



УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ЛЕМБА ДЛЯ СРЕДЫ КОССЕРА

Чан Ле Тхай, Д. В. Тарлаковский

Чан Ле Тхай, аспирант кафедры сопротивления материалов, динамики и прочности машин, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4, tranlethaivvk@gmail.com

Тарлаковский Дмитрий Валентинович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией динамических испытаний НИИ механики, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119192, Москва, Мичуринский просп., 1; заведующий кафедрой сопротивления материалов, динамики и прочности машин, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4, tdvhome@mail.ru

В статье рассматривается упругое однородное изотропное полупространство, заполненное средой Коссера. На границе полупространства заданы нормальные давления. В начальный момент времени и на бесконечности возмущения отсутствуют. С учетом осевой симметрии разрешающая система уравнений включает в себя три гиперболических уравнения относительно скалярного потенциала и ненулевых компонент векторного потенциала и вектора поворота. Решение задачи ищется в виде обобщенных сверток заданного давления с соответствующими поверхностными функциями влияния. Для построения последних применяются преобразования Ханкеля по радиусу и Лапласа по времени. Используется разложение в степенные ряды по малому параметру, характеризующему связь волн сдвига и вращения. Найдены изображения первых двух коэффициентов этих рядов. Соответствующие оригиналы определяются связью плоской и осесимметричной задач. Приведены примеры расчетов регулярных составляющих функций влияния зернистого композита из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице.

Ключевые слова: среда Коссера, поверхностные функции влияния, метод малого параметра, интегральные преобразования Лапласа и Ханкеля, связь плоской и осесимметричной задач.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-496-506>

ВВЕДЕНИЕ

Общая теория моментной упругости впервые была разработана братьями Коссера (E. Cosserat, F. Cosserat) в 1909 г. [1]. В ней в отличие от классической теории упругости движение среды описывается не только вектором перемещения, но также вектором поворота. Краткие обзоры публикаций по тематике упругих сред с микроструктурой представлены в работах [2–7].

В настоящий момент моментная теория упругости привлекает внимание многих исследователей. Необходимо, прежде всего, выделить работы [4–6, 8–13], в которых исследованы статические и динамические задачи для таких сред. В [11] рассмотрена динамическая связанная осесимметричная задача микрополярной теории термоупругости для изотропных слоя, полупространства или пространства. А в работах [4–6] получены решения аналогичных нестационарных осесимметричных задач для однородной изотропной среды псевдокоссера.

В [12] дана постановка и проведены аналитические исследования задач о действии нестационарной поверхностной нагрузки на моментную упругую полуплоскость и



построены соответствующие нестационарные поверхностные функции влияния для плоской задачи Лемба. В работе [13] исследовано нестационарное осесимметричное движение упругого моментного полупространства под действием нестационарных нормальных поверхностных перемещений. В силу осесимметричного характера задачи наряду с преобразованием Лапласа по времени применяется двойное преобразование Фурье (или преобразование Ханкеля) по пространственным переменным.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается упругое однородное изотропное полупространство, заполненное средой Коссера [14]. Уравнения ее осесимметричного движения при отсутствии массовых сил и моментов аналогично [13] записываем относительно скалярного потенциала φ перемещений и ненулевых компонент ψ и ω векторов перемещений и угла поворота в цилиндрической системе координат $Or\vartheta z$ ($r \geq 0$, $-\pi < \vartheta \leq \pi$, $z \geq 0$) с направленной в глубь полупространства осью Oz (точками обозначены производные по времени):

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \Delta\varphi, \ddot{\psi} = (\gamma_1^{-2} + \alpha) \Delta\psi + 2\alpha\omega - (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\psi}{r^2}, \\ \ddot{\omega} &= \gamma_2^{-2} \Delta\omega - 2\alpha\beta\Delta\psi - 4\alpha\beta\omega - r^{-2} (\gamma_2^{-2}\omega - 2\alpha\beta\psi), \quad z \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

При этом ненулевые компоненты u и w вектора перемещений связаны с потенциалами так:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi)}{\partial r}, \quad (2)$$

а нетривиальные физические компоненты тензоров напряжений $\sigma_{\xi\varsigma}$ и моментов $\mu_{\xi\varsigma}$ ($\{\xi, \varsigma\} = \{r, \vartheta, z\}$) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} + \kappa \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} \right), \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{u}{r} + \kappa \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \sigma_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \kappa \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right), \\ \sigma_{rz} &= (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial w}{\partial r} + (\gamma_1^{-2} - \alpha) \frac{\partial u}{\partial z} + 2\alpha\omega, \\ \sigma_{zr} &= (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial u}{\partial z} + (\gamma_1^{-2} - \alpha) \frac{\partial w}{\partial r} - 2\alpha\omega, \\ \mu_{r\vartheta} &= \frac{\partial \omega}{\partial r} - \eta \frac{\omega}{r}, \quad \mu_{\vartheta r} = -\frac{\omega}{r} + \eta \frac{\partial \omega}{\partial r}, \quad \mu_{z\vartheta} = \frac{\partial \omega}{\partial z}, \quad \mu_{\vartheta z} = \eta \frac{\partial \omega}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3)$$

В соотношениях (1)–(3) использованы безразмерные величины (при одинаковом начертании они обозначены штрихами, которые в них и далее опущены):

$$\begin{aligned} u' &= \frac{u}{L}, \quad w' = \frac{w}{L}, \quad r' = \frac{r}{L}, \quad z' = \frac{z}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad \varphi' = \frac{\varphi}{L^2}, \quad \psi' = \frac{\psi}{L^2}, \\ \sigma'_{\xi\varsigma} &= \frac{\sigma_{\xi\varsigma}}{\lambda + 2\mu}, \quad \mu'_{\xi\varsigma} = \frac{L\mu_{\xi\varsigma}}{\gamma + \varepsilon}, \quad \gamma_1^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \quad \gamma_2^2 = \frac{c_1^2}{c_3^2}, \quad \eta = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}, \quad \beta = \frac{\rho L^2}{J}, \\ \alpha' &= \frac{\alpha}{\lambda + 2\mu}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad c_3^2 = \frac{\gamma + \varepsilon}{J}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = 1 - 2\gamma_1^{-2}. \end{aligned}$$

Здесь t — время; L — некоторый характерный линейный размер; λ, μ — упругие постоянные Ламе; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ — физические параметры моментной среды; ρ — ее



плотность; J — мера инерции среды при вращении (плотность момента инерции); c_1 , c_2 и c_3 — скорости волн растяжения-сжатия, сдвига и кручения соответственно. Соотношения между этими скоростями могут быть различными. Далее будем считать имеют место справедливые для композита в виде алюминиевой дроби в эпоксидной матрице [2] неравенства $c_2 < c_1 < c_3$, из которых вытекает следующее соотношение: $\gamma_2 < 1 < \gamma_1$.

Отметим, что при $\alpha = 0$ второе и третье уравнения в (1) становятся независимыми.

Считаем, что в начальный момент времени возмущения отсутствуют:

$$\varphi|_{\tau=0} = \dot{\varphi}|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = \omega|_{\tau=0} = \dot{\omega}|_{\tau=0} = 0. \quad (4)$$

Все искомые функции предполагаются ограниченными, а на граничной плоскости подобно классической задаче Лемба [14–18] выполняются такие условия:

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = \delta(x, y) \delta(\tau), \quad \mu_{z\vartheta}|_{z=0} = 0, \quad (5)$$

где x, y — декартовы координаты в плоскости $z = 0$; $\delta(\xi)$ — дельта-функция Дирака [15].

2. ИЗОБРАЖЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И УГЛА ПОВОРОТА

К начально-краевой задаче (1)–(5) применяем преобразования Лапласа по времени τ и Ханкеля по радиусу r нулевого порядка для φ , w и первого порядка для ψ , u , ω (значки «L» и «H» указывают на соответствующие изображения; s и q — параметры этих преобразований). Тогда уравнения (1), равенства (2), (3) и граничные условия (5) переходят в следующие соотношения:

$$\frac{\partial^2 \varphi^{HL}}{\partial z^2} - k_0^2(q, s) \varphi^{HL} = 0 \quad k_0(q, s) = \sqrt{q^2 + \gamma_0^2 s^2} \quad (\gamma_0 = 1), \quad \operatorname{Re} \sqrt{\cdot} > 0,$$

$$(\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial^2 \psi^{HL}}{\partial z^2} - [(\gamma_1^{-2} + \alpha) q^2 + s^2] \psi^{HL} + 2\alpha \omega^{HL} = 0, \quad (6)$$

$$\gamma_2^{-2} \frac{\partial^2 \omega^{HL}}{\partial z^2} - 2\alpha\beta \frac{\partial^2 \psi^{HL}}{\partial z^2} - (\gamma_2^{-2} q^2 + s^2 + 4\alpha\beta) \omega^{HL} + 2\alpha\beta q^2 \psi^{HL} = 0;$$

$$u^{HL} = -q\varphi^{HL} - \frac{\partial \psi^{HL}}{\partial z}, \quad w^{HL} = \frac{\partial \varphi^{HL}}{\partial z} + q\psi^{HL}, \quad \sigma_{zz}^{HL} = \frac{\partial w^{HL}}{\partial z} + \kappa q u^{HL}, \quad (7)$$

$$\sigma_{zr}^{HL} = (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial u^{HL}}{\partial z} - (\gamma_1^{-2} - \alpha) q w^{HL} - 2\alpha \omega^{HL}, \quad \mu_{z\vartheta}^{HL} = \frac{\partial \omega^{HL}}{\partial z};$$

$$\sigma_{zr}^{HL}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}^{HL}|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}, \quad \mu_{z\vartheta}^{HL}|_{z=0} = 0. \quad (8)$$

Общие решения уравнений в (6) с учетом их ограниченности имеют вид [13]:

$$\varphi^{HL}(q, z, s) = C_0(q, s) E_0(q, z, s), \quad \psi^{HL}(q, z, s) = \sum_{l=1}^2 C_l(q, s) E_l(q, z, s),$$

$$\omega^{HL}(q, z, s) = \frac{1}{2\alpha} \sum_{l=1}^2 T_l(q, s) C_l(q, s) E_l(q, z, s), \quad (9)$$

$$E_j(q, z, s) = e^{-k_j(q, s)z}, \quad T_l(q, s) = (\gamma_1^{-2} + \alpha) [q^2 - k_l^2(q, s)] + s^2,$$



где $C_j(q, s)$ — постоянные интегрирования; а $k_{1,2}(q, s)$ — корни биквадратного уравнения, приведенного в [13].

Подстановка (9) в (7) и использование условий (8) позволяет определить постоянные интегрирования:

$$\begin{aligned} C_0(q, s) &= -\frac{\gamma_1^2 k_3^2(q, s) K_1(q, s)}{2\pi R_2(q, s)}, & C_1(q, s) &= -\frac{\gamma_1^2 q k_0(q, s) K_3(q, s)}{\pi R_2(q, s)}, \\ C_2(q, s) &= -\frac{\gamma_1^2 q k_0(q, s) K_2(q, s)}{\pi R_2(q, s)}. \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} R_2(q, s) &= -4q^2 k_0(q, s) K_4(q, s) - k_3^4(q, s) K_1(q, s), & K_1(q, s) &= K_2(q, s) + K_3(q, s), \\ K_2(q, s) &= k_1(q, s) T_1(q, s), & K_3(q, s) &= -k_2(q, s) T_2(q, s), \\ K_4(q, s) &= -k_1(q, s) k_2(q, s) R_1(q, s), & R_1(q, s) &= T_1(q, s) - T_2(q, s). \end{aligned}$$

Поскольку вид корней $k_{1,2}(q, s)$ не позволяет находить оригиналы аналитически, то аналогично [13] используем разложения в степенные ряды по малому параметру α , а именно, ограничиваясь линейным приближением, перемещения и угол поворота записываем так:

$$\begin{aligned} u(r, z, \tau) &= u_0(r, z, \tau) + u_1(r, z, \tau) \alpha, & w(r, z, \tau) &= w_0(r, z, \tau) + w_1(r, z, \tau) \alpha, \\ \omega(r, z, \tau) &= \omega_0(r, z, \tau) + \omega_1(r, z, \tau) \alpha. \end{aligned} \quad (11)$$

Отметим, что первые члены равенств (11) есть решения классической задачи Лемба для упругой среды. При этом $\omega_0 \equiv 0$. Функции же u_0 и w_0 найдены, например, в [18]. Поэтому далее они не рассматриваются.

Соответствующие (11) равенства для $k_{1,2}(q, s)$ получены в [13]:

$$\begin{aligned} k_l(q, s) &= k_{0l}(q, s) + \alpha k_{1l}(q, s) \quad (l = 1, 2), \\ k_{0l}(q, s) &= \sqrt{q^2 + \gamma_l^2 s^2}, & k_{11}(q, s) &= -\frac{\gamma_1^4 s^2}{2k_{01}(q, s)}, & k_{12}(q, s) &= \frac{2\beta\gamma_2^2}{k_{02}(q, s)}, \\ T_1(q, s) &= T_{12}(q, s) \alpha^2, & T_2(q, s) &= T_{20}(q, s) + \alpha T_{21}(q, s), \\ T_{12}(q, s) &= -\frac{4\beta\gamma_1^2\gamma_2^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}, & T_{20}(q, s) &= \gamma_1^{-2} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) s^2, \\ T_{21}(q, s) &= -\gamma_1^{-2} \gamma_2^2 (4\beta + \gamma_1^2 s^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Использование (7), (9), (10) и (12) позволяет найти изображения искомых коэффициентов в (11). Например, для нормального перемещения они имеют вид

$$w_1^{HL}(q, z, s) = \sum_{j=0}^2 w_{1j}^{HL}(q, z, s), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} w_{10}^{HL}(q, z, s) &= \frac{\gamma_1^6 s^2 q^2 k_0^2(q, s) k_3^2(q, s)}{\pi k_{01}(q, s) R^2(q, s)} e^{-k_0(q, s)z}, & w_{12}^{HL}(q, z, s) &= 0, \\ w_{11}^{HL}(q, z, s) &= -\frac{\gamma_1^6 s^2 q^2 k_0(q, s)}{2\pi k_{01}(q, s) R(q, s)} \left[\frac{4q^2 k_0(q, s)}{R(q, s)} - z \right] e^{-k_{01}(q, s)z}, \\ R(q, s) &= k_3^4(q, s) - 4q^2 k_0(q, s) k_{01}(q, s), & k_3^2(q, s) &= 2q^2 + \gamma_1^2 s^2. \end{aligned}$$



3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРИГИНАЛОВ

Далее рассматриваем нормальное перемещение на поверхности полупространства. Соответствующие изображения согласно (13) имеют вид

$$G_{0w1}^{HL}(q, s) = w_{10}^{HL}(q, 0, s) + w_{11}^{HL}(q, 0, s) = \frac{1}{2\pi} W_1^{FL}(q, s). \quad (14)$$

Здесь W_1^{FL} — изображение Лапласа по времени τ и Фурье по декартовой координате x (им соответствует верхний индекс F) соответствующей составляющей решения плоской задачи Лемба для моментно-упругой полуплоскости. Оно получено в [12] и записывается так:

$$W_1^{FL}(q, s) = \frac{2\gamma_1^8 s^4 q^2 k_0^2(q, s)}{k_{01}(q, s) R^2(q, s)}. \quad (15)$$

Его оригинал также найден в указанной работе ($H(\tau)$ — единичная функция Хевисайда):

$$W_1(x, \tau) = \sum_{j=0}^1 W_{1j}(x, \tau) H(\tau - \gamma_j |x|), \quad (16)$$

$$W_{10}(x, \tau) = \frac{16\gamma_1^4 \tau^4 R_{10}(x^2, \tau^2)}{\pi \sqrt{\tau^2 - x^2}}, \quad W_{11}(x, \tau) = \frac{2\gamma_1^4 \tau^2 R_{11}(x^2, \tau^2)}{\pi \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2}},$$

Здесь

$$R_{1j}(x^2, \tau^2) = \frac{(\tau^2 - x^2) P_j(x^2, \tau^2)}{P_3^2(x^2, \tau^2)}, \quad P_0(x^2, \tau^2) = (2\tau^2 - \gamma_1^2 x^2)^2 (\tau^2 - x^2),$$

$$P_1(x^2, \tau^2) = (\gamma_1^2 x^2 - 2\tau^2)^4 + 16\tau^4 (\tau^2 - x^2) (\tau^2 - \gamma_1^2 x^2),$$

а $P_3(x, \tau)$ — многочлен, имеющий следующий вид [15, 18]:

$$P_3(x, \tau) = \gamma_1^6 x^3 - 8\gamma_1^4 x^2 \tau + 8\gamma_1^2 (2 + \kappa) x \tau^2 - 8(1 + \kappa) \tau^3 = \gamma_1^6 (x - c_R^2 \tau) P_2(x, \tau),$$

$$P_3(c_R^2, 1) = 0, \quad P_2(x, \tau) = x^2 - 2a^2 x \tau + b^2 \tau^2, \quad a^2 = \frac{4}{\gamma_1^2} - \frac{c_R^2}{2}, \quad b^2 = 16 \frac{\gamma_1^2 - 1}{\gamma_1^8 c_R^2}$$

(c_R — скорость волн Релея).

При этом для дискриминанта $D_2(\kappa)$ многочлена P_2 имеют место следующие соотношения:

$$c_R < \gamma_1^{-1}, \quad D_2(\kappa) > 0 \quad (0 \leq \kappa < \kappa_* \approx 0,357), \quad D_2(\kappa_*) = 0, \quad D_2(\kappa) < 0 \quad (\kappa_* < \kappa < 1).$$

Далее для определенности ограничимся случаем $\kappa_* < \kappa$.

Равенства (14) позволяют найти оригинал функции G_{0w1}^{HL} с помощью утверждений о связи преобразований Фурье и Ханкеля [15, 18]. При этом учитываем, что для этой функции использовалось преобразование Ханкеля нулевого порядка. Кроме того, принимаем во внимание, что функция $W_1(x, \tau)$ — четная функция по x . В результате получаем (интегралы понимаются в смысле регуляризованных значений):

$$G_{0w1}(r, \tau) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{x W_1(x, \tau) dx}{(x^2 - r^2)^{3/2}} = -\frac{\gamma_1^2}{\pi} \sum_{j=0}^1 I_{1j}(r, \tau) H(\tau - \gamma_j r), \quad (17)$$



где

$$I_{1j}(r, \tau) = \frac{A_{1j} \gamma_1^2 \tau}{\pi} \int_{r^2/\tau^2}^{\gamma_j^{-2}} \frac{Q_{1j}(z) dz}{\sqrt{(1 - \gamma_j^2 z)(\tau^2 z - r^2)}}, \quad Q_{1j}(z) = \frac{R_{1j}(z, 1)}{\tau^2 z - r^2},$$

$$A_{10} = 8, \quad A_{11} = 1.$$

С помощью разложения рациональной части подынтегральной функции на элементарные дроби в последнем интеграле выделяем регулярную и сингулярную части:

$$I_{1j}(r, \tau) = \frac{A_{1j}}{\gamma_1^{10}} [K_{jr}(r, \tau) + K_{js}(r, \tau)], \quad (18)$$

где

$$K_{jr}(r, \tau) = \frac{1}{\pi \tau^2} \int_{r^2/\tau^2}^{\gamma_j^{-2}} \frac{\Phi_j(z, r^2/\tau^2)}{\sqrt{(1 - \gamma_j^2 z)(z - r^2/\tau^2)}} dz,$$

$$\Phi_j(z, \xi) = \left[\frac{F_j(z) - F_j(\xi)}{z - \xi} - \frac{F_j(z) - F_j(c_R^2)}{z - c_R^2} \right] \frac{1 - \xi}{(\xi - c_R^2)^2} -$$

$$- \frac{1 - c_R^2}{\xi - c_R^2} \frac{F_j(z) - F_j(c_R^2) - F'_j(c_R^2)(z - c_R^2)}{(z - c_R^2)^2},$$

$$F_j(z) = \frac{P_j(z, 1)}{P_2^2(z, 1)};$$

$$K_{js}(r, \tau) = h_{j1}(\tau) (r^2 - \tau^2 c_R^2)_+^{-3/2} + h_{j2}(r, \tau) (r^2 - \tau^2 c_R^2)_+^{-5/2},$$

$$h_{j1}(\tau) = -\frac{(1 - c_R^2)\tau}{2(1 - \gamma_j^2 c_R^2)^{3/2}} [\gamma_j^2 F_j(c_R^2) + 2(1 - \gamma_j^2 c_R^2) F'_j(c_R^2)],$$

$$h_{j2}(r, \tau) = -\tau \frac{(3 - c_R^2)\tau^2 - 2r^2}{2\sqrt{1 - \gamma_j^2 c_R^2}} F_j(c_R^2).$$

Достаточно просто доказывается, что функция $\Phi_j(z, \xi)$ доопределяется непрерывным образом:

$$\Phi_j(z, c_R^2) = -\frac{F_j(z) - F_j(c_R^2) - F'_j(c_R^2)(z - c_R^2)}{(z - c_R^2)^2}, \quad \Phi_j(c_R^2, c_R^2) = -\frac{1}{2} F''_j(c_R^2).$$

Выясним, как ведет себя функция $G_{0w1}(r, \tau)$ на границах носителя ее составляющих. Прежде всего, отметим, что носителями слагаемых в (17) и функций $K_{js}(r, \tau)$ являются множества $\tau \geq \gamma_j r$ и $r \geq c_R \tau$ соответственно. При этом функции $K_{jr}(r, \tau)$ в (18) непрерывны и для них справедливы равенства

$$\lim_{\tau \rightarrow \gamma_j r + 0} K_{jr}(r, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} K_{jr}(r, \tau) = 0. \quad (19)$$

Функция $K_{js}(r, \tau)$ при $\tau = \gamma_j r$ принимает конечное значение:

$$K_{js}(r, \gamma_j r) = -\frac{\pi}{r^3 (1 - \gamma_j^2 c_R^2)^3} \{ (1 - c_R^2) (1 - \gamma_j^2 c_R^2) F'_j(c_R^2) +$$



$$+F_j(c_R^2) [(2 - c_R^2) \gamma_j^2 - 1] \}, \quad (20)$$

а на фронте волны Релея коэффициенты h_{j1} и h_{j2} при ее сингулярных составляющих определяются так:

$$\begin{aligned} h_{j1}(r/c_R) &= -\frac{(1 - c_R^2)r}{2c_R(1 - \gamma_j^2 c_R^2)^{3/2}} [\gamma_j^2 F_j(c_R^2) + 2(1 - \gamma_j^2 c_R^2) F'_j(c_R^2)], \\ h_{j2}(r, r/c_R) &= -\frac{3(1 - c_R^2)r^3}{2c_R^3 \sqrt{1 - \gamma_j^2 c_R^2}} F_j(c_R^2). \end{aligned} \quad (21)$$

Окончательно с учетом неравенств $1 < \gamma_1 < c_R^{-1}$ из (17)–(21) получаем:

$$\begin{aligned} G_{0w1}(r, \tau) &= 0 \quad (\tau < r), \quad \lim_{\tau \rightarrow r+0} G_{0w1}(r, \tau) = -\frac{A_{10}}{\pi \gamma_1^8} K_{0s}(r, r), \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} G_{0w1}(r, \tau) = 0, \\ \lim_{\tau \rightarrow \gamma_1 r-0} G_{0w1}(r, \tau) &= -\frac{A_{10}}{\pi \gamma_1^8} [K_{0r}(r, \gamma_1 r) + K_{0s}(r, \gamma_1 r)], \\ \lim_{\tau \rightarrow \gamma_1 r+0} G_{0w1}(r, \tau) &= \lim_{\tau \rightarrow \gamma_1 r-0} G_{0w1}(r, \tau) - \frac{A_{11}}{\pi \gamma_1^8} K_{1s}(r, \gamma_1 r), \\ \lim_{\tau \rightarrow r/c_R+0} G_{0w1}(r, \tau) &= -\frac{1}{\pi \gamma_1^8} [A_{10} K_{0r}(r, r/c_R) + A_{11} K_{1r}(r, r/c_R)]. \end{aligned}$$

Следовательно, график этой функции при фиксированных r имеет в точках $\tau = r$ и $\tau = \gamma_1 r$ разрывы первого рода, а в точке $\tau = r/c_R$ левую вертикальную асимптоту.

Отметим, что решение осесимметричной задачи Лемба для упругой среды имеет степенную особенность порядка $-3/2$ на фронте волны Релея $r = c_R \tau$. Для моментной же среды, как вытекает из формул (17) и (18), появляется дополнительная особенность порядка $-5/2$. Кроме того, обращает на себя внимание тот факт, что рассмотренное первое приближение для нормального перемещения не содержит фронта волны кручения.

4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

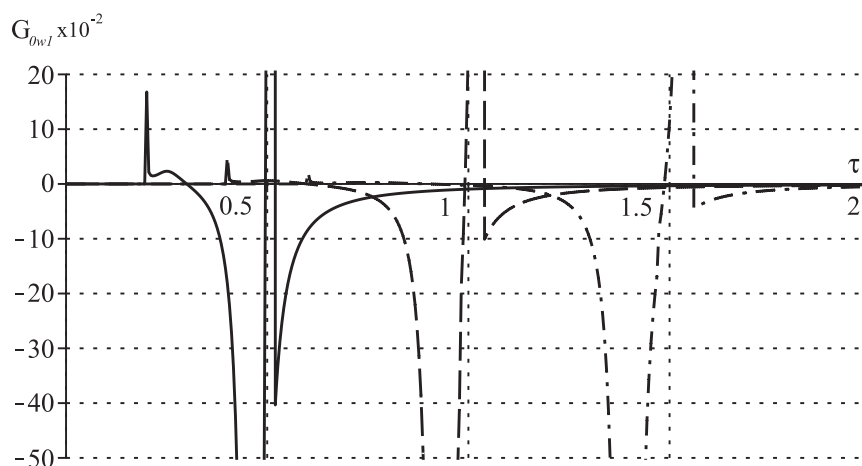
Полагаем, что материалом, заполняющим полупространство, является зернистый композит из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице со следующими физическими характеристиками [2]:

$$\lambda = 7.59 \text{ ГПа}; \quad \mu = 1.89 \text{ ГПа}; \quad \alpha = 7.45 \text{ МПа}; \quad \gamma + \varepsilon = 2.64 \text{ кН}; \quad J = 0.429 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м.}$$

В качестве характерного линейного размера принимаем $L = 1\text{ м}$. При этом безразмерные параметры таковы:

$$\gamma_1 = 2,45; \quad \gamma_2 = 0,92; \quad \alpha = 0,66 \cdot 10^{-3}; \quad \beta = 5,1 \cdot 10^6; \quad c_R^2 = 0,148.$$

На рисунке представлены зависимости функций влияния G_{0w1} от времени τ для трех радиусов: $r = 0.2$, $r = 0.4$ и $r = 0.6$.



Зависимости функции G_{0w1} от времени τ : сплошная кривая соответствует $r = 0.2$, пунктирная — $r = 0.4$, а штрихпунктирная — $r = 0.6$
 The function G_{0w1} depends on time τ : the solid curve corresponds $r = 0.2$, dashed — $r = 0.4$, dot-dash — $r = 0.6$

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-08-00471).

Библиографический список

1. *Cosserat E., Cosserat F.* Theorie des corps deformables. P. : Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
2. *Ерофеев В. И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М. : Изд-во МГУ, 1999. 328 с.
3. *Кулеш М. А., Шардаков И. Н.* Построение и анализ некоторых точных аналитических решений двумерных упругих задач в рамках континуума Коссера // Вестн. ПГТУ. Математическое моделирование систем и процессов. 2001. № 9. С. 187–201.
4. *Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д. В.* Распространение нестационарных кинематических возмущений от сферической полости в псевдоконтинууме Коссера // Механика композиционных материалов и конструкций. 2011. Т. 17, № 2. С. 184–195.
5. *Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д. В.* Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от поверхности шара, заполненного псевдоупругой средой Коссера // Электронный журн. «Труды МАИ». 2012. № 53. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29267/> (дата обращения: 19.04.2012).
6. *Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д. В.* Дифракция нестационарных волн на сферической полости в псевдоконтинууме Коссера // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. 2013. Т. 5, № 1. С. 119–125.
7. *Пальмов В. А.* Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28, вып. 6. С. 1117–1120.
8. *Белоносов С. М.* Моментная теория упругости: (Статика). Владивосток : Дальнаука, 1993. 148 с.
9. *Бытев В. О., Слезко И. В.* Решение задач асимметричной упругости // Математическое и информационное моделирование : сб. науч. тр. Тюмень : Вектор Бук, 2008. Вып. 10. С. 27–32.
10. *Атоян А. А., Саркисян С. О.* Динамическая теория микрополярных упругих тонких пластин // Экол. вестн. науч. центров ЧЭС. 2004. № 1. С. 18–29.
11. *Hirdeshwar S. Saxena, Ranjit S. Dhaliwal.* Eigenvalue approach to axially-symmetric coupled micropolar thermoelasticity // Bull. Pol. Acad. Sci. Techn. Sci. 1990. Vol. 38, № 1. P. 7–18.



12. Суворов Е. М., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Плоская задача об ударе твердого тела по полупространству, моделируемому средой Коссера // ПММ. 2012. Т. 76, Вып. 5. С. 850–859.
13. Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д. В. Нестационарное осесимметричное движение упругого моментного полупространства под действием нестационарных нормальных поверхностных перемещений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2017. Т. 159, кн. 2. С. 231–245.
14. Новацкий В. Теория упругости. М. : Мир, 1975. 872 с.
15. Горшков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В. Волны в сплошных средах. М. : Физматлит, 2004. 472 с.
16. Слепьян Л. И. Нестационарные упругие волны. Л. : Судостроение, 1972. 351 с.
17. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости. М. : Наука, 1986. 328 с.
18. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. М. : Физматлит, 1995. 352 с.

Образец для цитирования:

Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д. В. Осесимметричная задача Лемба для среды Коссера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 496–506. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-496-506>

Axisymmetric Problem Lemba for the Cosserat Medium

Tran Le Thai, D. V. Tarlakovskii

Tran Le Thai, <https://orcid.org/0000-0002-8733-6150>, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoye Shosse, Moscow 125993, Russia, tranlethaivvk@gmail.com

Dmitrii V. Tarlakovskii, <https://orcid.org/0000-0002-5694-9253>, Institute of Mechanics Lomonosov Moscow University, 1 Michurinsky Ave., Moscow 119192, Russia; Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoye Shosse, Moscow 125993, Russia, tdvhome@mail.ru

The article deals with elastic homogeneous isotropic half-space filled with the Cosserat medium. At the initial instant of time and at infinity, there are no perturbations. At the boundary of the half-space, normal pressures are given. All the components of the stress-strain state are supposed to be limited. A cylindrical coordinate system is used with an axis directed inward into the half-space. With allowance for axial symmetry, the resolving system of equations includes three hyperbolic equations with respect to the scalar potential and the non-zero components of the vector potential and the rotation vector. The components of displacement vectors, rotation angle, stress tensors and stress moments are related to the potentials by known relationships. The solution of the problem is sought in the form of generalized convolutions of a given pressure with the corresponding surface influence functions. To construct the latter, Hankel transformations along the radius and Laplace transformations are applied in time. We use the expansion in power series for a small parameter characterizing the connection between the shear and rotation waves. The images of the first two coefficients of these series are found. The corresponding originals are determined by the connection between the plane and axisymmetric problems. Examples of calculations of the regular components of the influence of a granular composite from an aluminum shot in an epoxy matrix are given.

Key words: Cosserat medium, surface influence functions, Laplace and Hankel integral transformations, the small parameter method, connection between plane and axisymmetric problems.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-08-00471).



References

1. Cosserat E., Cosserat F. *Theorie des corps deformables*. Paris, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p. (in French).
2. Erofeev V. I. *Volnovye processy v tverdyh telah s mikrostrukturoj* [Wave Processes in Solids with Microstructure]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1999. 328 p. (in Russian).
3. Kulesh M. A., Shardakov I. N. Construction and analysis of some exact analytic solutions of two-dimensional elastic problems within the Cosserat continuum. *Vestn. PGTU. Matematicheskoe modelirovanie sistem i processov* [Bulletin of Perm State Technical University. Mathematical modeling of systems and processes], 2001, no. 9, pp. 187–201 (in Russian).
4. Lai Thanh Tuan, Tarlakovsky D. V. Propagation of non-stationary kinematic perturbations from a spherical cavity in the Cosserat pseudocontinuum. *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.* [Mechanics of composite materials and structures], 2011, vol. 17, no. 2, pp. 184–195 (in Russian).
5. Lai Thanh Tuan, Tarlakovsky D. V. Propagation of nonstationary axisymmetric perturbations from the surface of a sphere filled with a Cousser pseudoelastic medium. *Online journal "Trudy MAI"*, 2012, no. 53. (in Russian). Available at: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29267/> (accessed 19 April 2012).
6. Lai Thanh Tuan, Tarlakovsky D. V. Diffraction of waves by a spherical cavity in the Cosserat pseudo-continuum. *Radioelectron., Nanosist., Inf. Tekhnol.*, 2013, vol. 5, no. 1, pp. 119–125 (in Russian).
7. Palmov V. A. Basic equations of the theory of asymmetric elasticity. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1964. vol. 28, iss. 6. pp. 1117–1120 (in Russian).
8. Belonosov S. M. *Momentnaya teoriya uprugosti: (Statika)* [Moment theory of elasticity: (Statics)]. Vladivostok, Dal'nauka Publ., 1993. 148 p. (in Russian).
9. Bytev V. O., Slezko I. V. Solution of asymmetric elasticity problems. *Mathematical and Informational Modeling* : Collection of scientific papers. Tyumen : Vector Beech, 2008, iss. 10, pp. 27–32 (in Russian).
10. Atoyan A. A., Sarkisyan S. O. Dynamic theory of micropolar elastic thin plates. *Ekol. vestn. nauch. tsentrov CHES*, 2004, no. 1, pp. 18–29 (in Russian).
11. Hirdeshwar S. Saxena, Ranjit S. Dhaliwal. Eigenvalue approach to axially-symmetric coupled micropolar thermoelasticity. *Bull. Pol. Acad. Sci. Techn. Sci.*, 1990, vol. 38, no. 1, pp. 7–18.
12. Suvorov E. M., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium. *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 511–518. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015>
13. Tran Le Thai, Tarlakovskii D. V. Nonstationary axisymmetric motion of an elastic momentum semi-space under non-stationary normal surface movements. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 2, pp. 231–245 (in Russian).
14. Novatsky V. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Mir, 1975. 872 p. (in Russian).
15. Gorshkov A. G., Medvedskii A. L., Rabinskii L. N., Tarlakovskii D. V. *Volny v sploshnyh sredah* [Waves in Continuous Media]. Moscow, Fizmatlit, 2004. 472 p. (in Russian).
16. Slepian L. I. *Nestacionarnye uprugie volny* [Non-stationary elastic waves]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1972. 351 p. (in Russian).



17. Poruchikov V. B. *Metody dinamicheskoy teorii uprugosti* [Methods of the Dynamic Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka, 1986. 328 p. (in Russian).
18. Gorshkov A. G, Tarlakovskii D. V. *Dinamicheskie kontaktnye zadachi s podvizhnymi granicami* [Dynamic contact problems with moving boundaries]. Moscow, Fizmatlit, 1995. 352 p. (in Russian).

Cite this article as:

Tran Le Thai, Tarlakovskii D. V. Axisymmetric Problem Lemba for the Cosserat Medium. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 496–506 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-496-506>
