



УДК 539.384.2

## Моментная контактная нагрузка при одностороннем контакте балок

М. А. Осипенко, А. А. Касаткин

Осипенко Михаил Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики и биомеханики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Россия, 614990, Пермь, Комсомольский просп., д. 29, osipenko.michael@yandex.ru

Касаткин Антон Александрович, аспирант кафедры теоретической механики и биомеханики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Россия, 614990, Пермь, Комсомольский просп., д. 29, dedulyama@yandex.ru

Рассмотрена контактная задача для конструкции, состоящей из двух балок с различными длинами и различными переменными толщинами. Один конец короткой балки зашпелен; совпадающий с ним конец длинной балки закреплен шарнирно. Второй конец каждой балки свободен. К длинной балке приложена заданная нагрузка. Под действием этой нагрузки балки испытывают слабый совместный изгиб с возможным отставанием, то есть имеется односторонний контакт. Трение между балками отсутствует. Изгиб каждой балки описывается моделью Бернулли – Эйлера. Контактная задача состоит в отыскании контактной нагрузки, то есть сил взаимодействия балок. Эта задача имеет ряд известных особенностей, характеризующих как вообще контактные задачи для балочных конструкций, так и контактные задачи для конструкций, содержащих балку, которая не может оставаться в равновесии при любой приложенной к ней нагрузке. Наряду с этими особенностями в рассмотренной контактной задаче появляется еще одна, ранее неизвестная особенность, состоящая в том, что в контактной нагрузке может содержаться сосредоточенный момент. Неотрицательность контактной нагрузки как необходимое условие одностороннего контакта при этом не нарушается, так как сосредоточенный момент находится на конце балок и его «отрицательная часть» расположена за пределами балок, не входя в контактную нагрузку. Предложена математическая постановка контактной задачи, доказана единственность решения и построено аналитическое решение в некоторых частных случаях. Установлена связь рассмотренной задачи с известной задачей о контакте двух консольных балок.

*Ключевые слова:* балка Бернулли – Эйлера, контактная задача, односторонний контакт, контактная нагрузка, сосредоточенный момент, единственность решения, аналитическое решение.

Поступила в редакцию: 23.04.2018 / Принята: 04.07.2018 / Опубликовано онлайн: 28.02.2019

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-69-81>

### ВВЕДЕНИЕ

Контактные задачи для балочных конструкций [1–17] являются своеобразной разновидностью контактных задач теории упругости; основное техническое приложение здесь – расчет листовых рессор [1–5]. В задачах этой разновидности, в отличие от традиционных задачи Герца и задачи о штампе [6, 7, 18], возникает ряд особенностей: сосредоточенные силы в контактной нагрузке, разрывы в распределенной части этой нагрузки, сложный вид области контакта. Если в конструкции содержится балка, которая не может в отдельности находиться в равновесии при произвольной нагрузке, то появляются дополнительные особенности [8]: наличие в постановке задачи условия равновесия такой балки; наличие параметра, описывающего неопределенную часть перемещения этой балки (и подлежащего нахождению наряду с



контактной нагрузкой); необходимость доказательства единственности определения не только контактной нагрузки, но и упомянутого параметра; исключение нулевых внешних нагрузок для обеспечения единственности решения.

В настоящей статье изучается балочная конструкция, в которой появляется еще одна особенность — необходимость расширения множества допустимых контактных нагрузок, причем это расширение имеет неожиданный характер: при наличии одностороннего контакта следует включить в контактную нагрузку сосредоточенный момент, который, казалось бы, не может содержаться в этой нагрузке при таком контакте. Эта конструкция и сопутствующая ей упомянутая особенность контактной нагрузки в литературе ранее не рассматривались.

Сначала кратко рассмотрены две конструкции, в которых данная особенность отсутствует; это требуется для дальнейшего изложения. Затем рассмотрена новая конструкция (похожая на две упомянутые) и ее особенности.

### 1. ОДНОСТОРОННИЙ КОНТАКТ ДВУХ ЗАЩЕМЛЕННЫХ БАЛОК

Рассмотрим две балки с различными длинами  $\tilde{L} > L > 0$  (тильдой обозначаются величины, относящиеся к длинной балке), защемленные в точке  $x = 0$ , находящиеся под заданной нагрузкой  $q(x) \geq 0$  (рис. 1, а).

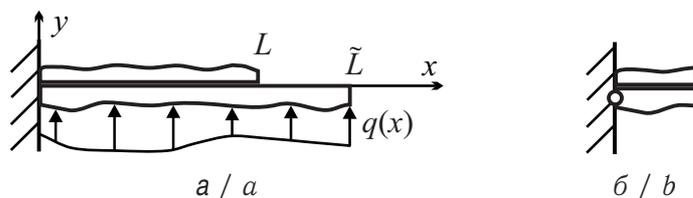


Рис. 1. Балочные конструкции в контактных задачах 1 и 3  
Fig. 1. Beam structures for the contact problems 1 and 3

В отсутствие этой нагрузки балки прямолинейны и плотно прилегают друг к другу. Сечения балок являются прямоугольниками одинаковой ширины  $w$ , но различной переменной толщины; модуль Юнга  $E$  одинаков для обеих балок. Под нагрузкой балки испытывают слабый совместный изгиб с возможным отставанием (односторонний контакт). Трение между балками отсутствует; изгиб каждой балки описывается моделью Бернулли – Эйлера [19]. Обозначим через  $f(x)$  контактную нагрузку. Контактная задача заключается в отыскании  $f(x)$ .

Используя теорию Бернулли – Эйлера, можно найти [5] упругие линии  $y(x)$ ,  $\tilde{y}(x)$  балок и далее расстояние  $r(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$  между балками:

$$r(x) = \int_0^x (x-s)a(s) \left( \int_s^L (t-s)f(t) dt - k(s) \right) ds, \quad (1)$$

где  $0 \leq x \leq L$ ,

$$a(x) = \frac{12}{Ew} \left( \frac{1}{\tilde{h}^3(x)} + \frac{1}{h^3(x)} \right), \quad k(x) = \frac{1}{1 + \tilde{h}^3(x)/h^3(x)} \int_x^{\tilde{L}} (s-x)q(s) ds, \quad (2)$$

$h(x)$ ,  $\tilde{h}(x)$  — переменные толщины сечений (геометрически – при определении функций  $y$  и  $\tilde{y}$  — толщины считаются равными нулю). Будем считать, что  $h(x)$ ,  $\tilde{h}(x) > 0$  дважды непрерывно дифференцируемы, и  $q(x)$  непрерывна при  $0 \leq x \leq L$ , тогда



$a(x) > 0$  непрерывна (для этой функции нужна только непрерывность) и  $k(x) \geq 0$  дважды непрерывно дифференцируема. Условия одностороннего контакта балок при  $0 \leq x \leq L$  состоят в том, что  $f(x) \geq 0$ ,

$$r(x) \geq 0, \tag{3}$$

$$f(x) > 0 \Rightarrow r(x) = 0. \tag{4}$$

Из (3), (4) и (1) должна быть найдена  $f(x)$ , но следует еще указать множество допустимых  $f(x)$  (помимо их неотрицательности). Это множество подбирается так, чтобы (из физических соображений)  $f(x)$  существовала и была единственной. С одной стороны, для обеспечения существования  $f(x)$  множество должно быть достаточно широким. Если, например, искать  $f(x)$  в множестве непрерывных функций, то искомой  $f(x)$  может не оказаться, поскольку [4, 5] (см. ниже)  $f(x)$  может быть разрывной и может содержать сосредоточенные силы ( $\delta$ -функции). С другой стороны, для обеспечения единственности  $f(x)$  множество должно быть достаточно узким. Если, например, допустить любые разрывные функции, то может оказаться много различных  $f(x)$ , удовлетворяющих (3) и (4), так как добавление положительного конечного «точечного выброса» к  $f(x)$  в точке ее положительности не изменит (3) и (4); следовательно, нужно потребовать, например, односторонней непрерывности  $f(x)$ . В итоге, «подходящим» представляется множество функций вида

$$p(x) + \sum_i P_i \delta(x - x_i), \tag{5}$$

где  $p(x) \geq 0$  кусочно-непрерывна, непрерывна слева при  $0 < x \leq L$  и непрерывна справа при  $x = 0$ ;  $P_i \geq 0$ ;  $x_i > 0$ ; сумма конечна. Две функции вида (5) считаются равными, если их разность тождественно равна нулю при  $0 \leq x \leq L$ . Заметим, что условие  $x_i > 0$  существенно, так как добавление к  $f(x)$  слагаемого  $P\delta(x)$  ( $P > 0$ ) не меняет (3) и (4) и, следовательно, приводит к неединственности  $f(x)$ . Окончательно приходим к следующей математической постановке контактной задачи.

**Задача 1.** Найти функцию  $f(x)$  вида (5) такую, что при  $0 \leq x \leq L$  выполнены (3) и (4), где  $r(x)$  выражается формулой (1).

В [4] доказана единственность решения задачи 1. В [5] построено аналитическое решение задачи 1 в некоторых частных случаях (такое построение здесь и далее доказывает существование решения), а именно доказаны следующие утверждения.

**Утверждение 1.** Если  $k''(x) < 0$  при  $0 \leq x \leq L$ , то решение задачи 1 имеет вид (рис. 2, а)

$$f(x) = P\delta(x - L), \tag{6}$$

где

$$P = \int_0^L (L - x)a(x)k(x) dx / \int_0^L (L - x)^2 a(x) dx. \tag{7}$$

**Утверждение 2.** Если  $k''(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq L$  и  $k(L) = 0$ , то решение задачи 1 имеет вид (рис. 2, б)

$$f(x) = k''(x). \tag{8}$$

Условие  $k(L) = 0$  означает, как нетрудно получить из (2), что заданная нагрузка  $q(x)$  равна нулю на выступающей части длинной балки.



**Утверждение 3.** Если  $k''(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq L$  и  $k(L) > 0$ , то решение задачи 1 имеет следующий вид:

- а) если  $\Phi(0) \leq 0$ , то  $f(x)$  выражается формулой (6) (рис. 2, а).
- б) если  $\Phi(0) > 0$ , то (рис. 2, в)

$$f(x) = \frac{k(\lambda)}{L-\lambda} \delta(x-L) + \left(-k'(\lambda) - \frac{k(\lambda)}{L-\lambda}\right) \delta(x-\lambda) + \begin{cases} k''(x) & (0 \leq x \leq \lambda), \\ 0 & (\lambda < x \leq L), \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\Phi(\Lambda) = \int_{\Lambda}^L a(x)(L-x)^2 (k(\Lambda)/(L-\Lambda) - k(x)/(L-x)) dx, \quad (10)$$

$0 < \lambda < L$  — корень уравнения  $\Phi(\Lambda) = 0$ .

В формулах (6), (9) и далее предполагается, что  $\delta(x-L)$  «полностью» содержится на отрезке  $0 \leq x \leq L$ .

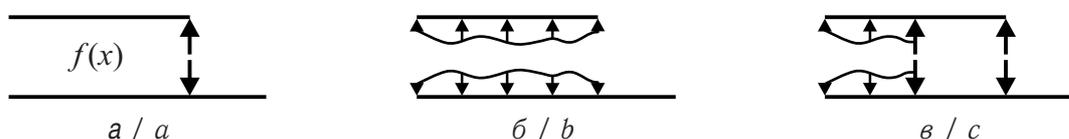


Рис. 2. Варианты контактной нагрузки в задаче 1  
Fig. 2. The types of contact loading for the problem 1

## 2. ОДНОСТОРОННИЙ КОНТАКТ ЗАЩЕМЛЕННОЙ И ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ БАЛОК, РАЗДЕЛЕННЫХ ЗАЗОРОМ

Пусть теперь одна из балок закреплена шарнирно; длины балок  $L$  одинаковы; толщины  $h$  постоянны и одинаковы;  $H > 0$  — зазор между балками (рис. 3, а). Для шарнирно закрепленной балки должно выполняться условие равновесия (равенство нулю суммарного момента сил относительно шарнира)

$$\int_0^L f(x)x dx = \int_0^L q(x)x dx. \quad (11)$$

Используя теорию Бернулли – Эйлера, можно найти (см. [8]) упругие линии балок и далее расстояние  $r(x)$  между балками:

$$r(x) = -Cx + H + a \int_0^x (x-s) \left( \int_s^L (t-s)(f(t) - q(t)/2) dt \right) ds, \quad (12)$$

где  $C$  — неизвестная постоянная, появляющаяся в слагаемом  $Cx$  уравнения упругой линии шарнирно закрепленной балки,  $a = 24/(Ewh^3)$ . Контактная задача заключается теперь в отыскании  $f(x)$  и  $C$ . Будем считать, что  $f(x)$  имеет вид (5). Таким образом, здесь не происходит расширения множества допустимых контактных нагрузок по сравнению с задачей 1. Будем, как и в задаче 1, считать, что  $q(x) \geq 0$  непрерывна при  $0 \leq x \leq L$ , но здесь следует еще предполагать, что  $q(x) \neq 0$ , так как иначе при  $f(x) \equiv 0$  будет неопределенной (неединственной)  $C \leq 0$ . Окончательно приходим к следующей математической постановке контактной задачи.

**Задача 2.** Найти функцию  $f(x)$  вида (5) и число  $C$  такие, что выполнено (11) и при  $0 \leq x \leq L$  выполнены (3) и (4), где  $r(x)$  выражается формулой (12).



В [8] доказана единственность решения задачи 2 и построено аналитическое решение; при построении этого решения существенно использовано условие  $H > 0$ . Установлено, что имеется два варианта контактной нагрузки  $f(x)$ : либо сумма распределенной по некоторому отрезку  $\lambda \leq x \leq L$  нагрузки и сосредоточенной в точке  $x = \lambda$  силы (рис. 3, б), либо одна сосредоточенная в точке  $x = L$  сила (рис. 3, в).

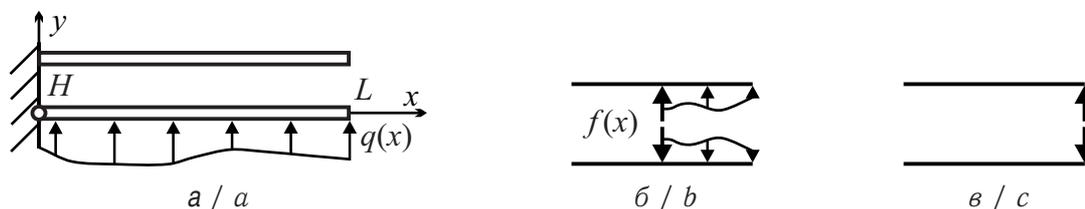


Рис. 3. Балочная конструкция и варианты контактной нагрузки в задаче 2  
 Fig. 3. Beam structure and the types of contact loading for the problem 2

### 3. ОДНОСТОРОННИЙ КОНТАКТ ЗАЦЕМЛЕННОЙ И ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ БАЛОК БЕЗ ЗАЗОРА

#### 3.1. Постановка контактной задачи

Рассмотрим теперь конструкцию задачи 1, но при этом длинная балка является шарнирно закрепленной (рис. 1, б). Это и есть конструкция с новой особенностью. Для шарнирно закрепленной балки должно выполняться условие равновесия, аналогичное (11)

$$\int_0^L f(x)x \, dx = \int_0^L q(x)x \, dx, \tag{13}$$

а расстояние  $r(x)$  между балками выражается формулой (1) с добавлением, аналогичным (12):

$$r(x) = -Cx + \int_0^x (x-s)a(s) \left( \int_s^L (t-s)f(t) \, dt - k(s) \right) ds. \tag{14}$$

Здесь, как и в парагр. 2, будем по указанным там причинам предполагать, что  $q(x) \neq 0$ .

Далее можно сформулировать математическую постановку контактной задачи, аналогичную постановке задачи 2. Можно также доказать единственность решения этой задачи на множестве допустимых  $f(x)$  вида (5). Однако попытка по аналогии с решениями парагр. 1 и 2 построить решения в частных случаях приводит к неожиданному результату: в некоторых случаях решение не существует. Доказать это нетрудно следующим образом (но уже после исследования данной ситуации, см. п. 3.4). Сначала рассматривается более широкое множество допустимых  $f(x)$ . Далее для этого множества доказывается единственность решения. Затем строится решение, принадлежащее расширенному множеству, но не принадлежащее исходному множеству. Отсюда следует, что на исходном множестве решения не существует.

Структура расширенного множества допустимых  $f(x)$  была установлена из следующих эвристических соображений. Было найдено (см. п. 3.7), что некоторое приближение к решению содержит слагаемое  $P(\varepsilon)\delta(x - \varepsilon)$ , где  $\varepsilon > 0$  – малый параметр, а собственно решение  $f(x)$  получается при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , причем тогда  $P(\varepsilon) \rightarrow +\infty$  и  $P(\varepsilon)\varepsilon \rightarrow M < \infty$ . Таким образом, контактная нагрузка  $f(x)$  содержит сосредоточенную при  $x = 0$  (бесконечную) силу и сосредоточенный при  $x = 0$  момент  $M$ . Так



как  $f(x)$  не может (по предположению парагр. 1) содержать сосредоточенную при  $x = 0$  силу, то остается только момент. Это означает, что  $f(x)$  содержит слагаемое  $-2M\delta'(x)$ . Множитель 2 появляется здесь потому, что на отрезке  $0 \leq x \leq L$  расположена только «половина» функции  $-2M\delta'(x)$ , поэтому интеграл от этой функции в левой части (13) равен  $M$ , то есть именно моменту такой нагрузки. Заметим здесь, что слагаемое  $-2M\delta'(x)$  в  $f(x)$  влияет на формулу (13), но, как нетрудно убедиться, не влияет на формулу (14). «Половинное» участие функции  $-2M\delta'(x)$  в контактной нагрузке обеспечивает неотрицательность этой нагрузки. Действительно, функция  $-2M\delta'(x)$  содержит «отрицательную часть» независимо от знака величины  $M$ , но если  $M > 0$ , то условие  $f(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq L$  не нарушается, так как тогда «отрицательная часть»  $-2M\delta'(x)$  расположена при  $x < 0$ .

Также существуют эвристические соображения, по которым следует дополнить контактное условие (4), если в составе контактной нагрузки имеется слагаемое  $-2M\delta'(x)$ . Действительно, это слагаемое положительно (при  $M > 0$ ) не в «самой» точке  $x = 0$ , а в «бесконечно близкой» к ней (справа) точке. Поэтому  $r(x)$  согласно (4) должно обратиться в нуль в этой «бесконечно близкой» точке. Так как  $r(0) = 0$  (как легко получить из (14)), то это означает, что при  $M > 0$  должно выполняться равенство  $r'(0) = 0$ . Заметим, что если это условие не выполнено, то будет неопределенной (неединственной) постоянная  $C$ , так как тогда можно положить  $f(x) = -2M\delta'(x)$ , где  $M$  найдено из (13), и выбрать лишь достаточно большую по модулю  $C$  (чтобы обеспечить условие  $r(x) \geq 0$ ).

Итак, множество допустимых  $f(x)$  имеет вид

$$p(x) + \sum_i P_i \delta(x - x_i) - 2M\delta'(x), \quad (15)$$

где относительно  $p(x)$ ,  $P_i$ ,  $x_i$  и суммы делаются те же предположения, что и для функции (5), и дополнительно предполагается, что  $M \geq 0$ . К контактному условию (4) добавляется, как указано выше, условие:

$$M > 0 \Rightarrow r'(0) = 0. \quad (16)$$

Заметим, что  $r'(0) = -C$ ; это нетрудно получить из (14) и (15). Окончательно приходим к следующей математической постановке контактной задачи.

**Задача 3.** Найти функцию  $f(x)$  вида (15) и число  $C$  такие, что выполнено (13); при  $0 \leq x \leq L$  выполнены (3), (4) и (16);  $r(x)$  всюду выражается формулой (14).

### 3.2. Доказательство единственности решения контактной задачи

**Утверждение 4.** Задача 3 может иметь только одно решение.

**Доказательство.** Пусть  $f(x)$ ,  $C$  и  $f_*(x)$ ,  $C_*$  — два решения задачи 3. По формуле (14) им соответствуют функции  $r(x)$  и  $r_*(x)$ . Обозначим

$$\varphi(x) = f(x) - f_*(x). \quad (17)$$

Так как  $f(x)$  и  $f_*(x)$  имеют вид (15), то  $\varphi(x)$  также имеет вид (15), но  $p(x)$ ,  $P_i$ ,  $M$  могут быть отрицательными. Обозначим

$$A = \int_0^L (r(x) - r_*(x)) \varphi(x) dx. \quad (18)$$



Из (3), (4) и (17) нетрудно установить, что в (18) подинтегральная функция неположительна; следовательно,  $A \leq 0$ . С другой стороны, подставляя (14) в (18) и учитывая (17), можно найти, что

$$A = (C_* - C) \int_0^L \varphi(x)x \, dx + \int_0^L a(x)J^2(x) \, dx, \quad (19)$$

где

$$J(x) = \int_x^L (s - x)\varphi(s) \, ds. \quad (20)$$

Из (13) и (17) следует, что первое слагаемое в (19) равно нулю; тогда из (19) следует, что  $A \geq 0$ ; так как  $A \leq 0$ , то  $A = 0$ . Далее, учитывая (19), (20) и упомянутый выше вид  $\varphi(x)$ , нетрудно вывести из равенства  $A = 0$ , что часть  $\varphi(x)$ , не содержащая слагаемое, пропорциональное  $\delta'(x)$ , тождественно равна нулю при  $0 \leq x \leq L$ . Если же  $\varphi(x) \sim \delta'(x)$ , то из (13) и (17) следует, что и в этом случае  $\varphi(x) \equiv 0$ . Таким образом,  $f(x) \equiv f_*(x)$  при  $0 \leq x \leq L$ . Остается доказать, что  $C = C_*$ . Из (14) следует, что  $r(x) - r_*(x) = (C_* - C)x$ . Предположим, что  $C \neq C_*$ ; тогда  $r(x)$  и  $r_*(x)$  могут обращаться в нуль одновременно только при  $x = 0$ , поэтому при каждом  $0 < x \leq L$  либо  $r(x) > 0$  и тогда  $f(x) = 0$ , либо  $r_*(x) > 0$  и тогда  $f_*(x) = f(x) = 0$ , то есть  $f(x) = 0$  при  $0 < x \leq L$ . Так как кусочно-непрерывная часть  $f(x)$  непрерывна справа при  $x = 0$ , а  $\delta(x)$  не может, как предполагалось выше, содержаться в  $f(x)$ , то из (15) следует, что  $f(x) = -2M\delta'(x)$ ; тогда и  $f_*(x) = -2M\delta'(x)$ . Если  $M > 0$ , то  $r'(0) = -C = 0$  и  $r'_*(0) = -C_* = 0$ , то есть  $C = C_*$ , что противоречит принятому выше предположению. Следовательно,  $M = 0$ ; тогда  $f(x) \equiv 0$  при  $0 \leq x \leq L$ ; это противоречит (13) в принятом предположении непрерывной неотрицательной  $q(x) \not\equiv 0$ . Таким образом,  $C = C_*$ ; тем самым утверждение 4 полностью доказано.  $\square$

### 3.3. Связь решений задач 1 и 3

**Утверждение 5.** Пусть  $f_1(x)$  — решение задачи 1. Если  $M_1 \geq 0$ , где

$$M_1 = \int_0^{\bar{L}} q(x)x \, dx - \int_0^L f_1(x)x \, dx, \quad (21)$$

то решение задачи 3 имеет вид

$$f(x) = f_1(x) - 2M_1\delta'(x), \quad C = 0. \quad (22)$$

**Доказательство.** Так как  $f_1(x)$  имеет вид (5), то  $f(x)$  имеет вид (15). Подставляя (22) в (13) и учитывая (21), находим, что (13) выполнено. Далее, при  $C = 0$  вид (14) совпадает с видом (1), однако в (14) следует подставить  $f(x)$  из (22), а в (1) следует подставить  $f_1(x)$ . Как было замечено в п. 3.1, слагаемое  $-2M_1\delta'(x)$  в  $f(x)$  не влияет на (14), поэтому (1) и (14) совпадают при выполнении (22). Так как  $f_1(x)$  — решение задачи 1, то (3) и (4) выполнены. Далее из (14) находим  $r'(0) = -C = 0$ , следовательно (16) выполнено и утверждение 5 доказано.  $\square$

Так как утверждения 1, 2, 3 дают решения задачи 1 в частных случаях, то с помощью утверждения 5 получаем в этих случаях решения задачи 3 при дополнительном условии  $M_1 \geq 0$ . Если это условие не выполнено, то решение задачи 3 нужно строить отдельно.



### 3.4. Решение задачи 3 при условии утверждения 1

Пусть  $k''(x) < 0$  при  $0 \leq x \leq L$ , то есть выполнено условие утверждения 1. Тогда из (6) (для  $f_1(x)$ ) и (21) находим, что неравенство  $M_1 \geq 0$  принимает вид  $Q \geq P$ , где

$$Q = \frac{1}{L} \int_0^{\tilde{L}} q(x)x \, dx. \quad (23)$$

Возможно любое соотношение между величинами  $Q$  и  $P$ ; в этом нетрудно убедиться на примере:  $q(x) \equiv \text{const}$ ,  $a(x) \equiv \text{const}$ ,  $k(x) \sim (\tilde{L}^2 - x^2)$ .

Если  $Q \geq P$ , то (22) есть решение задачи 3 (рис. 4, а, момент показан дуговой стрелкой), причем если  $Q > P$ , то  $M_1 > 0$ ; это, вместе с установленной выше единственностью решения, доказывает (как предварительно упоминалось в п. 3.1), что решение задачи 3 может не существовать на множестве (5), более узком, чем множество (15). Если  $Q < P$ , то решение задачи 3 строится отдельно; оно сформулировано в нижеследующем утверждении.

**Утверждение 6.** Если  $k''(x) < 0$  при  $0 \leq x \leq L$  и  $Q < P$ , то решение задачи 3 имеет вид (рис. 4, б)

$$f(x) = Q\delta(x - L), \quad C = \frac{Q - P}{L} \int_0^L (L - x)^2 a(x) \, dx. \quad (24)$$

**Доказательство.** Очевидно, что  $f(x)$  имеет вид (15). Подставляя (24) в (13) и учитывая (23), находим, что (13) выполнено. Подставляя (24) в (14) и учитывая (7), получим, что  $r(0) = 0$ ,  $r(L) = 0$ ,  $r'(0) = -C > 0$  и

$$r''(x) = a(x)(L - x)(Q - b(x)),$$

где  $b(x) = k(x)/(L - x)$ ; при этом  $b'(x) = c(x)/(L - x)^2$ , где  $c(x) = k(x) + k'(x)(L - x)$  и  $c'(x) = k''(x)(L - x)$ . Функция  $f(x)$  может быть положительна только при  $x = L$ , а  $r(L) = 0$ , следовательно, (4) выполнено. Остается доказать (3). Заметим, что  $k(L) > 0$ , так как если  $k(L) = 0$ , то из (2) нетрудно вывести, что  $k''(L) = 0$ ; это противоречит принятому условию  $k''(x) < 0$  при  $0 \leq x \leq L$ . Далее, так как  $c'(x) < 0$  при  $0 \leq x < L$  и  $c(L) = k(L) > 0$ , то  $c(x) > 0$  при  $0 \leq x \leq L$ ; следовательно,  $b(x)$  возрастает при  $0 \leq x < L$ . Поскольку  $Q > b(0)$  (что следует из (23) и (2)), а  $b(L - 0) = +\infty$  (так как  $k(L) > 0$ ), то из возрастания  $b(x)$  следует, что существует  $0 < \xi < L$  такое, что  $Q > b(x)$  (тогда  $r''(x) > 0$ ) при  $0 \leq x < \xi$  и  $Q < b(x)$  (тогда  $r''(x) < 0$ ) при  $\xi < x < L$ . Такой вид  $r''(x)$  вместе с указанными выше условиями  $r'(0) > 0$ ,  $r(0) = 0$ ,  $r(L) = 0$  и несложными геометрическими соображениями приводит к неравенству  $r(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq L$ , и (3) доказано. Условие (16) проверять не нужно, так как в данном случае  $M = 0$ . Утверждение 6 доказано.  $\square$

### 3.5. Решение задачи 3 при условиях утверждения 2

Пусть  $k''(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq L$  и  $k(L) = 0$ , то есть выполнены условия утверждения 2. Тогда из (8) (для  $f_1(x)$ ), (2), (21) находим, что неравенство  $M_1 \geq 0$  принимает вид  $k(0)\tilde{h}^3(0)/h^3(0) \geq Lk'(L)$ . Если  $k(L) = 0$ , то, как упомянуто в парагр. 1,  $q(x) \equiv 0$  при  $L \leq x \leq \tilde{L}$ . Тогда из (2) следует, что  $k'(L) = 0$ ; поэтому неравенство  $M_1 \geq 0$  эквивалентно неравенству  $k(0)\tilde{h}^3(0)/h^3(0) \geq 0$ , которое, очевидно, выполнено. Таким образом, в данном случае решение задачи 3 всегда выражается формулами (22) (рис. 4, в).

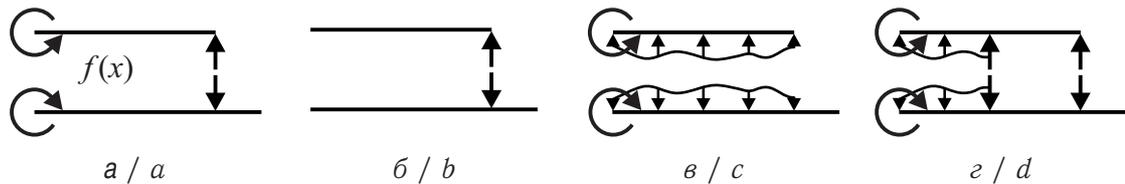


Рис. 4. Варианты контактной нагрузки в задаче 3  
 Fig. 4. The types of contact loading for the problem 3

### 3.6. Решение задачи 3 при условиях утверждения 3

Пусть  $k''(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq L$ ,  $k(L) > 0$  и  $\Phi(0) \leq 0$ , то есть выполнены условия а) утверждения 3. Тогда из (6) (для  $f_1(x)$ ) и (21) находим, что неравенство  $M_1 \geq 0$  принимает, как и в п. 3.4, вид  $Q \geq P$ .

Здесь также возможно любое соотношение между величинами  $Q$  и  $P$ ; в этом нетрудно убедиться на примере:  $q(x) \equiv \text{const}$ ,  $a(x) \equiv \text{const}$ ,  $k(x) \sim (\tilde{L} - x)^2$ .

Если  $Q \geq P$ , то (22) есть решение задачи 3 (рис. 4, а). Если  $Q < P$ , то решение задачи 3 строится отдельно; оно сформулировано в нижеследующем утверждении.

**Утверждение 7.** Если  $k''(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq L$ ,  $k(L) > 0$ ,  $\Phi(0) \leq 0$  и  $Q < P$ , то решение задачи 3 имеет вид (24) (рис. 4, б).

**Доказательство.** утверждения 7 аналогично доказательству утверждения 6.  $\square$

Пусть теперь  $k''(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq L$ ,  $k(L) > 0$  и  $\Phi(0) > 0$ , то есть выполнены условия б) утверждения 3. Тогда из (9) (для  $f_1(x)$ ), (2), (21) находим, что неравенство  $M_1 \geq 0$  эквивалентно неравенству  $k(0)\tilde{h}^3(0)/h^3(0) \geq 0$ , которое, очевидно, выполнено. Таким образом, в данном случае решение задачи 3 всегда выражается формулами (22) (рис. 4, г).

### 3.7. Пример численного решения задачи 3

Задачу 3 можно решить численно. При таком решении искомая контактная нагрузка  $f(x)$  представляется [11] множеством сосредоточенных сил  $P_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ), расположенных в заданных узлах  $x_i$ , разбивающих отрезок  $0 \leq x \leq L$ . Далее проводится итерационное уточнение множества узлов контакта до выполнения (3) и (4) в узлах и условия  $P_i \geq 0$ ; условие (13) также учитывается; условие (16) не учитывается. Численное решение — это значения  $f(x)$  в узлах:  $f(x_i) = P_i/(x_i - x_{i-1})$  (полагаем  $x_0 = 0$ ).

Рассмотрим следующий пример:  $L/\tilde{L} = (8 - 2\sqrt{2})/7$ ,  $h(x) = \tilde{h}(x) = h_0$ ,  $q(x) = q_0$ . Нетрудно установить, что в этом случае выполнены условия б) утверждения 3 и согласно п. 3.6 аналитическое решение задачи 3 получается по формулам (22) и (9):

$$f(x) = P_*\delta(x - L) + P_{**}\delta(x - L/2) + \begin{cases} q_0/2 & (0 \leq x \leq L/2) \\ 0 & (L/2 < x \leq L) \end{cases} - 2M_1\delta'(x), \quad (25)$$

где  $P_* = q_0L(3 + 2\sqrt{2})/16$ ,  $P_{**} = q_0L/16$ ,  $M_1 = q_0L^2(9 + 4\sqrt{2})/32$ .

Численное решение показано точками на рис. 5; рядом с некоторыми точками в скобках указан номер  $i$  узла. Параметры алгоритма:  $N = 24$ ,  $x_i = L \exp((1 - N/i)/2)$  (практика расчетов показала, что узлы должны существенно сгущаться вблизи  $x = 0$ ).

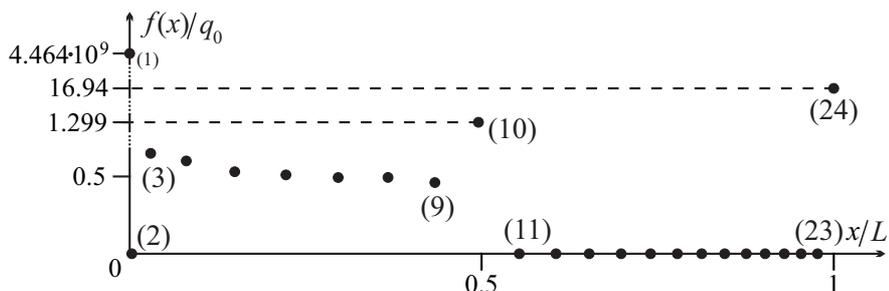


Рис. 5. Численное решение задачи 3

Fig. 5. The numerical solution of the problem 3

Если значения  $f(x_i)/q_0$  равны нулю или порядка единицы, то они интерпретируются как кусочно-непрерывная часть  $f(x)$ . На рис. 5 видно, что  $f(x_i)/q_0$  при  $3 \leq i \leq 9$  и  $11 \leq i \leq 23$  хорошо совпадают с третьим слагаемым в (25) ( $f(x_2)/q_0 = 0$ , а не близко к  $1/2$ , но это – незначительная погрешность, так как  $x_2/L = 0.004087$  мало).

Если значения  $f(x_i)/q_0$  порядка  $L/(x_i - x_{i-1})$ , то они интерпретируются как сосредоточенные силы в  $f(x)$ . На рис. 5 такие силы обнаруживаются при  $i = 24$  и  $i = 10$ , что хорошо соответствует первому и второму слагаемым в (25). Величина силы  $P_i = (f(x_i) - (f(x_{i-1}) + f(x_{i+1}))/2)(x_i - x_{i-1})$  (среднее арифметическое значений  $f(x)$  в соседних узлах вычитается из  $f(x_i)$ , чтобы устранить «примесь» кусочно-непрерывной части  $f(x)$ ). Численные значения  $P_{24}/(q_0L) = 0,3643$  и  $P_{10}/(q_0L) = 0.06626$  хорошо совпадают с аналитическими  $P_*/(q_0L) = (3 + 2\sqrt{2})/16$  и  $P_{**}/(q_0L) = 1/16$  в (25).

Если значение  $f(x_1)/q_0$  порядка  $(L/x_1)^2$  (то есть аномально велико), то оно интерпретируется как сосредоточенный при  $x = 0$  момент в  $f(x)$ . Такая точка на рис. 5 присутствует, что хорошо соответствует последнему слагаемому в (25). Величина момента  $M_1 = f(x_1)x_1^2$ ; численное значение  $M_1/(q_0L^2) = 0.4581$  хорошо совпадает с аналитическим  $M_1/(q_0L^2) = (9 + 4\sqrt{2})/32$  в (25).

Таким образом, численное решение подтверждает аналитическое; в частности, подтверждается необходимость учета контактного сосредоточенного момента.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный ранее авторами подход к математической постановке и решению контактных задач для балочных конструкций [4, 5, 8] дал возможность обнаружить новую, неожиданную особенность в одной из задач этого класса. Естественная модификация данного подхода, учитывающая обнаруженную особенность, позволила сформулировать математическую постановку этой контактной задачи, доказать единственность решения и построить аналитическое решение в некоторых частных случаях. Можно надеяться, что данный подход окажется успешным в применении к более сложным контактным задачам, например, задачам 1 и 3 при отказе от предположения о постоянстве знака функции  $k''(x)$ .

## Библиографический список

1. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьев В. И. Расчеты на прочность в машиностроении : в 3 т. М. : Машгиз, 1956. Т. 1. 884 с.
2. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М. : Наука, 1973. 400 с.



3. Пархиловский И. Г. Автомобильные листовые рессоры. М. : Машиностроение, 1978. 232 с.
4. Osipenko M. A., Nyashin Yu. I., Rudakov R. N. A contact problem in the theory of leaf spring bending // Int. J. Solids Struct. 2003. Vol 40, iss. 12. P. 3129–3136. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00112-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00112-4)
5. Осипенко М. А. Контактная задача об изгибе двухлистовой рессоры с листами переменной толщины // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2014. № 1(27). С. 90–94.
6. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М. : Мир, 1989. 510 с.
7. Кузнецов С. А. Механика контактного взаимодействия. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2014. 72 с.
8. Осипенко М. А., Няшин Ю. И., Касаткин А. А. Особенности контактных задач для систем струн и балок со слабо закрепленными элементами // Вестн. ПНИПУ. Механика. 2015. № 1. С. 121–129. DOI: [10.15593/pern.mech/2015.1.08](https://doi.org/10.15593/pern.mech/2015.1.08)
9. Александров В. М. Некоторые контактные задачи для балок, пластинок и оболочек // Инженерный журн. 1965. Т. 5, № 4. С. 782–785.
10. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М. : Машиностроение, 1980. 415 с.
11. Li H., Dempsey J. P. Unbonded Contact of Finite Timoshenko Beam on Elastic Layer // Journal of Engineering Mechanics. 1988. Vol. 114, № 8. P. 1265–1284. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1988\)114:8\(1265\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1988)114:8(1265))
12. Кравчук А. С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М. : Изд-во МГАПИ, 1997. 340 с.
13. Осипенко М. А., Няшин Ю. И. Об одном подходе к решению некоторых одномерных контактных задач // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 77–84.
14. Shi M., Srisupattarawanit T., Schiefer F., Ostermeyer G.-P. On the Wellbore Contact of Drill Strings in a Finite Element Model // Proc. Appl. Math. Mech. 2013. № 13. P. 109–110. DOI: <https://doi.org/10.1002/pamm.201310050>
15. Kim J. H., Ahn Y. J., Jang Y. H., Barber J. R. Contact problems involving beams // Int. J. Solids Struct. 2014. № 51. P. 4435–4439. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.09.013>
16. Ватульян А. О., Васильев Л. В. Об определении параметров закрепления неоднородной балки при наличии затухания // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 449–456. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-4-449-456>
17. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Изгиб трехслойной балки локальными нагрузками в температурном поле // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 69–83. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-1-69-83>
18. Александров В. М., Чебаков М. И. Введение в механику контактных взаимодействий. М. ; Ростов н/Д : ООО «ЦВВР», 2007. 114 с.
19. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М. : Наука, 1988. 711 с.

---

**Образец для цитирования:**

Осипенко М. А., Касаткин А. А. Моментная контактная нагрузка при одностороннем контакте балок // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 1. С. 69–81. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-69-81>

---



## A Couple Contact Loading at the Unilateral Contact of Beams

M. A. Osipenko, A. A. Kasatkin

Michael A. Osipenko, <https://orcid.org/0000-0003-3267-0618>, Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolsky Ave., 614990 Perm, Russia, [osipenko.michael@yandex.ru](mailto:osipenko.michael@yandex.ru)

Anton A. Kasatkin, Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolsky Ave., 614990 Perm, Russia, [dedulyama@yandex.ru](mailto:dedulyama@yandex.ru)

The contact problem for the structure consisting of two beams is considered. The beams have the different lengths and the different variable thicknesses. One end of the shorter beam is clamped coinciding with the hinged end of the longer beam. The other ends of the beams are free. The given loading is applied to the longer beam. The beams undergo the weak joint bending with the unilateral (receding) contact. There is no friction between the beams. The bending of each beam is described by Bernoulli – Euler model. The contact problem is to find the contact loading, i.e. the forces of interaction of beams. This problem has a number of well-known characteristic features. Some of them inhere in the contact problems for the beam structures on the whole. The others inhere in the structures containing the beam that cannot be in the equilibrium for the arbitrary loading. Besides, this problem has the novel peculiarity consisting in the appearance of the concentrated couple in the contact loading. The non-negativity of the contact loading, as the necessary condition of the unilateral contact, is not spoiled because the concentrated couple is at the end of the beams and its “negative part” is located outside the beams and does not belong to the contact loading. The mathematical formulation of the contact problem is propounded. The uniqueness of the solution of this problem is proved. The analytical solution is constructed in some special cases. The relation between the problem under consideration and the well-known contact problem for two cantilever beams is established.

**Keywords:** Bernoulli – Euler beam, contact problem, unilateral contact, contact loading, concentrated couple, uniqueness of solution, analytical solution.

Received: 23.04.2018 / Accepted: 04.07.2018 / Published online: 28.02.2019

### References

1. Ponomaryov S. D., Biederman V. L., Likharev K. K., Makushin V. M., Malinin N. N., Feodosiev V. I. *Raschetny na prochnost v mashinostroenii* [Stress Calculation in Mechanical Engineering]. Vol. 1. Moscow, Mashgiz, 1956. 884 p. (in Russian).
2. Feodosyev V. I. *Selected Problems and Questions in Strength of Materials*. Moscow, Mir, 1977. 432 p. (Rus. ed.: Moscow, Nauka, 1973. 400 p.)
3. Parhilovskii I. G. *Avtomobilnye listovye resory* [Automotive Leaf Springs]. Moscow, Mashinostroenie, 1978. 232 p. (in Russian).
4. Osipenko M. A., Nyashin Yu. I., Rudakov R. N. A contact problem in the theory of leaf spring bending. *Int. J. Solids Struct.*, 2003, no. 40, iss. 12, pp. 3129–3136. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00112-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00112-4)
5. Osipenko M. A. The contact problem for bending of a two-leaf spring with variable thicknesses of leaves. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2014, no. 1(27), pp. 90–94 (in Russian).
6. Johnson K. L. *Contact Mechanics*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1985. 452 p. (Rus. ed.: Moscow, Mir, 1989. 510 p.)
7. Kuznetsov S. A. *Mehanika kontaknogo vzaimodeystviya* [Contact Mechanics]. Kazan, Kazan Univ., 2014. 72 p. (in Russian).



8. Osipenko M. A., Nyashin Yu. I., Kasatkin A. A. Osipenko M. A., Nyashin Yu. I., Kasatkin A. A. Singularities of contact problems for systems of strings and beams with weakly restrained elements. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 1, pp. 121–129 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.1.08>
9. Aleksandrov V. M. Some Contact Problems for the Beams, Plates and Shells. *Inzhenerny Zhurnal*, 1965, vol. 5, no. 4, pp. 782–785 (in Russian).
10. Grigoluk E. I., Tolkachov V. M. *Kontaknyye zadachi teorii plastin i obolochek* [The Contact Problems for Plates and Shells]. Moscow, Mashinostroenie, 1980. 415 p. (in Russian).
11. Li H., Dempsey J. P. Unbonded Contact of Finite Timoshenko Beam on Elastic Layer. *Journal of Engineering Mechanics*. 1988, July, vol. 114, no. 8, pp. 1265–1284. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1988\)114:8\(1265\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1988)114:8(1265))
12. Kravtchuk A. S. *Variatsionnyye i kvazivariatsionnyye neravenstva v mekhanike* [Variational and quasi-variational inequalities in mechanics]. Moscow, MGAPI, 1997. 340 p. (in Russian).
13. Osipenko M. A., Nyashin Yu. I. A Certain Approach to Solving of Some One-Dimensional Contact Problems. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 1, pp. 77–84 (in Russian).
14. Shi M., Srisupattarawanit T., Schiefer F., Ostermeyer G.-P. On the Wellbore Contact of Drill Strings in a Finite Element Model. *Proc. Appl. Math. Mech.*, 2013, no. 13, pp. 109–110. DOI: <https://doi.org/10.1002/pamm.201310050>
15. Kim J. H., Ahn Y. J., Jang Y. H., Barber J. R. Contact problems involving beams *Int. J. Solids Struct.*, 2014, no. 51, pp. 4435–4439. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.09.013>
16. Vatulyan A. O., Vasilev L. V. Determination of Attaching Parameters of Inhomogeneous Beams in the Presence of Damping. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 449–456 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-4-449-456>
17. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Bending of a Sandwich Beam by Local Loads in the Temperature Field. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 69–83. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-1-69-83>
18. Aleksandrov V. M., Chebakov M. I. *Vvedeniye v mehaniku kontaknykh vzaimodeystvii* [Introduction to the Contact Mechanics]. Moscow, Rostov-on-Don, LLC “ZVVR”, 2007. 114 p. (in Russian).
19. Rabotnov Yu. N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of Deformable Solids]. Moscow, Nauka, 1988. 711 p. (in Russian).

---

**Cite this article as:**

Osipenko M. A., Kasatkin A. A. A Couple Contact Loading at the Unilateral Contact of Beams. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 1, pp. 69–81 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-1-69-81>

---