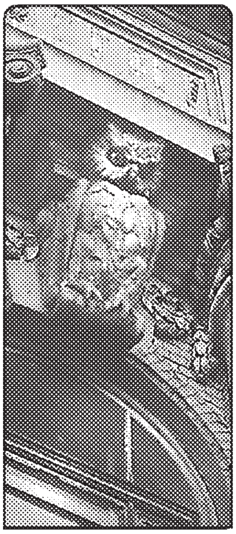

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МАТЕМАТИКА

УДК 519.216.8

Мартингальные неравенства в симметричных пространствах с полумультипликативным весом

С. С. Волосивец, Н. Н. Зайцев

Волосивец Сергей Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и стохастического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83, VolosivetsSS@mail.ru

Зайцев Николай Николаевич, магистрант кафедры теории функций и стохастического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83, zaic.nick@gmail.com

Пусть (Ω, Σ, P) является полным вероятностным пространством, $\mathscr{F} = \{\mathscr{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ — возрастающая последовательность σ-алгебр, такая что $\cup_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n$ порождает Σ. Если $f = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ является мартингалом по отношению к $\mathscr{F}$ и $\mathbb{E}_n$ — условное (математическое) ожидание по отношению к $\mathscr{F}_n$, то можно ввести максимальную функцию $M(f) = \sup_{n\geqslant 0}|f_n|$ и квадратичную функцию $S(f) = \left(\sum\limits_{i=0}^{\infty}|f_i - f_{i-1}|^2\right)^{1/2}$, $f_{-1} = 0$. В случае равномерно интегрируемых мартингалов существует $g \in L^1(\Omega)$, такая что $\mathbb{E}_n g = f_n$, и мы рассматриваем максимальную шарп-функцию $f^\sharp = \sup_{n\geqslant 0}\mathbb{E}_n|g - f_{n-1}|$. Результат Буркхольдера – Ганди – Дэвиса состоит в том, что $C_1\|M(f)\|_p \leqslant \|S(f)\|_p \leqslant C_2\|M(f)\|$ при $1 < p < \infty$, где $\|\cdot\|_p$ — норма в $L^p(\Omega)$ и $C_2 > C_1 > 0$. Мы называем неравенство типа $\|M(f)\|_p \leqslant C\|f^\sharp\|_p$, $1 < p < \infty$, неравенством Фефтермана – Стейна. Известно, что мартингальное неравенство Буркхольдера – Ганди – Дэвиса справедливо в перестановочно-инвариантных банаховых функциональных пространствах с нетривиальными индексами Бойда. Мы доказываем это неравенство в более широком классе симметрических пространств (это понятие определяется как в известной монографии С. Г. Крейна, Ю. И. Петунина и Е. М. Семенова) с полумультипликативным весом. Также в этом же классе симметричных пространств получены неравенства типа Фефтермана – Стейна, использующие максимальную шарп-функцию и квадратичные шарп-функции.

Ключевые слова: мартингал, максимальная функция, максимальная шарп-функция, квадратичная функция мартингала, неравенство Буркхольдера – Ганди – Дэвиса, полумультипликативная функция.

Поступила в редакцию: 20.04.2018 / Принята: 04.02.2019 / Опубликована онлайн: 28.05.2019

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-126-133

ВВЕДЕНИЕ

В теории мартингалов хорошо известны неравенства Буркхольдера – Ганди – Дэвиса, согласно которым L^p-норма максимальной функции мартингала слабо эквивалентна L^p-норме квадратичной вариации мартингала при $1 < p < \infty$ (см. [1]). Этот результат был перенесен указанными авторами [2] на случай пространств Орлича $L_\Phi[0,1]$, где выпуклая четная функция Φ, помимо стандартных требований $\lim\limits_{x\to 0+0} \Phi(x)/x = 0$ и $\lim\limits_{x\to +\infty} \Phi(x)/x = +\infty$, удовлетворяет также Δ_2-условию $\Phi(2t) \leqslant C\Phi(t)$, $t > 0$. Для перестановочно-инвариантных банаховых функциональных пространств (r.i. BFS, точное определение см. ниже) с положительным нижним индексом Бойда аналогичный результат был получен У. Джонсоном и Г. Шехтманом [3]. В работе И. Я. Новикова [4] аналог неравенства Буркхольдера – Ганди – Дэвиса был получен для симметричных пространств со свойством $\|\sigma_\tau\|_{\widetilde{X}\to\widetilde{X}} = o(1)$, $\tau \to 0+0$ (см. следующий параграф). Более того, в [3] и [4] установлена эквивалентность выполнения неравенства Буркхольдера – Ганди – Дэвиса в пространстве и соответствующих условий на пространство. Из результатов [5, гл. 2, §§ 1, 4] вытекает, что условия У. Джонсона – Г. Шехтмана и И. Я. Новикова равносильны, а согласно ссылке [6] в [4] результаты И. Я. Новикова были доложены в 1988 году. М. Кикучи [6] установил эквивалетность условий ограниченности операторов Харди и Харди – Литтлвуда в перестановочно-инвариантных пространствах и условий выполнения некоторых мартингальных неравенств.

Мартингальный аналог известной теоремы Ч. Феффермана – И. Стейна [7] об оценке L^p-нормы максимальной функции через L^p-норму шарп-функции был установлен А. Гарсиа [8]. Более общий результат этого типа см. [9, гл. 2, теорема 2.5.3.] В последней монографии Ф. Вейца подробно изучаются свойства мартингалов и мартингальных пространств с разных точек зрения. Для пространств Орлича аналог теоремы Ч. Феффермана – И. Стейна был получен Р. Лонгом [10], а для пространств Лоренца близкие результаты доказаны И. Реном [11].

Для так называемых перестановочно-инвариантных квази-банаховых функциональных пространств аналоги неравенств Буркхольдера – Ганди – Дэвиса и Ч. Феффермана – И. Стейна были установлены К. Хо [12]. Развивая идеи Р. Лонга [10] и М. Кикучи [6], К. Хо активно использовал операторы Харди – Литтлвуда и Харди в доказательствах.

Целью настоящей работы является нахождение условий выполния аналогов обсуждаемых выше неравенств Буркхольдера – Ганди – Дэвиса и Ч. Феффермана – И. Стейна в симметричных пространствах с полумультипликативными весами, куда входят, например, степенные веса.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть (Ω, Σ, P) — полное вероятностное пространство, $M(\Omega)$ — множество измеримых на Ω относительно P функций. Для $f : \Omega \to \mathbb{R}$ функцией распределения назовем $P_f(\lambda) = P\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\}$, невозрастающая перестановка функции f задается равенством $f^*(t) = \inf\{\lambda : P_f(\lambda) \leqslant t\}$, $t > 0$.

Если $\widetilde{X} = \widetilde{X}(\mathbb{R}_+)$ — банахово пространство измеримых функций на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$

(т.е. $\widetilde{X} \subset M(\mathbb{R}_+)$), такое что для $x, y \in M(\mathbb{R}_+)$ выполняется следующее:

1) из неравенства $|x(t)| \leqslant |y(t)|$ на $\mathbb{R}_+$ и $y \in \widetilde{X}$ следует, что $x \in \widetilde{X}$ и $\|x\|_{\widetilde{X}} \leqslant \|y\|_{\widetilde{X}}$;

2) из равноизмеримости $|x|$, $|y|$ и $x \in \widetilde{X}$ следует, что $y \in \widetilde{X}$ и $\|x\|_{\widetilde{X}} = \|y\|_{\widetilde{X}}$,

то $\widetilde{X}$ называется симметричным. Соответственно, банахово пространство $X \subset M(\Omega)$ называется симметричным, если существует симметричное пространство $\widetilde{X}$ на $\mathbb{R}_+$, такое что для любого $f \in X$ верно равенство $\|f\|_X = \|f^*\|_{\widetilde{X}}$.

Определим оператор растяжения равенством $(\sigma_\tau x)(t) = x(t/\tau)$ для $x \in \widetilde{X}$. Известно, что σ_τ непрерывно в симметричном пространстве $\widetilde{X}$ и что существуют величины

$$\alpha_X = \lim_{\tau\to 0+0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{\widetilde{X}\to\widetilde{X}}}{\ln \tau} = \sup_{0<\tau<1} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{\widetilde{X}\to\widetilde{X}}}{\ln \tau} \tag{1}$$

и

$$\beta_X = \lim_{\tau\to +\infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{\widetilde{X}\to\widetilde{X}}}{\ln \tau} = \inf_{1<\tau<\infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{\widetilde{X}\to\widetilde{X}}}{\ln \tau}, \tag{2}$$

называемые нижним и верхним индексами Бойда пространства X (см. монографию С. Г. Крейна, Ю. И. Петунина и Е. М. Семенова [5, гл. II, § 4, с. 134], в которой содержится развернутая теория симметричных пространств и интерполяции линейных операторов).

Если симметричное пространство X обладает также свойством Фату (т. е. условия $x_n \geqslant 0$, $x_n \uparrow x$ п. в. на Ω и $\|x_n\|_X \leqslant C < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, влекут $x \in X$ и $\|x\|_X = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_X$), то оно называется перестановочно-инвариантным банаховым функциональным пространством (r.i. BFS).

Положительная измеримая всюду конечная на $(0, +\infty)$ функция $v(t)$ называется полумультипликативной, если для $t_1, t_2 \in (0, +\infty)$ верно неравенство $v(t_1 t_2) \leqslant v(t_1) v(t_2)$. Согласно [5, гл.II, § 1, теорема 1.3] для определенной выше функции $v(t)$ существуют величины аналогичные (1) и (2):

$$\alpha(v) = \lim_{\tau\to 0+0} \frac{\ln v(t)}{\ln t} = \sup_{0<\tau<1} \frac{\ln v(t)}{\ln t},$$

$$\beta(v) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{\ln v(t)}{\ln t} = \inf_{\tau>1} \frac{\ln v(t)}{\ln t}.$$

Весовое пространство (X, v) состоит из измеримых на Ω функций f, таких что $\|f\|_{X,v} = \|f^* v\|_{\widetilde{X}} < \infty$.

Пусть $\mathscr{F} = \{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — возрастающая по вложению последовательность σ-алгебр из Σ, таких что Σ есть σ-алгебра, порожденная $\cup_{n\geqslant 0}\mathscr{F}_n$. Пусть также $\mathscr{F}_{-1} = \mathscr{F}_0$. Обозначим условное математическое ожидание по отношению к $\mathscr{F}_n$ через $\mathbb{E}_n$. Последовательность $f = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ случайных величин называется мартингалом по отношению к $\mathscr{F}$, если:

1) для всех $n \in \mathbb{Z}_+$ случайная величина f_n измерима относительно $\mathscr{F}_n$;

2) для всех $n \in \mathbb{Z}_+$ математическое ожидание f_n конечно;

3) для всех $n \in \mathbb{N}$ верно $\mathbb{E}_{n-1}(f_n) = f_{n-1}$.

Известно, что при выполнении этих условий f_n сходится почти наверное к некоторой случайной величине f_∞. Рассмотрим разности $d_i f - f_i - f_{i-1}$, $i \geqslant 0$, $f_{-1} = 0$. Введем максимальную функцию и квадратические функции (условные квадратические вариации) мартингала формулами

$$M(f) = \sup_{i\geqslant 0} |f_i|, \quad S(f) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |d_i f|^2\right)^{1/2}, \quad s(f) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}_{i-1} |d_i f|^2\right)^{1/2}.$$

Мартингал f называется равномерно интегрируемым, если

$$\lim_{y\to+\infty}\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\int_{|f_n|>y}|f_n|\,dP=0.$$

В этом случае существует $g\in L^1(\Omega)$, такая что $f_n=\mathbb{E}_n g$, $n\in\mathbb{Z}_+$. Для $r\geqslant 1$ и равномерно интегрируемого мартингала f определим следующие шарп-функции:

$$f^\sharp=\sup_{n\geqslant 0}\mathbb{E}_n|g-f_{n-1}|,\quad f_r^S=\sup_{n\geqslant 0}\left(\mathbb{E}_n\left[\sum_{i=n}^{\infty}|d_if|^2\right]^{r/2}\right)^{1/r},$$

$$f_r^s=\sup_{n\geqslant 0}\left(\mathbb{E}_n\left[\sum_{i=n}^{\infty}E_{i-1}|d_if|^2\right]^{r/2}\right)^{1/r}.$$

Будем рассматривать операторы Харди – Литтлвуда $\mathscr{B}f(x)=x^{-1}\int_0^x f(t)\,dt$ и Харди $\mathscr{H}f(x)=\int_x^\infty t^{-1}f(t)\,dt$ (такие названия используются, например, в [5, гл. 2]). Известно, что операторы $\mathscr{B}$ и $\mathscr{H}$ ограничены в $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1<p<\infty$ (см. [13, теоремы 327, 328]).

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Следующие две леммы установлены Е. А. Павловым [14].

Лемма 1. *Пусть симметричное пространство $\widetilde{X}(\mathbb{R}_+)$ и полумультипликативная функция $v(t)$ удовлетворяют условию $\beta(v)+\beta_X<1$. Тогда оператор Харди – Литтлвуда $\mathscr{B}$ ограниченно действует в $(\widetilde{X},v)$.*

Лемма 2. *Пусть симметричное пространство $\widetilde{X}(\mathbb{R}_+)$ и полумультипликативная функция $v(t)$ удовлетворяют условию $\alpha(v)+\alpha_X>0$. Тогда оператор Харди $\mathscr{H}$ ограниченно действует в $(\widetilde{X},v)$.*

Первое неравенство леммы 3 установлено Р. Лонгом [10, лемма 4], два остальных — И. Реном [11, лемма 1].

Лемма 3. *Пусть $1\leqslant r<\infty$, $f=\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ — равномерно интегрируемый мартингал, $t>0$. Тогда*

$$(M(f))^*(t)\leqslant 4(f^\sharp)^*(t/2)+(M(f))^*(2t),\tag{3}$$

$$(S(f))^*(t)\leqslant 4(f_r^S)^*(t/2)+(S(f))^*(2t),\tag{4}$$

$$(s(f))^*(t)\leqslant 4(f_r^s)^*(t/2)+(s(f))^*(2t).\tag{5}$$

Лемма 4 установлена в работе Р. Багби и Д. Куртца [15], см. также [12].

Лемма 4. *Пусть f,g измеримы на Ω и удовлетворяют неравенству $f^*(t)\leqslant$ $\leqslant f^*(2t)+Cg^*(t/2)$. Тогда*

$$f^*(t)\leqslant 2Cg^*(t/2)+C\int_t^\infty s^{-1}g^*(s)\,ds,\quad t>0.$$

Лемма 5 установлена М. Кикучи [16].

Лемма 5. *Пусть $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ — мартингал, такой что $S(f) \in L^1(\Omega)$ или $M(f) \in L^1(\Omega)$. Тогда*

$$(M(f))^*(t) \leqslant CQ[S(f)^*](t), \tag{6}$$

$$(S(f))^*(t) \leqslant CQ[M(f)^*](t), \tag{7}$$

где $Q(g)(t) = \int_t^1 u^{-1}g(u)\,du$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть $1 \leqslant r < \infty$, X — симмметричное пространство, $v(t)$ — полумультипликативная функция, такие что $\alpha_X + \alpha(v) > 0$. Для любого равномерно интегрируемого мартингала $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ справедливы неравенства*

$$\|M(f)\|_{X,v} \leqslant C\|f^\sharp\|_{X,v}, \quad \|S(f)\|_{X,v} \leqslant C\|f_r^S\|_{X,v}, \quad \|s(f)\|_{X,v} \leqslant C\|f_r^s\|_{X,v}.$$

Доказательство. Мы ограничимся доказательством первого из неравенств, два остальных показываются аналогично с использованием (4) и (5) вместо (3). В силу (3) и леммы 4 мы имеем

$$(M(f))^*(t) \leqslant 4(f^\sharp)^*(t/2) + (M(f))^*(2t) \leqslant 8(f^\sharp)^*(t/2) + 4\int_t^\infty u^{-1}(f^\sharp)^*(u)\,du.$$

Поскольку функция $(f^\sharp)^*$ не возрастает, то

$$\int_{2^k t}^{2^{k+1}t} u^{-1}(f^\sharp)^*(u)\,du \leqslant (f^\sharp)^*(2^k t)\int_{2^k t}^{2^{k+1}t} u^{-1}\,du = \ln 2 (f^\sharp)^*(2^k t)$$

и

$$(M(f))^*(t) \leqslant 8(f^\sharp)^*(t/2) + 4\sum_{k=0}^{\infty}(f^\sharp)^*(2^k t).$$

В последнем неравенстве использовано неравенство $\ln 2 \leqslant 1$.

В силу неравенства треугольника для нормы $\|\cdot\|_{\widetilde{X}}$ и условия полумультипликативности $v(t)$ получаем

$$\|M(f)\|_{X,v} = \|(M(f))^*(t)v(t)\|_{\widetilde{X}} \leqslant 8\|(f^\sharp)^*(t/2)v(2)v(t/2)\|_{\widetilde{X}} +$$
$$+4\sum_{k=0}^{\infty}\|(f^\sharp)^*(2^k t)v(2^k t)v(2^{-k})\|_{\widetilde{X}} \leqslant$$
$$\leqslant 8v(2)\|\sigma_2\|_{\widetilde{X}\to\widetilde{X}}\|(f^\sharp)^*v\|_{\widetilde{X}} + 4\sum_{k=0}^{\infty}\|(\sigma_{1/2^k}\|_{\widetilde{X}\to\widetilde{X}}v(2^{-k})\|(f^\sharp)^*v\|_{\widetilde{X}}. \tag{8}$$

По определению (см. также теорему 1.3 из [5, гл. II, § 1]) $\|\sigma_t\|_{\widetilde{X}\to\widetilde{X}} \leqslant t^{\alpha_X - \varepsilon}$ и $v(t) \leqslant t^{\alpha(v)-\varepsilon}$ при достаточно малых t, поэтому, подбирая ε так, что $\alpha_X + \alpha(v) - 2\varepsilon > 0$, мы получаем сходимость ряда из правой части (8). В итоге $\|M(f)\|_{X,v} \leqslant C_1\|f^\sharp\|_{X,v}$, где C_1 зависит от v и $\widetilde{X}$. Теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть X — симметричное пространство, $v(t)$ — полумультипликативная функция, такие что $0 < \alpha_X + \alpha(v) \leqslant \beta_X + \beta(v) < 1$. Тогда существуют константы $C_2 > C_1 > 0$, такие что для любого равномерно интегрируемого мартингала $f = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ справедливо неравенство Буркхольдера – Ганди – Дэвиса*

$$C_1\|M(f)\|_{X,v} \leqslant \|S(f)\|_{X,v} \leqslant C_2\|M(f)\|_{X,v}.$$

Доказательство. Интегрируя неравенство (6), получаем

$$\int_0^t (M(f))^*(u)\,du \leqslant C_1 \int_0^t Q[S(f)^*](u)\,du. \tag{9}$$

С другой стороны, так как $(M(f))^*$ не возрастает, то также в силу (6) и (9)

$$(M(f))^*(t) \leqslant t^{-1}\int_0^t (M(f))^*(u)\,du \leqslant C_1 t^{-1}\int_0^t Q[S(f)^*](u)\,du = C_1\mathscr{B}Q[S(f)^*](t),$$

где $\mathscr{B}$ — оператор Харди – Литтлвуда. Но для $g \in L^1[0,1]$ справедливо тождество

$$\mathscr{B}Q(g)(t) = t^{-1}\int_0^t\int_u^1 s^{-1}g(s)\,ds\,du = \int_0^t\int_u^t (ts)^{-1}g(s)\,ds\,du + \int_0^t\int_t^1 (ts)^{-1}g(s)\,ds\,du =$$
$$= \int_0^t\int_0^s (ts)^{-1}g(s)\,du\,ds + \int_0^t t^{-1}\,du\int_t^1 s^{-1}g(s)\,ds = \mathscr{B}(g)(t) + Q(g)(t).$$

Поэтому

$$(M(f))^*(t) \leqslant C_1(\mathscr{B}[(S(f))^*](t) + Q[(S(f))^*](t)). \tag{10}$$

Благодаря лемме 1 мы имеем

$$\|\mathscr{B}[(S(f))^*]v\|_{\widetilde{X}} \leqslant C_2\|[(S(f))^*]v\|_{\widetilde{X}} = C_2\|S(f)\|_{X,v}.$$

Так как для неотрицательной функции $g(t)$ верно неравенство $Q(g)(t) \leqslant \mathscr{H}(g)(t)$, по лемме 2 мы находим, что $\|Q[(S(f))^*]v\|_{\widetilde{X}} \leqslant C_3\|S(f)\|_{X,v}$. Из неравенства (10) мы выводим, что

$$\|M(f)\|_{X,v} = \|(M(f))^*v\|_{\widetilde{X}} \leqslant C_1(C_2 + C_3)\|S(f)\|_{X,v}.$$

Обратное утверждение доказывается аналогично с помощью неравенства (7). Теорема доказана. □

Библиографический список

1. *Burkholder D.* Distribution function inequalities for martingales // Ann. of Probab. 1973. Vol. 1, № 1. P. 19–42. DOI: https://doi.org/10.1214/aop/1176997023
2. *Burkholder D., Davis B. J., Gundy R. F.* Integral inequalities for convex functions of operators on martingales // Proc. Sixth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. Univ. of Calif. Press, 1972. Vol. 2. P. 223–240.
3. *Johnson W., Schechtman G.* Martingale inequalities in rearrangement invariant function space // Israel J. Math. 1988. Vol. 64, № 3. P. 267—275. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02882423
4. *Новиков И. Я.* Мартингальные неравенства в симметричных пространствах // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34, № 1. С. 113–120.
5. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М. : Наука, 1978. 400 с.
6. *Kikuchi M.* Averaging Operators and Martingale Inequalities in Rearrangement Invariant Function Spaces // Canad. Math. Bull. 1999. Vol. 42, iss. 3. P. 321–334. DOI: https://doi.org/10.4153/CMB-1999-038-7
7. *Fefferman C., Stein E.* H^p spaces of several variables // Acta. Math. 1972. Vol. 129, P. 137–193. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02392215
8. *Garsia A. M.* Martingale inequalities. N. Y. : Benjamin Inc., 1973. 184 p.

9. *Weisz F.* Martingale Hardy spaces and their Applications in Fourier Analysis. Lecture Notes in Maths. Vol. 1568. Berlin : Springer-Verlag, 1994. 220 p. DOI: https://doi.org/10.1007/BFb0073448
10. *Long R. L.* Rearrangement techniques in martingale setting // Illinois J. Math. 1991. Vol. 35, № 3. P. 506–521.
11. *Ren Y.* A note on some inequalities of martingale sharp functions // Math. Inequal. Appl. 2013. Vol. 16, № 1. P. 153–157. DOI: https://doi.org/10.7153/mia-16-11
12. *Ho K. P.* Martingale inequalities on rearrangement-invariant quasi-Banach function spaces // Acta Sci. Math. (Szeged). 2017. Vol. 83, № 3–4. P. 619–627. DOI: https://doi.org/10.14232/actasm-012-817-9
13. *Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. М. : Изд-во иностр. лит., 1948. 456 с.
14. *Павлов Е. А.* Некоторые свойства оператора Харди – Литтлвуда // Матем. заметки. 1979. Т. 260, № 6. С. 909–912.
15. *Bagby R., Kurtz D.* A rearranged good λ-inequality // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. Vol. 293, № 1. P. 71–81. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1986-0814913-7
16. *Kikuchi M.* On the Davis inequality in Banach function spaces // Math. Nachrichten. 2008. Vol. 281, № 5. P. 697–709. DOI: https://doi.org/10.1002/mana.200510635

Образец для цитирования:
Волосивец С. С., Зайцев Н. Н. Мартингальные неравенства в симметричных пространствах с полумультипликативным весом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 2. С. 126–133. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-126-133

Martingale Inequalities in Symmetric Spaces with Semimultiplicative Weight

S. S. Volosivets, N. N. Zaitsev

Sergey S. Volosivets, https://orcid.org/0000-0001-6870-0597, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, VolosivetsSS@mail.ru

Nikolai N. Zaitsev, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, zaic.nick@gmail.com

Let (Ω, Σ, P) be a complete probability space, $\mathscr{F} = \{\mathscr{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ be an increasing sequence of σ-algebras such that $\cup_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n$ generates Σ. If $f = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ is a martingale with respect to $\mathscr{F}$ and $\mathbb{E}_n$ is the conditional expectation with respect to $\mathscr{F}_n$, then one can introduce a maximal function $M(f) = \sup_{n\geqslant 0}|f_n|$ and a square function $S(f) = \left(\sum\limits_{i=0}^{\infty}|f_i - f_{i-1}|^2\right)^{1/2}$, $f_{-1} = 0$. In the case of uniformly integrable martingales there exists $g \in L^1(\Omega)$ such that $\mathbb{E}_n g = f_n$ and we consider a sharp maximal function $f^\sharp = \sup_{n\geqslant 0}\mathbb{E}_n|g - f_{n-1}|$. The result of Burkholder – Davis – Gundy is that $C_1\|M(f)\|_p \leqslant \|S(f)\|_p \leqslant C_2\|M(f)\|$ for $1 < p < \infty$, where $\|\cdot\|_p$ is the norm in $L^p(\Omega)$ and $C_2 > C_1 > 0$. We call the inequality of type $\|M(f)\|_p \leqslant C\|f^\sharp\|_p$, $1 < p < \infty$ Fefferman – Stein inequality. It is known that Burkholder – Davis – Gundy martingale inequality is valid in rearrangement invariant Banach function spaces with non-trivial Boyd indices. We prove this inequality in a more wide class of symmetric spaces (the last notion is defined as in the famous monograph by S. G. Krein, Yu. I. Petunin and E. M. Semenov) with semimultiplicative weight. Also, the Fefferman – Stein type inequalities of sharp maximal function and sharp square functions are obtained in this class of symmetric spaces.

Keywords: martingale, maximal function, maximal sharp function, square function of martingale, Burkholder – Davis – Gundy inequality, semimultiplicative function.

Received: 20.04.2018 / Accepted: 04.02.2019 / Published online: 28.05.2019

References

1. Burkholder D. Distribution function inequalities for martingales. *Ann. of Probab.*, 1973, vol. 1, no. 1, pp. 19–42. DOI: https:/doi.org/10.1214/aop/1176997023
2. Burkholder D., Davis B. J., Gundy R. F. Integral inequalities for convex functions of operators on martingales. *Proc. Sixth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob.* Univ. of Calif. Press, 1972. Vol. 2, pp. 223–240.
3. Johnson W., Schechtman G. Martingale inequalities in rearrangement invariant function space. *Israel J. Math.*, 1988, vol. 64, no. 3, pp. 267–275. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02882423
4. Novikov I. Ya. Martingale inequalities in rearrangement invariant spaces. *Siberian Math. J.*, 1993, vol. 34, no. 1, pp. 99–105. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00971245
5. Krein S. G., Petunin Yu. I., Semenov E. M. *Interpolation of linear operators*. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1982. 375 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1978. 400 p.).
6. Kikuchi M. Averaging Operators and Martingale Inequalities in Rearrangement Invariant Function Spaces. *Canad. Math. Bull.*, 1999, vol. 42, iss. 3, pp. 321–334. DOI: https://doi.org/10.4153/CMB-1999-038-7
7. Fefferman C., Stein E. H^p spaces of several variables. *Acta. Math.*, 1972, vol. 129, pp. 137–193. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02392215
8. Garsia A. M. *Martingale inequalities*. New York, Benjamin Inc., 1973. 184 p.
9. Weisz F. *Martingale Hardy spaces and their Applications in Fourier Analysis*. Lecture Notes in Maths. Vol. 1568. Berlin, Springer-Verlag, 1994. 220 p. DOI: https://doi.org/10.1007/BFb0073448
10. Long R. L. Rearrangement techniques in martingale setting. *Illinois J. Math.*, 1991, vol. 35, no. 3, pp. 506–521.
11. Ren Y. A note on some inequalities of martingale sharp functions. *Math. Inequal. Appl.*, 2013, vol. 16, no. 1, pp. 153–157. DOI: https://doi.org/10.7153/mia-16-11
12. Ho K. P. Martingale inequalities on rearrangement-invariant quasi-Banach function spaces. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 2017, vol. 83, no. 3–4, pp. 619–627. DOI: https://doi.org/10.14232/actasm-012-817-9
13. Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G. *Inequalities*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1934. 328 p. (Russ. ed.: Moscow, Izd-vo inostr. lit., 1948. 456 p.)
14. Pavlov E. A. Some properties of Hardy – Littlewood operator. *Math. Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1979, vol. 26, iss. 6, pp. 958–960. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01142082
15. Bagby R., Kurtz D. A rearranged good λ-inequality. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1986, vol. 293, no. 1, pp. 71–81. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1986-0814913-7
16. Kikuchi M. On the Davis inequality in Banach function spaces. *Math. Nachrichten*, 2008, vol. 281, no. 5, pp. 697–709. DOI: https:/doi.org/10.1002/mana.200510635

Cite this article as:
Volosivets S. S., Zaitsev N. N. Martingale Inequalities in Symmetric Spaces with Semimultiplicative Weight. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 2, pp. 126–133 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-126-133