УДК 517.927.25

Спектральный метод Ильина установления свойств базисности и равномерной сходимости биортогональных разложений на конечном интервале

И. С. Ломов

Ломов Игорь Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор, и.о. заведующего кафедрой общей математики, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, Москва, Ленинские Горы, lomov@cs.msu.ru

В работе обсуждаются основы спектрального метода В. А. Ильина на примере простого дифференциального оператора второго порядка на отрезке числовой прямой. Сформулирована первая теорема Ильина о безусловной базисности. Приведено ее подробное доказательство. Прослежена цепочка обобщений этой теоремы и сформулирована недавно установленная теорема о безусловной базисности для дифференциальных операторов с общими — интегральными — краевыми условиями. Продемонстрирована схема обоснования утверждений о равномерной сходимости биортогональных разложений функций с использованием метода Ильина. Сформулированы основные теоремы, в том числе недавно установленная теорема для операторов с интегральными краевыми условиями.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, собственные и присоединенные функции, спектр, безусловный базис, равномерная сходимость биортогональных рядов.

Поступила в редакцию: 13.04.2018 / Принята: 15.06.2018 / Опубликована онлайн: 28.02.2019

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-34-58

К 90-летию
замечательного подвижника математики
Владимира Александровича Ильина

В 1975 г. В. А. Ильин опубликовал две работы [1, 2], заложившие основу нового метода исследования свойств собственных и присоединенных функций как самосопряженных, так и несамосопряженных дифференциальных операторов (модификация спектрального метода Ильина [3], разработанного для исследования самосопряженных эллиптических операторов). Эти работы посвящены вопросам локальной базисности подсистемы корневых функций пучка М. В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов и вопросам равносходимости разложений. Новый подход заключался в отказе от рассмотрения конкретных краевых форм оператора. Заменяли их конструктивные и легко проверяемые условия на собственные значения и системы корневых функций, т.е. рассматриваются некоторые сужения максимального оператора. Идея такого подхода восходит к А. Н. Тихонову.

В дальнейшем В. А. Ильиным и его учениками метод был применен к широкому классу неисследованных ранее обыкновенных и эллиптических операторов, спектральные задачи для которых содержали линейно собственные значения. Получены необходимые и достаточные условия безусловной базисности в $\mathscr{L}^2(0,1)$ систем корневых функций, локальной базисности и локальной равносходимости биортогональных разложений функций с тригонометрическим рядом Фурье, равносходимости этих разложений на всем отрезке.

В основе метода лежит рассмотрение обобщенных корневых функций оператора, являющихся только регулярными решениями соответствующего дифференциального уравнения со спектральным параметром. Используются интегральные представления (формулы среднего значения, формулы сдвига) для решений этого уравнения. В случае исследования равносходимости разложений из модифицированного ядра Дирихле выделяется спектральная функция оператора и далее проводится эффективная оценка остатка с использованием априорных оценок корневых функций. В случае исследования безусловной базисности доказывается справедливость неравенства Бесселя для операторов L и L^* и далее используется известная теорема Н. К. Бари [4] о базисах Рисса.

Безусловная базисность. Базис Рисса. Сформулируем результаты В. А. Ильина и его учеников по безусловной базисности систем корневых функций на всем отрезке $\overline{G} = [0, 1]$ в пространстве $H = \mathscr{L}^2(G)$.

Напомним, что *базисом Рисса* в H называется базис, эквивалентный ортонормированному, т.е. он получается из ортонормированного в H базиса после применения к этому базису некоторого ограниченного обратимого оператора [4]. Базис Рисса является базисом безусловной сходимости, т.е. сходимость не нарушается при любой перестановке членов ряда. Для базиса Рисса $\{u_n\}$ в H существует единственная биортогональная система $\{v_n\}$, также образующая базис Рисса в H. Обе эти системы являются почти нормированными в H, т. е. $inf_n \|u_n\|_H > 0$ и $sup_n \|u_n\|_H < \infty$.

Для доказательства теоремы о базисности Рисса используется следующая теорема Н. К. Бари [4]. *Пусть $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ — биортогональные системы в пространстве H. Для того чтобы $\{u_n\}$ образовывала базис Рисса в пространстве H, необходимо и достаточно, чтобы $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ были полны в H и для них было справедливо неравенство Бесселя.* В нашем случае система, биортогонально сопряженная с системой корневых функций оператора L, является системой корневых функций формально сопряженного с ним оператора L^+.

Рассмотрим оператор L, действующий в пространстве H, порожденный дифференциальной операцией $l = d^2/dx^2 + q(x)$, $q \in \mathscr{L}$, на классе функций D — абсолютно непрерывных на $\overline{G}$ вместе со своей производной первого порядка. Обозначим через L^+ формально сопряженный с L оператор, действующий в H, порожденный дифференциальной операцией $l^* = d^2/dx^2 + \overline{q}(x)$ на множестве $D^* = D$.

Рассмотрим биортонормированную в H пару систем $\{u_n(x)\}, \{v_n(x)\}$ обобщенных собственных и присоединенных (кратко — корневых) функций операторов L и L^+, т. е. для каждого $n \in N : u_n \in D, v_n \in D^*$, для некоторого числа $\lambda_n \in \mathscr{C}$ почти всюду в G имеют место равенства $lu_n + \lambda_n^2 u_n = \theta_n \mu_n u_{n-1}, \quad l^* v_n + \overline{\lambda}_n^2 v_n = \theta_{n+1} \overline{\mu}_n v_{n+1}$, где $\theta_n = 0$, и тогда u_n называется собственной функцией, либо $\theta_n = 1$ (в последнем случае $\lambda_n = \lambda_{n-1}$), и u_n называется присоединенной функцией, $\theta_1 = 0, (u_n, v_k) = \delta_{nk}, n, k \in \mathscr{N}$. Числа μ_n выбираем в зависимости от рассматриваемой спектральной задачи 1 или 2: $\mu_n = 1$ (задача 1), либо $\mu_n = \omega\lambda_n$ при $|\lambda_n| \geqslant 1, \mu_n = \omega = const \neq 0$ при $|\lambda_n| < 1$ (задача 2); коэффициент μ_n влияет только на нормировку присоединенных функций.

Отметим, что если рассматривается существенно несамосопряженный оператор L, т. е. общее число присоединенных функций в его системе корневых функций является бесконечным, то базис Рисса могут образовывать только корневые функции, являющиеся решением спектральной задачи 2.

Зафиксируем произвольное число $\gamma \geqslant 0$ и свяжем с ним следующее спектральное множество $\Pi_\gamma = \{\lambda \in \mathscr{C}: \ \lambda = \varrho + i\mu, \ \varrho, \mu \in \mathscr{R}, \ \varrho \geqslant 0, |\mu| \leqslant \gamma\}$. Будем рассматривать числа $\{\lambda_n\}$ такие, что с некоторыми постоянными $c_0 > 0$, $\gamma \geqslant 0$

$$\lambda_n \in \Pi_\gamma, \qquad \sum_{\lambda \leqslant |\lambda_n| \leqslant \lambda+1} 1 \leqslant c_0, \quad \forall\ \lambda \geqslant 0, \tag{1}$$

т. е. числа λ_n лежат в полосе около вещественной оси, нет конечных точек сгущения и количество присоединенных функций, отвечающих одному собственному значению, равномерно ограничено.

Теорема 1 (см. [5]). *Для того чтобы полные в H системы $\{u_n(x)\}$, $\{v_n(x)\}$ обобщенных корневых функций операторов L и L^+, отвечающих числам $\{\lambda_n\} \in \Pi_\gamma$, являлись безусловными базисами в H, необходимо и достаточно, чтобы были справедливы два неравенства: неравенство* (1) *для суммы единиц и неравенство*

$$\|u_n\|_2 \cdot \|v_n\|_2 \leqslant c, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{\mathscr{L}^2(G)}$.

В работе [5] установлен также следующий принципиальный факт: *условие базисности Рисса или обычной базисности системы корневых функций нельзя выразить в традиционной форме задания типа краевых условий.* Так, корневые функции оператора L, порожденного дифференциальной операцией

$$lu = u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u, \quad x \in G, \tag{3}$$

одними и теми же краевыми условиями $u(0) = 0$, $u'(0) = u'(1)$ при $p_1(x) \equiv p_2(x) \equiv 0$ и при правильном выборе присоединенных функций образуют базис Рисса в H, а при $p_1(x) \equiv 1$, $p_2(x) \equiv 0$ не обладают свойством базисности в H ни при каком выборе корневых функций.

Этот пример показывает, что при одних и тех же краевых условиях наличие или отсутствие свойства базисности определяется значениями коэффициентов дифференциального оператора.

Отметим, что в [5] рассмотрен оператор L с дифференциальной операцией (3) и с условием $p_1(x) \in W_1^1(G)$ ($p_2 \in \mathscr{L}$). Это условие позволяет известной подстановкой убрать слагаемое $p_1(x)u_n'(x)$ из уравнения на собственные и присоединенные функции и рассматривать далее уравнение с потенциалом $q(x) \in \mathscr{L}(G)$.

Работа В. А. Ильина [5] послужила отправной точкой для многочисленных исследований по проблеме безусловной базисности. Прежде чем доказывать теорему 1, перечислим некоторые из полученных результатов в этом направлении.

В работе [6] основной результат работы [5] перенесен на случай разрывного оператора L, т. е. на случай, когда корневые функции $u_n(x)$ удовлетворяют соответствующему дифференциальному уравнению не почти всюду на всем интервале G, а только на каждом частичном интервале (ξ_{l-1}, ξ_l), возникающем при разбиении G точками $0 = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_s < \xi_{s+1} = 1$. При этом в точках $\xi_p, 1 \leqslant p \leqslant s$, допускаются совершенно произвольные условия сшивания корневых функций.

Основной результат работы [6] нацелен на установление условий базисности Рисса задач с так называемыми нелокальными краевыми условиями, например, с условиями вида

$$u(1) = \sum_{l=1}^{s} \alpha_l u(\xi_l) \qquad \text{и} \qquad u'(0) = \sum_{l=1}^{s} \beta_l u'(\xi_l).$$

Задачи, сопряженные к задачам с такими условиями, как раз и являются задачами с разрывным оператором.

Результат работы [6] перенесен в [7] на разрывный оператор Шредингера $(lU = U'' + Q(x)U)$ с матричным неэрмитовым потенциалом $Q(x)$ с комплекснозначными и только суммируемыми на G элементами $Q_{ij}(x)$. Соответствующие теоремы в [6, 7] формулируются в точности как теорема 1.

Этот результат получил развитие в нескольких направлениях. Для системы уравнений первого порядка теорему доказали Е. И. Моисеев и М. Барновска [8]. На операторы 4-го порядка теорему 1 перенес Н. Б. Керимов [9, 10]. В дополнение к условиям теоремы 1 показано, что необходимым и достаточным условием базисности для дифференциальных операторов порядка выше второго является условие

$$\exists\ c = \mathrm{const} > 0 : \quad \sum_{|\lambda_n| \leqslant N} \|u_n\|_\infty^2 \|u_n\|_2^{-2} \leqslant cN,$$

для каждой из систем $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$. Для оператора второго порядка Н. Б. Керимов показал, что если ранг собственных функций равномерно ограничен и система $\{v_n\}$ состоит из корневых функций оператора L^+, то первое условие (1) ($|\operatorname{Im}\lambda_n| \leqslant c_0$, $\forall\ n$) является необходимым для безусловной базисности (это условие необходимо и для базисности в $\mathscr{L}^p(G)$, $p \in (1, \infty)$ [11]). Доказано [11], что при указанных двух условиях в случае, если система $\{u_n\}$ образует базис в $\mathscr{L}^2(G)$, этот базис является безусловным. Аналогичный результат для нормированных базисов в $\mathscr{L}^2(G)$ доказал Л. В. Крицков [12].

В 1977 г. В. А. Ильин [13] исследовал вопрос о сходимости разложений в точках разрыва коэффициентов оператора второго порядка, на такие операторы теорему о безусловной базисности перенес В. Д. Будаев [14].

Для оператора шестого и выше — четного — порядков теорему о безусловной базисности в $\mathscr{L}^2(G)$ доказал В. Д. Будаев [15–17]. Примерно в то же время для оператора произвольного порядка в m-мерном пространстве вектор-функций теорема доказана в [18]; доказана и необходимость второго условия (1) для безусловной базисности. В дальнейшем эту теорему для оператора четного порядка при несколько более широких предположениях доказал В. М. Курбанов [19]. Теорему о безусловной базисности в $\mathscr{L}^2(G)$ для оператора Шредингера с сингулярным потенциалом $q(x)$ доказал Л. В. Крицков [20, 21] (условие на потенциал $q(x) : x(1-x)q(x) \in \mathscr{L}(G)$).

Все указанные теоремы о безусловной базисности в $\mathscr{L}^2(G)$ доказаны в рамках метода В. А. Ильина — безотносительно к конкретному виду краевых условий (более того, В. А. Ильин и Е. И. Моисеев [22] показали, что результат справедлив и для систем, состоящих из подмножеств двух различных краевых задач). Но во всех теоремах предполагается, что биортогональная система $\{v_n\}$ состоит из корневых функций оператора L^+ и удовлетворяет тем же требованиям, что и $\{u_n\}$. В частности, $v_n \in D$ — гладкие функции. Оказалось, что это возможно только для двухточечных краевых условий — с данными в точках $x = 0$ и $x = 1$. Появление любой внутренней точки из G в краевых формах приводит к разрывам у функций v_n или их производных, т. е. $v_n \notin D$. Поскольку для обоснования теорем над u_n и v_n совершаются одни и те же действия, то возникла идея доказать теорему для случая, когда оба оператора L и L^+ определены на классе функций $y(x) \in D$ на конечном числе отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1, l}$, составляющих $\overline{G}$. Как отмечалось выше, впервые это сделал В. А. Ильин [6, 7] в скалярном и векторном случаях.

Однако и эти результаты не охватывали всех видов краевых форм; подходили только многоточечные условия с конечным числом внутренних точек. В общем случае краевые формы следует рассматривать как линейные непрерывные функционалы в пространстве $C(\overline{G})$ (или C^1). Но тогда по теореме Рисса [23, с. 347] каждый функционал представим в виде интеграла Стилтьеса по мере, порожденной некоторой функцией с ограниченным изменением. Таким образом, естественным путем приходим к необходимости изучить краевую задачу с интегральными краевыми условиями. Так как функцию с ограниченным изменением можно представить в виде суммы функции скачков, абсолютно непрерывной функции и непрерывной сингулярной функции, то и краевые формы распадаются на сумму трех слагаемых — дискретную часть, содержащую значения функции и ее производных в отдельных точках отрезка $\overline{G}$ (причем точки эти могут составлять плотное множество на $\overline{G}$), интеграл от произведения на функцию из $\mathscr{L}(G)$ и интеграл по непрерывной сингулярной мере. Сопряженный оператор для такой краевой задачи был построен Р. Брауном и А. Кроллом [24] и имеет весьма сложную структуру. Биортогонально сопряженная система теперь состоит из функций, которые сами, как и их производные, могут иметь разрывы первого рода в счетном числе точек. Точки разрывов и величины скачков определяются дискретной составляющей меры. Абсолютно непрерывная часть меры влияет на дифференциальную операцию для L^+: она становится «нагруженной», т. е. содержит функционалы от решения — значения неизвестной функции или ее производных в фиксированных точках отрезка. Отметим, что методы исследования нагруженных дифференциальных и интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории динамики грунтовых вод и в теории теплопроводности, разработаны А. М. Нахушевым и его учениками [25, 26].

В свою очередь, оператор L^* может также порождаться интегральным условием, что приводит к необходимости изучать оператор L на упомянутом множестве разрывных функций. Автором [27] построен пример задачи, где операторы L и L^* определены на множестве разрывных функций (одна точка разрыва), показано, что выполняются все условия теоремы В. А. Ильина и система корневых функций образует базис Рисса в $\mathscr{L}^2(G)$. Впервые безусловная базисность для столь общих неклассических операторов была доказана автором для оператора второго порядка сначала для дискретных краевых форм [28,29], затем для общих краевых форм в пространстве вектор-функций [30, 31] и для операторов любого порядка [32]. При этом рассмотрены модельные операторы — область определения операторов не зависела от коэффициентов дифференциальной операции.

Отметим также, что для операторов четного порядка, определенных на множестве функций, разрывных в конечном числе точек, теорему о безусловной базисности в $\mathscr{L}^2(G)$ доказал В. Д. Будаев [17], для оператора второго порядка с сингулярными коэффициентами, определенными на множестве разрывных функций, теорема доказана в [31, 33] — для разных особенностей у коэффициентов. В. А. Юрко [34] исследовал обратную задачу для граничной задачи оператора второго порядка с точкой разрыва решения внутри интервала. Показано, что система собственных функций полна в $\mathscr{L}^2$, получена теорема о равномерной сходимости ряда Фурье для абсолютно непрерывной функции. Такого рода задачи возникают в механике, радиоэлектронике, геофизике и др. Такие задачи решают и в связи с исследованием разрывных решений нелинейных интегрируемых уравнений в математической физике.

Ниже будет сформулирована теорема о безусловной базисности системы корневых функций дифференциального оператора второго порядка с интегральными краевыми условиями.

Приведем еще ряд близких результатов по спектральной теории дифференциальных операторов, полученных в рамках метода Ильина. А. С. Макин [35–37] исследовал случай, когда для оператора L не выполняется условие (2). Получены достаточные условия суммируемости методом Рисса биортогональных рядов. Эти работы продолжили исследования В. А. Ильина и В. В. Тихомирова [38, 39], Я. Ш. Салимова [40], посвященные средним Рисса спектральных разложений. В. В. Тихомиров [41–43] в случае оператора второго порядка доказал ряд теорем о безусловной базисности систем регулярных корневых функций нагруженных операторов и операторов с отклоняющимся аргументом. Априорные оценки корневых функций, используемые во всех перечисленных работах, были получены в [1, 2, 11, 30, 32, 44–48].

Подробный обзор разных направлений исследований, проведенных в рамках метода Ильина содержится в [49]. Обзор результатов по сходимости спектральных разложений, полученных другими методами, подробно изложен в работе А. П. Хромова [50] (см. также статьи его и его учеников [51–54]).

Доказательство теоремы 1. В работе [5] содержится краткая схема доказательства этой теоремы, поэтому приведем здесь более подробное и более простое доказательство. Пусть $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ — биортогональные системы, каждая из которых полна в H. Тогда системы $\{u_n\|u_n\|_2^{-1}\}$, $\{v_n\|u_n\|_2\}$ и $\{u_n\|v_n\|_2\}$, $\{v_n\|v_n\|_2^{-1}\}$ являются биортогональными и каждая из них полна в H. Докажем, что для каждой из этих систем справедливо неравенство Бесселя: найдутся постоянные $c > 0$ такие, что для $\forall\ f \in H$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, u_n)|^2 \|u_n\|_2^{-2} \leqslant c\|f\|_2^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |(f, v_n)|^2 \|u_n\|_2^{2} \leqslant c\|f\|_2^2, \tag{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, u_n)|^2 \|v_n\|_2^{2} \leqslant c\|f\|_2^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |(f, v_n)|^2 \|v_n\|_2^{-2} \leqslant c\|f\|_2^2. \tag{5}$$

Тогда из приведенной выше теоремы Бари следует, что каждая из этих новых систем образует базис Рисса в H и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f, v_n)u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(f, v_n\|u_n\|_2)u_n\|u_n\|_2^{-1} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}(f, u_n)v_n = \sum_{n=1}^{\infty}(f, u_n\|v_n\|_2)v_n\|v_n\|_2^{-1}$$

сходятся безусловно в H, т. е. каждая из систем $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ образует безусловный базис в H.

При доказательстве первого неравенства (4) и второго неравенства (5) используются равенства $\|u_n\|_2\|u_n\|_2^{-1} = 1$, $\|v_n\|_2\|v_n\|_2^{-1} = 1$, при доказательстве второго неравенства (4) и первого неравенства (5) используется неравенство (2): $\|u_n\|_2\|v_n\|_2 \leqslant c$. В остальном схемы обоснования неравенств одинаковы.

Докажем первое неравенство (4). Возьмем произвольную функцию $f(x) \in H$. Используя неравенство Коши – Буняковского

$$|(u_n, f)| \cdot \|u_n\|_2^{-1} \leqslant \|u_n\|_2 \cdot \|f\|_2 \cdot \|u_n\|_2^{-1} = \|f\|_2$$

и второе условие (1):

$$\sum_{|\lambda_n|\leqslant 1} |(u_n, f)|^2 \|u_n\|_2^{-2} \leqslant \|f\|_2^2 \sum_{|\lambda_n|\leqslant 1} 1 \leqslant c_0\|f\|_2^2,$$

убеждаемся в том, что первое неравенство (4) достаточно установить для чисел λ_n: $|\lambda_n| > 1$.

Воспользуемся следующим представлением функций $u_n(x)$, отвечающих числам $\lambda_n \neq 0$ (интегральным уравнением для u_n), получаемым интегрированием по частям интегрального слагаемого после замены $\theta_n\mu_n u_{n-1}(\tau) - q(\tau)u_n(\tau) = u_n''(\tau) + \lambda_n^2 u_n(\tau)$:

$$u_n(x) = u_n(0)\cos\lambda_n x + \frac{1}{\lambda_n}u_n'(0)\sin\lambda_n x + \frac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^x [\theta_n\mu_n u_{n-1}(\tau) - \\ - q(\tau)u_n(\tau)]\sin\lambda_n(x-\tau)\,d\tau. \qquad (6)$$

Поскольку $|(f,u_n)| = |(u_n,f)|$, то используем запись (u_n,f) и обозначим $g(x) = \overline{f}(x)$. Умножим представление (6) на $g(x)$ и проинтегрируем обе части равенства по x на отрезке $\overline{G}$:

$$(u_n,f) = u_n(0)\int\limits_0^1 g(x)\cos\lambda_n x\,dx + \frac{1}{\lambda_n}u_n'(0)\int\limits_0^1 g(x)\sin\lambda_n x\,dx + \\ + \frac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^1 g(x)\int\limits_0^x [\theta_n\mu_n u_{n-1}(\tau) - q(\tau)u_n(\tau)]\sin\lambda_n(x-\tau)\,d\tau\,dx.$$

Из этого представления скалярного произведения (u_n,f) следует, что для доказательства первого неравенства (4) для $|\lambda_n| > 1$ достаточно доказать справедливость с некоторыми постоянными $c > 0$ следующих четырех неравенств:

$$\sum_{|\lambda_n|>1} |u_n(0)|^2 \left|\int\limits_0^1 g(x)\cos\lambda_n x\,dx\right|^2 \|u_n\|_2^{-2} \leqslant c\|f\|_2^2, \qquad (7)$$

$$\sum_{|\lambda_n|>1} |\lambda_n|^{-2}|u_n'(0)|^2 \left|\int\limits_0^1 g(x)\sin\lambda_n x\,dx\right|^2 \|u_n\|_2^{-2} \leqslant c\|f\|_2^2, \qquad (8)$$

$$\sum_{|\lambda_n|>1} |\lambda_n|^{-2} \left|\int\limits_0^1 g(x)\int\limits_0^x \theta_n\mu_n u_{n-1}(\tau)\sin\lambda_n(x-\tau)\,d\tau dx\right|^2 \|u_n\|_2^{-2} \leqslant c\|f\|_2^2, \qquad (9)$$

$$\sum_{|\lambda_n|>1} |\lambda_n|^{-2} \left|\int\limits_0^1 g(x)\int\limits_0^x q(\tau)u_n(\tau)\sin\lambda_n(x-\tau)\,d\tau dx\right|^2 \|u_n\|_2^{-2} \leqslant c\|f\|_2^2, \qquad (10)$$

Докажем эти неравенства. Нам потребуются следующие априорные оценки, установленные в [44, 45].

Лемма 1. *Пусть потенциал $q(x) \in \mathscr{L}(G)$. Тогда найдется такая постоянная $c > 0$, что для всех чисел $\lambda \in \Pi_\gamma$ для цепочек корневых функций $\{u_j(x)\}_{j=0}^m$ оператора L, отвечающих параметру λ, справедливы следующие оценки ($r = \overline{0,m}$, $0 \leqslant j \leqslant r$):*

$$\|u_j^{(\alpha)}\|_\infty \leqslant c(1+|\lambda|)^{r-j+\alpha-\beta}\|u_r^{(\beta)}\|_2, \quad \alpha,\beta \in \{0,1\}, \qquad (11)$$

для спектральной задачи 1, а для спектральной задачи 2

$$\|u_j^{(\alpha)}\|_\infty \leqslant c(1+|\lambda|)^{\alpha-\beta}\|u_r^{(\beta)}\|_2, \quad \alpha, \beta \in \{0,1\}. \tag{12}$$

Рассмотрим ряд из неравенства (7). Применим оценку (11) леммы 1 ($\alpha = \beta = 0$, $j = r$, при этом оценки (11) и (12) совпадают): $|u_n(0)|\|u_n\|_2^{-1} \leqslant c\|u_n\|_2 \cdot \|u_n\|_2^{-1} = c$, $\forall\ n$. Получим, что этот ряд мажорируется рядом

$$\sum_{|\lambda_n|>1}\left|\int_0^1 g(x)\cos\lambda_n x\,dx\right|^2. \tag{13}$$

Поскольку выполняется второе условие (1) и $|Im\lambda_n| \leqslant \gamma$, то рассматриваемую последовательность $\{\lambda_n\}$ можно расслоить на сумму конечного числа последовательностей, в каждой из которых содержится не более чем один элемент λ_n, удовлетворяющий условиям

$$2\pi n \leqslant |\lambda_n| \leqslant 2\pi(n+1), \quad \lambda_n = \pm 2\pi n + \delta_n, \quad |\delta_n| \leqslant c, \quad n \geqslant 0. \tag{14}$$

Достаточно получить оценку ряда (13) для каждой из таких последовательностей.

Используем формулу тригонометрии:

$$\cos\lambda_n x = \cos(\pm 2\pi n x + \delta_n x) = \cos 2\pi n x\cos\delta_n x \mp \sin 2\pi n x \sin\delta_n x$$

и равенство $\psi(x) = -\left(\int_x^1 \psi(\tau)\,d\tau\right)'_x$. Интегрированием по частям получим:

$$\int_0^1 g(x)\cos\lambda_n x\,dx = \int_0^1 g(x)\cos 2\pi n x\cos\delta_n x\,dx \mp \int_0^1 g(x)\sin 2\pi n x\sin\delta_n x\,dx =$$

$$= -\int_0^1\left[\int_x^1 g(\tau)\cos 2\pi n\tau\,d\tau\right]'\cos\delta_n x\,dx \pm \int_0^1\left[\int_x^1 g(\tau)\sin 2\pi n\tau\,d\tau\right]'\sin\delta_n x\,dx =$$

$$= -\int_x^1 g(\tau)\cos 2\pi n\tau\,d\tau\cos\delta_n x\Big|_{x=0}^1 - \delta_n\int_0^1\sin\delta_n x\int_x^1 g(\tau)\cos 2\pi n\tau\,d\tau\,dx \pm$$

$$\pm\int_x^1 g(\tau)\sin 2\pi n\tau\,d\tau\sin\delta_n x\Big|_{x=0}^1 \mp \delta_n\int_0^1\cos\delta_n x\int_x^1 g(\tau)\sin 2\pi n\tau\,d\tau\,dx =$$

$$= \int_0^1 g(\tau)\cos 2\pi n\tau\,d\tau - \delta_n\int_0^1\sin\delta_n x\int_x^1 g(\tau)\cos 2\pi n\tau\,d\tau\,dx \mp$$

$$\mp\delta_n\int_0^1\cos\delta_n x\int_x^1 g(\tau)\sin 2\pi n\tau\,d\tau\,dx.$$

Воспользуемся неравенством Коши для трех слагаемых: $(a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$, $\forall\ a, b, c \in \mathscr{R}$, ограниченностью модулей величин δ_n (см. (14)), $\sin\delta_n x, \cos\delta_n x$ и неравенством Коши – Буняковского, получим:

$$\left|\int_0^1 g(x)\cos\lambda_n x\,dx\right|^2 \leqslant 3\left[\left|\int_0^1 g(\tau)\cos 2\pi n\tau\,d\tau\right|^2 +\right.$$

$$+\left|\delta_n \int\limits_0^1 \sin\delta_n x \int\limits_x^1 g(\tau)\cos 2\pi n\tau\, d\tau\, dx\right|^2 + \left|\delta_n \int\limits_0^1 \cos\delta_n x \int\limits_x^1 g(\tau)\sin 2\pi n\tau\, d\tau\, dx\right|^2\Bigg] \leqslant$$

$$\leqslant 3\left[\left|\int\limits_0^1 g(\tau)\cos 2\pi n\tau\, d\tau\right|^2 + \int\limits_0^1 |\delta_n \sin\delta_n x|^2 dx \int\limits_0^1 \left|\int\limits_x^1 g(\tau)\cos 2\pi n\tau\, d\tau\right|^2 dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^1 |\delta_n \cos\delta_n x|^2 dx \int\limits_0^1 \left|\int\limits_x^1 g(\tau)\sin 2\pi n\tau d\tau\right|^2 dx\right] \leqslant c\left[\left|\int\limits_0^1 g(\tau)\cos 2\pi n\tau\, d\tau\right|^2 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^1 \left|\int\limits_x^1 g(\tau)\cos 2\pi n\tau\, d\tau\right|^2 dx + \int\limits_0^1 \left|\int\limits_x^1 g(\tau)\sin 2\pi n\tau d\tau\right|^2 dx\right]. \tag{15}$$

Тригонометрическая система функций $\{1, \sqrt{2}\cos 2\pi nx, \sqrt{2}\sin 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}$ является ортонормированной в пространстве $\mathscr{L}^2(G)$ и для нее справедливо неравенство Бесселя. Поэтому для первого слагаемого в правой части соотношения (15) получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int\limits_0^1 g(x)\cos 2\pi nx\, dx\right|^2 \leqslant c\|g(x)\|_2^2 = c\|f\|_2^2. \tag{16}$$

Рассмотрим второе и третье слагаемые в правой части (15) и соответствующий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^1 \left[\left|\int\limits_x^1 g(\tau)\cos 2\pi n\tau\, d\tau\right|^2 + \left|\int\limits_x^1 g(\tau)\sin 2\pi n\tau d\tau\right|^2\right] dx. \tag{17}$$

Для того чтобы воспользоваться неравенством Бесселя или равенством Парсеваля для тригонометрической системы функций, нужно вынести интеграл за знак суммы, т. е. показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left|\int\limits_x^1 g(\tau)\cos 2\pi n\tau\, d\tau\right|^2 + \left|\int\limits_x^1 g(\tau)\sin 2\pi n\tau d\tau\right|^2\right] \tag{18}$$

можно интегрировать почленно по x на отрезке $\overline{G}$. Для этого достаточно показать, что этот ряд сходится равномерно или в среднем на $\overline{G}$. Отметим, что ряд (18) сходится для каждого значения $x \in \overline{G}$ — в силу неравенства Бесселя для тригонометрической системы функций для функции $F(x,\tau) = g(\tau)$ при $\tau \in [x, 1]$, $F(x,\tau) = 0$ при $\tau \in [0, x)$, $F(x,\tau) \in H$, $\forall\, x \in \overline{G}$.

Фиксируем произвольную точку $x \in [0, 1)$. Запишем равенство Парсеваля для тригонометрической системы для этой функции F:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left|\int\limits_0^1 F(x,\tau)\cos 2\pi n\tau\, d\tau\right|^2 + \left|\int\limits_0^1 F(x,\tau)\sin 2\pi n\tau d\tau\right|^2\right] = c\|F(x,\tau)\|_2^2. \tag{19}$$

Применим признак Дини равномерной сходимости функциональных рядов. Поскольку $f(x) \in H$, то интеграл $\int_x^1 f(\tau)\, d\tau$ есть абсолютно непрерывная функция, поэтому $\|F(x,\tau)\|_2^2$ и слагаемые под знаком суммы в равенстве (19) есть непрерывные функции на $\overline{G}$. Следовательно, на отрезке $\overline{G}$ к ряду (18) применим признак Дини, и этот ряд сходится равномерно по x на отрезке $\overline{G}$. Таким образом, ряд (18) на отрезке $\overline{G}$ можно интегрировать почленно, и в соотношении (17) можно вынести интеграл за знак суммы и далее применить равенство Парсеваля (19), где мы вернемся к функции $g(x) = \overline{f}(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^1\left[\left|\int\limits_x^1 g(\tau)\cos 2\pi n\tau\,d\tau\right|^2+\left|\int\limits_x^1 g(\tau)\sin 2\pi n\tau d\tau\right|^2\right]dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left|\int\limits_x^1 g(\tau)\cos 2\pi n\tau\,d\tau\right|^2+\left|\int\limits_x^1 g(\tau)\sin 2\pi n\tau d\tau\right|^2\right]\right]dx=$$

$$=c\int\limits_0^1\int\limits_x^1|g(\tau)|^2\,d\tau\,dx\leqslant c\|g\|_2^2=c\|f\|_2^2,$$

что в соединении с оценкой (16) дает оценку ряда (13):

$$\sum_{|\lambda_n|>1}\left|\int\limits_0^1 g(x)\cos\lambda_n x\,dx\right|^2\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int\limits_0^1 g(x)\cos pm2\pi nx+\delta_n x\,dx\right|^2\leqslant c\|g\|_2^2=c\|f\|_2^2, \quad (20)$$

для каждой рассматриваемой выделенной последовательности $\{\lambda_n\}$. А это доказывает справедливость неравенства (7).

Рассмотрим ряд из неравенства (8). Применим оценку (11) леммы 1 для $\alpha = 1$ и $j = r, \beta = 0:\ |\lambda_n|^{-1}|u_n'(0)|\cdot\|u_n\|_2^{-1}\leqslant c|\lambda_n|^{-1}\left[(1+|\lambda_n|)\|u_n\|_2\right]\|u_n\|_2^{-1}\leqslant c_1$ и заключим, что этот ряд мажорируется рядом

$$\sum_{|\lambda_n|>1}\left|\int\limits_0^1 g(x)\sin\lambda_n x\,dx\right|^2, \quad (21)$$

для которого получаем оценку (20), повторяя ту же схему, что была применена для ряда (13). Нужно только использовать другую тригонометрическую формулу для λ_n из (14): $\sin\lambda_n x = \pm\sin 2\pi nx\cos\delta_n x + \cos 2\pi nx\sin\delta_n x$, вся последующая схема не изменяется (с точностью до знаков слагаемых).

Обратимся к ряду из неравенства (9). Преобразуем общий член ряда, поменяв местами интегралы, применив априорные оценки (11), (12) с $\alpha=\beta=0, j=r-1$, неравенство Коши – Буняковского, учтем условие $\lambda_n\in\Pi_\gamma$ и используем неравенство Коши $(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$:

$$|\lambda_n|^{-2}\left|\int\limits_0^1 g(x)\int\limits_0^x\theta_n\mu_n u_{n-1}(\tau)\sin\lambda_n(x-\tau)\,d\tau dx\right|^2\|u_n\|_2^{-2}=$$

$$=|\lambda_n|^{-2}\|u_n\|_2^{-2}\left|\int\limits_0^1\theta_n\mu_n u_{n-1}(\tau)\int\limits_\tau^1 g(x)\sin\lambda_n(x-\tau)\,dx\,d\tau\right|^2=|\lambda_n|^{-2}\|u_n\|_2^{-2}\times$$

$$\times\left|\int_0^1 \theta_n\mu_n u_{n-1}(\tau)\left[\cos\lambda_n\tau\int_\tau^1 g(x)\sin\lambda_n x\,dx+\sin\lambda_n\tau\int_\tau^1 g(x)\cos\lambda_n x\,dx\,d\tau\right]\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant c|\lambda_n|^{-2}\|u_n\|_2^{-2}(1+|\lambda_n|)^2\|u_n\|_2^2\left[\int_0^1\left[\left|\int_\tau^1 g(x)\sin\lambda_n x\,dx\right|+\left|\int_\tau^1 g(x)\cos\lambda_n x\,dx\right|\right]d\tau\right]^2\leqslant$$

$$\leqslant c_1\left[\int_0^1\left|\int_\tau^1 g(x)\cos\lambda_n x\,dx\right|^2 d\tau+\int_0^1\left|\int_\tau^1 g(x)\sin\lambda_n x\,dx\right|^2 d\tau\right].$$

Таким образом, для установления оценки (9) достаточно получить аналогичные оценки для двух рядов

$$\sum_{|\lambda_n|>1}\int_0^1\left|\int_\tau^1 g(x)\cos\lambda_n x\,dx\right|^2 d\tau;\quad \sum_{|\lambda_n|>1}\int_0^1\left|\int_\tau^1 g(x)\sin\lambda_n x\,dx\right|^2 d\tau. \tag{22}$$

Повторим схему, примененную для оценки рядов (13), (21), внося в нее необходимые изменения. Будем преобразовывать первый ряд (22). Расщепим последовательность $\{\lambda_n\}$ на подпоследовательности и представим числа λ_n в виде (14), используем формулу косинуса суммы и применим формулу интегрирования по частям. Получим

$$\int_\tau^1 g(x)\cos\lambda_n x\,dx=\int_\tau^1 g(x)\cos(\pm 2\pi nx+\delta_n x)\,dx=\int_\tau^1 g(x)\cos 2\pi nx\cos\delta_n x\,dx\mp$$

$$\mp\int_\tau^1 g(x)\sin 2\pi nx\sin\delta_n x\,dx=-\int_\tau^1\left[\int_x^1 g(\xi)\cos 2\pi n\xi\,d\xi\right]'\cos\delta_n x\,dx\pm$$

$$\pm\int_\tau^1\left[\int_x^1 g(\xi)\sin 2\pi n\xi\,d\xi\right]'\sin\delta_n x\,dx=\cos\delta_n\tau\int_\tau^1 g(\xi)\cos 2\pi n\xi\,d\xi-$$

$$-\delta_n\int_\tau^1\sin\delta_n x\int_x^1 g(\xi)\cos 2\pi n\xi\,d\xi\,dx\mp\sin\delta_n\tau\int_\tau^1 g(\xi)\sin 2\pi n\xi\,d\xi\mp$$

$$\mp\delta_n\int_\tau^1\cos\delta_n x\int_x^1 g(\xi)\sin 2\pi n\xi\,d\xi\,dx.$$

Воспользуемся неравенством Коши для четырех слагаемых $(a+b+c+d)^2\leqslant$ $\leqslant 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$, ограниченностью модулей величин δ_n, $\sin\delta_n x$, $\cos\delta_n x$ и неравенством Коши – Буняковского. Получаем:

$$\left|\int_\tau^1 g(x)\cos\lambda_n x\,dx\right|^2\leqslant 4\left[\left|\cos\delta_n\tau\int_\tau^1 g(\xi)\cos 2\pi n\xi\,d\xi\right|^2+\left|\sin\delta_n\tau\int_\tau^1 g(\xi)\sin 2\pi n\xi\,d\xi\right|^2+\right.$$

$$\left.+\left|\delta_n\int_\tau^1\sin\delta_n x\int_x^1 g(\xi)\cos 2\pi n\xi\,d\xi\,dx\right|^2+\left|\delta_n\int_\tau^1\cos\delta_n x\int_x^1 g(\xi)\sin 2\pi n\xi\,d\xi\,dx\right|^2\right]\leqslant$$

$$\leqslant c\left[\left|\int\limits_{\tau}^{1} g(\xi)\cos 2\pi n\xi\,d\xi\right|^2+\left|\int\limits_{\tau}^{1} g(\xi)\sin 2\pi n\xi\,d\xi\right|^2+\int\limits_{\tau}^{1}\left|\int\limits_{x}^{1} g(\xi)\cos 2\pi n\xi\,d\xi\right|^2 dx+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{\tau}^{1}\left|\int\limits_{x}^{1} g(\xi)\sin 2\pi n\xi\,d\xi\right|^2 dx\right].$$

Для общего члена первого ряда (22) имеем неравенство

$$\int\limits_0^1\left|\int\limits_\tau^1 g(x)\cos\lambda_n x\,dx\right|^2 d\tau\leqslant c\int\limits_0^1\left[\left|\int\limits_\tau^1 g(\xi)\cos 2\pi n\xi\,d\xi\right|^2+\left|\int\limits_\tau^1 g(\xi)\sin 2\pi n\xi\,d\xi\right|^2\right]d\tau+$$
$$+c\int\limits_0^1\int\limits_\tau^1\left[\left|\int\limits_x^1 g(\xi)\cos 2\pi n\xi\,d\xi\right|^2 dx+\left|\int\limits_x^1 g(\xi)\sin 2\pi n\xi\,d\xi\right|^2\right]dx\,d\tau,$$

и задача сводится к получению оценок через $c\|f\|_2^2$ для рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^1\left[\left|\int\limits_\tau^1 g(\xi)\cos 2\pi n\xi\,d\xi\right|^2+\left|\int\limits_\tau^1 g(\xi)\sin 2\pi n\xi\,d\xi\right|^2\right]d\tau, \tag{23}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^1\int\limits_\tau^1\left[\left|\int\limits_x^1 g(\xi)\cos 2\pi n\xi\,d\xi\right|^2 dx+\left|\int\limits_x^1 g(\xi)\sin 2\pi n\xi\,d\xi\right|^2\right]dx\,d\tau. \tag{24}$$

Ряд (23) совпадает с рядом (17) (с точностью до обозначения переменных), для него нужная оценка получена выше.

Исследуем ряд (24). В отличие от ряда (17), в (24) нужно два интеграла вынести за знак суммы и применить неравенство Бесселя или равенство Парсеваля для тригонометрической системы функций. Для того чтобы внешний интеграл в (24) вынести за знак суммы, докажем равномерную по $\tau\in\overline{G}$ сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_\tau^1\left[\left|\int\limits_x^1 g(\xi)\cos 2\pi n\xi\,d\xi\right|^2 dx+\left|\int\limits_x^1 g(\xi)\sin 2\pi n\xi\,d\xi\right|^2\right]dx. \tag{25}$$

Выше мы показали, что ряд (18) сходится равномерно по $x\in\overline{G}$. Общий член ряда (18) — непрерывная функция, следовательно, ряд сходится и в точке максимума функции, т. е. сходится числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n$, где $\varphi_n=\max\left[\left|\int\limits_x^1 g(\xi)\cos 2\pi n\xi\,d\xi\right|^2 dx+\left|\int\limits_x^1 g(\xi)\sin 2\pi n\xi\,d\xi\right|^2\right]\geqslant 0$. Но общий член ряда (25) не превосходит φ_n для каждого значения $\tau\in\overline{G}$, следовательно, ряд (25) сходится равномерно по τ на отрезке $\overline{G}$ (согласно признаку Вейерштрасса). Таким образом, интеграл по τ в (24) можно вынести за знак суммы, так как согласно известной теореме анализа, ряд (25) можно почленно интегрировать по τ на отрезке $\overline{G}$ (общий член ряда (25) есть непрерывная на $\overline{G}$ функция).

Фиксируем произвольное значение $\tau\in\overline{G}$ и покажем, что ряд (18) можно почленно интегрировать по x на отрезке $[\tau,1]$. Выше мы показали, что ряд (18) сходится равномерно по x на отрезке $\overline{G}$, следовательно, он сходится равномерно по x и на отрезке $[\tau, 1]$. Общий член ряда (18) непрерывен на $[\tau, 1]$. Поэтому ряд (18) можно почленно интегрировать по x на $[\tau, 1]$ и в ряде (25) интеграл по x можно вынести за знак суммы. Далее остается записать равенство Парсеваля (19) для функции $F(x,\xi,\tau)$: $F(x,\xi,\tau) = g(\xi)$ для $\xi \in [x,1]$, $F(x,\xi,\tau) = 0$ для $\xi \in [\tau, x]$. В итоге получим для ряда (24), возвращаясь к функции $g(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\int_\tau^1\left[\left|\int_x^1 g(\xi)\cos 2\pi n\xi\,d\xi\right|^2 dx + \left|\int_x^1 g(\xi)\sin 2\pi n\xi\,d\xi\right|^2\right] dx\,d\tau =$$

$$= \int_0^1\int_\tau^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left|\int_x^1 g(\xi)\cos 2\pi n\xi\,d\xi\right|^2 dx + \left|\int_x^1 g(\xi)\sin 2\pi n\xi\,d\xi\right|^2\right]\right) dx\,d\tau =$$

$$= c\int_0^1\int_\tau^1\int_x^1 |g(\xi)|^2\,d\xi\,dx\,d\tau \leqslant \|g\|_2^2 = c\|f\|_2^2.$$

Тем самым для ряда (24) получена искомая оценка. Это завершает установление оценки для первого ряда (22). Второй ряд (22) оценивается точно так же с заменой косинуса на синус. Оценка (9) доказана.

Для получения оценки (10) для общего члена ряда применим априорную оценку (11) с $\alpha = \beta = 0$, $j = r$, неравенство Коши – Буняковского и учтем условие $\lambda_n \in \Pi_\gamma$:

$$|\lambda_n|^{-2}\left|\int_0^1 g(x)\int_0^x q(\tau)u_n(\tau)\sin\lambda_n(x-\tau)\,d\tau dx\right|^2 \|u_n\|_2^{-2} \leqslant$$

$$\leqslant c|\lambda_n|^{-2}\|u_n\|_2^{-2}\left[\int_0^1 |g(x)|\int_0^1 |q(\tau)u_n(\tau)|\,d\tau dx\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant c|\lambda_n|^{-2}\|u_n\|_2^{-2}\cdot\|q\|_1^2\cdot\|u_n\|_\infty^2\cdot\|g\|_2^2 \leqslant c_1|\lambda_n|^{-2}\|f\|_2^2. \tag{26}$$

Используя второе условие (1) для последовательности $\{\lambda_n\}$, установим сходимость ряда с общим членом $|\lambda_n|^{-2}$:

$$\sum_{|\lambda_n|>1}|\lambda_n|^{-2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n\leqslant|\lambda_n|\leqslant n+1}|\lambda_n|^{-2} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{n\leqslant|\lambda_n|\leqslant n+1}1 \leqslant c_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = c = \mathrm{const}. \tag{27}$$

Из соотношений (26), (27) следует справедливость неравенства (10).

Это завершает обоснование первого неравенства (4). *Теорема 1 доказана.*

Дифференциальный оператор с интегральными краевыми условиями. Сформулируем теоремы о безусловной базисности и равномерной сходимости биортогональных разложений по корневым функциям дифференциального оператора второго порядка с интегральными краевыми условиями. Доказательство этих теорем также основано на методе Ильина.

Постановка задачи. Операторы L, L^+, L^*. В пространстве H рассмотрим оператор L, порожденный дифференциальной операцией (3) $ly = y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y$, $x \in G$,

$$p_1(x) \in C(\overline{G}), \quad p_2(x) \in \mathscr{L}^1(G), \tag{28}$$

на множестве функций $D = \{y(x) \in H : y \in W_2^2(G) \cap N(U),\ ly \in H\}$, где $W_2^2(G) = \{y(x) \in H :\ y \in AC^2(\overline{G}),\ y'' \in H\}$, $AC^k(\overline{G})$, $k = 1, 2$, — класс функций $f(x)$, абсолютно непрерывных вместе с $f^{(k-1)}(x)$ на $\overline{G}$, $AC^1 \equiv A$, $N(U)$ — ядро функционала $U(y) : W_2^2(G) \to \mathscr{C}^2$,

$$U(y) = \int_0^1 y'(x) d\nu_1(x) + \int_0^1 y(x) d\nu_2(x), \quad \nu_i = \begin{pmatrix} \nu_{i1} \\ \nu_{i2} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \tag{29}$$

$\nu_{ij}(x)$ — функции с ограниченным изменением на $\overline{G}$, непрерывные справа в каждой точке G. Функции с ограниченным изменением запишем в виде суммы $\nu_i = \nu_i^c + \nu_i^s$, $i = 1, 2$, где ν_i^c — вектор с абсолютно непрерывными компонентами, а ν_i^s — сингулярная часть функции $\nu_i(x)$: $\nu_i^s = \nu_i^{sc} + \nu_i^{sa}$, где ν_i^{sc} — вектор с непрерывными компонентами, сингулярная функция, а ν_i^{sa} – функция скачков. Известно, что $\nu_{ij}^s(x) \in W_1^1(G)$ и почти всюду на G производная $(\nu_i^s)'(x)$ равна θ. Пусть функции $\nu_i^{sa}(x)$ имеют в точках $\xi_p \in \overline{G}$ скачки $\alpha_i^p \in \mathscr{C}^2$, $i = 1, 2$, $p = 0, 1, \ldots$ Разбиение $T = \{\xi_p\}$ отрезка $\overline{G}$ таково, что $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = 1$, $\xi_p \in G$, $p \geqslant 2$. Множество точек $\{\xi_p\}$ может быть конечным (например, состоять всего из двух точек ξ_0, ξ_1) или бесконечным, разбиение T может быть плотным на части или на всем $\overline{G}$.

Используем обозначение $\beta_i(x) = d\nu_i^c(x)/dx$. Краевые формы (29) теперь можно записать в виде

$$U(y) = \sum_{i=1}^{2} \left[\sum_{p=0}^{\infty} y^{(2-i)}(\xi_p)\alpha_i^p + \int_0^1 \beta_i(x) y^{(2-i)}(x) dx + \int_0^1 y^{(2-i)}(x) d\nu_i^{sc}(x) \right]. \tag{30}$$

Будем также использовать обозначение

$$\nu_i^s[0, x] = \int_{0^+}^{1^-} d\nu_i^s(t) = \int_0^x d\nu_i^{sc}(t) + \sum_{p=0,x}^{\infty} \alpha_i^p \chi(\xi_p, 1], \quad i = 1, 2,$$

где $\chi(x, 1]$ — характеристическая функция множества $(x, 1]$, а сумма в правой части формулы для каждого значения x берется по тем p, для которых $0 \leqslant \xi_p < x$. Как обычно, ν_i^* — операция сопряжения для вектора ν_i: $\nu_i^* = \overline{\nu}_i^T = (\overline{\nu}_{i1}, \overline{\nu}_{i2})$.

Введем в рассмотрение следующий оператор L^+ [24]. Пусть $l_0^+ z = z$, $l_1^+ z = -z' + \overline{p}_1 z$, $l_2^+ = z'' - (\overline{p}_1 z)' + \overline{p}_2 z$, $x \in G$, — вспомогательные дифференциальные операции и D^* — множество функций: $D^* = \{z \in H :\ \exists\ \varphi \in \mathscr{C}^2$, $\varepsilon_{j+1} \equiv l_j^* z(x) + \nu_{j+1}^{s*}[0, x]\varphi \in A(G)$, $j = 0, 1$, $l_0^+ z(0^+) = -\alpha_1^{0*}\varphi$, $l_0^+ z(1^-) = \alpha_1^{1*}\varphi$, $l_1^+ z(0^+) = -\alpha_2^{0*}\varphi + \beta_1^*(0)\varphi$, $l_1^+ z(1^-) = \alpha_2^{1*}\varphi$, $l^* z \equiv l_2^+ z + (\beta_1^*)'(x)\varphi - \beta_2^*(x)\varphi \in H\}$, где φ — некоторый параметрический вектор. Оператор L^+ действует в пространстве H, порождается дифференциальной операцией $l^* z$ на множестве функций D^*. Оператор L^+ является формально сопряженным к оператору L, для операторов L и L^+ выполняется тождество Лагранжа $(ly, z) = (y, l^* z)$, $y \in D$, $z \in D^*$ [55]. Если $\overline{D} = H$, т. е. область определения оператора L плотна в H, то оператор $L^+ = L^*$ является сопряженным к оператору L.

Из результатов работы [56] следует, что если $p_1 \equiv 0$ на G, а краевые формы (29) оператора L регулярны, то $\overline{D} = H$, т. е. в этом случае $L^+ = L^*$.

Пример построения сопряженного оператора «по Брауну» [24] и «по Лагранжу» для случая многоточечных краевых условий (в форме (30) присутствует только первая сумма по p) и вывод выражения для вектора φ из определения класса D^* можно найти в работе [57].

Задачи с интегральными краевыми условиями ранее активно исследовались, полезный обзор содержится в [24]. Из работ, вышедших после этого обзора, отметим следующие. А. А. Шкаликов [56] для обыкновенного дифференциального оператора произвольного порядка с интегральными краевыми условиями ввёл понятие регулярных краевых условий и доказал, что в случае таких условий система корневых функций оператора образует в пространстве $\mathscr{L}^2(G)$ базис Рисса со скобками, блок-базис (в случае усиленно регулярных условий — обычный базис Рисса). Аналогичный результат получен в работе [58] для векторного функционально-дифференциального уравнения $y^{(n)} + Fy = \lambda y$ (F — подчиненный оператор) с интегральными краевыми условиями. Задачи с интегральными краевыми условиями исследовались также в работах [59–62] и др. Сопряженный оператор в этих и последующих работах не использовался и не вводился.

Базисность систем корневых функций операторов L и L^+. Обозначим $V(x) = (\beta_1^*)'(x) - \beta_2^*(x)$, где $\beta_k = (\nu_k^c)'$, $k = 1, 2$. Нам потребуется наложить ограничения на вектор-функции $\nu_k(x)$ — установить связь между матрицами ν_k^{sa}, ν_k^{sc}, $V(x)$, действующими на вектор φ.

Введем обозначение для ядер этих матриц: $N_V = \bigcap_{x\in\overline{G}} N(V(x))$, $N_{ka} = \bigcap_{x\in G} N(\nu_k^{sa*}[x]) = \bigcap_{p=2}^{\infty} N(\alpha_k^{p*})$, $N_{kc} = \bigcap_{x\in\overline{G}} N(\nu_k^{sc*}[0,x])$, $k = 1, 2$. Пусть выполняются следующие вложения:

$$N_{1a} \subseteq N_{1c}, \quad \exists\, k = 1,2: \quad N_{ka} \subseteq N_{2c}, \tag{31}$$

$$\exists k = 1,2: \quad N_{ka} \subseteq N_V, \quad \text{при } k = 2: \ \nu_{2j}^c(x) \in W_2^1(G),\ j = 1, 2. \tag{32}$$

Рассмотрим биортонормированную в H пару систем $\{u_n(x)\}$, $\{v_n(x)\}$ обобщенных собственных и присоединенных функций операторов L и L^+. Зафиксируем произвольное число $\gamma \geqslant 0$. Будем рассматривать числа $\{\lambda_n\}$, удовлетворяющие условиям (1).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (28) *на коэффициенты $p_k(x)$, условия* (1) *на систему чисел $\{\lambda_n\}$, условия* (31), (32) *на функции $\nu_k(x)$, $\nu_{1j}^c(x) \in W_2^2(G)$, $j = 1, 2$, и обе системы $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ являются полными в H. Тогда для того чтобы каждая из систем $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ являлась базисом Рисса в H, необходимо и достаточно, чтобы эти системы были почти нормированными в H. Для того чтобы каждая из систем $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ образовывала безусловный базис в H, необходимо и достаточно выполнения с некоторой постоянной $c > 0$ соотношения* (2). *Для того чтобы каждая из систем $\{u_n \cdot \|u_n\|_2^{-1}\}$, $\{v_n \cdot \|v_n\|_2^{-1}\}$ образовывали базис Рисса в H, необходимо и достаточно выполнения условия* (2).

Замечание 1. Для оператора L с регулярными краевыми условиями и коэффициентом $p_1 \equiv 0$ в G, для некоторых чисел $\gamma \geqslant 0$, $c_0 > 0$ выполняются условия (1) и обе системы $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ полны в H, что следует из работы [56]. Таким образом, в этом случае в теореме 2 проверки требуют лишь условия (31), (32) на ядра векторов и условие почти нормированности систем или условие (2) (для чего достаточно знать главные члены асимптотик функций u_n, v_n).

Пример. Проиллюстрируем результат теоремы 2 на простом примере нелокальной краевой задачи. Пусть оператор L действует в пространстве H, порожден дифференциальной операцией $lu(x) = u''(x)$, $x \in G$, $u \in C^2(\overline{G})$, и краевыми условиями:

$$u(0) = 0, \quad u(1) + 2u(1/2) = \int_0^1 u(x)\, dx.$$

Интегрированием по частям получаем, что сопряженный оператор порождается нагруженной дифференциальной операцией $l^*v(x) = v''(x) - v'(1)$, $x \in G$, краевыми условиями $v(0) = v(1) = 0$ и условиями на разрыв в точке $x = 1/2$:

$$v[1/2] = 0, \quad v'[1/2] = -2v'(1), \quad v(x) \in W_2^1(G) \cup C^2[0, 1/2) \cup C^2(1/2, 1],$$

где использовано обозначение для скачка функции $v[1/2] = v(1/2+0) - v(1/2-0)$. В точке $x = 1/2$ функции $v(x)$ из области определения оператора L^* непрерывны, а функции $v'(x)$ могут иметь разрыв первого рода (если $v'(1) \neq 0$).

Для этого примера выполнены все условия теоремы 2, за исключением условия почти нормированности системы $\{v_n\}$ и условия (2) [63]. Обе системы $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ не образуют базиса в H. Уберем интегральное слагаемое из краевого условия. Тогда при правильном выборе присоединенных функций (так, чтобы выполнялось условие (2)), будут выполнены все условия теоремы 2. Системы $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ образуют базис Рисса в H. В каждом из примеров оператор L является существенно несамосопряженным.

Равномерная сходимость биортогональных разложений. Продолжим изучение введенных выше систем $\{u_n\}$, $\{v_n\}$. Для произвольной функции $f(x) \in H$ рассмотрим две частичные суммы её биортогональных разложений:

$$\sigma_\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_n| \leqslant \lambda} (f, v_n) u_n(x), \quad \widetilde{\sigma}_\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_n| \leqslant \lambda} (f, u_n) v_n(x), \quad \forall\ \lambda > 0,\ x \in \overline{G}.$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (28), (31), (32) (*условие* (32) — *при* $k = 1$), (1), (2), $\nu_{1j}^c(x) \in W_2^2(G)$, $j = 1, 2$. *Пусть функция* $f(x) \in W_2^1(G)$ *и*

$$\int_0^1 f(x) d\nu_2^s(x) + f(1)(\nu_1^c)'(1) - f(0)\nu_1^c(0) = 0. \tag{33}$$

Тогда разложение $\sigma_\lambda(x, f)$ *сходится абсолютно и равномерно на* $\overline{G}$ *при* $\lambda \to +\infty$. *Если дополнительно потребовать, чтобы системы* $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ *были полны в* H, *то разложение* $\sigma_\lambda(x, f)$ *сходится к функции* $f(x)$ *равномерно на отрезке* $\overline{G}$ *и равномерно по* $x \in \overline{G}$ *справедливо*

$$f(x) - \sigma_\lambda(x, f) = o((\sqrt{\lambda})^{-1}), \quad \lambda \to +\infty, \tag{34}$$

остаток ряда из модулей $|f_n u_n(x)|$ *имеет такую же оценку* (34), *равномерно по* $x \in \overline{G}$.

Доказательство теоремы 3 основано на следующем представлении коэффициентов Фурье. Рассмотрим спектральную задачу для оператора L^+ с фиксированным значением $\lambda_n = \lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathscr{C}$, $z(x)$ — собственная или присоединенная функция оператора.

Лемма 2. *Пусть* $z(x) \in D^*$, *выполняются условия* (28) *и почти всюду в* G *выполняется равенство*

$$z'' - (\overline{p}_1 z)' + \overline{p}_2 z + V(x)\varphi + \overline{\lambda}^2 z = \theta_0 \overline{\mu} z_0, \quad z_0 \in H.$$

Пусть комплекснозначная функция $f(x) \in W_2^1(G)$ *и удовлетворяет краевому условию* (33). *Тогда справедливо следующее соотношение:*

$$(f, z) = \frac{\theta_0 \mu}{\lambda^2}(f, z_0) + \frac{1}{\lambda}(f', \frac{z'}{\lambda}) - \frac{1}{\lambda^2}(f' p_1 + f p_2, z) - \frac{1}{\lambda^2}(f, V\varphi), \quad \forall\ \lambda \in \mathscr{C}, \quad \lambda \neq 0.$$

Для доказательства теоремы 3 используем полученное представление коэффициентов Фурье, неравенство Бесселя для корневых функций (и их производных) оператора L^+ и априорные оценки для этих функций.

Рассмотрим вопрос о сходимости «сопряжённого» разложения $\widetilde{\sigma}_\lambda(x,f)$. Сходимость таких разложений требуется, например, в методе В. А. Ильина доказательства теорем равносходимости.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* (1), (2), (28) (32), $\nu_{1j}^c(x) \in W_2^2(G)$, $j=1,2$, *функция* $f(x) \in W_2^1(G)$ *и* $f(0)=f(1)=0$. *Тогда разложение* $\widetilde{\sigma}_\lambda(x,f)$ *сходится абсолютно и равномерно на* $\overline{G}$ *при* $\lambda \to +\infty$. *Если системы* $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ *полны в* H, *то разложение* $\widetilde{\sigma}_\lambda(x,f)$ *сходится к функции* $f(x)$ *почти всюду в* G *и почти всюду в* G *справедливо* $f(x)-\widetilde{\sigma}_\lambda(x,f)=o((\sqrt{\lambda})^{-1})$, $\lambda \to +\infty$ *(если функции* v_n *непрерывны на* $\overline{G}$, *то в обоих случаях сходимость равномерная на отрезке* $\overline{G}$*).*

Для рассмотренного выше примера в силу нарушения условия (2) гарантировать равномерную на $\overline{G}$ сходимость разложений функции $f(x) \in W_2^1(G)$: $\sigma_\lambda(x,f)$ при $f(0)=0, f(1)+2f(1/2)=0$ (условия (33)) и $\widetilde{\sigma}_\lambda(x,f)$ при $f(0)=f(1)=0$, мы не можем. Если же в краевом условии убрать интегральное слагаемое, то при правильном выборе присоединенных функций для любой функции $f(x) \in W_2^1(G)$, $f(0)=0$, $f(1)+2f(1/2)=0$, разложение $\sigma_\lambda(x,f)$ сходится к $f(x)$ равномерно на $\overline{G}$ и $f(x)-\sigma_\lambda(x,f)=o((\sqrt{\lambda})^{-1})$, $\lambda \to +\infty$, равномерно на $\overline{G}$; для $f(x) \in W_2^1(G)$, $f(0)=f(1)=0$, разложение $\widetilde{\sigma}_\lambda(x,f)$ сходится к $f(x)$ равномерно на $\overline{G}$ (так как функции $v_n(x)$ — непрерывны) и справедлива оценка скорости сходимости $f(x)-\widetilde{\sigma}_\lambda(x,f)=o((\sqrt{\lambda})^{-1})$, $\lambda \to +\infty$, равномерно на $\overline{G}$.

Обзоры результатов по вопросам сходимости биортогональных разложений функций для обыкновенных дифференциальных операторов с двухточечными регулярными и нерегулярными краевыми условиями (в точках 0 и 1) приведены в [64, с. 88–103] и в [50]. Исследовались и задачи с нелокальными краевыми условиями. В работах [65, 66] получены условия равномерной и абсолютной сходимости биортогональных разложений по корневым функциям одномерного оператора Шредингера с частного вида многоточечными краевыми условиями. Этот же вопрос исследован в [57] для случая общих многоточечных условий. Отметим также работу [67], где рассмотрен интересный пример с одной внутренней точкой в краевом условии. В работах [68, 69] установлены условия равномерной и абсолютной сходимости и получены оценки скорости сходимости биортогональных разложений для дифференциальных операторов с двухточечными краевыми условиями (см. также другие работы этих авторов по этим вопросам). Обзор по работам школы Ильина по оценкам скорости сходимости и равносходимости спектральных разложений можно посмотреть в [70].

Благодарности. Автор признателен А. П. Хромову за полезные обсуждения рассматриваемых в данной работе вопросов и современных проблем спектральной теории дифференциальных операторов..

Библиографический список

1. *Ильин В. А.* О равномерной равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223, № 3. С. 548–551.

2. *Ильин В. А.* О равносходимости разложений в тригонометрический ряд Фурье и по собственным функциям пучка М. В. Келдыша обыкновенных несамосопряженных дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225, № 3. С. 497–499.
3. *Ильин В. А.* Спектральная теория дифференциальных операторов. М. : Наука, 1991. 368 с.
4. *Бари Н. К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Учен. зап. МГУ. 1951. Вып. 148. С. 69–107.
5. *Ильин В. А.* О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 5. С. 1048–1053.
6. *Ильин В. А.* Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 12. С. 2059–2071.
7. *Ильин В. А.* О базисности Рисса систем корневых вектор-функций разрывного оператора Шредингера с матричным потенциалом // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314, № 1. С. 59–62.
8. *Моисеев Е. И., Барновска М.* О безусловной базисности системы собственных и присоединенных функций дифференциального оператора первого порядка в пространстве вектор-функций // Math. Slovaca. 1990. Vol. 40, № 3. P. 325–336.
9. *Керимов Н. Б.* Некоторые вопросы спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1987. 15 с.
10. *Керимов Н. Б.* О безусловной базисности системы собственных и присоединенных функций дифференциального оператора четвертого порядка // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286, № 4. С. 803–808.
11. *Керимов Н. Б.* Базисность и равномерная минимальность систем корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1996. 25 с.
12. *Крицков Л. В.* О необходимых условиях базисности в $\mathscr{L}^p(G)$ систем корневых функций одномерного оператора Шредингера // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311, № 6. С. 1306–1309.
13. *Ильин В. А.* О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора // Матем. заметки. 1977. Т. 22, вып. 5. С. 679–698.
14. *Будаев В. Д.* О безусловной базисности систем собственных и присоединенных функций оператора второго порядка с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 4. С. 777–780.
15. *Будаев В. Д.* О неравенстве Бесселя для систем корневых функций дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. 1991. Т. 218, № 1. С. 16–20.
16. *Будаев В. Д.* Критерии бесселевости и базисности Рисса систем корневых функций дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 12. С. 2033–2044.
17. *Будаев В. Д.* Безусловная базисность систем корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1993. 22 с.
18. *Ломов И. С.* Неравенство Бесселя, теорема Рисса и безусловная базисность для корневых векторов обыкновенных дифференциальных операторов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 1992. № 5. С. 33–43.
19. *Курбанов В. М.* Распределение собственных значений и сходимость биортогональных разложений по корневым функциям обыкновенных дифференциальных операторов : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 2000. 26 с.
20. *Крицков Л. В.* Равномерная оценка порядка присоединенных функций и распределение собственных значений одномерного оператора Шредингера // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 7. С. 1121–1129.

21. *Крицков Л. В.* Некоторые спектральные свойства сингулярных обыкновенных операторов второго порядка : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1990. 19 с.
22. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* О системах, состоящих из подмножеств корневых функций двух различных краевых задач // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1992. Т. 201. С. 219–230.
23. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1972. 496 с.
24. *Krall A. M.* The development of general differential boundary systems // Rocky Mountain J. Math. 1975. Vol. 5, № 4. P. 493–542.
25. *Нахушев А. М., Дикинов Х. Ж., Керефов А. А.* Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 177–179.
26. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применение. М. : Наука, 2012. 232 с.
27. *Ломов И. С.* Пример разрывного оператора, имеющего разрывный сопряженный. Свойство базисности // Задачи математической физики и спектральная теория операторов. М. : МЭИ, 1989. № 215. С. 46–50.
28. *Ломов И. С.* О базисности корневых функций операторов с многоточечными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 6. С. 1053–1056.
29. *Ломов И. С.* О свойствах корневых функций оператора Штурма – Лиувилля, разрывных на всюду плотном множестве // Изв. вузов. Матем. 1990. № 8. С. 35–44.
30. *Ломов И. С.* Свойство базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 1. С. 80–93.
31. *Ломов И. С.* Теорема о безусловной базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 9. С. 1550–1563.
32. *Ломов И. С.* О базисности систем нерегулярных корневых векторов дифференциальных операторов высокого порядка // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 1. С. 74–86.
33. *Белянцев О. В.* Неравенство Бесселя и свойство базисности корневых функций сингулярного дифференциального оператора второго порядка // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 8. С. 1011–1020.
34. *Юрко В. А.* Граничные задачи с условиями разрывов во внутренней точке интервала // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 8. С. 1266–1269.
35. *Макин А. С.* О сходимости средних Рисса спектральных разложений, отвечающих одномерному оператору Шредингера // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 5. С. 897–899.
36. *Макин А. С.* О средних Рисса биортогональных разложений по корневым функциям несамосопряженных расширений оператора Шредингера // Докл. АН СССР. 1992. Т. 322, № 3. С. 472–475.
37. *Макин А. С.* О свойствах корневых функций и спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным дифференциальным операторам : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 2000. 26 с.
38. *Ильин В. А., Тихомиров В. В.* О базисности риссовских средних спектральных разложений, отвечающих обыкновенному несамосопряженному оператору порядка s // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 12. С. 2098–2126.
39. *Ильин В. А.* Оценка разности средних Рисса двух спектральных разложений для функций из класса L^2 // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 5. С. 852–863.
40. *Салимов Я. Ш.* О средних Рисса разложений по корневым функциям некоторых нелокальных краевых задач // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 1. С. 155–160.
41. *Тихомиров В. В.* О безусловной базисности корневых векторов нагруженных операторов // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 2. С. 355–357.

42. *Тихомиров В. В.* О безусловной базисности корневых векторов нелокальных задач для систем уравнений с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 1. С. 147–153.
43. *Барновска М., Тихомиров В. В.* О базисности Рисса корневых векторов нелокальных задач для системы дифференциальных уравнений // Math. Slovaca. 1993. Vol. 43, № 2. P. 193–205.
44. *Ломов И. С.* Некоторые свойства спектральных разложений, связанных с операторами типа Штурма – Лиувилля // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248, № 5. С. 1063–1065.
45. *Ломов И. С.* Некоторые свойства собственных и присоединенных функций оператора Штурма – Лиувилля // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 10. С. 1684–1694.
46. *Тихомиров В. В.* Точные оценки регулярных решений одномерного несамосопряженного уравнения Шредингера // Докл. АН СССР. 1982. Т. 273, № 4. С. 807–810.
47. *Тихомиров В. В.* Точные оценки собственных функций произвольного несамосопряженного оператора Шредингера // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 8. С. 1378–1385.
48. *Ломов И. С.* Оценки корневых функций оператора, сопряженного к дифференциальному оператору второго порядка с интегральными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 5. С. 602–612. DOI: https://doi.org/10.1134/S037406411804
49. *Ильин В. А., Крицков Л. В.* Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным дифференциальным операторам // Функциональный анализ. Итоги науки и техники. Сер. Совр. матем. и ее приложения. Темат. обзор. М. : ВИНИТИ, 2006. Т. 96. С. 190–231.
50. *Хромов А. П.* Спектральный анализ дифференциальных операторов на конечном интервале // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 10. С. 1691–1696.
51. *Хромов А. П.* Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных операторов // Матем. сб. 1981. Т. 114, № 3. С. 378–405.
52. *Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям конечномерных возмущений оператора интегрирования // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2000. № 2. С. 21–26.
53. *Курдюмов В. П., Хромов А. П.* О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций функционально-дифференциального уравнения с оператором отражения // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 2. С. 196–204.
54. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. РАН. 2014. Т. 458, № 2. С. 138—140. DOI: https://doi.org/10.7868/S0869565214260041
55. *Ломов И. С.* Интегральные представления нерегулярных корневых функций нагруженных дифференциальных операторов второго порядка // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 12. С. 1634–1646. DOI: https://doi.org/10.1134/S03740641160
56. *Шкаликов А. А.* О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора с интегральными краевыми условиями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 1982. № 6. С. 12–21.
57. *Ломов И. С.* Равномерная сходимость биортогонального ряда для оператора Шредингера с многоточечными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 7. С. 890–896.
58. *Гомилко А. М., Радзиевский Г. В.* Базисные свойства собственных функций регулярной краевой задачи для векторного функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 3. С. 384–396.
59. *Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям оператора дифференцирования с интегральным граничным условием // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 129–131.
60. *Хромов А. П.* Об аналоге теоремы Жордана – Дирихле для разложений по собственным функциям дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием // Докл. РАЕН (Поволжское межрегиональное отделение). 2004. № 4. С. 80–87.

61. *Седлецкий А. М.* Аппроксимативное свойство систем экспонент в $L^p(a,b)$ // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 10. С. 1675–1681.
62. *Пулькина Л. С., Дюжева А. В.* Нелокальная задача с переменными по времени краевыми условиями Стеклова для гиперболического уравнения // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. 2010. Вып. 4(85). С. 56–64.
63. *Самарская Т. А.* О равносходимости спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным расширениям дифференциального оператора второго порядка // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 1. С. 155–166.
64. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 526 с.
65. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Нелокальная краевая задача для оператора Штурма – Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291, № 3. С. 534–539.
66. *Самарская Т. А.* Абсолютная и равномерная сходимость разложений по корневым функциям нелокальной краевой задачи первого рода // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 7. С. 1152–1160.
67. *Мустафин М. А.* Об абсолютной и равномерной сходимости рядов по одной системе синусов // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 8. С. 1465–1466.
68. *Lazetic N. L.* On uniform convergence on closed intervals of spectral expansions and their derivatives for functions from W_p^1 // Matematicki Vesnik. 2004. Vol. 56, № 3–4. P. 91–104.
69. *Kurbanov V. M.* Conditions for the absolute and uniform convergence of the biorthogonal series corresponding to a differential operator // Dokl. Math. 2008. Vol. 78, № 2. P. 748–750.
70. *Ломов И. С.* Оценки скорости сходимости и равносходимости спектральных разложений обыкновенных дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 405–418. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-405-418

Образец для цитирования:
Ломов И. С. Спектральный метод Ильина установления свойств базисности и равномерной сходимости биортогональных разложений на конечном интервале // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 1. С. 34–58. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-34-58

The Il'in Spectral Method for Determination of the Properties of the Basis Property and the Uniform Convergence of Biorthogonal Expansions on a Finite Interval

I. S. Lomov

Igor S. Lomov, https://orcid.org/0000-0003-1510-1739, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 119991 Moscow, Russia, lomov@cs.msu.su

The paper discusses the basics of the spectral method of V. A. Il'in on an example of a simple second order differential operator on a segment of the number line. The first theorem of Il'in on the unconditional basis property is stated. Its detailed proof is given. A chain of generalizations of this theorem is traced. A recently established a theorem on the unconditional basis property for the differential operators with general integral boundary conditions is formulated. The substantiation of the statements about the uniform convergence of biorthogonal expansions of functions using the Il'in method is presented. The main theorems, including, the recently established theorem for operators with integral boundary conditions are formulated.

Keywords: differential operator, eigenfunctions and associated functions, spectrum, unconditional basis, uniform convergence of biorthogonal series.

Received: 13.04.2018 / Accepted: 15.06.2018 / Published online: 28.02.2019

References

1. Il'in V. A. The uniform equiconvergence of expansions in the eigen- and associated functions of a nonselfadjoint ordinary differential operator and in a trigonometric Fourier series. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1975, vol. 223, no. 3, pp. 548–551 (in Russian).
2. Il'in V. A. On the equiconvergence of expansions in the trigonometric Fourier series and eigenfunctions of the beam M. V. Keldysh non-selfadjoint ordinary differential operator. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1975, vol. 225, no. 3, pp. 497–499 (in Russian).
3. Il'in V. A. *Spektralnaya teoriya differentsialnykh operatorov. Samosopryazhennye differentsialnye operatory* [Spectral theory of differential operators. Selfadjoint differential operators]. Moscow, Nauka, 1991. 368 p. (in Russian).
4. Bari N. K. Biorthogonal systems and bases in Hilbert space. *Uch. Zap. Mosk. Gos. Univ.*, 1951, vol. 148, pp. 69–107 (in Russian).
5. Il'in V. A. On the unconditional basis property for systems of eigenfunctions and associated functions of a second-order differential operator on a closed interval. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1983, vol. 273, no. 5, pp. 1048–1053 (in Russian).
6. Il'in V. A. Necessary and sufficient conditions for the Riesz basis property of root vectors of discontinuous operators of second order. *Differ. Uravn.*, 1986, vol. 22, no. 12, pp. 2059–2071 (in Russian).
7. Il'in V. A. On the basis of Riesz systems of root vector-functions of discontinuous of the Schrödinger operator with a matrix potential. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1990, vol. 314, no. 1, pp. 59–62 (in Russian).
8. Moiseev E. I., Barnovska M. On the unconditional basis property of a root functions of the first order differential operator in the space of vector-functions. *Math. Slovaca*, 1990, vol. 40, no. 3, pp. 325–336 (in Russian).
9. Kerimov N. B. *Some questions of non-self-adjoint differential operator spectral theory* : Thesis Diss. Cand. Sci. (Math. and Mech.). Moscow, 1987. 15 p. (in Russian).
10. Kerimov N. B. On the unconditional basis property of a system of a root functions of the differential operator of the fourth order. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 286, no. 4, pp. 803–808 (in Russian).
11. Kerimov N. B. *Basis and uniform minimality of root systems functions of ordinary differential operators* : Thesis Diss. Dr. Sci. (Math. and Mech.). Moscow, 1996. 25 p. (in Russian).
12. Kritskov L. V. On necessary conditions for a basis in $\mathscr{L}^p(G)$ of systems of root functions of a one-dimensional Schrödinger operator. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1990, vol. 311, no. 6, pp. 1306–1309 (in Russian).
13. Il'in V. A. Convergence of eigenfunction expansions at points discontinuities of differential operator coefficients. *Math. Notes*, 1977, vol. 22, no. 5, pp. 870–882. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01098352
14. Budaev V. D. On the unconditional basis property of systems of root functions of the second order operator with discontinuous coefficients. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 289, no. 4, pp. 777–780 (in Russian).
15. Budaev V. D. On Bessel inequality for systems of root functions differential operators. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1991, vol. 218, no. 1, pp. 16–20 (in Russian).
16. Budaev V. D. Criteria of Bessel and Riesz basis of root systems functions of differential operators. *Differential Equations*, 1991, vol. 27, no. 12, pp. 1421–1432.

17. Budaev V. D. *Unconditional basis of systems of root functions of ordinary differential operators* : Thesis Diss. Dr. Sci. (Math. and Mech.). Moscow, 1993. 22 p. (in Russian).
18. Lomov, I. S. The Bessel Inequality, the Riesz theorem and unconditional basis for root vectors of ordinary differential operators. *Vestnik Mosk. Un-ta, Ser. 1, Math. Mehan.*, 1992, no. 5, pp. 33–43 (in Russian).
19. Kurbanov V. M. *On distribution of eigenvalues and convergence of biorthogonal expansions in root functions of ordinary differential operators* : Thesis Diss. Dr. Sci. (Math. and Mech.). Moscow, 2000. 26 p. (in Russian).
20. Kritskov L. V. A uniform estimate for the order of associated functions, and the distribution of eigenvalues of a one-dimensional Schrödinger operator. *Differential Equations*, 1989, vol. 25, no. 7, pp. 784–791.
21. Kritskov L. V.*Some spectral properties of singular ordinary operators of the second order* : Thesis Diss. Dr. Sci. (Math. and Mech.). Moscow, 1990. 19 p. (in Russian).
22. Il'in V. A., Moiseev E. I. On the systems consisting of subsets of root function of two distinct boundary value problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1994, vol. 201, pp. 183–192.
23. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of the theory of functions and functional analysis. Moscow, Nauka, 1972. 496 p. (in Russian).
24. Krall A. M. The development of general differential boundary systems. *Rocky Mountain J. Math.*, 1975, vol. 5, no. 4, pp. 493–542.
25. Dikinov Kh. Zh., Kerefov A. A., Nakhushev A. M. A certain boundary value problem for a loaded heat equation. *Differ. Uravn.*, 1976, vol. 12, no. 1, pp. 177–179 (in Russian).
26. Nakhushev A. M. *Nagruzhennye uravneniia i ikh primenenie* [The loaded equations and their application]. Moscow, Nauka, 2012. 232 p. (in Russian).
27. Lomov I. S. Example of discontinuous operator with a discontinuous adjoint operator. Basis property. *Zadachi matematicheskoi fiziki i spektral'naia teoriia operatorov* [Problems of Mathematical Physics and Spectral Theory of Operators], Collection of Scientific Papers of Moscow Power Engineering Institute, vol. 215. Moscow, Moscow Power Engineering Inst, 1989, pp. 46–50 (in Russian).
28. Lomov I. S. The basis property of root functions of operators with multipoint boundary conditions. *Differ. Uravn.*, 1989, vol. 25, no. 6, pp. 1053–1056 (in Russian).
29. Lomov I. S. Properties of root functions of the Sturm – Liouville operator that are discontinuous on an everywhere dense set. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1990, no. 8, pp. 39–49.
30. Lomov I. S. The basis property of root vectors of loaded second-order differential operators on an interval. *Differential Equations*, 1991, vol. 27, no. 1, pp. 64–75.
31. Lomov I. S. A theorem on the unconditional basis property of root vectors of second-order weighted differential operators. *Differential Equations*, 1991, vol. 27, no. 9, pp. 1098–1107.
32. Lomov I. S. On the basis property of systems of nonregular root vectors of higher-order differential operators. *Differential Equations*, 1993, vol. 29, no. 1, pp. 62–72.
33. Belyancev O. V. The bessel inequality and the basis property of root functions of a second-order singular differential operator. *Differential Equations*, 2000, vol. 36, no. 8, pp. 1119–1130. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02754179
34. Yurko V. A. Boundary value problems with discontinuity conditions in an interior point of the interval. *Differential Equations*, 2000, vol. 36, no. 8, pp. 1266–1269. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02754199
35. Makin A. S. Convergence of the Riesz means of spectral expansions that correspond to the one-dimensional Schrödinger operator. *Differ. Uravn.*, 1988, vol. 24, no. 5, pp. 897–899 (in Russian).
36. Makin A. S. On the average of the Riesz biorthogonal expansions in root functions of non-self-adjoint Schrödinger operator extensions. *Dokl. Akad. Nauk*, 1992, vol. 322, no. 3, pp. 472–475 (in Russian).

37. Makin A. S. *On the properties of the root functions and spectral decompositions, responding to non-self-adjoint differential operators* : Thesis Diss. Dr. Sci. (Math. and Mech.). Moscow, 2000. 26 p. (in Russian).
38. Il'in V. A., Tikhomirov V. V. The basis property of Riesz means of spectral decompositions corresponding to an nth-order ordinary nonselfadjoint differential operator. *Differ. Uravn.*, 1982, vol. 18, no. 12, pp. 2098–2126.
39. Il'in V. A. Evaluation of the difference between means of two Riesz spectral decompositions for functions of class $\mathscr{L}^2$. *Differential Equations*, 1988, vol. 24, no. 5, pp. 852–863.
40. Salimov Ya. Sh. On average Riesz of expansions in root functions of some nonlocal boundary value problems. *Differential Equations*, 1987, vol. 23, no. 1, pp. 155–160.
41. Tikhomirov V. V. On unconditional basis of root vectors of loaded operators. *Differential Equations*, 1989, vol. 25, no. 2, pp. 355–357.
42. Tikhomirov V. V. On the unconditional basis property of root vectors of nonlocal problems for systems of equations with deviating argument. *Differential Equations*, 1990, vol. 26, no. 1, pp. 147–53.
43. Barnovska M., Tikhomirov V. V. Riesz basis property of root vectors of nonlocal problems for systems of differential equations. *Math. Slovaca*, 1993, vol. 43, no. 2, pp. 193–205.
44. Lomov I. S. Some properties of spectral expansions related to operators of the Sturm – Liouville problem. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1979, vol. 248, no. 5, pp. 1063–1065 (in Russian).
45. Lomov I. S. Some properties of eigenfunctions and adjoint functions of operator of the Sturm – Liouville problem. *Differential Equations*, 1982, vol. 18, no. 10, pp. 1684–1694.
46. Tikhomirov V. V. Exact estimates of regular one-dimensional solutions non-self-adjoint Schrödinger equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1982, vol. 273, no 4, pp. 807–810 (in Russian).
47. Tikhomirov V. V. Exact estimates of eigenfunctions of arbitrary non-self-adjoint Schrödinger operator. *Differential Equations*, 1983, vol. 19, no. 8, pp. 1378–1385.
48. Lomov I. S. Estimates of root functions of the operator adjoint to a second order differential operator with integral boundary conditions. *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 5, pp. 596–607. DOI: https://doi.org/10.1134/S001226611805004X
49. Il'in V. A., Kritskov L. V. Properties of Spectral Expansions Corresponding to Non-Self-Adjoint Differential Operators. *J. Math. Sci.*, 2003, vol. 116, iss. 5, pp. 3489–3550. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1024180807502
50. Khromov A. P. Spectral analysis of differential operators on a finite interval. *Differential Equations*, 1995, vol. 31, no. 10, pp. 1691–1696.
51. Khromov A. P. Equiconvergence theorems for integrodifferential and integral operators. *Math. USSR-Sb.*, 1981, vol. 42, no. 3, pp. 331–355. DOI: https://doi.org/10.1070/SM1982v042n03ABEH002257
52. Khromov A. P. On equiconvergence of the eigenfunction finite-dimensional perturbations of the integration operator. *Vestn. Moscow State Univ., Ser. 1, Math. Mech.*, 2000, no. 2, pp. 21–26 (in Russian).
53. Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Riesz basis formed by root functions of a functional-differential equation with a reflection operator. *Differential Equations*, 2008, vol. 44, no. 2, pp. 203–212.
54. Burlutskaya M. S., Khromov A. P. Resolvent approach in the Fourier method. *Dokl. Math.*, 2014, vol. 90, no. 2, pp. 545–548. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064562414060076
55. Lomov I. S. Integral representations of irregular root functions of loaded second-order differential operators. *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 12, pp. 1634–1646. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266116120041

56. Shkalikov A. A. On the basis property of eigenfunctions of ordinary differential operator with integral boundary conditions. *Vestn. Moscow State Univ., Ser. 1, Math. Mech.*, 1982, no. 6, pp. 12–21 (in Russian).
57. Lomov I. S. Uniform Convergence of Biorthogonal Series for the Schrödinger Operator with Multipoint Boundary Conditions. *Differential Equations*, 2002, vol. 38, no. 7, pp. 941–948. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1021147327871
58. Gomilko A. M., Radzievskii G. V. Basis properties of eigenfunctions of a regular boundary value problem for the vector functional differential equations. *Differential Equations*, 1991, vol. 27, no. 3, pp. 264–273.
59. Khromov A. P. O ravnoskhodimosti razlozhenij po sobstvennym funkciyam operatora differencirovaniya s integral'nym granichnym usloviem [On equiconvergence of the eigenfunction expansions of the differential operator with integral boundary condition]. *Matematika. Mekhanika* [Mathematics. Mechanics], Saratov, 2003, vol. 5, pp. 129–131 (in Russian).
60. Khromov A. P. On the analogue of Jordan – Dirichlet theorem for expansions in eigenfunctions of differential-difference operator with the integral boundary condition. *Proc. of the Academy of Natural Sciences (Volga Inter-Regional Department)*, 2004, no. 4, pp. 80–87 (in Russian).
61. Sedletskii A. M. Approximation properties of systems of exponentials in $L^p(a, b)$. *Differential Equations*, 1995, vol. 31, no. 10, pp. 1639–1645.
62. Pulkina L. S., Dyuzheva A. V. Nonlocal problem with variables in time by Steklov boundary conditions for the hyperbolic equation. *Vestnik SamGU, Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2010, iss. 4 (85), pp. 56–64 (in Russian).
63. Samarskaya T. A. Equiconvergence of spectral expansions that correspond to nonselfadjoint extensions of a second-order differential operator. *Differential Equations*, 1988, vol. 24, no. 1, pp. 122–131.
64. Naimark M. A. *Linear differential operators*. Moscow, Nauka, 1969. 526 p. (in Russian).
65. Il'in V. A., Moiseev E. I. A nonlocal boundary value problem for the Sturm -- Liouville operator in differential and difference interpretations . *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 291, no. 3, pp. 534–539 (in Russian).
66. Samarskaya T. A. Absolute and uniform convergence of expansions in root functions of a nonlocal boundary value problem of the first kind. *Differential Equations*, 1989, vol. 25, no. 7, pp. 813–817.
67. Mustafin M. A. Absolute and uniform convergence of series in a sine system. *Differ. Uravn.*, 1992, vol. 28, no. 8, pp. 1465–1466 (in Russian).
68. Lazetic N. L. On uniform convergence on closed intervals of spectral expansions and their derivatives, for functions from W_p^1. *Matematicki Vesnik*, 2004, vol. 56, no. 3–4, pp. 91–104.
69. Kurbanov V. M. Conditions for the absolute and uniform convergence of the biorthogonal series corresponding to a differential operator. *Dokl. Math.*, 2008, vol. 78, no. 2, pp. 748–750. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064562408050281
70. Lomov I. S. Estimates of speed of convergence and equiconvergence of spectral decomposition of ordinary differential operators. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 4, pp. 405–418 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-405-418

Cite this article as:

Lomov I. S. The Il'in Spectral Method for Determination of the Properties of the Basis Property and the Uniform Convergence of Biorthogonal Expansions on a Finite Interval. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 1, pp. 34–58 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-34-58