



УДК 534.014

О СЛОЖНОЙ ДИНАМИКЕ В ПРОСТЕЙШИХ ВИБРАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ С ТРЕНИЕМ НАСЛЕДСТВЕННОГО ТИПА

Л. А. Игумнов, В. С. Метрикин

Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук, директор Научно-исследовательского института механики, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, Россия, 603950, Нижний Новгород, просп. Гагарина, 23, Igumnov@mech.unn.ru

Метрикин Владимир Семенович, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, Россия, 603950, Нижний Новгород, просп. Гагарина, 23, v.s.metrikin@mail.ru

В настоящей работе исследуется динамика ряда вибрационных систем с учетом сил сухого трения наследственного типа и ограничителя колебаний. Взаимодействие ограничителя колебаний и вибрационной системы происходит согласно гипотезе Ньютона. Разработана общая математическая модель систем, представляющая собой сильно нелинейную неавтономную систему с переменной структурой. Изучение динамики математической модели проводится численно-аналитическим способом с использованием математического аппарата метода точечных отображений. Особенность в подходе исследования состоит в том, что точечное отображение формируется не классическим способом (отображение поверхности Пуанкаре в себя), а по временам относительного покоя вибрационной системы, что значительно облегчило сам процесс построения точечного отображения и его детального изучения. Наличие плавающих границ пластинок скользящих движений потребовало создания оригинального подхода в построении точечного отображения и интерпретации полученных результатов. С помощью разработанной методики исследования и созданного программного продукта изучена структура фазового портрета математической модели в зависимости от характеристик сил трения скольжения и покоя, а также от типа и места расположения ограничителя. По характеру изменения бифуркационных диаграмм удалось выяснить основные закономерности процесса перестроек режимов движения (возникновение периодических режимов движения произвольной сложности и возможный переход к хаосу через процесс удвоения периода) при изменении параметров вибрационной системы (амплитуда и частота периодического воздействия, формы функциональной зависимости, описывающей изменение величины коэффициента трения относительного покоя). В работе также проведено сравнение результатов с учетом и без учета ограничителя колебаний.

Ключевые слова: математическая модель, трение наследственного типа, функция последования, относительный покой, неподвижная точка, хаос.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-433-446>

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что в большинстве случаев силы трения играют чисто демпфирующую роль, благодаря чему происходит затухание свободных колебаний, уменьшаются амплитуды вынужденных колебаний, расширяются области устойчивости и т.д. Однако для целого ряда динамических систем эти силы выступают как дестабилизирующий фактор, т.е. учет в системе даже малых сил трения порождает неустойчивые состояния равновесия [1–6]. Именно к таким системам можно отнести фрикционные



автоколебательные системы (ФАС). Фрикционные автоколебания связаны с нестабильностью процесса трения при относительно малых скоростях скольжения и являются одним из наиболее распространенных видов механических автоколебаний. Об этом впервые экспериментально и теоретически было указано еще в работах А. Ю. Ишлинского и И. В. Крагельского (см. [1] и приведенную в ней библиографию), а затем в многочисленных исследованиях отечественных [2–6] и зарубежных исследователей [7–11]. Проблема моделирования и исследования динамических систем при учете сил сухого трения до сих пор остается актуальной.

Провоцируемые трением самовозбуждающиеся колебания, получившие название фрикционных автоколебаний, имеют огромное значение в инженерной практике. Они, как правило, приводят к избыточному износу оборудования, поломкам, нежелательному шуму и вибрациям, а также другим неблагоприятным эффектам. Встречаются они повсеместно. Для целого ряда машин и механизмов характерна работа при относительно малых скоростях скольжения в условиях нестабильного трения. Примерами механизмов и технических приспособлений, где проблема фрикционных автоколебаний играет большую роль, являются буровые установки, тормозные устройства, подшипники скольжения, механизмы фрикционного сцепления. Большую роль эта проблема, и в особенности связанные с такими колебаниями вибрации, играет также в станкостроении [12–19].

Вибрации в станках влияют на точность и качество обработки изделий, а также на их надежность и производительность. Автоколебания в станках возникают при установочных перемещениях рабочих элементов станка и в процессе обработки изделия. Вибрации в процессе обработки ограничивают допустимые режимы, нарушают точность установки, ухудшают точность обработки, приводят к неровностям и другим дефектам. Любые вибрации приводят к избыточному износу деталей станка и увеличивают вероятность поломки. Также нежелательным является повышенный шум, создаваемый вибрациями.

Другая сфера деятельности, где самовозбуждающиеся колебания не только встречаются, но и играют большую роль, — это нефтедобыча [?]. В процессе бурения в буре могут возникать разные виды вибраций. Наиболее разрушительными из них являются вибрации, возникающие в результате фрикционных автоколебаний, создаваемых трением бура о стенки скважины в нижней его части, и автоколебаний, создаваемых трением долота (наконечника бура) о дно скважины. Такие вибрации могут приводить к износу и поломке бура, а также повреждать стенки скважины, затрудняя контроль над направлением бурения. В случае поломки бура может потребоваться замена бурового оборудования. Учитывая, что всё чаще бурение нефтяных скважин проводится во всё более труднодоступных местах, это может быть довольно проблематично и дорого. Помимо этого замена бура при поломке требует извлечения бура, очистки скважины от обломков бура, что само по себе может быть нетривиальной задачей, и спуска бура обратно в скважину прежде чем бурение может быть возобновлено. Нетрудно видеть, что такая операция требует значительных затрат времени.

По этим причинам автоколебания были удостоены детального внимания ученых. Модель груза на движущейся ленте для изучения фрикционных автоколебаний была предложена еще Ван-дер-Подем в 1930 г. Впоследствии многие варианты этой модели были рассмотрены для изучения поведения различных физических систем и аспектов динамики автоколебательных систем (см. [6–10] и приведенную в них



литературу). В частности, были рассмотрены различные модели трения скольжения. Одна вариация, которая не получила достаточного внимания, — это вариация с моделью трения покоя, при которой коэффициент трения относительного покоя считается не постоянным, а зависимым от длительности относительного покоя [1–5].

Факт зависимости коэффициента трения покоя известен экспериментальной науке уже давно и именно в связи с фрикционными колебаниями. Этот факт был одним из стимулов в развитии науки о трении. Впервые эту тему поднял Боуден [19], обнаружив экспериментально явление скачкообразного перемещения соприкасающихся поверхностей. Он попытался объяснить это явление свариванием неровностей соприкасающихся поверхностей в точках контакта, периодически возникающим при их скольжении. Это спровоцировало активное обсуждение в научной литературе природы этого явления и его возможных объяснений.

А. Ю. Ишлинский и И. В. Крагельский [1] на основании известных на то время исследований выдвинули предположение, что скачкообразное перемещение соприкасающихся поверхностей должно объясняться зависимостью коэффициента трения относительного покоя от времени контакта двух тел. В более поздних работах (например, [20]), Крагельский дал подробное описание возможного механизма зависимости силы коэффициента трения покоя от времени и вывод формулы зависимости на основе предложенного механизма.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Опубликование в [1] А. Ю. Ишлинским и И. В. Крагельским гипотезы о том, что коэффициент трения относительного покоя при движении двух трущихся тел не является постоянной величиной, а зависит от времени их «предыдущего» совместного движения с одинаковыми скоростями, привлекло внимание учёных, правда, с большой временной задержкой, занимающихся исследованием систем с трением (см. [2–4] и приведённую в них библиографию). В этих работах на примере простейших нелинейных автономных динамических систем приведён ряд новых результатов. Было показано, что по сравнению с известными исследованиями систем с постоянным КТОП в системах с переменным КТОП существуют сколь угодно сложные периодические и стохастические режимы движения. Динамические вибрационные системы, схемы которых совпадают со схемами, изученными в работах [2–4], рассматривались и зарубежными учеными (см. [7–11] и приведённую в них библиографию), однако в них не была использована гипотеза А. Ю. Ишлинского и И. В. Крагельского о наследственности КТОП. В этих работах использовали классическую модель трения покоя.

Физическая система (рис. 1), послужившая основой для составления математической модели, представляет собой тело массы m , прикрепленное к неподвижной опоре посредством пружины с коэффициентом жесткости k и находящееся на движущейся шероховатой очень длинной ленте с постоянной скоростью V_0 , [1, 3, 4]. Сила трения между телом и лентой — кусочно-гладкая функция относительной скорости $\dot{x} - V_0$, разрывная при $\dot{x} = V_0$. Математическую модель исследуемой системы можно записать в виде [3, 4]

$$m\ddot{x} = -kx - f_* P \operatorname{sgn}(\dot{x} - V_0), \quad \dot{x} \neq V_0, \\ k|x| \leq f(t_k)P, \quad \dot{x} = V_0,$$

где P — сила давления на контакт, f_* — коэффициенты трения скольжения; $f(t_k)$ — коэффициент трения относительного покоя. Предполагается, согласно работе [1],

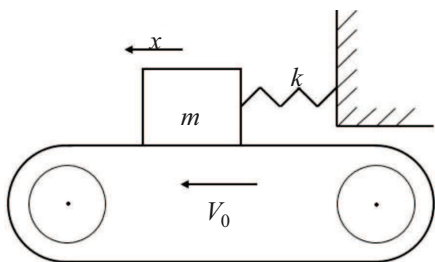


Рис. 1. Простейшая схема вибрационной системы без ограничителя колебаний

Fig. 1. Simplest scheme of a vibrational system without a vibration limiter

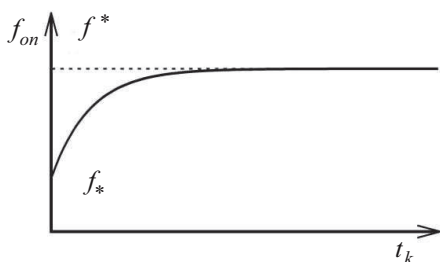


Рис. 2. Качественный вид функциональной зависимости КТОП от времени относительного покоя тела с лентой

Fig. 2. Qualitative form of the functional dependence of CFRR on the duration of relative rest time of the body with the belt

диаграмма, где по оси абсцисс отложены значения параметра ε^* , а по оси ординат даны значения времен относительного покоя тела с лентой при движении изображающей точки по полупрямой $L(\xi \geq -1, \dot{\xi} = \theta)$ ($\theta = 1.6$).

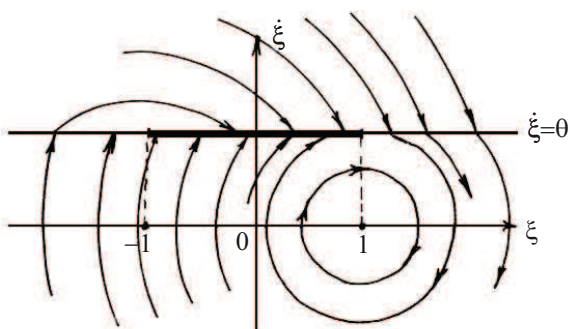


Рис. 3. Фазовый портрет простейшей вибрационной системы

Fig. 3. Phase portrait of the simplest vibrational system

что коэффициент трения относительного покоя $f(t_k)$ является монотонно возрастающей функцией времени относительного покоя тела и ленты (рис. 2). Пусть коэффициент трения скольжения f_* постоянен.

В безразмерном времени $\tau = \omega t$, координате $\xi = kx/(f_*P)$ и параметре $\varepsilon^* = (f^* - f_*)/f_*$, характеризующим форму коэффициента трения относительного покоя, уравнения движения перепишутся в виде

$$\ddot{\xi} = -\xi - \text{sgn}(\xi - \theta), \quad \dot{\xi} \neq 0, \quad (1)$$

$$|\xi| \leq 1 + \varepsilon(\tau_k), \quad \dot{\xi} = 0. \quad (2)$$

Здесь $\theta = \frac{V_0 \sqrt{mk}}{f_* P}$, $\varepsilon(\tau_k) = \frac{f(t^* \tau_k / \varepsilon^*) - f_*}{f_*}$.

Качественный вид разбиения на траектории фазовой плоскости $\xi \dot{\xi}$ уравнений (1), (2) приведен на рис. 3.

Из поведения траекторий следует, что прямая $\dot{\xi} = \theta$ содержит отрезок скользящих движений $|\xi| \leq 1, \dot{\xi} = \theta$, а также часть плоскости, где происходят незатухающие колебания при наличии трения. В работах [3, 4] показано, что в такой простейшей, на первый взгляд, динамической системе при учете трения наследственного типа существуют сколь угодно сложные периодические и стохастические режимы движения.

Так, на рис. 4 представлена бифуркационная

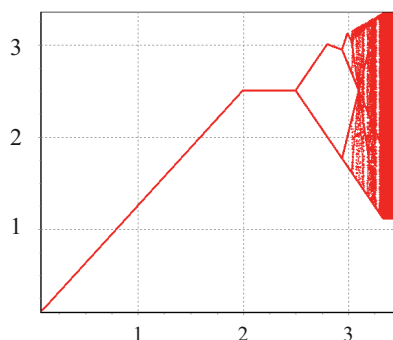


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма по параметру ε^* для простейшей вибрационной системы

Fig. 4. Bifurcation diagram for the parameter ε^* for the simplest vibrational system



Из рис. 4 следует, что сначала с ростом ε^* существуют периодические движения тела с одним длительным контактом тела с лентой (относительный покой), величина которого растет, затем имеется интервал, где величина длительного контакта с ростом ε^* остается неизменной, и затем наблюдается известный процесс удвоения периода (движения с двумя длительными контактами, четырьмя и т. д.), приводящий, как и ожидалось, к хаотическому движению тела. Характеристика КТОП принималась в виде кусочно-линейной функции вида

$$\varepsilon(\tau_k) = \begin{cases} \tau_k, & 0 < \tau_k < \varepsilon^*, \\ \varepsilon^*, & \tau_k \geq \varepsilon^*. \end{cases}$$

Рассмотрим физическую схему, представленную на рис. 5. Такая схема может представлять при некоторых идеализациях схемы различных механизмов, таких как устройства для бурения глубоких нефтяных скважин [?], для сверления глубоких отверстий [12–18], для различных строительных производств [6] и др.

Груз закреплен пружиной жесткости k к неподвижной опоре рис. 5. На груз действует сила трения и периодическая внешняя сила $f(t)$. Движение груза по направлению движения ленты ограничено стенкой, находящейся на расстоянии a от положения равновесия груза при неподвижной ленте. Системы такого вида с небольшими вариациями хорошо известны и многие ее вариации хорошо изучены. Известно, что простейшая система такого вида без внешней силы и без стенки имеет один устойчивый предельный цикл в ее фазовом пространстве. Вариации такой системы с альтернативными моделями трения относительного покоя получили мало внимания в научной литературе. Здесь также предполагается, что коэффициент трения скольжения f_* является постоянной величиной, а коэффициент трения относительного покоя согласно гипотезе А. Ю. Ишлинского и И. В. Крагельского [1] есть непрерывная монотонно возрастающая функция времени t_k длительного контакта (совпадение скоростей массы и ленты) этих тел (см. рис. 2). В качестве математической модели сил трения в работе выбрано трение Кулона – Амонтона. Удар о стенку принимается мгновенным, с коэффициентом восстановления скорости R .

Математическую модель рассматриваемой системы (см. рис. 5) можно записать в виде

$$m\ddot{x} + kx = f(t) - f_*P \operatorname{sgn}(\dot{x} - V(t)), \quad \dot{x} \neq V(t), \quad x < a, \quad (3)$$

$$|kx - f(t) + m\dot{V}(t)| \leq f_{on}(t_k)P, \quad \dot{x} = V(t), \quad x < a, \quad (4)$$

$$\dot{x}^+ = -R\dot{x}^-, \quad x = a, \quad \dot{x}^- > 0, \quad (5)$$

где первое уравнение описывает закон движения тела с учётом коэффициента трения скольжения f_* и со скоростью, отличной от скорости ленты, второе неравенство устанавливает соотношение сил, при выполнении которого происходит движение тела со

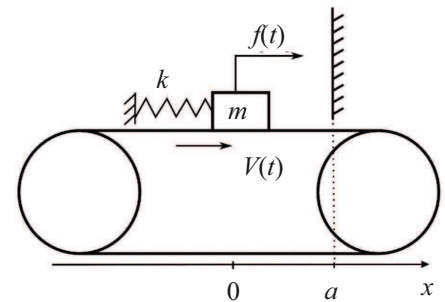


Рис. 5. Простейшая схема вибрационной системы с ограничителем колебаний и внешним возбуждением тела и ленты

Fig. 5. Simplest scheme with a vibration limiter and external perturbation of the body with the belt



скоростью, равной скорости ленты с учётом формы КТОП — $f_{on}(\tau_k)$ (см. рис. 2). Третье уравнение описывает модель удара груза о стенку. Здесь скорость тела — непосредственно до и после ударного взаимодействия.

Вводя безразмерные время $\tau = \omega t$, переменную $\xi = kx/f_*P$ и параметры $\theta = V(t)\sqrt{km}/f_*P$, $\omega = \sqrt{k/m}$, систему (3)–(5) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \xi + \operatorname{sgn} \dot{\xi} - \theta &= F(\tau), \quad \dot{\xi} \neq \theta, \quad \xi < b, \\ |\xi - F(\tau) + \dot{\theta}| &\leq 1 + \varepsilon_k, \quad \dot{\xi} = \theta, \quad \xi < b, \\ \dot{\xi}^+ &= -R\xi^-, \quad \xi = b, \quad \dot{\xi}^- > 0, \end{aligned}$$

где $b = ka/f_*P$, $\varepsilon(\tau) = (f_{on}(\tau) - f_*)/f_*$, $\varepsilon_k = \varepsilon(\tau_k)$, а $F(\tau) = f(\tau/\omega)/f_*P$ — безразмерная внешняя сила.

2. СТРУКТУРА ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Так как система неавтономна и описывается дифференциальным уравнением второго порядка с переменной структурой, то её состоянием является тройка $\{\xi, \dot{\xi}, \tau\}$, а фазовое пространство соответственно трехмерное. Траектории в нём могут существовать только в полупространстве $\xi \leq b$. Фазовое пространство поверхностью ($\dot{\xi} = \theta$) также разделено на подпространства $\Phi_1(\xi, \dot{\xi} > \theta, \tau)$ и $\Phi_2(\xi, \dot{\xi} < \theta, \tau)$, поведение фазовых траекторий в которых описывается соответственно уравнениями

$$\ddot{\xi} + \xi = F(\tau) - 1, \quad \text{при } \dot{\xi} > \theta, \tag{6}$$

$$\ddot{\xi} + \xi = F(\tau) + 1, \quad \text{при } \dot{\xi} < \theta. \tag{7}$$

Можно показать, что на поверхности Π существует пластинка скользящих движений [21, 22] Π_c , ограниченная кривыми Γ_1 и Γ_2 :

$$\Gamma_1 : \begin{cases} \xi = 1 + F(\tau), \\ \dot{\xi} = \theta, \end{cases} \quad \Gamma_2 : \begin{cases} \xi = -1 + F(\tau), \\ \dot{\xi} = \theta. \end{cases}$$

При попадании изображающей точки на поверхность Π_c её движение будет изменяться по закону

$$\xi(\tau) = \theta(\tau - \tau_p) + \xi_p, \quad \dot{\xi}(\tau) = \theta,$$

где $\{\xi_p, \tau_p\} \in \Pi_c$, $\tau \geq \tau_p$.

Качественный вид поведения фазовых траекторий в фазовом пространстве системы, включая участки, когда скорости ленты и тела равны (длительные относительные «остановки» (ДОО)), приведён на рис. 6. Из этого рисунка видно, что в фазовом пространстве системы возможен тип траекторий без ДОО, для которых выполняется неравенство $\dot{\xi} < \theta$. В работе в дальнейшем принято $F(t) = A \cos(\Omega t)$. Безразмерная функциональная зависимость КТОП $\varepsilon(\tau_k)$ от времени τ_k длительного контакта принималась в виде монотонно не убывающей кусочно-непрерывной функции вида

$$\varepsilon(\tau_k) = \begin{cases} \varepsilon_* \tau_k, & \tau_k \leq \varepsilon, \\ \varepsilon_*, & \tau_k \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Исходя из того, что уравнения (6), (7) линейны, их общие решения будут записываться, как известно, в виде

$$\begin{cases} \xi_i(\tau) = C_{2i-1} \cos(\tau) + C_{2i} \sin(\tau) + (-1)^i + \xi_F(\tau), \\ \dot{\xi}_i(\tau) = -C_{2i-1} \sin(\tau) + C_{2i} \cos(\tau) + \dot{\xi}_F(\tau), \end{cases} \quad (-1)^i \dot{\xi} < (-1)^i \theta(\tau), \quad i = 1, 2,$$



$$C_{2i-1} = (\xi_i - \xi_F(\tau_i) + (-1)^{i+1}) \cos \tau_i - (\dot{\xi}_i + \dot{\xi}_F(\tau_i)) \sin \tau_i + \xi_F(\tau) + (-1)^i,$$

$$C_{2i} = (\dot{\xi}_i + \dot{\xi}_F(\tau_i)) \cos \tau_i + (\xi_i + \xi_F(\tau_i) + (-1)^{i+1}) \sin \tau_i + \dot{\xi}_F(\tau),$$

где $\xi_F(\tau) = \frac{A}{1 + \Omega^2} \cos(\Omega\tau)$.

Так как изображающая точка почти всегда попадает на пластинку скользящих движений, динамику системы можно исследовать с помощью изучения свойств точечного отображения границы Γ_1 (Γ_2) в себя, либо свойств числовой последовательности, элементы которой равны временам τ_k , $k = 1, 2, 3 \dots$ ДОО, как показано на рис. 7, где стрелками в плоскости Π_c обозначены траектории изображающей точки при ДОО.

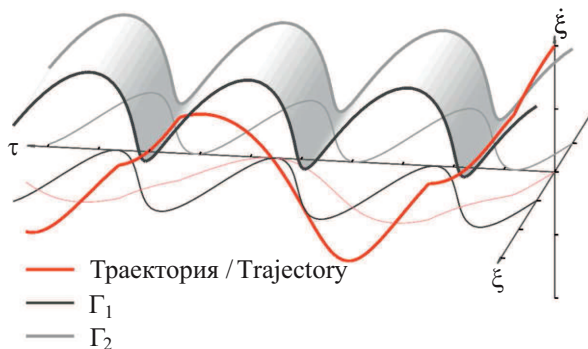


Рис. 6. Фазовый портрет простейшей схемы вибрационной системы с ограничителем колебаний и внешним возбуждением тела и ленты

Fig. 6. Phase portrait of the simplest scheme of a vibrational system with a vibration limiter and external perturbation of the body and the belt

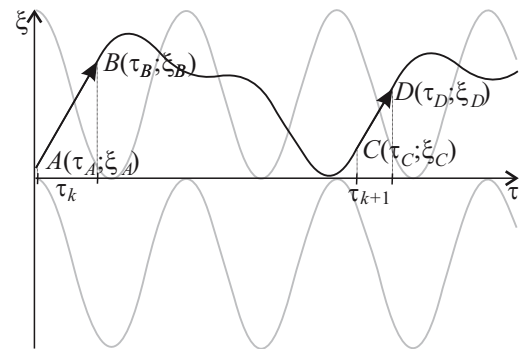


Рис. 7. Зависимости от времени траекторий движений тела в моменты времени относительного покоя тела иленты

Fig. 7. Trajectories of the body motion during the relative rest time of the body and the belt as a function of time

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Для исследования динамики рассматриваемой системы с использованием функции последования разработан программный продукт на платформе Java, позволяющий при различных значениях параметров системы производить расчеты и построения в трехмерном фазовом пространстве фазовых траекторий, вид функции последования, бифуркационных диаграмм и др.

На рис. 8 изображены бифуркационные диаграммы, демонстрирующие эффект стенки на поведение системы. Горизонтальная ось обозначает изменяемый параметр, вертикальная — время совместного движения тела с лентой. На рис. 8, а изображена бифуркационная диаграмма системы без стенки. При её построении внешняя сила была выбрана постоянной, равной нулю, а скорость ленты — следующей функцией $\theta(t) = 1.41 + 0.1 \cos(\Omega t)$. Параметр кусочно-линейной функции КТОП равен 3, координаты начальной точки $\{0, 5, 0\}$ ($\{\xi, \dot{\xi}, \tau\}$). Рис. 8, б, в отличаются от рис. 8, а только присутствием стенки. На обеих диаграммах (см. рис. 8, б, в) значение коэффициента R выбрано 0.5, а координата стенки соответственно — 4.025 и 4.05.



Диаграмма 8, *г* демонстрирует влияние изменения координаты стенки на одно из сечений диаграммы на рис. 8, *а*. На рис. 8, *г* все параметры совпадают с параметрами, выбранными для рис. 8, *а*, значение Ω выбрано 3.22.

На рис. 8, *д*, *е* изображены диаграммы по координате стенки и коэффициенту восстановления скорости при ударе соответственно для одних и тех же значений параметров. Скорость ленты была выбрана постоянно равной 1. Вид функции внешней силы $F(t) = 0.25 \cos(2t)$, параметр кусочно-линейной функции КТОП равен 3, координата начальной точки $\{0, 5, 0\}$, координата стенки 2, коэффициент $R = 0.5$.

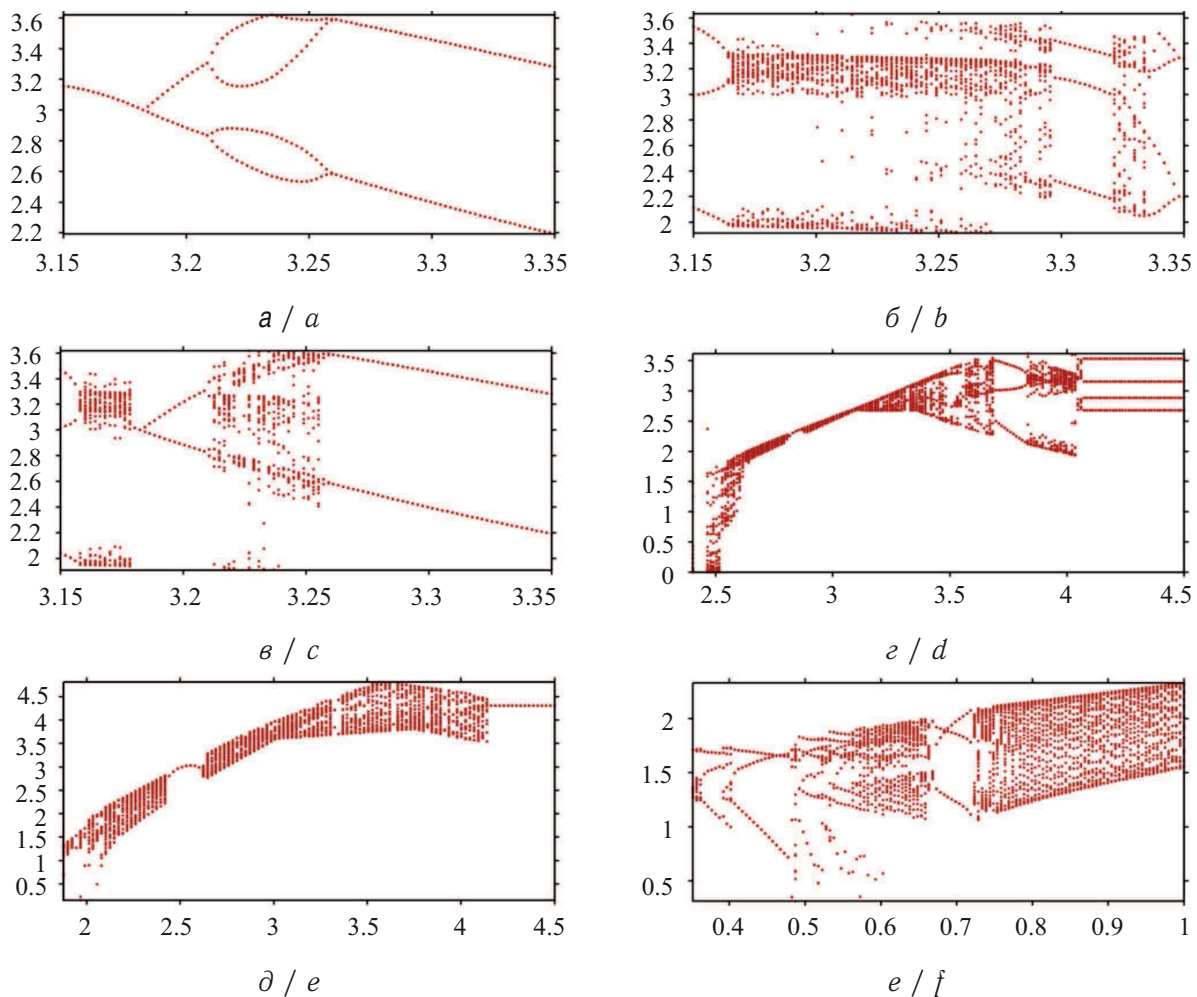


Рис. 8. Бифуркационные диаграммы для: *а* — постоянной внешней силы и периодически изменяющейся скорости ленты; *б*, *в* — постоянной внешней силы и периодически изменяющейся скорости ленты при наличии ограничителя колебаний, равного 4.025 и 4.05 соответственно; *г* — относительного расстояния ограничителя колебаний; *д* — координаты ограничителя колебаний при $R = 0.5$; *е* — коэффициента восстановления при ударе тела об ограничитель колебаний

Fig. 8. Bifurcation diagrams for: *a* — constant external force and periodically changing velocity of the belt; *b*, *c* — constant external force and periodically changing velocity of the belt in the presence of a vibration limiter equal to 4.025 and 4.05, respectively; *d* — relative distance to the vibration limiter; *e* — coordinate of the vibration limiter for $R = 0.5$; *f* — recovery factor after the impact of the body against the vibration limiter



На рис. 9 изображены фазовые портреты и диаграммы Ламерея для двух наборов значений параметров, соответствующих двум сечениям диаграммы рис. 8, *e*. Диаграммы Ламерея построены по временам совместного движения тела с лентой. Рис. 9, *a*, *б* соответствуют следующим значениям параметров: параметр ε_* (КТОП) равен 3, скорость ленты постоянна и равна 1, внешняя сила переменная $F(t) = 0.25 \cos(2t)$, координата начальной точки $\{0, 5, 0\}$, координата стенки 2, коэффициент $R = 0.7$. Рис. 9, *в* и *г* отличаются только коэффициентом R , который равен $R = 0.75$. Из этих рисунков видно, что при значении коэффициента $R = 0.7$ система имеет устойчивый предельный цикл с тремя остановками вида ОНВОНВОНВ, т.е. вслед за первой остановкой «О» следует удар о стенку «Н» и затем участок «В» в полупространстве $\dot{\xi} < \theta$, после чего следуют еще два аналогичных витка ОНВ, и затем цикл повторяется. При значении коэффициента 0.75 поведение системы хаотично.

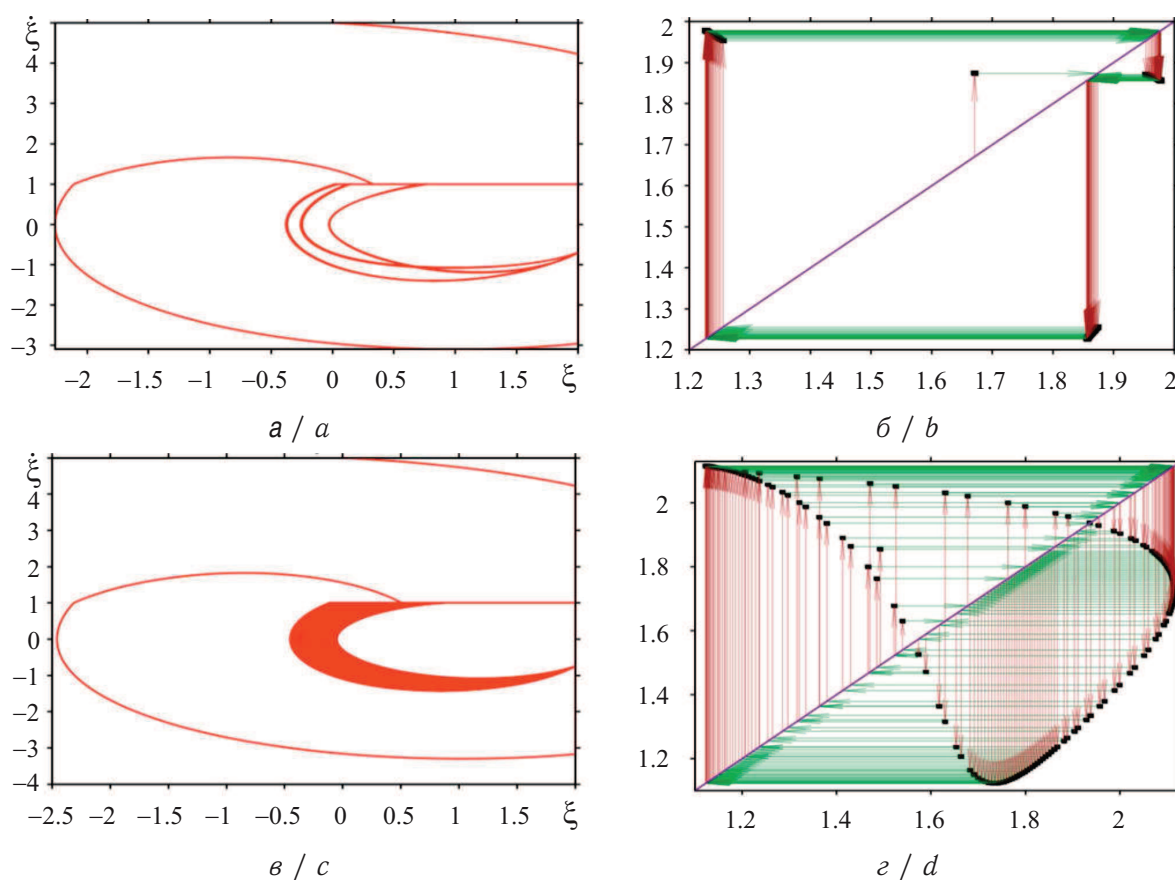


Рис. 9. Фазовые траектории и диаграммы Ламерея для двух значений коэффициента восстановления скорости при ударе $R = 0.7$ (*a*, *б*) и $R = 0.75$ (*в*, *г*)

Fig. 9. Phase trajectories and Lameray diagrams for two values of the velocity recovery factor after the impact $R = 0.7$ (*a*, *b*) and $R = 0.75$ (*c*, *d*)

Аналогично поддаются изучению и остальные участки бифуркационных диаграмм, представленных на рис. 10. Это позволяет установить, что при различных значениях параметров поведение системы может существенно различаться, демонстрируя такие явления, как хаос и бифуркация.

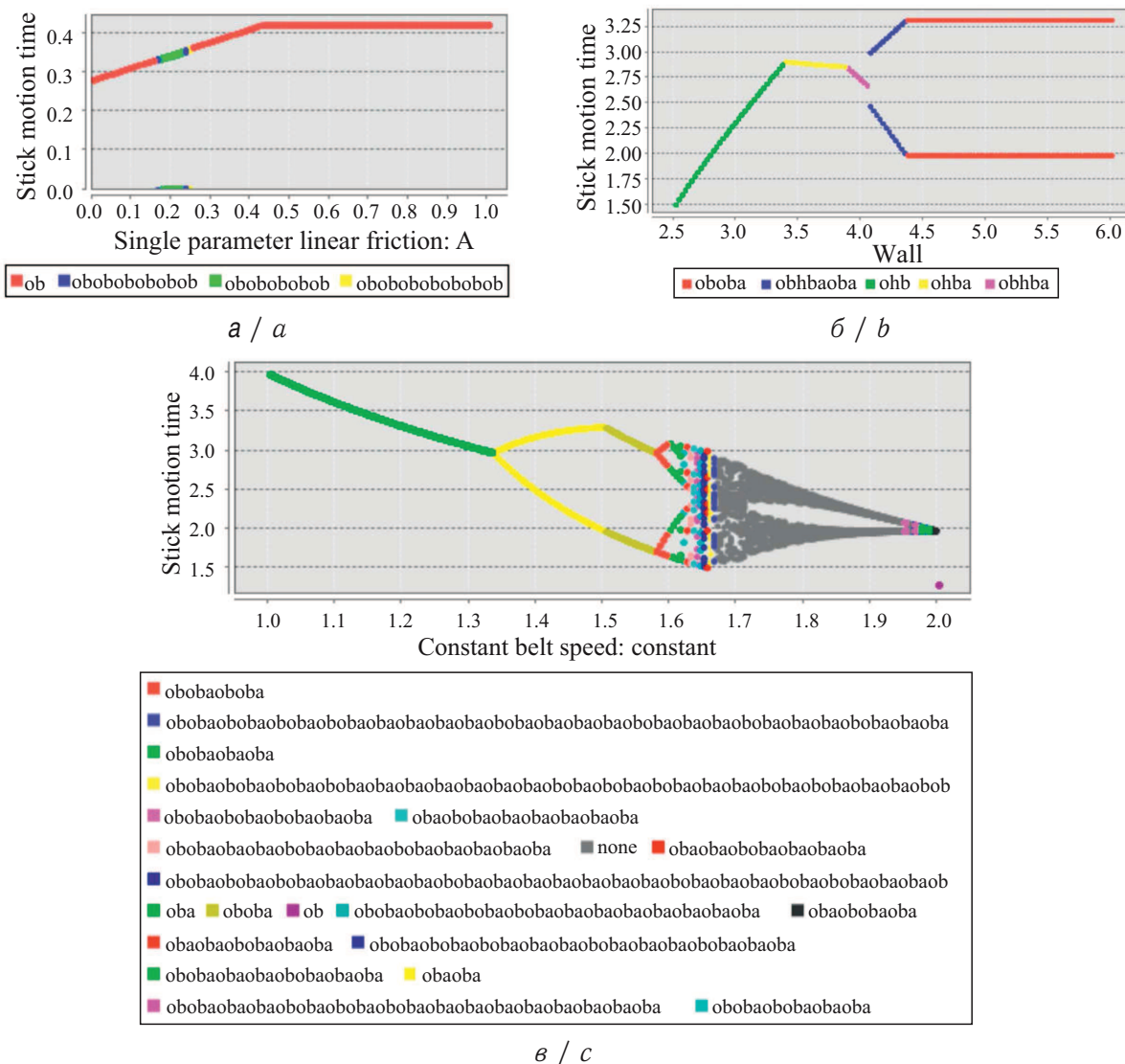


Рис. 10. Бифуркационные диаграммы: a — по амплитуде внешней силы; b — по относительному расстоянию ограничителя; v — по скорости ленты
 Fig. 10. Bifurcation diagrams: a — for the amplitude of external force; b — for the relative distance to the limiter; c — for the velocity of the belt

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014—2020 годы» (соглашение № 14.578.21.0246, уникальный идентификатор RFMEFI57817X0246).

Библиографический список

1. Ишлинский А. Ю., Крагельский И. В. О скачках при трении // Журнал теоретической физики. 1944. Т. 14, вып. 4/5. С. 276–282.
2. Каценевский Л. Я. Стохастические автоколебания при сухом трении // Инженерно-физический журнал. 1984. Т. 47, № 1. С. 143–147.
3. Ветюков М. М., Доброславский С. В., Нагаев Р. Ф. Автоколебания в системе с характеристикой сухого трения наследственного типа // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 1. С. 23–28.



4. Метрикин В. С., Нагаев Р. Ф., Степанова В. В. Периодические и стохастические автоколебания в системе с сухим трением наследственного типа // ПММ. 1996. Т. 60, вып. 5. С. 859–864.
5. Зайцев М. В., Метрикин В. С. К теории неавтономной динамической системы с трением наследственного типа // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2012. № 3, ч. 1. С. 141–146.
6. Ветюков М. М., Платовских М. Ю. Фрикционные автоколебания в системе с одной и двумя степенями свободы // Современные проблемы механики и ее преподавания в вузе : тр. Всерос. науч.-метод. конф. СПб. : Военно-космическая акад. им. А. Ф. Можайского, 2015. Т. 1. С. 58–63.
7. Leine R. I., van Campen D. H., de Kraker A. Stick-Slip Vibrations Induced by Alternate Friction Models // Nonlinear Dynamics. 1998. Vol. 16, iss. 1. P. 41–54. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1008289604683>
8. van de Vrande B. L., van Campen D. H., de Kraker A. An Approximate Analysis of Dry-Friction-Induced Stick-Slip Vibrations by a Smoothing Procedure // Nonlinear Dynamics. 1999. Vol. 19, iss. 2. P. 157–169. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1008306327781>
9. Leine R. I., van Campen D. H. Discontinuous fold bifurcations in mechanical systems // Archive of Applied Mechanics. 2002. Vol. 72, iss. 2–3. P. 138–146. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-001-0190-9>
10. Leine R. I., van Campen D. H. Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems // European Journal of Mechanics A/Solids. 2006. Vol. 25, iss. 4. P. 595–616. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.04.004>
11. Luo G. W., Lv X. H., Ma L. Periodic-impact motions and bifurcations in dynamics of a plastic impact oscillator with a frictional slider // European Journal of Mechanics A/Solids. 2008. Vol. 27, iss. 6. P. 1088–1107. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2008.02.005>
12. Уткин Н. Ф., Кижняев Ю. И., Плужников С. К. Обработка глубоких отверстий. Л. : Машиностроение, 1988. 269 с.
13. Кузнецова Т. И., Макаров Б. Г., Немцев Б. А. О гашении автоколебаний при глубоком сверлении // Колебания и устойчивость механических систем. 1981. Вып. 5. С. 114–118.
14. Минков М. Л. Технология изготовления глубоких и точных отверстий. М. : Машиностроение, 1965. 176 с.
15. Троицкий Н. Д. Глубокое сверление. Л. : Машиностроение, 1971. 176 с.
16. Потягайло М. В. Изготовление глубоких и точных отверстий. М. ; Л. : Машгиз, 1947. 108 с.
17. Городецкий Ю. И. Создание математических моделей сложных автоколебательных систем в станкостроении // Автоматизация проектирования / под общ. ред. акад. В. А. Трапезникова. М. : Машиностроение, 1986. Вып. 1. С. 203–221.
18. Кудинов В. А. Динамика станков. М. : Машиностроение, 1967. 359 с.
19. Bowden F. P., Leben L. The Nature of Sliding and the Analysis of Friction // Proceedings of the Royal Society. 1939. Vol. 109, № 938. P. 1939. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1939.0004>
20. Крагельский И. В. Трение и износ. М. : Машиностроение, 1968. 480 с.
21. Фейгин М. И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. М. : Наука, 1994. 285 с.
22. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М. : Наука, 1972. 471 с.



Образец для цитирования:

Игумнов Л. А., Метрикин В. С. О сложной динамике в простейших вибрационных системах с трением наследственного типа // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 433–446. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-433-446>

On the Complex Dynamics in Simplest Vibrational Systems with Hereditary-Type Friction

L. A. Igumnov, V. S. Metrikin

Leonid A. Igumnov, <https://orcid.org/0000-0003-3035-0119>, Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, 23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia, Igumnov@mech.unn.ru

Vladimir S. Metrikin, <https://orcid.org/0000-0002-9749-5390>, Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, 23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia, v.s.metrikin@mail.ru

The dynamics of a number of vibrational systems, accounting for the forces of hereditary-type dry friction and a vibration limiter, are studied in the paper. The interaction between the vibration limiter and the vibrational system is assumed to obey Newton's hypothesis. A general mathematical model has been developed, which is a strongly nonlinear non-autonomous system with a variable structure. The dynamics of the mathematical model is studied numerically-analytically, using the mathematical apparatus of the point mapping method. The special feature of the studying approach is that a point map is not formed in a classical way (mapping Poincare surface into itself), but based on times of the relative rest of the vibrational system, which considerably simplified both the point mapping process and its detailed analysis. The presence of floating boundaries of plates of sliding motion required an original approach to point mapping and interpreting the results obtained. The developed investigation methodology and software product were used to study the phase-plane portrait of the mathematical model as a function of the characteristics of sliding friction forces and rest, as well as of the type and position of the limiter. Based on the character of the bifurcation diagrams variation, it was possible to find the main laws of the motion regimes alteration process (the occurrence of periodic motion regimes of arbitrary complexity and possible transition to chaos via the period-doubling process) with the changing parameters of the vibrational system (the amplitude and frequency of the periodic effect, forms of the functional relation describing the variation of the friction coefficient value of relative rest. The results obtained with and without accounting for a vibration limiter are also compared in the paper.

Key words: mathematical model, hereditary-type friction, Poincare function, relative rest, fixed point, chaos.

Acknowledgements: This work was supported by the Federal Targeted Program for Research and Development in Priority Areas of Development of the Russian Scientific and Technological Complex for 2014–2020 (under the contract no. 14.578.21.0246, unique identifier RFME-FI57817X0246).

References

1. Ishlinsky A. Yu., Kragelsky I. V. O skachkah pri trenii [About horse racing]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Journal Technical Physics], 1944, vol. 14, iss. 4–5, pp. 276–282 (in Russian).
2. Kashchenevsky L. Ya. Stokhasticheskie avtokolebaniya pri suhom trenii [Stochastic self-oscillations with dry friction]. *Inzhenerno-fizicheskij zhurnal* [Journal of Engineering Physics], 1984, vol. 47, no. 1, pp. 143–147 (in Russian).



3. Vetiukov M. M., Dobroslavsky S. V., Nagaev R. F. Avtokolebaniya v sisteme s harakteristikoj suhogo treniya nasledstvennogo tipa [Self-oscillations in the system with the characteristic of dry friction hereditary type]. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1990, no. 1, pp. 23–28 (in Russian).
4. Metrikin V. S., Nagaev R. F., Stepanova V. V. Periodic and stochastic self-excited oscillations in a system with hereditary-type dry friction. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1996, vol. 60, iss. 5, pp. 845–850. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0021-8928\(96\)00105-0](https://doi.org/10.1016/s0021-8928(96)00105-0)
5. Zaytsev M. V., Metrikin V. S. On the Theory of a Nonautonomous Dynamical System with Hereditary-Type Dry Friction. *Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod*, 2012, no. 3, pt. 1, pp. 141–146 (in Russian).
6. Vetyukov M. M., Platovskih M. Yu. Frikcionnye avtokolebaniya v sisteme s odnoj i dvumya stepenyami svobody [Friction self-oscillations in a system with one and two degrees of freedom]. In: *Sovremennye problemy mekhaniki i ee prepodavaniya v vuze* [Contemporary problems of mechanics and its teaching in high school] : Proc. of All-Russia Scientific and Methodical Conf. St. Petersburg, A. F. Mozhaisky Military Space Academy, 2015, vol. 1, pp. 58–63 (in Russian).
7. Leine R. I., van Campen D. H., de Kraker A. Stick-Slip Vibrations Induced by Alternate Friction Models. *Nonlinear Dynamics*, 1998, vol. 16, iss. 1, pp. 41–54. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1008289604683>
8. van de Vrande B. L., van Campen D. H., de Kraker A. An Approximate Analysis of Dry-Friction-Induced Stick-Slip Vibrations by a Smoothing Procedure. *Nonlinear Dynamics*, 1999, vol. 19, iss. 2, pp. 157–169. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1008306327781>
9. Leine R. I., van Campen D. H. Discontinuous fold bifurcations in mechanical systems. *Archive of Applied Mechanics*, 2002, vol. 72, iss. 2–3, pp. 138–146. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-001-0190-9>
10. Leine R. I., van Campen D. H. Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2006, vol. 25, iss. 4, pp. 595–616. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.04.004>
11. Luo G. W., Lv X. H., Ma L. Periodic-impact motions and bifurcations in dynamics of a plastic impact oscillator with a frictional slider. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2008, vol. 27, iss. 6, pp. 1088–1107. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2008.02.005>
12. Utkin N. F., Kizhniaev Yu. I., Pluzhnikov S. K. *Obrabotka glubokih otverstij* [Deep hole machining]. Leningrad, Mashinostroenie, 1988. 269 p. (in Russian).
13. Kuznetsova T. I., Makarov B. G., Germans B. A. O gashenii avtokolebanij pri glubokom sverlenii [On the suppression of self-oscillations with deep drilling]. *Kolebaniya i ustojchivost' mekhanicheskikh sistem* [Oscillations and stability of mechanical systems], 1981, iss. 5, pp. 114–118 (in Russian).
14. Minkov M. L. *Tekhnologiya izgotovleniya glubokih i tochnyh otverstij* [Manufacturing technology for deep and precise holes]. Moscow, Mashinostroenie, 1965. 176 p. (in Russian).
15. Troitskiy N. D. *Glubokoe sverlenie* [Deep drilling]. Leningrad, Mashinostroenie, 1971. 176 p. (in Russian).
16. Potyagajlo M. V. *Izgotovlenie glubokih i tochnyh otverstij* [Making deep and precise holes]. Moscow, Leningrad, Mashgiz, 1947. 108 p. (in Russian).
17. Gorodetskiy Yu. I. Sozdanie matematicheskikh modelej slozhnyh avtokolebatel'nyh sistem v stankostroenii [Creation of mathematical models of complex auto-oscillatory systems in machine-tool construction]. *Avtomatizaciya proektirovaniya* [Automation design]. Ed. V. A. Trapeznikov. Moscow, Mashinostroenie, 1986, iss. 1, pp. 203–221. (in Russian).



18. Kudinov V. A. *Dinamika stankov* [Machine dynamics]. Moscow, Mashinostroenie, 1967. 359 p. (in Russian).
19. Bowden F. P, Leben L. The Nature of Sliding and the Analysis of Friction. *Proceedings of the Royal Society*, 1939, vol. 109, no. 938, pp. 1939. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1939.0004>
20. Kragilsky I. V. *Trenie i iznos* [Friction and wear]. Moscow, Mashinostroenie, 1968. 480 p. (in Russian).
21. Feigin M. I. *Vynuzhdennye kolebaniya sistem s razryvnymi nelinejnostyami* [Forced oscillations of systems with discontinuous nonlinearities]. Moscow, Nauka, 1994. 285 p. (in Russian).
22. Neymark Yu. I. *Metod tochechnyh otobrazhenij v teorii nelinejnyh kolebanij* [The method of point mappings in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka, 1972. 471 p. (in Russian).

Cite this article as:

Igumnov L. A., Metrikin V. S. On the Complex Dynamics in Simplest Vibrational Systems with Hereditary-Type Friction. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 433–446 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-433-446>
