УДК 517.956

# Нелокальные краевые задачи в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа

**С. А. Алдашев**

Алдашев Серик Аймурзаевич, доктор физико-математических наук, профессор, Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Казахстан, 050012, Алматы, ул. Толе Би, д. 86, aldash51@mail.ru

Корректные постановки краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного хорошо изучены. При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряет свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений. Автором ранее изучены локальные краевые задачи в цилиндрической области для многомерных эллиптических уравнений. Насколько известно для этих уравнений нелокальные краевые задачи не исследованы. В данной статье используется метод, предложенный в ранних работах автора, показаны однозначные разрешимости и получены явные виды классических решений нелокальных краевых задач в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа, которые являются обобщением смешанной задачи, задач Дирихле и Пуанкаре. Получен также критерий единственности регулярного решения этих задач.

*Ключевые слова:* нелокальные задачи, цилиндрическая область, многомерное уравнение, критерии, функция Бесселя.

Поступила в редакцию: 02.09.2017 / Принята: 05.06.2018 / Опубликована онлайн: 28.02.2019

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-16-23

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ И РЕЗУЛЬТАТ

Локальные краевые задачи в цилиндрической области для многомерных эллиптических уравнений изучены в [1–6].

Насколько нам известно, для этих уравнений нелокальные краевые задачи не исследованы.

В работе показаны однозначные разрешимости нелокальных краевых задач в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа, которые являются обобщением смешанной задачи, задач Дирихле и Пуанкаре. Получен также критерий единственности регулярного решения этих задач.

Пусть $D_\alpha$ — цилиндрическая область евклидова пространства $E_{m+1}$ точек $(x_1,\ldots,x_m,t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma=\{(x,t)::|x|=1\}$, плоскостями $t=\alpha>0$ и $t=0$, где $|x|$ — длина вектора $x=(x_1,\ldots,x_m)$.

Части этих поверхностей, образующих границу $\partial D_\alpha$ области $D_\alpha$, обозначим через $\Gamma_\alpha$, $S_\alpha$, $S_0$ соответственно.

В области $D_\alpha$ рассмотрим многомерное уравнение Лапласа:

$$\Delta_x u+u_{tt}=0, \tag{1}$$

где $\Delta_x$ — оператор Лапласа по переменным $x_1,\ldots,x_m$, $m\geqslant 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,\ldots,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,\ldots,\theta_{m-1},t$, $r\geqslant 0$, $0\leqslant\theta_1<2\pi$, $0\leqslant\theta_i\leqslant\pi$, $i=2,3,\ldots,m-1$.

Рассмотрим следующие нелокальные краевые задачи.

**Задача 1.** *Найти решение уравнения* (1) *в области* $D_\alpha$ *из класса* $C(\bar{D}_\alpha) \cap \cap C^1(D_\alpha \cup S_\alpha \cup S_0) \cap C^2(D_\alpha)$, *удовлетворяющее краевым условиям:*

$$\begin{gathered}\beta_1 u(r,\theta,0) = \gamma_1 u(r,\theta,\alpha) + \varphi_1(r,\theta), \quad \beta_2 u_t(r,\theta,0) = \gamma_2 u_t(r,\theta,\alpha) + \varphi_2(r,\theta), \\ u|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t,\theta).\end{gathered} \tag{2}$$

**Задача 2.** *Найти решение уравнения* (1) *в области* $D_\alpha$ *из класса* $C(\bar{D}_\alpha) \cap \cap C^1(D_\alpha \cup S_0) \cap C^2(D_\alpha)$, *удовлетворяющее краевым условиям:*

$$u(r,\theta,0) = \varphi_1(r,\theta), \quad \beta_2 u_t(r,\theta,0) = \gamma_2 u(r,\theta,\alpha) + \varphi_2(r,\theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t,\theta), \tag{3}$$

*где* $\beta_j$, $\gamma_j$ — const, $\beta_j^2 + \gamma_j^2 \neq 0$, $j = 1,2$, *которые являются обобщениями задач Пуанкаре и Дирихле.*

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка $n$, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$, $W_2^l(S_0)$, $l = 0,1,\ldots$ – пространства Соболева.

Имеют место [7] следующие леммы.

**Лемма 1.** *Пусть* $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$. *Если* $l \geqslant m-1$, *то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

*а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка* $p \leqslant l - m + 1$, *сходятся абсолютно и равномерно.*

**Лемма 2.** *Для того чтобы* $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$, *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда* (4) *удовлетворяли неравенствам*

$$|f_0^1(r)| \leqslant c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leqslant c_2, \quad c_1,\ c_2 = \text{const}.$$

Через $\bar{\varphi}_{1n}^k(r)$, $\bar{\varphi}_{2n}^k(r)$, $\psi_n^k(t)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (4) соответственно функций $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$.

Пусть $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$, $\psi(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $l > 3m/2$.

Тогда справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1.** *1. Если выполняется условие*

$$(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) \operatorname{ch} \mu_{s,n}\alpha \neq \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2, \quad s = 1,2\ldots, \tag{5}$$

*то задача 1 однозначно разрешима.*

*2. Если выполняется условие*

$$\gamma_2 \operatorname{sh} \mu_{s,n}\alpha \neq \mu_{s,n}\beta_2, \quad s = 1,2\ldots, \tag{6}$$

*то задача 2 имеет единственное решение, где* $\mu_{s,n}$ — *положительные нули функций Бесселя первого рода* $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$.

Заметим, что в случае задачи Пуанкаре ($\beta_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$) и задачи Дирихле ($\beta_2 = 0$) соответственно условий (5) и (6) всегда выполняются, однозначные разрешимости которых показаны в [2, 3].

**Теорема 2.** *1. Решение задачи 1 единственно, тогда и только тогда, когда имеет место соотношение* (5).

*2. Решение задачи 2 единственно, если и только если выполняется условие* (6).

## 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Сначала рассмотрим задачу 1. В сферических координатах уравнения (1) имеют вид

$$u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u+u_{tt}=0, \tag{7}$$

$$\delta\equiv-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j\sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),$$

$$g_1=1,\quad g_j=(\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{j-1})^2,\quad j>1.$$

Известно [7], что спектр оператора $\delta$ состоит из собственных чисел $\lambda_n=n(n+m-2)$, $n=0,1,\ldots$, каждому из которых соответствует $k_n$ ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 принадлежит классу $C(\bar{D}_\alpha\cap C^2(D_\alpha))$, то его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}^k_n(r,t)Y^k_{n,m}(\theta), \tag{8}$$

где $\bar{u}^k_n(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (8) в (7), используя ортогональность сферических функций $Y^k_{n,m}(\theta)$ [7], будем иметь

$$\bar{u}^k_{nrr}+\frac{m-1}{r}\bar{u}^k_{nr}-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}^k_n+\bar{u}^k_{ntt}=0,\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots, \tag{9}$$

при этом краевое условие (2) с учетом леммы 1 запишется в виде

$$\begin{gathered}\beta_1\bar{u}^k_n(r,0)=\gamma_1\bar{u}^k_n(r,\alpha)+\overline{\varphi}^k_{1n}(r),\quad \beta_2\bar{u}^k_{nt}(r,0)=\gamma_2\bar{u}^k_{nt}(r,\alpha)+\overline{\varphi}^k_{2n}(r),\\ \bar{u}^k_n(1,t)=\psi^k_n(t),\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots.\end{gathered} \tag{10}$$

В (9), (10), произведя замену $\bar{u}^k_n(r,t)=\overline{u}^k_n(r,t)-\psi^k_n(t)$, получим:

$$\overline{\upsilon}^k_{nrr}+\frac{m-1}{r}\overline{\upsilon}^k_{nr}-\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\overline{\upsilon}^k_n+\overline{\upsilon}^k_{ntt}=\overline{f}^k_n(r,t), \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\beta_1\bar{\upsilon}^k_n(r,0)=\gamma_1\bar{\upsilon}^k_n(r,\alpha)+\overline{\varphi}^k_{1n}(r),\quad \beta_2\bar{\upsilon}^k_{nt}(r,0)=\gamma_2\bar{\upsilon}^k_{nt}(r,\alpha)+\varphi^k_{2n}(r),\\ \bar{\upsilon}^k_n(1,t)=0,\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots,\end{gathered} \tag{12}$$

$$\bar{f}^k_n(r,t)=-\psi^k_{ntt}+\frac{\lambda_n}{r^2}\psi^k_n,\quad \varphi^k_{1n}(r)=\bar{\varphi}^k_{1n}(r)+\gamma_1\psi^k_n(\alpha)-\beta_1\psi^k_n(0),$$

$$\varphi^k_{2n}(r)=\overline{\varphi}^k_{2n}(r)-\gamma_2\psi^k_{nt}(\alpha)-\beta_2\psi^k_{nt}(0).$$

Произведя замену $\bar{\upsilon}^k_n(r,t)=r^{(1-m)/2}\upsilon^k_n(r,t)$, задачу (11), (12) запишем в следующем виде:

$$L\upsilon^k_n\equiv\upsilon^k_{nrr}+\upsilon^k_{ntt}+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\upsilon^k_n=f^k_n(r,t), \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\beta_1\upsilon^k_n(r,0)=\gamma_1\upsilon^k_n(r,\alpha)+\tilde{\varphi}^k_{1n}(r),\quad \beta_2\upsilon^k_{nt}(r,0)=\gamma_2\upsilon^k_{nt}(r,\alpha)+\widetilde{\varphi}^k_{2n}(r),\\ \upsilon^k_n(1,t)=0,\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots,\end{gathered} \tag{14}$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{(m-1)(3-m) - 4\lambda_n}{4}, \quad f_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \overline{f}_n^k(r,t),$$
$$\tilde{\varphi}_{jn}^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \varphi_{jn}^k(r), \quad j = 1, 2.$$

Решение задачи (13), (14) рассмотрим в виде

$$v_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \tag{15}$$

при этом пусть

$$f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) R_s(r), \quad \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k R_s(r), \quad \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{ns}^k R_s(r). \tag{16}$$

Подставляя (15) в (13), (14) с учетом (16) получим:

$$R_{srr} + \left(\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} + \mu\right) R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{17}$$
$$R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty, \tag{18}$$
$$T_{stt} - \mu T_s(t) = a_{ns}^k(t), \quad 0 < t < \alpha, \tag{19}$$
$$\beta_1 T_s(0) = \gamma_1 T_s(\alpha) + b_{ns}^k, \quad \beta_2 T_{st}(0) = \gamma_2 T_{st}(\alpha) + e_{ns}^k. \tag{20}$$

Ограниченным решением задачи (17), (18) является [8]:

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{21}$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Общее решение уравнения (19) представимо в виде [8]:

$$T_{s,n}(t) = c_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} t + c_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} t - \frac{\operatorname{ch} \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_0^t a_{ns}(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi d\xi +$$
$$+ \frac{\operatorname{sh} \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_0^t a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi d\xi, \tag{22}$$

$c_{1s}$, $c_{2s}$ — произвольные постоянные, удовлетворив условию (20), получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (\beta_1 - \gamma_1 \operatorname{ch} \mu_{s,n}\alpha) c_{1s} - \gamma_1 c_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n}\alpha = \\ = \dfrac{\gamma_1}{\mu_{s,n}} [\operatorname{sh} \mu_{s,n}\alpha \int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n}\xi d\xi - \operatorname{ch} \mu_{s,n}\alpha \int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n}\xi d\xi] + b_{ns}^k, \\ \gamma_2 c_{1s} \operatorname{sh} \mu_{s,n}\alpha + (\gamma_2 \operatorname{ch} \mu_{s,n}\alpha - \beta_2) c_{2s} = \\ = \dfrac{[\gamma_2 (\operatorname{sh} \mu_{s,n}\alpha \int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n}\xi d\xi - \operatorname{ch} \mu_{s,n}\alpha \int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n}\xi d\xi) - e_{ns}^k]}{\mu_{s,n}}. \end{cases} \tag{23}$$

которая имеет единственное решение, если выполняется условие (5).

Подставляя (21) в (16), получим:

$$r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k J_\nu(\mu_{s,n} r),$$
$$r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{ns}^k J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad 0 < r < 1. \tag{24}$$

Ряды (24) — разложение в ряды Фурье – Бесселя [9], если

$$a_{ns}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi,$$
$$b_{ns}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_{1n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \tag{25}$$
$$e_{ns}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_{2n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi,$$

$\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, \ldots$ — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$ расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (21),(22) получим решение задачи (13), (14) в виде

$$\upsilon_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_{\frac{n+(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r), \tag{26}$$

где $a_{ns}^k(t)$, $b_{ns}^k$, $e_{ns}^k$ определяются из (25), а $c_{1s}$, $c_{2s}$ — из (23).

Таким образом, из (8) следует, что решением задачи 1 является ряд

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left[ \psi_n^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}} \upsilon_n^k(r,t) \right] Y_{n,m}^k(\theta), \tag{27}$$

где $\upsilon_n^k(r,t)$ находятся из (26).

Учитывая формулу $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$ [9] оценки из [7,10]:

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), \quad \nu \geqslant 0,$$
$$|k_n| \leqslant c_1 n^{m-2}, \ \left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta)\right| \leqslant c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad q = 0, 1, \ldots, \tag{28}$$

а также леммы, условия на заданные функции $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, как в [2,3] можно показать, что полученное единственное решение (27) принадлежит классу $C(\bar{D}_\alpha) \cap C^1(D_\alpha \cup S_\alpha \cup S_0) \cap C^2(D_\alpha)$.

Следовательно, задача 1 однозначно разрешима.

Теперь рассмотрим задачу 2. Ее решение также будем искать в виде ряда (8), где функции $\bar{u}_n^k(r,t)$ будут определены ниже. Тогда аналогично задаче 1 $\bar{u}_n^k$ удовлетворяет уравнению (9), при этом краевое условие (3) в силу (8) запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(r,0) = \bar{\varphi}_{1n}^k(r), \quad \beta_2 \bar{u}_{nt}^k(r,0) = \gamma_2 \bar{u}_n^k(r,\alpha) + \bar{\varphi}_{2n}^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1,t) = \psi_n^k(t),$$
$$k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{29}$$

Произведя сначала замену $\bar{v}_n^k(r,t) = \bar{u}_n^k(r,t) - \psi_n^k(t)$, а затем, положив $\bar{v}_n^k(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} \upsilon_n^k(r,t)$, задачу (9), (29) приведем к следующей задаче:

$$L\upsilon_n^k(r,t) = f_n^k(r,t), \tag{30}$$

$$\begin{gathered} \upsilon_n^k(r,0) = \tilde{\varphi}_{1n}^k(r), \quad \beta_2 \upsilon_{nt}^k(r,0) = \gamma_2 \upsilon_n^k(r,\alpha) + \tilde{\varphi}_{2n}^k(r), \quad \upsilon_n^k(1,t) = 0, \\ k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots , \end{gathered} \tag{31}$$

где $\tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}(\bar{\varphi}_{1n}^k(r) - \psi_n^k(0))$, $\tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}(\bar{\varphi}_{2n}^k(r) + \gamma_2 \psi_n^k(\alpha) - \beta_2 \psi_{nt}^k(0))$.

Если решение задачи (30), (31) будем искать в виде (15), то приходим к задаче (17), (18) и к задаче для (19) с данными

$$T_s(0) = b_{ns}^k, \quad \beta_2 T_{st}(0) = \gamma_2 T_s(\alpha) + e_{ns}^k. \tag{32}$$

Удовлетворив общее решение (22) уравнения (19) краевому условию (32), будем иметь

$$\begin{cases} c_{1s} = b_{ns}^k, \\ (\mu_{s,n}\beta_2 - \gamma_2 \operatorname{sh} \mu_{s,n}\alpha) c_{2s} = \gamma_2 b_{ns}^k \operatorname{ch} \mu_{s,n}\alpha + \dfrac{\gamma_2}{\mu_{s,n}} (\operatorname{sh} \mu_{s,n}\alpha \int\limits_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n}\xi d\xi - \\ - \operatorname{ch} \mu_{s,n}\alpha \int\limits_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n}\xi d\xi) + e_{ns}^k, \end{cases} \tag{33}$$

из которого однозначно определяются коэффициенты $c_{1s}$, $c_{2s}$, если выполняется условие (6).

Таким образом, из (21), (22) получим решение задачи (30), (31) в виде (26), где $a_{ns}^k$, $b_{ns}^k$, $e_{ns}^k$ находятся из (25), а $c_{1s}$, $c_{2s}$ — из (33).

Следовательно, единственное решение задачи 2 представимо по формуле (27).

Теорема 1 доказана. □

Докажем теорему 2. Если выполняется условие (5), то из теоремы 1 вытекает единственность решения задачи 1. Пусть теперь условие (5) нарушено хотя бы для одного $s = l$.

Тогда нетривиальным решением однородной задачи, соответствующей задаче 1, является

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-p} r^{\frac{(2-m)}{2}} T_{l,n}(t) J_{n+\frac{m-2}{2}}(\mu_l r), \tag{34}$$

где

$$\begin{cases} \operatorname{ch} \mu_{l,n}t + \operatorname{sh} \mu_{l,n}t & \gamma_j \neq 0, \ j = 1, 2, \\ \operatorname{sh} \mu_{l,n}t, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 \neq 0, \\ \operatorname{ch} \mu_{l,n}t, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_1 \neq 0, \end{cases}$$

при этом из (28) получим, что функция (34) принадлежит искомому классу, если $p > \frac{3m}{2}$.

Если имеет место соотношение (6), то из теоремы 1 следует единственность решения задачи 2. Пусть теперь условие (6) не выполняется хотя бы для одного $s = l$. Тогда ненулевым решением однородной задачи 2 будет функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-p} r^{\frac{(2-m)}{2}} (\operatorname{sh} \mu_{l,n}t) J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_l r),$$

которая принадлежит классу $C(D_\alpha) \cap C^1(D_\alpha \cup S_0) \cap C^2(D_\alpha)$ при $p > \frac{3m}{2}$.

Теорема 2 доказана.

**Библиографический список**

1. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 3–7
2. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа // Изв. НАН РК. Сер. физико-математическая. 2014. № 3(295). С. 62–67.
3. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 7–13.
4. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. 2014. № 10(121). С. 17–25.
5. *Алдашев С. А.* Корректность локальной краевой задачи в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 365–371. DOI: https://doi.org/18500/1816-9791-2015-15-4-365-371
6. *Алдашев С. А.* Корректность локальной краевой задачи в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений // Вестн. СамУ. Естественнонауч. сер. 2016. Вып. 1–2. С. 7–17.
7. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М. : Физматгиз, 1962. 254 с.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1965. 703 с.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции : 2 т. Т. 2. М. : Наука, 1974. 295 с.
10. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М. : Наука, 1966. 724 с.



**Образец для цитирования:**

*Алдашев С. А.* Нелокальные краевые задачи в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 1. С. 16–23. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-16-23


# Nonlocal Boundary-Value Problems in the Cylindrical Domain for the Multidimensional Laplace Equation


**S. A. Aldashev**

Serik A. Aldashev, https://orcid.org/0000-0002-8223-6900, Abai Kazakh National Pedagogical University, 86 Tole Bi St., 050012 Almaty, Kazakhstan, aldash51@mail.ru



Correct statements of boundary value problems on the plane for elliptic equations by the method of analytic function theory of a complex variable. Investigating similar questions, when the number of independent variables is greater than two, problems of a fundamental nature arise. A very attractive and convenient method of singular integral equations loses its validity due to the absence of any complete theory of multidimensional singular integral equations. The author has previously studied local boundary value problems in a cylindrical domain for multidimensional elliptic equations. As far as we know, non-local boundary-value problems for these equations have not been investigated. This paper uses the method proposed in the author's earlier works, shows unique solvabilities, and gives explicit forms of classical solutions of nonlocal boundary-value problems in the cylindrical domain for the multidimensional Laplace equation, which are generalizations of the mixed problem, the Dirichlet and Poincare problems. A criterion for uniqueness is also obtained for regular solutions of these problems is also obtained.

*Keywords:* nonlocal problem, cylindrical domain, multidimensional equation, criterion, Bessel function.

Received: 02.09.2017 / Accepted: 05.06.2018 / Published online: 28.02.2019

## References

1. Aldashev S. A. The correctness of the Dirichlet problem in cylindrical domain for the multidimensional Laplace equation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 3, pp. 3–7 (in Russian).
2. Aldashev S. A. Correctness of Poincare's problem in a cylindrical region for Laplace's multi-measured equation. *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical Series*, 2014, no. 3 (295), pp. 62–67 (in Russian).
3. Aldashev S. A. The correctness of the Dirichlet problem in cylindrical domain for a class of multidimensional elliptic equations. *Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 1, pp. 7–13 (in Russian).
4. Aldashev S. A. Well-Posedness of Poincare Problem in the Cylindrical Domain for a Class of Multi-Dimensional Elliptic Equations. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2014, no. 10 (121), pp. 17–25 (in Russian).
5. Aldashev S. A. The correctness of the local boundary value problem in cylindrical domain for the multidimensional Laplace equation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 4, pp. 365–371 (in Russian). DOI: https:.doi.org/18500/1816-9791-2015-15-4-365-371
6. Aldashev S. A. The correctness of the local boundary value problem in cylindrical domain for a class of multidimensional elliptic equations. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2016, vol. 12 (123), iss. 1–2, pp. 7–17 (in Russian).
7. Mikhlin S. G. Mnogomernye singulyarnye integraly i integral'nye uravneniya [Multidimensional singular integrals and Integral equations]. Moscow, Fizmatgiz, 1962. 254 p. (in Russian).
8. Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravneniyam [Handbook of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1965. 703 p. (in Russian).
9. Bateman G., Erdei A. Vysshie transcendentnye funkcii [Higher transcendental functions]. Vol. 2. Moscow, Nauka, 1974. 295 p. (in Russian).
10. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. Uravneniya matematicheskoj fiziki[Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1966. 724 p. (i n Russian).

**Cite this article as:**
Aldashev S. A. Nonlocal Boundary-Value Problems in the Cylindrical Domain for the Multidimensional Laplace Equation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 1, pp. 16–23 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-16-23