



УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ПЛАСТИНЕ С ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВИДА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАТЕРИАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Е. В. Ломакин, О. П. Щендригина

Ломакин Евгений Викторович, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории пластичности, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1, evlomakin@yandex.ru

Щендригина Олеся Павловна, студент кафедры теории пластичности, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1, Ol.Shendrigina@mail.ru

В работе проведен анализ свойств определяющих соотношений, предложенных для описания поведения материалов, диаграммы деформирования которых зависят от вида внешних воздействий. При этом появляются различные формы нелинейности, связанные с зависимостью свойств материалов от вида напряженного состояния, нелинейностью диаграмм деформирования, взаимосвязью процессов сдвигового и объемного деформирования. Исследовано влияние этих форм нелинейности на распределение напряжений и деформаций в круглой пластине при различных граничных условиях. Проведены расчеты полей напряжений и деформаций для конструкционного графита и сравнение с результатами расчетов для классического физически нелинейного материала, свойства которого инварианты к виду внешних нагрузок. Установлены условия, накладываемые на параметры материальных функций, обеспечивающие единственность решения краевых задач.

Ключевые слова: нелинейная теория упругости, определяющие соотношения, параметр вида напряженного состояния, чувствительность свойств к виду внешних воздействий.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-458-466>

ВВЕДЕНИЕ

Деформированные свойства многих материалов зависят от вида внешних воздействий. Данное явление характерно для большинства гетерогенных материалов, и степень такой зависимости определяется структурными особенностями материалов. Анализ результатов экспериментальных исследований свидетельствует о том, что для данных материалов отсутствует единая диаграмма зависимости эквивалентного напряжения от эквивалентной деформации, а также проявляется взаимосвязь сдвигового и объемного деформирования.

Под зависимостью деформационных свойств материалов от вида внешних воздействий обычно понимается различие модулей упругости при одноосном растяжении и одноосном сжатии, которое получило название разномодульности [1–13]. Следует отметить, что диаграммы деформирования материалов обладают некоторой нелинейностью даже при малых деформациях, и определение модуля упругости по таким диаграммам приводит к соответствующей погрешности. Поскольку диаграммы деформирования при растяжении и сжатии разные, то под разномодульностью обычно понимается различие в значениях некоторых секущих модулей при линейной аппроксимации слабо нелинейных диаграмм деформирования [8]. Следует также отметить, что одноосное растяжение и одноосное сжатие — это всего лишь два частных вида



из множества возможных видов напряженных состояний, и если свойства различаются для двух частных видов нагружения или деформирования, то, естественно, они отличны и для других видов напряженного состояния. Это подтверждается результатами экспериментальных исследований свойств конструкционных графитов, бетона, чугуна, теплозащитных материалов, горных пород, композитных материалов и многих других [14, 15]. Поэтому при описании деформирования данных материалов необходимо использовать параметры вида напряженного состояния, один из которых представляет собой отношение гидростатической компоненты напряжений $\sigma = \sigma_{ii}/3$ к эквивалентному напряжению $\sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}}$, где $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$. Параметр $\xi = \sigma/\sigma_0$ характеризует в среднем соотношение между нормальными и касательными напряжениями в точке сплошной среды [16].

Эффект чувствительности механических характеристик материалов к виду внешних воздействий или виду напряженного состояния можно проиллюстрировать на основе анализа результатов экспериментальных исследований свойств чугуна и конструкционного графита [15]. На рис. 1 приведены эквивалентные диаграммы деформирования серого чугуна СЧ15-32, полученные на основе испытаний трубчатых образцов при действии осевой нагрузки и крутящего момента, где $\epsilon_0 = \sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}}$ — эквивалентная деформация, $e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\epsilon\delta_{ij}$ — девиатор деформаций, $\epsilon = \epsilon_{kk}$ — объемная деформация в случае малых деформаций. Кривая 1 соответствует одноосному растяжению ($\xi = 1/3$), кривая 3 — чистому сдвигу ($\xi = 0$), кривая 6 — одноосному сжатию ($\xi = -1/3$). Кривые 2, 4 и 5 получены в условиях пропорционального нагружения при различных значениях отношения осевой нагрузки и крутящего момента, им соответствуют следующие значения параметра ξ : 0.232, -0.064, -0.126.

На рис. 2 приведены эквивалентные диаграммы деформирования, получен-

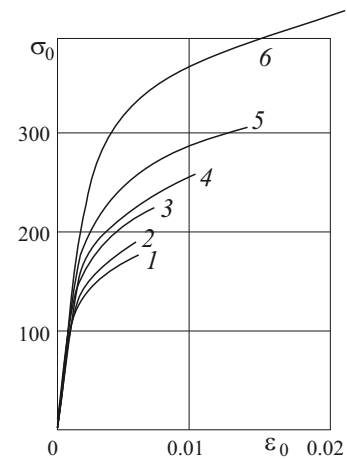


Рис. 1. Эквивалентные диаграммы деформирования чугуна СЧ 15-32: 1 — одноосное растяжение, 3 — чистый сдвиг, 6 — одноосное сжатие, 2, 4, 5 — пропорциональное нагружение с параметром $\xi = 0.232, -0.064, -0.126$

Fig. 1. Equivalent deformation diagrams of cast iron 15-32: 1 — uniaxial tension; 3 — pure shear; 6 — uniaxial compression; 2, 4, 5 — proportional loading with parameter $\xi = 0.232, -0.064, -0.126$

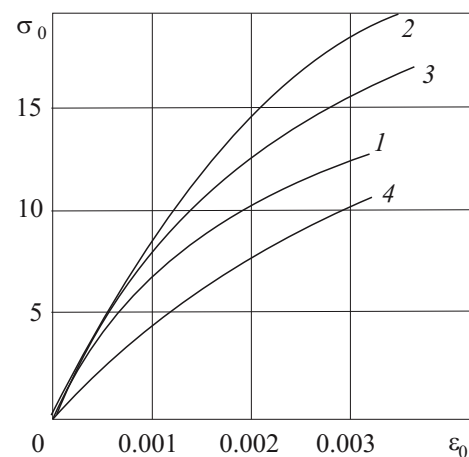


Рис. 2. Эквивалентные диаграммы деформирования конструкционного графита АРВ: 1 — одноосное растяжение, 2 — одноосное сжатие, 3 — сдвиг, 4 — равномерное двухосное растяжение

Fig. 2. Equivalent strain diagrams of structural graphite АРВ: 1 — uniaxial tension; 2 — uniaxial compression; 3 — shear; 4 — proportional biaxial tension



ные на основе испытаний трубчатых образцов графита АРВ в условиях одноосного растяжения (1), одноосного сжатия (2), сдвига (3), равномерного двухосного растяжения (4), при котором параметр $\xi = 2/3$. Таким образом, вместо «единой кривой» зависимости $\sigma_0 \sim \varepsilon_0$ имеется серия криволинейных диаграмм деформирования. Для графита нелинейность диаграмм значительно меньше, чем для чугуна, и они допускают использование линейной аппроксимации в определенном диапазоне деформаций, но начальный наклон диаграмм практически одинаковый.

1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Для условий активного нагружения можно ввести потенциал деформаций, описывающий зависимость механических свойств материалов от вида напряженного состояния [14]

$$\Phi = \frac{1}{2}(A + B\xi^2)\sigma_0^2 + [1 + \varkappa(\xi)]g(\sigma_0), \quad A = \frac{2(1 + \nu)}{3E}, \quad B = \frac{3(1 - 2\nu)}{E}. \quad (1)$$

Первое слагаемое в (1) совпадает с потенциалом для линейноупругого тела, а второе характеризует нелинейность диаграмм деформирования. Наиболее распространенное выражение для функции $g(\sigma_0)$ – это степенная зависимость, $g(\sigma_0) = k\sigma_0^n/n$. Дифференцируя выражение (1) по напряжениям, получаем уравнения связи между деформациями и напряжениями, которые имеют следующий вид:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} [A + \lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}] S_{ij} + \frac{1}{3} [B + \Lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}] \sigma \delta_{ij}, \quad (2)$$

$$\lambda(\xi) = 1 + \varkappa - \frac{\varkappa'(\xi)\xi}{n}, \quad \Lambda(\xi) = \frac{\varkappa'(\xi)}{\xi n}.$$

Функции $\lambda(\xi)$ и $\Lambda(\xi)$ и их производные связаны соотношениями:

$$\lambda(\xi) + \xi^2 \Lambda(\xi) = 1 + \varkappa(\xi), \quad \lambda'(\xi) + \xi^2 \Lambda'(\xi) = (n - 2)\xi \Lambda(\xi). \quad (3)$$

В отсутствии зависимости деформационных свойств материалов от вида напряженного состояния функция $\varkappa(\xi) \equiv 0$ и определяющие соотношения (2) совпадают с соотношениями деформационной теории пластичности.

Используя (2), можно получить выражения для эквивалентной деформации и объемной деформации

$$\varepsilon_0(\xi) = [A + \lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}] \sigma_0, \quad \varepsilon = [B + \Lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}] \sigma. \quad (4)$$

Из выражений (4) можно получить соотношение, связывающее эквивалентную и объемную деформации:

$$\varepsilon = \frac{B + \Lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}}{A + \lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}} \xi \varepsilon_0.$$

Последнее соотношение означает, что в рассматриваемых материалах процессы объемного и сдвигового деформирования взаимосвязаны. В условиях пропорционального нагружения параметр ξ постоянный, но принимает разные значения для разных видов нагружения. Функция $\lambda(\xi) = (\varepsilon_0 - A\sigma_0)(k\sigma_0^{n-2})^{-1}$ характеризует расхождение между диаграммами зависимости эквивалентного напряжения от эквивалентной деформации для разных условий пропорционального нагружения. При этом функцию



$\Lambda(\xi)$ можно определить из второго соотношения (3), которое представляет собой дифференциальное уравнение для $\Lambda(\xi)$ при известной функции $\lambda(\xi)$, которая может быть определена на основе результатов экспериментальных исследований. Решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$\Lambda(\xi) = \left(- \int \frac{\lambda'(\xi)}{\xi^n} d\xi + C_0 \right) \xi^{n-2}. \quad (5)$$

Условия единственности решения задач с использованием определяющих соотношений (2) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{(A + B\xi^2)\sigma_0^2}{2} + \frac{1}{n} [\lambda(\xi) + \xi^2\Lambda(\xi)] k\sigma_0^n &> 0, \\ A + [(n-1)\lambda(\xi) - \xi\lambda'(\xi)] k\sigma_0^{n-2} &> 0, \\ B + [\Lambda(\xi) - \xi\Lambda'(\xi)] k\sigma_0^{n-2} - \frac{[\lambda'(\xi)k\sigma_0^{n-2}]^2}{A + [(n-1)\lambda(\xi) - \xi\lambda'(\xi)] k\sigma_0^{n-2}(\xi)} &> 0. \end{aligned}$$

В тех случаях, когда нелинейность диаграмм деформирования незначительная и допускает их линейную аппроксимацию в определенном диапазоне деформаций, показатель n функции $g(\sigma_0)$ равен 2, соотношения (2) упрощаются и могут быть представлены в виде

$$\varepsilon_{ij}(\xi) = \frac{3}{2}\omega(\xi)S_{ij} + \frac{1}{3}\Omega(\xi)\delta_{ij}, \quad (6)$$

где $\omega(\xi) = -\frac{\lambda'(\xi)(A + B\xi^2)\xi}{2} + A[1 + \lambda(\xi)]$, $\Omega(\xi) = \frac{\lambda'(\xi)(A + B\xi^2)}{2\xi} + B[1 + \lambda(\xi)]$.

Соотношения (6) представляют собой вариант определяющих соотношений, который позволяет учесть различие моделей упругости не только при одноосном растяжении и одноосном сжатии, но и в более полной мере описать зависимость деформационных свойств материалов от создаваемого при нагружении вида напряженного состояния. При этом $\omega(\xi) = \varepsilon_0/\sigma_0$ и вместо серии криволинейных диаграмм получается серия прямолинейных диаграмм зависимости между эквивалентным напряжением и эквивалентной деформацией.

2. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЕ

Рассмотрим кольцевую пластину при заданных граничных условиях на внутреннем радиусе a и внешнем радиусе b . Напряженно-деформированное состояние в такой пластине будет обобщенно плоским с осевой симметрией. Радиальная и окружная деформации выражаются через радиальное перемещение $u(r)$ по формулам $\varepsilon_{rr}(r) = du(r)/dr$, $\varepsilon_{\phi\phi}(r) = u(r)/r$. Для решения задачи имеем уравнение совместности деформаций и уравнение равновесия:

$$\frac{d\varepsilon_{\phi\phi}(r)}{dr} + \frac{\varepsilon_{\phi\phi}(r) - \varepsilon_{rr}(r)}{r} = 0, \quad \frac{d\sigma_{rr}(r)}{dr} + \frac{\sigma_{rr}(r) - \sigma_{\phi\phi}(r)}{r} = 0.$$

Пусть пластина изготовлена из материала с зависимостью свойств от вида напряженного состояния. Внутренний радиус ($r = a$) пластины жестко зафиксирован, т. е. $u_{rr}(a) = 0$, а на внешнем радиусе ($r = b$) действует равномерно распределенное по всей окружности и направленное по радиусу напряжение q . Поскольку состояния связи между напряжениями и деформациями нелинейные вследствие наличия



в них параметра ξ , то уравнения получаются нелинейными и при их интегрировании необходимо использовать численные методы. Найдем численное решение для напряжений и деформаций в каждой точке пластины.

Приведенные на рис. 2 диаграммы нелинейны даже при очень малых деформациях, поэтому при определении деформационных свойств материала обычно используется линейная аппроксимация слабо нелинейных диаграмм деформирования в определенном диапазоне деформаций. Для графита АРВ модули упругости и коэффициенты Пуассона определялись при значении продольной деформации 0.001. При такой аппроксимации модуль упругости и коэффициент Пуассона при одноосном растяжении $E^+ = 5.1 \cdot 10^3$ МПа, $\nu^+ = 0.2$, а при одноосном сжатии $E^- = 7.83 \cdot 10^3$ МПа, $\nu^- = 0.35$. На основе анализа экспериментальных данных установлено, что функция $\omega(\xi)$ в определяющих соотношениях (5) также может быть аппроксимирована линейной зависимостью $\omega(\xi) = A + C\xi$ с коэффициентом $C/A = 0.45$ [8], тогда $\Omega(\xi) = B + \frac{C}{\xi}$. Во всех уравнениях и определяющих соотношениях перейдем к безразмерным величинам, отнеся радиальную координату к внутреннему радиусу a пластины, а вместо напряжения введем безразмерную величину $A\sigma_{ij}$. В случае линейной аппроксимации диаграмм деформирования определяющие соотношения примут вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \left(\frac{C}{A}\xi + 1 \right) \tilde{S}_{ij} + \frac{1}{3} \left(\frac{C}{A\xi} + \frac{B}{A} \right) \tilde{\sigma}\delta_{ij},$$

где \tilde{S}_{ij} и $\tilde{\sigma}$ — это обезразмеренные величины. Далее знак над напряжениями опущен.

Для графита при $C/A = 0.45$ распределения напряжений и деформаций представлены на рис. 3.

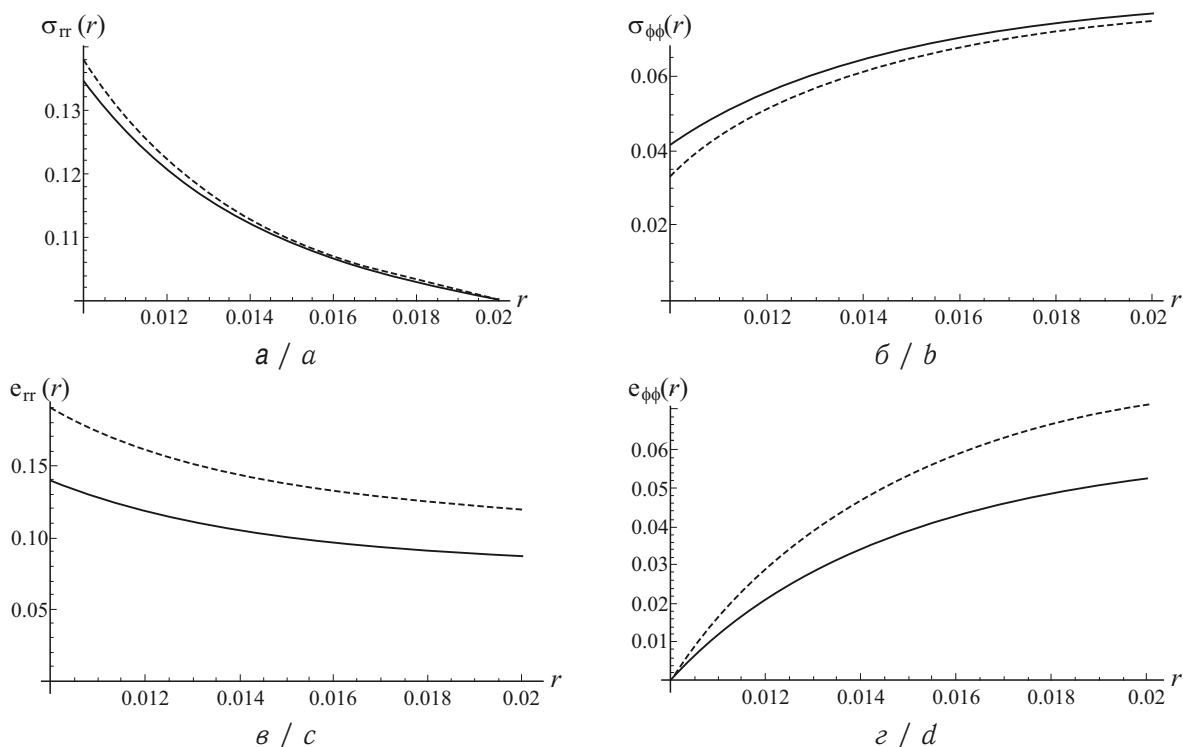


Рис. 3. Распределения напряжений и деформаций в пластине ($C = 0.45$ — пунктирная линия, $C = 0$ — сплошная линия): a — радиальное напряжение; b — окружное напряжение; c — радиальные деформации; d — окружные деформации

Fig. 3. The distributions of stresses and strains in the plate ($C = 0.45$ dotted line, $C = 0$ solid line): a — radial stress; b — circumferential stress; c — radial deformations; d — circumferential deformations



Кроме того, проведены расчеты для $C/A = 0$, то есть для случая, когда зависимостью свойств материала от вида напряженного состояния пренебрегают.

Сравнение результатов расчетов для данных значений параметра C/A позволяет сделать некоторые выводы относительно степени влияния зависимости деформационных свойств материалов от вида напряженного состояния на распределения напряжений и деформаций в рассмотренном частном случае пластины. Результаты расчетов свидетельствуют о том, что пренебрежение данной зависимостью может привести к существенной погрешности результатов расчетов. Для графита в отличие от классического решения ($C/A = 0$) составляет 8% для радиального и 27% для окружного напряжений. Для деформаций это отличие более заметно и составляет 26% для радиальной и 28% для окружной деформации. При этом параметр вида напряженного состояния ξ меняется в пределах от 0.46 до 0.64. В тех случаях, когда диапазон изменения этого параметра больше, эффект будет более значительным.

ВЫВОД

Приведенные в работе результаты экспериментальных исследований свидетельствуют о том, что расхождение диаграмм деформирования материалов при разных условиях нагружения может быть весьма существенным. Сформулированные ранее авторами соотношения, связывающие напряжения и деформации, хорошо описывают эффект зависимости диаграмм деформирования от вида напряженного состояния и позволяют получать достоверные результаты о напряженно-деформированном состоянии в телах. Рассмотрены различные варианты определяющих соотношений, в том числе и для случая слабо нелинейных диаграмм, допускающих их линейную аппроксимацию в выбранном диапазоне деформаций. Этот вариант соотношений использован при анализе напряжений и деформаций в пластине. Расчеты проведены на основе значений характеристик, определенных для конструкционного графита АРВ. При этом обнаружено достаточно заметное различие в величинах напряжений и деформаций по сравнению с решением задачи для материала, свойства которого инвариантны к виду внешних воздействий, которое достигало 28%. Следует отметить, что результаты расчетов существенным образом зависят от диапазона изменения параметра вида напряженного состояния при решении конкретных задач и чем шире этот диапазон, тем более значительно влияние эффекта зависимости свойств материалов от вида напряженного состояния.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 17-01-00318, 17-51-52001).

Библиографический список

1. *Ambartsumyan S. A.* Elasticity Theory of Different Modulus. Translated by Wu R. Beijing, China Railway Publishing House, 1986.
2. *Jones R. M.* Buckling of circular cylindrical shells with different moduli in tension and compression // AIAA J. 1971. Vol. 9, № 1. P. 53–61. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.6124>



3. Bert C. W. Models for fibrous composites with different properties in tension and compression // J. Eng. Mater. Technol. 1977. Vol. 99, iss. 4. P. 344–349. DOI: <https://doi.org/doi:10.1115/1.3443550>
4. Vijayakumar K., Rao K. P. Stress-strain relations for composites with different stiffnesses in tension and compression // Comput. Mech. 1987. Vol. 2, iss. 3. P. 167–175. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00571022>
5. Ye Z., Yu H., Yao W. A new elasticity and finite element formulation for different Young's modulus when tension and compression loadings // J. of Shanghai Univ. 2001. Vol. 5, iss. 2. P. 89–92. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11741-001-0001-0>
6. Patel B. P., Khan K., Nath Y. A new constitutive model for bimodular laminated structures: Application to free vibrations of conical/cylindrical panels // Composite Structures. 2014. Vol. 110. P. 183–191. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.11.008>
7. Timoshenko S. Strength of Materials. Pt. II: Advanced Theory and Problems. Lancaster, PA : D. Van Nostrand Company, Inc., 1941. 510 p.
8. Lomakin E. V. Difference in the modules of composite materials // Mech. Compos. Mater. 1981. Vol. 17, № 1. P. 18–24. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00604877>
9. Khan K., Patel B. P., Nath Y. Vibration analysis of bimodulus laminated cylindrical panels // J. Sound Vibrations. 2009. Vol. 321, iss. 1–2. P. 166–183. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.09.017>
10. Khan K., Patel B. P., Nath Y. Free and forced vibration characteristics of bimodular composite laminated circular cylindrical shells // Composite Structures. 2015. Vol. 126. P. 386–397. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.02.022>
11. Du Z., Guo X. Variational principles and the related bounding theorems for bimodulus materials // J. Mech. Phys. Solids. 2014. Vol. 73. P. 83–211. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2014.08.006>
12. Querin O. M., Victoria M., Marti P. Topology optimization of truss-like continua with different material properties in tension and compression // Struct. Multidisc. Optim. 2010. Vol. 42, iss. 1. P. 25–32. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00158-009-0473-2>
13. Liu S., Qiao H. Topology optimization of continuum structures with different tensile and compressive properties in bridge layout design // Struct. Multidisc. Optim. 2011. Vol. 43, iss. 3. P. 369–380. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00158-010-0567-x>
14. Lomakin E. V. Constitutive relations of deformation theory for dilatant media // Mech. Solids. 1991. Vol. 26, № 6. P. 66–75.
15. Белякова Т. А., Ломакин Е. В. Упругопластическое деформирование дилатирующей среды вблизи вершины трещины в условиях плоского напряженного состояния // Изв. РАН. МТТ. 2004. Т. 39, № 1. С. 81–87.
16. Новожилов В. В. О физическом смысле инвариантов напряжения, используемых в теории пластичности // ПММ. 1952. Т. 16, № 5. С. 617–619.

Образец для цитирования:

Ломакин Е. В., Щендригина О. П. Напряженно-деформированное состояние в пластине с зависящими от вида напряженного состояния материальными свойствами // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 458–466. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-458-466>



Stress and Strain Fields in a Plate of Stress State Dependent Material Properties

E. V. Lomakin, O. P. Shchendrigina

Evgeniy V. Lomakin, <https://orcid.org/0000-0002-8716-5363>, Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia, evlomakin@yandex.ru

Olesia P. Shchendrigina, <https://orcid.org/0000-0001-5559-6014>, Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia, Ol.Shendrigina@mail.ru

The paper analyzes the properties of the constitutive relations proposed to describe the behavior of materials whose deformation diagrams depend on the type of external forces. In this case, various forms of nonlinearity arise, related to the dependence of the properties of materials on the type of the stressed state, the nonlinearity of the deformation diagrams, and the relationship between the shear and volume deformation processes. The influence of these forms of nonlinearity on the distribution of stresses and strains in a circular plate under different boundary conditions is investigated. The stress and strain fields were calculated for structural graphite and they are compared with the results of calculations for a classical physically nonlinear material whose properties are invariant to the form of external forces. The conditions imposed on the parameters of material functions that ensure the uniqueness of the solution of boundary value problems are established.

Key words: nonlinear theory of elasticity, constitutive relations, stress state parameter, susceptibility of properties to the type of external forces.

Acknowledgements: This work was supported by Russian Foundation for Basic Research (projects nos. 17-01-00318, 17-51-52001)..

References

1. Ambartsumyan S. A. *Elasticity Theory of Different Modulus*. Translated by Wu R. Beijing, China Railway Publishing House, 1986.
2. Jones R. M. Buckling of circular cylindrical shells with different moduli in tension and compression. *AIAA J.*, 1971, vol. 9, no. 1, pp. 53–61. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.6124>
3. Bert C. W. Models for fibrous composites with different properties in tension and compression. *J. Eng. Mater. Technol.*, 1977, vol. 99, iss. 4, pp. 344–349. DOI: <https://doi.org/doi:10.1115/1.3443550>
4. Vijayakumar K., Rao K. P. Stress-strain relations for composites with different stiffnesses in tension and compression. *Comput. Mech.*, 1987, vol. 2, iss. 3, pp. 167–175. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00571022>
5. Ye Z., Yu H., Yao W. A new elasticity and finite element formulation for different Young's modulus when tension and compression loadings. *J. of Shanghai Univ.*, 2001, vol. 5, iss. 2, pp. 89–92. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11741-001-0001-0>
6. Patel B. P., Khan K., Nath Y. A new constitutive model for bimodular laminated structures: Application to free vibrations of conical/cylindrical panels. *Composite Structures*, 2014, vol. 110, pp. 183–191. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.11.008>
7. Timoshenko S. *Strength of Materials. Pt. II: Advanced Theory and Problems*. Lancaster, PA., D. Van Nostrand Company, Inc., 1941. 510 p.
8. Lomakin E. V. Difference in the modules of composite materials. *Mech. Compos. Mater.*, 1981, vol. 17, no. 1, pp. 18–24. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00604877>



9. Khan K., Patel B. P., Nath Y. Vibration analysis of bimodulus laminated cylindrical panels. *J. Sound Vibrations*, 2009, vol. 321, iss. 1–2, pp. 166–183. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.09.017>
10. Khan K., Patel B. P., Nath Y. Free and forced vibration characteristics of bimodular composite laminated circular cylindrical shells. *Composite Structures*, 2015, vol. 126, pp. 386–397. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.02.022>
11. Du Z., Guo X. Variational principles and the related bounding theorems for bi-modulus materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 2014, vol. 73, pp. 83–211. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2014.08.006>
12. Querin O. M., Victoria M., Marti P. Topology optimization of truss-like continua with different material properties in tension and compression. *Struct. Multidisc. Optim.*, 2010, vol. 42, iss. 1, pp. 25–32. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00158-009-0473-2>
13. Liu S., Qiao H. Topology optimization of continuum structures with different tensile and compressive properties in bridge layout design. *Struct. Multidisc. Optim.*, 2011, vol. 43, iss. 3, pp. 369–380. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00158-010-0567-x>
14. Lomakin E. V. Constitutive relations of deformation theory for dilatant media. *Mech. Solids*, 1991, vol. 26, no. 6, pp. 66–75.
15. Belyakova T. A., Lomakin E. V. Elastoplastic deformation of a dilatant medium subjected to a plane stress state near a crack tip. *Mech. Solids*, 2004, vol. 39, no. 1, pp. 81–87.
16. Novozhilov V. V. On the physical meaning of stress invariants used in the theory of plasticity. *PMM*, 1952, vol. 16, no. 5, pp. 615–619 (in Russian).

Cite this article as:

Lomakin E. V., Shchendrigina O. P. Stress and Strain Fields in a Plate of Stress State Dependent Material Properties. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 458–466 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-458-466>
