического тела [2–9]: в состоянии пластического течения главные нормальные напряжения связаны некоторым «конечным» уравнением (так называемым условием пластичности), а главные приращения тензора деформации образуют нулевую сумму (условие несжимаемости течения).

Все сказанное относится также к моделям неплотносвязанных сред, в частности, песку или сухому грунту, которые служат обобщением представлений об идеально-пластическом теле и составляют теорию идеально сыпучих сред. Например, в теории Мора (O. Mohr, 1900 г.) в состоянии скольжения идеально сыпучего материала постоянным принимается отношение наибольшего и наименьшего главных нормальных напряжений. Именно развивая подобного рода теории, Прандтль (L. Prandtl) в 1921 г. пришел к понятию обобщенного идеально-пластического тела; деформация такого тела начинается и продолжается неопределенно долго, если максимальное касательное напряжение достигает предельного значения, зависящего от средней величины (полусуммы) наибольшего и наименьшего главных нормальных напряжений. Стоит заметить, что течения обобщенного идеально-пластического тела являются сжимаемыми. В частности, в процессе течения среды Кулона – Мора дилатация не может принимать отрицательных значений, т. е. среда либо разрыхляется, либо она остается несжимаемой.

2. ТРЕХМЕРНЫЙ ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ И ЕГО АСИМПТОТИЧЕСКИЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Во всех формулировках математической теории пластичности и теории сыпучих сред, как правило, используются специальные представления тензора напряжений и соответствующие формы дивергентного уравнения равновесия [5, 9]. Так, в теориях, основанных на критерии Кулона – Мора, условие начала течения представляет собой набор линейных соотношений, связывающих между собой главные нормальные напряжения, причем «промежуточное» главное напряжение никак не влияет на это условие. Критерий Кулона – Мора, следовательно, связывает максимальное и минимальное главные напряжения. Можно показать, что он выражается также через касательное и нормальное напряжения, действующие на элементарном плоском элементе, вдоль которого осуществляется скольжение. Если все главные нормальные напряжения являются сжимающими, то применимость указанного критерия подтверждается в экспериментах с образцами горных пород и грунтов. Важными особенностями критерия Кулона – Мора выступает простота его математической формулировки, ясность его физического содержания и выраженный конвенциональный характер. Кроме того, в механике разрушения критерий Кулона – Мора часто трактуется с точки зрения прочности твердых тел, и в этом смысле выступает как один из критериев прочности.

Обозначим через $\boldsymbol{\sigma}$ трехмерный тензор напряжений Коши. Симметрия тензора напряжений обеспечивает возможность его канонического спектрального представления:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \sigma_2 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \sigma_3 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \tag{1}$$

где $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ — ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$; σ_1, σ_2, σ_3 — главные нормальные напряжения (собственные значения тензора напряжений). Собственные векторы указывают направления главных осей напряжений.

В механике идеально-пластических и обобщенных идеально-пластических тел особую роль играют промежуточное главное нормальное напряжение и максимальное (минимальное) главное нормальное напряжение. Занумеруем главные оси тензора напряжений так, чтобы для актуального напряженного состояния соответствующие главные нормальные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 расположились бы в порядке убывания:

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3. \tag{2}$$

Каноническое разложение (1) для тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ хорошо известно и достаточно широко используется в современной механике деформируемого твердого тела в различных вопросах, связанных с анализом напряженного состояния тела в данной точке [1]. Однако можно установить новые важные представления тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, которые отличаются от канонического (1), но, тем не менее, обладают чрезвычайно простой алгебраической структурой [10]. Для этого требуется ввести два новых направления в плоскости, ортогональной собственному вектору $\mathbf{m}$. Этот вектор соответствует «промежуточному» главному нормальному напряжению σ_2 (intermediate principal stress).

С помощью алгебраического тензорного разбиения единицы

$$\mathbf{I} = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \tag{3}$$

где $\mathbf{I}$ — единичный тензор, исключаем в спектральном представлении (1) тензорную диаду, образованную собственным вектором $\mathbf{m}$:

$$\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} = \mathbf{I} - \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \tag{4}$$

следовательно, для тензора напряжений получим:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2 \mathbf{I} + 2\tau_{\max} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3} \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right). \tag{5}$$

Обозначая далее

$$g_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3}, \quad g_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3},$$

формулу (5) перепишем в следующем виде:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2 \mathbf{I} + 2\tau_{\max}\left(g_1 \mathbf{l}\otimes\mathbf{l} - g_2 \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\right). \tag{6}$$

В плоскости, ортогональной собственному вектору $\mathbf{m}$, выполним линейное преобразование векторов $\mathbf{l}$, $\mathbf{n}$ согласно

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos{}^{\backprime}\iota)}}({}^{\backprime}\mathbf{l} + {}^{\backprime}\mathbf{n}), \\ \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos{}^{\backprime}\iota)}}(-{}^{\backprime}\mathbf{l} + {}^{\backprime}\mathbf{n}), \end{aligned} \tag{7}$$

где ${}^{\backprime}\iota$ — угол между единичными векторами ${}^{\backprime}\mathbf{l}$, ${}^{\backprime}\mathbf{n}$. В отличие от пары собственных $\mathbf{l}$, $\mathbf{n}$ директоры ${}^{\backprime}\mathbf{l}$, ${}^{\backprime}\mathbf{n}$, вообще говоря, не ортогональны друг другу. Можно заметить, что собственный вектор $\mathbf{l}$ всегда делит пополам угол между директорами ${}^{\backprime}\mathbf{l}$, ${}^{\backprime}\mathbf{n}$. Если смотреть на плоскость, ортогональную второму главному направлению, со стороны оперения вектора $\mathbf{m}$, то асимптотический директор ${}^{\backprime}\mathbf{l}$ получается в результате поворота собственного вектора $\mathbf{l}$ на угол ${}^{\backprime}\iota/2$ по ходу часовой стрелки, а асимптотический директор ${}^{\backprime}\mathbf{n}$ — поворотом на тот же самый угол, но против хода часовой стрелки.

Оказывается, что угол ${}^{\backprime}\iota$ можно подобрать так, чтобы тензор напряжений содержал только смешанные диады, образованные новыми векторами ${}^{\backprime}\mathbf{l}$, ${}^{\backprime}\mathbf{n}$. В этом случае директоры ${}^{\backprime}\mathbf{l}$, ${}^{\backprime}\mathbf{n}$ будут указывать асимптотическое направление симметричного тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$. Достаточно положить [10]

$$\cos{}^{\backprime}\iota = \frac{\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3}$$

или

$$\cos{}^{\backprime}\iota = -\mu, \tag{8}$$

где μ есть параметр Лоде (W. Lode)

$$\mu = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}. \tag{9}$$

В силу своего определения абсолютное значение параметра Лоде не может превосходить единицу

$$-1 \leqslant \mu \leqslant 1, \tag{10}$$

откуда следует, что уравнение (8) всегда разрешимо относительно угла ${}^{\backprime}\iota$.

Несложные вычисления, выполненные с привлечением (8), позволяют последовательно получить сначала

$$\frac{g_1}{1+\cos{}^{\backprime}\iota} + \frac{g_2}{1-\cos{}^{\backprime}\iota} = 4\frac{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_2-\sigma_3)}{(1-\mu^2)(\sigma_1-\sigma_3)^2},$$

а затем —

$$\frac{g_1}{1+\cos{}^{\backprime}\iota} + \frac{g_2}{1-\cos{}^{\backprime}\iota} = 4\frac{(\sigma_2-\sigma_3)^2}{(1+\mu)^2(\sigma_1-\sigma_3)^2} = 1.$$

В итоге приходим к формуле[1] для тензора напряжений в смешанных диадах асимптотических директоров [10]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2 \mathbf{I} + \tau_{\max}({}^{\backprime}\mathbf{l}\otimes{}^{\backprime}\mathbf{n} + {}^{\backprime}\mathbf{n}\otimes{}^{\backprime}\mathbf{l}) \tag{11}$$

[1] Приводимые здесь формула и схема ее вывода пригодны для любого симметричного тензора второго ранга и, в частности, для приращения тензора деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$.

или

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2\mathbf{I} + 2\tau_{\max}\mathrm{sym}\,({}^{\backprime}\mathbf{l}\otimes{}^{\backprime}\mathbf{n}), \tag{12}$$

пригодной, вообще говоря, для всех трехмерных напряженных состояний.

Заметим, что «промежуточное» главное напряжение σ_2 вычисляется как

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} - \cos{}^{\backprime}\iota\,\tau_{\max} \tag{13}$$

или

$$\sigma_2 = s - \cos{}^{\backprime}\iota\,\tau_{\max}, \tag{14}$$

где

$$s = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} \tag{15}$$

есть точно «медианное» напряжение (mean stress).

«Крайние» главные напряжения $\sigma_{1,3}$ (major and minor principal stresses) могут быть вычислены по следующей формуле:

$$\sigma_{1,3} = \sigma_2 \pm \tau_{\max}(1\mp\mu).$$

Отношение «крайних» главных напряжений определяется согласно

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{\sigma_2+\tau_{\max}(1-\mu)}{\sigma_2-\tau_{\max}(1+\mu)}.$$

Уравнение равновесия с учетом данных выше представлений можно получить в следующей форме:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\nabla}\sigma_2 + {}^{\backprime}\mathbf{l}({}^{\backprime}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\tau_{\max} + {}^{\backprime}\mathbf{n}({}^{\backprime}\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})\tau_{\max} - \tau_{\max}\sin{}^{\backprime}\iota\,\boldsymbol{\nabla}{}^{\backprime}\iota+\\ +\tau_{\max}({}^{\backprime}\mathbf{l}(\boldsymbol{\nabla}\cdot{}^{\backprime}\mathbf{n}) + {}^{\backprime}\mathbf{n}(\boldsymbol{\nabla}\cdot{}^{\backprime}\mathbf{l}) - {}^{\backprime}\mathbf{l}\times(\boldsymbol{\nabla}\times{}^{\backprime}\mathbf{n}) - {}^{\backprime}\mathbf{n}\times(\boldsymbol{\nabla}\times{}^{\backprime}\mathbf{l})) = \mathbf{0}.\end{gathered} \tag{16}$$

Здесь $\boldsymbol{\nabla}$ обозначает трехмерный дифференциальный оператор Гамильтона (наблу Гамильтона).

Заменяя в полученном уравнении «промежуточное» главное напряжение σ_2 согласно (14), приходим к следующему равенству:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\nabla}s - \cos{}^{\backprime}\iota\,\boldsymbol{\nabla}\tau_{\max} + {}^{\backprime}\mathbf{l}({}^{\backprime}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\tau_{\max} + {}^{\backprime}\mathbf{n}({}^{\backprime}\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})\tau_{\max}+\\ +\tau_{\max}({}^{\backprime}\mathbf{l}(\boldsymbol{\nabla}\cdot{}^{\backprime}\mathbf{n}) + {}^{\backprime}\mathbf{n}(\boldsymbol{\nabla}\cdot{}^{\backprime}\mathbf{l}) - {}^{\backprime}\mathbf{l}\times(\boldsymbol{\nabla}\times{}^{\backprime}\mathbf{n}) - {}^{\backprime}\mathbf{n}\times(\boldsymbol{\nabla}\times{}^{\backprime}\mathbf{l})) = \mathbf{0}.\end{gathered} \tag{17}$$

3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ И ТЕЧЕНИЯ СЫПУЧИХ СРЕД. УСЛОВИЕ КУЛОНА – МОРА

Моделирование механического поведения идеально-пластических тел в значительной степени опирается на анализ локального напряженного состояния. Нас будут интересовать трехмерные напряженные состояния в заданной точке, касательные и нормальные напряжения, действующие на двумерный плоский элемент, ориентация которого в трехмерном пространстве определяется единичным нормальным вектором $\boldsymbol{\nu}$. Противоположные ориентации $\boldsymbol{\nu}$ и $-\boldsymbol{\nu}$ определяют один и тот же плоский элемент. Концепция внутренних напряжений подразумевает оперирование с вектором напряжений $\mathbf{t}$, который ассоциируется с двумерным плоским элементом и в силу этого зависит от его ориентации, т. е. от директора $\boldsymbol{\nu}$:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\boldsymbol{\nu}).$$

Фундаментальный результат Коши, как известно, устанавливает, что вектор напряжений $\mathbf{t}$ линейно зависит от директора $\boldsymbol{\nu}$:

$$\mathbf{t}(\boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

Введем касательное и нормальное напряжения:

$$t_\perp = t_\perp(\boldsymbol{\nu}) = \sqrt{\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} - t_\parallel^2}, \quad t_\parallel = t_\parallel(\boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{t}, \tag{18}$$

также функционально зависящие от единичного директора $\boldsymbol{\nu}$. Согласно данным определениям в любом случае $t_\perp \geqslant 0$; $t_\parallel < 0$ для сжимающих напряжений, $t_\parallel > 0$ для растягивающих напряжений[2].

Обозначим через $t_\perp^*$, $t_\parallel^*$ значения касательного и нормального напряжений в состоянии предельного равновесия, т.е. связанные с площадкой, вдоль которой в предельном состоянии происходит сдвиг.

Изучение картин разрушения массивов природных сыпучих сред показывает, что во всех случаях нарушение равновесия происходит в форме сдвига одной части массива относительно другой, остающейся неподвижной части. Сдвиг реализуется вдоль так называемых поверхностей скольжения, состоящих из элементарных площадок скольжения. Указанное нарушение равновесия происходит потому, что на поверхности скольжения действующие касательные напряжения превышают внутренние силы сопротивления среды деформации сдвига. Установленные, например, для грунтов по результатам испытаний образцов на сдвиг зависимости между касательной $t_\perp^*$ и нормальной $t_\parallel^*$ составляющими вектора напряжений, действующего на элементарной площадке образца в момент сдвига, имеют форму пологой кривой (которая имеет значительную кривизну лишь на малом начальном участке, а затем, с возрастанием нормальной составляющей напряжений, ее кривизна быстро уменьшается). Такая кривая может быть заменена прямой, и таким образом ее уравнение будет иметь следующий вид:

$$t_\perp^* = c_2 - c_1 t_\parallel^*, \tag{19}$$

где c_1, c_2 — материальные постоянные. Очевидно, что выражение в правой части (19) характеризует величину внутренних сил сопротивления среды деформации сдвига; она возрастает с увеличением величины сжимающих напряжений. Условие предельного равновесия (19) первоначально было предложено Кулоном (C. A. Coulomb, 1776 г.), в исследованиях о давлении грунта на стенки. Следует также принимать во внимание, что для многих типов горных пород вместо (19) на площадках скольжения наблюдается существенно нелинейная функциональная связь:

$$t_\perp^* = F(t_\parallel^*). \tag{20}$$

Заметим, что зависимость внутреннего сопротивления сыпучей среды деформации сдвига от нормальной составляющей напряжений, собственно, и отличает ее от идеально-пластической среды. Говорят также, что в сыпучей среде имеются два

[2] В технических теориях (например, в механике грунтов) обычно используется прямо противоположное соглашение о знаке нормальных напряжений. Мы по понятным причинам не будем следовать традициям технических теорий.

механизма сопротивления деформации сдвига: сцепление (характеризующее так называемое начальное сопротивление сдвигу, существующее даже при отсутствии нормальной составляющей напряжений) и внутреннее трение (происхождение которого обусловлено нормальными сжимающими напряжениями). Поэтому материальные постоянные c_2, c_1 в (19) можно называть коэффициентом сцепления (inherent shear stress, cohesion) и коэффициентом внутреннего трения (coefficient of internal friction) соответственно.

Условие предельного равновесия сыпучей среды (19), выполняющееся на элементарных площадках скольжения, означает, что для всех остальных площадок должно соблюдаться условие

$$t_\perp \leqslant c_2 - c_1 t_\parallel. \tag{21}$$

Таким образом, вычисляя точную верхнюю границу суммы

$$t_\perp + c_1 t_\parallel \tag{22}$$

по всем возможным ориентациям в пространстве, можно определить площадки скольжения, если сама сумма (22) оказывается равной коэффициенту сцепления c_2.

Заметим, что сумма (22) проще всего вычисляется в локальном триэдре главных направлений тензора напряжений. Действительно, исходя из (18) нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} &t_\parallel = \sigma_1 \nu_{<1>}^2 + \sigma_2 \nu_{<2>}^2 + \sigma_3 \nu_{<3>}^2, \\ &t_\perp^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \nu_{<1>}^2 \nu_{<2>}^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \nu_{<2>}^2 \nu_{<3>}^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \nu_{<1>}^2 \nu_{<3>}^2. \end{aligned} \tag{23}$$

В этих формулах через $\nu_{<1>}$, $\nu_{<2>}$, $\nu_{<3>}$ обозначены компоненты единичного директора $\boldsymbol{\nu}$ относительно базиса $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$.

Поиск точной верхней грани суммы (22) осуществляется с учетом условия нормировки директора $\boldsymbol{\nu}$:

$$\nu_{<1>}^2 + \nu_{<2>}^2 + \nu_{<3>}^2 = 0.$$

Кроме того, поиск следует также ограничить условием

$$\nu_{<2>}^2 = 0,$$

устанавливающим, что директор, указывающий на плоский элемент с наибольшим значением суммы (22), имеет нулевую проекцию на главную ось напряжений, соответствующую промежуточному главному нормальному напряжению σ_2. Поэтому выражения (23) еще упрощаются

$$\begin{aligned} &t_\parallel = (\sigma_1 - \sigma_3) \nu_{<1>}^2 + \sigma_3, \\ &t_\perp^2 = (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \nu_{<1>}^2 (1 - \nu_{<1>}^2). \end{aligned} \tag{24}$$

Сумма (22), таким образом, оказывается не зависящей от промежуточного главного нормального напряжения σ_2.

Наконец, ограничимся только значениями $\nu_{<1>} > 0$, поскольку от ориентации, характеризующейся условием $\nu_{<1>} < 0$, всегда можно перейти к противоположной (и в силу этого неотличимой от исходной) ориентации с $\nu_{<1>} > 0$.

В результате можно быстро выписать уравнение, из которого находятся экстремальные ориентации:

$$1 - 2\nu_{<1>}^2 + 2c_1 \nu_{<1>} \sqrt{1 - \nu_{<1>}^2} = 0. \tag{25}$$

Полученное уравнение корректно определяет ориентации, которым соответствуют экстремальные значения суммы (22), только если компонента $\nu_{<1>}$ директора $\boldsymbol{\nu}$ удовлетворяет ограничениям

$$\frac{1}{2} < \nu^2_{<1>} < 1. \tag{26}$$

Устраняя в уравнении (25) радикал, приходим к биквадратному уравнению

$$\nu^4_{<1>} - \nu^2_{<1>} + \frac{1}{4(1+c_1)} = 0. \tag{27}$$

Это уравнение позволяет найти единственное значение $\nu^2_{<1>}$, которое удовлетворяет ограничениям (26):

$$\nu^2_{<1>} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}},$$

и затем определить в точности два *различных* пространственных направления $\boldsymbol{\nu}$, характеризующиеся наибольшим значением суммы (22), в виде

$$\begin{aligned} &\nu_{<1>} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}},\\ &\nu_{<2>} = 0,\\ &\nu_{<3>} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}}; \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} &\nu_{<1>} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}},\\ &\nu_{<2>} = 0,\\ &\nu_{<3>} = -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}}. \end{aligned} \tag{29}$$

Несложные вычисления показывают, что точная верхняя грань суммы (22) есть

$$\sup\,(t_\perp + c_1 t_\parallel) = c_1\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} + \sqrt{1+c_1^2}\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2},$$

и, следовательно, критерий предельного равновесия Кулона – Мора для сыпучей среды в пространстве главных напряжений имеет форму конечного уравнения:

$$c_1\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} + \sqrt{1+c_1^2}\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} = c_2.$$

Введем вместо c_1, c_2 материальные постоянные γ и c (γ — угол внутреннего трения, c — коэффициент сцепления) согласно

$$c_1 = \operatorname{tg}\gamma, \quad c_2 = c.$$

В результате получается следующая форма критерия Кулона – Мора:

$$\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} = c\cos\gamma - \sin\gamma\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}, \tag{30}$$

или, вводя максимальное касательное напряжение $\tau_{\max}$ и медианное напряжение s, —

$$\tau_{\max} = c\cos\gamma - \sin\gamma s. \tag{31}$$

Наконец, приведем симметризованную форму критерия Кулона – Мора, которая не зависит от способа нумерации главных осей тензора напряжений, она представляет собой произведение трех функций текучести:

$$\begin{aligned}
&[h_1][h_2][h_3] = 0,\\
&h_1 = (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - (2c\cos\gamma - \sin\gamma(\sigma_2 + \sigma_3))^2,\\
&h_2 = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - (2c\cos\gamma - \sin\gamma(\sigma_1 + \sigma_3))^2,\\
&h_3 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - (2c\cos\gamma - \sin\gamma(\sigma_1 + \sigma_2))^2.
\end{aligned} \tag{32}$$

Площадки скольжения ортогональны директорам с компонентами относительно триэдра главных осей напряжений

$$\begin{aligned}
\nu_{<1>} &= \sqrt{\frac{1+\sin\gamma}{2}},\\
\nu_{<2>} &= 0,\\
\nu_{<3>} &= \sqrt{\frac{1-\sin\gamma}{2}};
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
\nu_{<1>} &= \sqrt{\frac{1+\sin\gamma}{2}},\\
\nu_{<2>} &= 0,\\
\nu_{<3>} &= -\sqrt{\frac{1-\sin\gamma}{2}}.
\end{aligned} \tag{34}$$

Хорошо известно, что главные нормальные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 могут быть вычислены в терминах второго инварианта девиатора тензора напряжений J_2', параметра Лоде – Надаи μ и гидростатического давления p:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= -p + \frac{3-\mu}{\sqrt{3(3+\mu^2)}}\sqrt{J_2'},\\
\sigma_2 &= -p + \frac{2\mu}{\sqrt{3(3+\mu^2)}}\sqrt{J_2'},\\
\sigma_3 &= -p - \frac{3+\mu}{\sqrt{3(3+\mu^2)}}\sqrt{J_2'},
\end{aligned} \tag{35}$$

где

$$\begin{aligned}
6J_2' &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2,\\
\mu &= \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3},\\
-3p &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3.
\end{aligned} \tag{36}$$

С учетом данных уравнений критерий (30) преобразуется к следующей форме:

$$\frac{3 - \mu\sin\gamma}{\sqrt{3(3+\mu^2)}\sin\gamma}\sqrt{J_2'} - p = c\operatorname{ctg}\gamma. \tag{37}$$

Определяя затем угол Лоде ϑ, согласно

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\mu}{\sqrt{3}} = -\frac{\cos \grave{\iota}}{\sqrt{3}} \tag{38}$$

можно утверждать, что будет справедливо равенство

$$\left[\frac{3-\mu\sin\gamma}{\sqrt{3(3+\mu^2)}}\right]^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos\vartheta - \sin\gamma\sin\vartheta}, \tag{39}$$

которое, в свою очередь, позволяет сформулировать критерий (30) в следующем замечательном виде:

$$\sqrt{J_2'} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos\vartheta - \sin\gamma\sin\vartheta}(p\sin\gamma + c\cos\gamma). \tag{40}$$

Стоит отметить еще одну форму критерия Кулона – Мора (30) для сыпучих сред с трением и сцеплением, приближающую его по форме к критерию текучести идеально-пластического тела:

$$\sigma_1 - a\sigma_3 = 2k. \tag{41}$$

Здесь материальные постоянные a и k связаны с c и γ соотношениями

$$a = \frac{1-\sin\gamma}{1+\sin\gamma}, \quad k = \frac{c\cos\gamma}{1+\sin\gamma}.$$

Поэтому сыпучая среда Кулона – Мора с позиций теории течения идеально-пластических сред определяется кусочно-линейной функцией текучести

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1 - a\sigma_3, \tag{42}$$

в запись которой не входит промежуточное главное нормальное напряжение σ_2. Если $a \to 1$, то критерий текучести Кулона – Мора переходит в критерий максимального касательного напряжения Треска (H. Tresca).

Из (41) следует формулировка критерия предельного состояния идеально-сыпучей среды, т. е. среды с нулевым внутренним сцеплением ($c = 0$), восходящая к Мору:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = a. \tag{43}$$

Дальнейшее обобщение модели сыпучей среды Кулона – Мора было выполнено в работах Л. Прандтля. Оно получается из формы (31), если считать зависимость максимального касательного напряжения от медианного напряжения заданной с помощью неопределенно общей функции:

$$\tau_{\max} = f(s). \tag{44}$$

Надо сказать, что моделирование течений обобщенного пластического тела Прандтля лучше всего осуществляется с помощью векторного дифференциального уравнения (17), которое в качестве неизвестных содержит асимптотические директоры тензора напряжений $\grave{\mathbf{l}}$, $\grave{\mathbf{n}}$.

4. ПРИРАЩЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ. МГНОВЕННО-НЕРАСТЯЖИМЫЕ ДИРЕКТОРЫ

Анализ течения среды Кулона – Мора основывается на общих кинематических уравнениях механики сплошных деформируемых сред и определяющем законе, связывающем инкремент тензора деформаций с тензором напряжений. В качестве определяющего примем ассоциированный с критерием (41) закон течения.

Течение среды Кулона – Мора с точки зрения кинематики характеризуется приращением вектора перемещений $d\mathbf{u}$ и приращением тензора (пластической) деформации (инкрементом тензора деформации) $d\boldsymbol{\varepsilon}$. Указанные приращения связаны между собой формулами Коши:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\nabla}\otimes d\mathbf{u} + (\boldsymbol{\nabla}\otimes d\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\right]. \tag{45}$$

В изотропных средах можно вести речь о, по крайней мере, одном общем триэдре главных осей тензоров $\boldsymbol{\sigma}$ и $d\boldsymbol{\varepsilon}$, следовательно, спектральное представление приращения тензора деформации лучше всего взять в форме

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{l}\otimes\mathbf{l}d\varepsilon_1 + \mathbf{m}\otimes\mathbf{m}d\varepsilon_2 + \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}d\varepsilon_3, \tag{46}$$

где $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ — ортонормированный базис из собственных векторов, общих как для тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, так и для приращения тензора деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$; $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$, $d\varepsilon_3$ — главные приращения деформации (собственные значения тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$).

Для течений, для которых второй главной оси соответствуют промежуточные главное нормальное напряжение и главное приращение деформации, мы введем особую нумерацию осей главного триэдра так, чтобы наряду с (2) выполнялись неравенства

$$d\varepsilon_1 \geqslant d\varepsilon_2 \geqslant d\varepsilon_3. \tag{47}$$

Далее мы увидим, что для сред Кулона – Мора в силу ассоциированного закона течения упорядоченным главным нормальным напряжениям (2) соответствуют главные приращения деформации, которые также оказываются упорядоченными так, что выполняются неравенства (47). После этого представление об асимптотических директорах можно распространить на инкремент тензора деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$, что позволяет сразу же указать его каноническую форму в асимптотических директорах ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{l}$, ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}$:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{I}d\varepsilon_2 + (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)\operatorname{sym}({}^{\backprime\backprime}\mathbf{l}\otimes{}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}). \tag{48}$$

Напомним, что если смотреть на плоскость, ортогональную второму главному направлению, со стороны оперения вектора $\mathbf{m}$, то асимптотический директор ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{l}$ получается в результате поворота собственного вектора $\mathbf{l}$ на угол ${}^{\backprime\backprime}\iota/2$ по ходу часовой стрелки, а асимптотический директор ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}$ — поворотом на тот же угол против хода часовой стрелки.

Угол между асимптотическими директорами ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{l}$, ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}$ вычисляется, как и в случае напряжений, с помощью параметра Лоде:

$$\cos{}^{\backprime\backprime}\iota = -\nu, \tag{49}$$

где

$$\nu = \frac{2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}, \tag{50}$$

причем здесь выражение справа по абсолютной величине не превышает единицу.

Учитывая каноническую форму инкремента тензора деформации (48), становится почти очевидной необходимость ввести в рассмотрение два новых направления в плоскости, ортогональной второй главной оси тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$, которые были бы ортогональны направлениям асимптотических директоров ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{l}$, ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}$. Соответствующие им директоры обозначим через ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$, при этом директор ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$ ортогонален асимптотическому директору ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}$, а директор ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$ ортогонален ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{l}$:

$$ {}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}\cdot{}^{\prime\prime}\mathbf{l}=0, \qquad {}^{\backprime\backprime}\mathbf{l}\cdot{}^{\prime\prime}\mathbf{n}=0. \tag{51}$$

Точнее, если смотреть на плоскость, ортогональную второму главному направлению, со стороны оперения вектора $\mathbf{m}$, то директор ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$ получается в результате поворота собственного вектора $\mathbf{l}$ в указанной плоскости на угол $\dfrac{\pi-{}^{\backprime\backprime}\iota}{2}$ по ходу часовой стрелки, а директор ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$ — поворотом вектора $\mathbf{l}$ на тот же угол против хода часовой стрелки.

Принимая во внимание (48) и (51), сразу же находятся мгновенные удлинения линейных элементов, направленных вдоль второго главного направления и вдоль директоров ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$; все они оказываются равными промежуточному главному приращению $d\varepsilon_2$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{m}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot\mathbf{m}=d\varepsilon_2,\\ &{}^{\prime\prime}\mathbf{l}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot{}^{\prime\prime}\mathbf{l}=d\varepsilon_2,\\ &{}^{\prime\prime}\mathbf{n}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot{}^{\prime\prime}\mathbf{n}=d\varepsilon_2. \end{aligned} \tag{52}$$

Без труда вычисляются также мгновенные сдвиги в плоскостях, определяемых директорами ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$:

$$\begin{aligned} &{}^{\prime\prime}\mathbf{l}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot\mathbf{m}=0,\\ &{}^{\prime\prime}\mathbf{n}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot\mathbf{m}=0,\\ &{}^{\prime\prime}\mathbf{l}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot{}^{\prime\prime}\mathbf{n}={}^{\prime\prime}\mathbf{n}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot{}^{\prime\prime}\mathbf{l}=-\cos{}^{\backprime\backprime}\iota\, d\varepsilon_2+\frac{d\varepsilon_1-d\varepsilon_3}{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-{}^{\backprime\backprime}\iota\right). \end{aligned} \tag{53}$$

Из формул (52), (53) подстановкой вместо приращения тензора деформации его спектрального представления, получается следующее соотношение, позволяющее устранить второе главное приращение:

$$ d\varepsilon_2=\sin^2\frac{{}^{\backprime\backprime}\iota}{2}\, d\varepsilon_1+\cos^2\frac{{}^{\backprime\backprime}\iota}{2}\, d\varepsilon_3. $$

Исходя из ассоциированного закона течения

$$ d\varepsilon_j=\frac{\partial f}{\partial\sigma_j}d\lambda \qquad (j=1,2,3), \tag{54}$$

где неопределенный множитель $d\lambda$ строго положителен для состояний активного пластического течения, и функции текучести (42) для активных течений среды Кулона – Мора находим следующие значения для главных приращений:

$$ d\varepsilon_1=d\lambda, \quad d\varepsilon_2=0, \quad d\varepsilon_3=-a\,d\lambda \qquad (d\lambda>0). \tag{55}$$

Данные равенства позволяют упорядочить главные приращения $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$, $d\varepsilon_3$ в виде убывающей последовательности

$$d\varepsilon_1 > 0, \quad d\varepsilon_2 = 0, \quad d\varepsilon_3 < 0, \tag{56}$$

т.е. второй главной оси тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$ (а в силу изотропии также и второй главной оси тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$) будет соответствовать промежуточное главное приращение $d\varepsilon_2 = 0$. Таким образом, убывающей последовательности главных напряжений отвечает убывающая последовательность главных приращений тензора деформации.

На основании (55) без труда устанавливается, что течение среды Кулона – Мора является необратимо сжимаемым:

$$\mathrm{tr}\,(d\boldsymbol{\varepsilon}) = (1-a)d\lambda > 0 \qquad (0 < a < 1). \tag{57}$$

Более того, дилатация оказывается всегда положительной (кроме случая, когда $a = 1$, т.е. когда среда Кулона – Мора вырождается в идеально-пластическую среду без внутреннего трения, подчиняющуюся критерию текучести Треска). Поэтому среда Кулона – Мора разрыхляется в процессе течения.

В силу (56) формула (48) упрощается до

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)\mathrm{sym}\,({}^{\backprime\backprime}\mathbf{l} \otimes {}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}); \tag{58}$$

можно также показать, что дилатация континуума Кулона – Мора определяется соотношениями

$$\frac{\mathrm{tr}\,(d\boldsymbol{\varepsilon})}{\cos{}^{\backprime\backprime}\iota} = \frac{d\varepsilon_1 + d\varepsilon_3}{\cos{}^{\backprime\backprime}\iota} = d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3, \tag{59}$$

откуда сразу же можно заключить, что

$$\cos{}^{\backprime\backprime}\iota = \frac{d\varepsilon_1 + d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}. \tag{60}$$

Соотношения для мгновенных удлинений и сдвигов (52), (53) также упрощаются:

$$\begin{aligned} &\mathbf{m}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot\mathbf{m} = 0,\\ &{}^{\prime\prime}\mathbf{l}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot{}^{\prime\prime}\mathbf{l} = 0,\\ &{}^{\prime\prime}\mathbf{n}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot{}^{\prime\prime}\mathbf{n} = 0; \end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned} &{}^{\prime\prime}\mathbf{l}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot\mathbf{m} = 0,\\ &{}^{\prime\prime}\mathbf{n}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot\mathbf{m} = 0,\\ &{}^{\prime\prime}\mathbf{l}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot{}^{\prime\prime}\mathbf{n} = {}^{\prime\prime}\mathbf{n}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot{}^{\prime\prime}\mathbf{l} = \frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - {}^{\backprime\backprime}\iota\right). \end{aligned} \tag{62}$$

Пользуясь (61), (62), сразу же приходим к выводу о том, что в процессе течения сред Кулона – Мора линейные элементы, перпендикулярные направлениям асимптотических директоров ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{l}$, ${}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}$, не претерпевают мгновенных удлинений, т.е. материальные волокна, ориентированные вдоль директоров ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$, мгновенно не удлиняются и не укорачиваются. То же самое, очевидно, справедливо и для волокон, направленных вдоль второй главной оси тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$. Следовательно, мгновенная деформация трехмерного элемента с ребрами, ориентированными вдоль директоров ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$, представляет собой сдвиг в плоскости, ортогональной собственному вектору $\mathbf{m}$. Таким образом, в случае сред Кулона – Мора для векторов ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$ оправданным будет термин «мгновенно-нерастяжимые директоры».

Если $a \to 1$, т.е. когда критерий Кулона – Мора сводится к критерию текучести Треска, асимптотические директоры становятся взаимно ортогональными, то же самое можно сказать и о мгновенно-нерастяжимых директорах ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$. Более того, асимптотические направления совпадают с направлениями мгновенно-нерастяжимых волокон, течение приобретает свойство несжимаемости, и инкремент тензора деформации представляется простой формулой

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)\mathrm{sym}\,({}^{\prime\prime}\mathbf{l}\otimes{}^{\prime\prime}\mathbf{n}) = (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)\mathrm{sym}\,({}^{\backprime\backprime}\mathbf{l}\otimes{}^{\backprime\backprime}\mathbf{n}), \tag{63}$$

на основании которой устанавливается, что плоский элемент, ортогональный промежуточной главной оси приращения тензора деформации и с ориентированными вдоль направлений, делящих точно пополам угол между двумя другими главными направлениями приращения тензора деформации, сторонами, испытывает лишь мгновенную деформацию сдвига.

Для инкремента тензора деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$ справедливо следующее диадное представление:

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3} = \frac{\cos{}^{\backprime\backprime}\iota}{\sin^2{}^{\backprime\backprime}\iota}({}^{\prime\prime}\mathbf{l}\otimes{}^{\prime\prime}\mathbf{l} + {}^{\prime\prime}\mathbf{n}\otimes{}^{\prime\prime}\mathbf{n}) + \frac{1+\cos^2{}^{\backprime\backprime}\iota}{\sin^2{}^{\backprime\backprime}\iota}\mathrm{sym}\,({}^{\prime\prime}\mathbf{l}\otimes{}^{\prime\prime}\mathbf{n}). \tag{64}$$

Действительно, для диадного представления тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$ необходимы только диады, образованные мгновенно-нерастяжимыми директорами ${}^{\prime\prime}\mathbf{l}$, ${}^{\prime\prime}\mathbf{n}$, поэтому справедливо следующее разложение с неопределенными пока коэффициентами dl, dh, $d\gamma$:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = (dl){}^{\prime\prime}\mathbf{l}\otimes{}^{\prime\prime}\mathbf{l} + (dh){}^{\prime\prime}\mathbf{n}\otimes{}^{\prime\prime}\mathbf{n} + \frac{1}{2}(d\gamma){}^{\prime\prime}\mathbf{l}\otimes{}^{\prime\prime}\mathbf{n} + \frac{1}{2}(d\gamma){}^{\prime\prime}\mathbf{n}\otimes{}^{\prime\prime}\mathbf{l}. \tag{65}$$

Подсчитывая далее мгновенные удлинения и сдвиги, находим

$$\begin{aligned}
&{}^{\prime\prime}\mathbf{l}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot{}^{\prime\prime}\mathbf{l} = dl + \cos^2{}^{\backprime\backprime}\iota dh - \cos{}^{\backprime\backprime}\iota d\gamma,\\
&{}^{\prime\prime}\mathbf{n}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot{}^{\prime\prime}\mathbf{n} = \cos^2{}^{\backprime\backprime}\iota dl + dh - \cos{}^{\backprime\backprime}\iota d\gamma,\\
&{}^{\prime\prime}\mathbf{l}\cdot(d\boldsymbol{\varepsilon})\cdot{}^{\prime\prime}\mathbf{n} = -\cos{}^{\backprime\backprime}\iota(dl+dh) + \frac{1+\cos^2{}^{\backprime\backprime}\iota}{2}d\gamma.
\end{aligned} \tag{66}$$

С другой стороны, те же самые величины были ранее вычислены как (61), (62), следовательно, dl, dh, $d\gamma$ связываются приводимыми ниже уравнениями:

$$\begin{aligned}
&dl + \cos^2{}^{\backprime\backprime}\iota dh - \cos{}^{\backprime\backprime}\iota d\gamma = 0,\\
&\cos^2{}^{\backprime\backprime}\iota dl + dh - \cos{}^{\backprime\backprime}\iota d\gamma = 0,\\
&-\cos{}^{\backprime\backprime}\iota(dl+dh) + \frac{1+\cos^2{}^{\backprime\backprime}\iota}{2}d\gamma = \frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{2}\sin^2{}^{\backprime\backprime}\iota.
\end{aligned} \tag{67}$$

Из этой системы уравнений можно найти следующие выражения для dl, dh, $d\gamma$:

$$\begin{aligned}
&dl = dh = \frac{\cos{}^{\backprime\backprime}\iota}{\sin^2{}^{\backprime\backprime}\iota}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3),\\
&d\gamma = \frac{1+\cos^2{}^{\backprime\backprime}\iota}{\sin^2{}^{\backprime\backprime}\iota}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3).
\end{aligned} \tag{68}$$

Подставляя (68) в (65), приходим к диадному представлению (64).

В терминах приращений перемещений полная кинематическая картина сжимаемых течений сред Кулона – Мора в предельном состоянии без труда строится на основе данных представлений об асимптотических направлениях и о мгновенно-нерастяжимых линейных элементах. В частности, в двумерных задачах можно достаточно просто получить соотношения для приращений перемещений $d\mathbf{u}$ вдоль линий, касающихся мгновенно-нерастяжимых директоров. В плоских течениях мгновенно-нерастяжимые директоры будут одновременно указывать характеристические направления системы дифференциальных уравнений кинематики.

Заключая работу, рассмотрим вопрос о равенстве углов $`\iota$ и $``\iota$, определяющих ориентации асимптотических директоров тензора напряжений и приращения тензора деформации соответственно. A priori мы не можем утверждать, что они равны. Равенство $`\iota = ``\iota$ означает, что асимптотические директоры тензора напряжений и приращения тензора деформации ориентированы одинаково, и равны параметрам Лоде

$$\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3};$$

при этом убывающим значениям главных напряжений (2) должны соответствовать убывающие значения главных приращений (47). Они связываются ассоциированным законом течения, и в общем случае продемонстрировать равенство параметров Лоде не удается. Эта важная и интересная проблема в «старых» теориях пластичности (см., например, [6–8]), не основанных явно на ассоциированном законе течения, решалась очень своеобразно. Так, в главе XVI монографии [7] равенство параметров Лоде формулируется как «третий закон пластичности» с указанием на подобие главных кругов Мора. Далее (глава XVII, с. 281) отмечается без дополнительной аргументации, что, несмотря на наблюдаемое в эксперименте отклонение, введение третьего закона пластичности является оправданным. Можно показать, что вопрос о равенстве (или отклонении) параметров Лоде решается на основе оценки величины «промежуточного» главного нормального напряжения.

Благодарности. Результаты получены в рамках выполнения государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00844).

Библиографический список

1. *Прагер В.* Введение в механику сплошных сред. М. : Изд-во иностр. лит., 1963. 312 с.
2. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Ч. I: Упруго-пластические деформации. М. : Гостехтеоретиздат, 1948. 376 с.
3. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М. : Высш. шк., 1969. 608 с.
4. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М. : Наука, 1969. 420 с.
5. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М. : Наука, 1966. 232 с.
6. *Надаи А.* Пластичность. Механика пластического состояния вещества. М. ; Л. : ОНТИ, 1936. 280 с.
7. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел : в 2 т. Т. 1. М. : Изд-во иностр. лит., 1954. 648 с.
8. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел : в 2 т. Т. 2. М.: Мир, 1969. 864 с.
9. *Радаев Ю. Н.* Пространственная задача математической теории пластичности. Самара : Изд-во Самар. гос. ун-та, 2006. 240 с.

10. *Радаев Ю. Н.* Асимптотические оси тензоров напряжений и приращения деформации в механике сжимаемых континуумов // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 77–85.

Образец для цитирования:
Радаев Ю. Н. Мгновенно-нерастяжимые директоры в кинематике трехмерных течений сред Кулона – Мора // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 467–483. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-467-483

Instantaneously not Elongated Directors in Three-Dimensional Kinematics of the Coulomb – Mohr Medium

Yu. N. Radayev

Yuri N. Radayev, http://orcid.org/0000-0002-0866-2151, Institute for Problems in Mechanics of RAS, 101 Vernadskogo Ave., Moscow 119526, Russia, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Three-dimensional flows of perfectly plastic medium are considered within the framework of the Coulomb – Mohr continuum model. The model is to be used in applied problems related to limit states and flows of sands, rocks and any other kind of granular media. The present study is based on a notion of asymptotic directions of the stress tensor and the strain tensor increment and as well on instantaneously not elongated directors which are orthogonal to the asymptotic directions and lie in the plane normal to the intermediate principal stress axis. By making use of mechanical sense of asymptotic directions the canonical dyadic representations of the stress tensor and the strain tensor increment are obtained. The associate flow rule equations are analysed and then applied to study of three-dimensional irreversible kinematics of the granular media. It is shown that the dilatation is always positive excepting the case of zero internal friction. Orientations of the instantaneously not elongated linear material elements are found. The strain tensor increment represented in three dimensions by means of the instantaneously not elongated directors is obtained.

Key words: plasticity, yielding, flow, Coulomb – Mohr criterion, strain tensor increment, associate flow rule.

Acknowledgements: The results have been obtained in the framework of the national tasks (state registration no. AAAA-A17-117021310381-8) and partial supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00844).

References

1. Prager W. *Vvedenie v mekhaniku sploshnyh sred* [Introduction to continuum mechanics]. Moscow, Izd-vo inostr. lit., 1963. 312 p. (in Russian).
2. Illyushin A. A. *Plastichnost'. Ch. I : Uprugo-plasticheskie deformacii* [Plasticity. Pt. I : Elastic-plastic deformations]. Moscow, Gostekhteoretizdat, 1948. 376 p. (in Russian).
3. Sokolovskii V. V. *Teoriya plastichnosti* [Theory of plasticity]. Moscow, Vyssh. Shk., 1969. 608 p. (in Russian).
4. Kachanov L. M. *Osnovy teorii plastichnosti* [Foundations of theory of plasticity]. Moscow, Nauka, 1969. 420 p. (in Russian).
5. Ivlev D. D. *Teoriya ideal'noj plastichnosti* [Theory of perfect plasticity]. Moscow. Nauka, 1966. 232 p.
6. Nadai A. *Plastichnost'. Mekhanika plasticheskogo sostoyaniya veshchestva* [Plasticity. Mechanics of the plastic state of matter]. Moscow, Leningrad, ONTI Publ., 1936. 280 p. (in Russian).

7. Nadai A. *Plastichnost' i razrushenie tverdyh tel* [Plasticity and fracture of solids]. Vol. I. Moscow, Izd-vo inostr. lit., 1954. 648 p. (in Russian).
8. Nadai A. *Plastichnost' i razrushenie tverdyh tel* [Plasticity and fracture of solids]. Vol. II. Moscow, Mir, 1969. 864 p. (in Russian).
9. Radayev Y. N. *Prostranstvennaya zadacha matematicheskoj teorii plastichnosti* [Three-dimensional problem of mathematical theory of plasticity]. Samara, Izd-vo Samar. Gos. Un-ta, 2006. 240 p. (in Russian).
10. Radayev Y. N. Asymptotic axes of stress tensors and strain increment tensors in mechanics of compressible continua, *Mech. Solids*, 2013, vol. 48, iss. 5, pp. 546–552. DOI: https://doi.org/10.3103/S0025654413050105

Cite this article as:
Radayev Yu. N. Instantaneously not Elongated Directors in Three-Dimensional Kinematics of the Coulomb – Mohr Medium. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 467–483 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-467-483