

ISSN 1816-9791 (Print)
ISSN 2541-9005 (Online)

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия



Серия Математика. Механика. Информатика

2019

Том 19

Выпуск 2



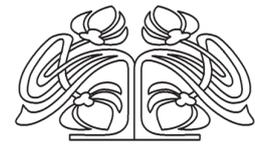
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 2

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал
2019 Том 19
ISSN 1816-9791 (Print)
ISSN 2541-9005 (Online)
Издается с 2005 года

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

Волосивец С. С., Зайцев Н. Н.

Мартингалные неравенства в симметричных пространствах с полумультимпликативным весом 126

Рыхлов В. С.

О кратной полноте корневых функций пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и распадающимися краевыми условиями 134

Струков В. Е., Струкова И. И.

Гармонический анализ медленно меняющихся на бесконечности полугрупп операторов 152

Хачатрян Х. А.

О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на прямой 164

Механика

Снигерев Б. А.

Влияние пузырьков на структуру течения и трение в восходящем турбулентном газожидкостном потоке 182

Информатика

Богомолов А. С.

Предотвращение аварийных комбинаций событий при управлении человеко-машинными системами 196

Иванов В. М.

Оценка качества нестационарных систем на плоскости обратной частотной характеристики 207

Kim R. P., Romanchuk S. P., Terin D. V., Korchagin S. A.

The Use of a Genetic Algorithm in Modeling the Electrophysical Properties of a Layered Nanocomposite

[Ким Р. П., Романчук С. П., Терин Д. В., Корчагин С. А.]

Использование генетического алгоритма в задачах моделирования электрофизических свойств слоистого нанокompозита] 217

Solovyev V. M., Belousov A. A.

Administration of Virtual Data Processing Center over OpenFlow [Соловьев В. М., Белоусов А. А. Управление виртуальным центром обработки данных по протоколу OpenFlow] 226

Сперанский Д. В.

Тестирование нечетких линейных автоматов 233

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (специальности: 01.01.01; 01.01.02; 01.01.06; 01.01.07; 01.01.09; 01.02.04; 01.02.05; 01.02.06; 01.02.08; 05.13.01; 05.13.18).
Журнал входит в международные базы данных Emerging Sources Citation Index, MathSciNet, zbMATH

Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-56162 от 15 ноября 2013 года

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год

Директор издательства
Бучко Ирина Юрьевна

Редактор
Садыкова Марина Владимировна

Художник
Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист
Кочкаева Инна Анатольевна

Верстка
Степанова Наталия Ивановна

Технический редактор
Каргин Игорь Анатольевич

Корректор
Кочкаева Инна Анатольевна

Адрес учредителя, издателя и издательства:
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел.: +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89
E-mail: izvestiya@info.sgu.ru

Подписано в печать 28.05.19.
Формат 60x84 1/8.
Усл. печ. л. 13,95(15,0).
Тираж 500 экз. Заказ 62-Т.

Отпечатано в типографии Саратовского университета.
Адрес типографии:
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2019



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <http://mmi.sgu.ru/ru/dlya-avtorov>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования в журнале. В случае положительного решения об опубликовании статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <http://mmi.sgu.ru>.

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mmi@info.sgu.ru

Website: <http://mmi.sgu.ru/>

Ответственный секретарь серии:

Шевцова Юлия Владиславовна

CONTENTS

Scientific Part

Mathematics

Volosivets S. S., Zaitsev N. N.
Martingale Inequalities in Symmetric Spaces
with Semimultiplicative Weight 126

Rykhlov V. S.
Multiple Completeness of the Root Functions of the Pencils
of Differential Operators with Constant Coefficients
and Splitting Boundary Conditions 134

Strukov V. E., Strukova I. I.
Harmonic Analysis of Operator Semigroups Slowly Varying at Infinity 152

Khachatryan Kh. A.
The Solvability of a System of Nonlinear
Integral Equations of Hammerstein Type on the Whole Line 164

Mechanics

Snigerev B. A.
The Effect of Bubbles on the Structure of Flow
and the Friction in Upward Turbulent Gas-Liquid Flow 182

Computer Sciences

Bogomolov A. S.
Prevention of Accidental Combinations of Events
in the Control of Human-Machine Systems 196

Ivanov V. M.
Estimation of Quality of Non-Stationary Systems
on the Return Frequency Characteristic Plane 207

Kim R. P., Romanchuk S. P., Terin D. V., Korchagin S. A.
The Use of a Genetic Algorithm in Modeling the Electrophysical
Properties of a Layered Nanocomposite 217

Solov'yev V. M., Belousov A. A.
Administration of Virtual Data Processing Center over OpenFlow 226

Speranskiy D. V.
Fuzzy Linear Automata Testing 233



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

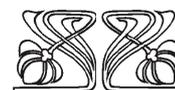
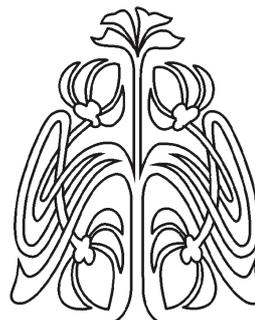
Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)
Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)
Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Омск, Россия)
Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)
Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)
Индейцев Дмитрий Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Санкт-Петербург, Россия)
Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)
Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)
Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Республика Беларусь)
Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)
Матвеев Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)
Морозов Никита Фёдорович, доктор физ.-мат. наук, акад. РАН (Санкт-Петербург, Россия)
Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)
Пархоменко Павел Павлович, доктор техн. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)
Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук (Долгопрудный, Московская обл., Россия)
Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)
Рацеев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ульяновск, Россия)
Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)
Роджерсон Грэм, Ph.D., профессор (Киль, Великобритания)
Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Саратов, Россия)
Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)
Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Республика Беларусь)
Субботин Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Екатеринбург, Россия)
Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)
Шалыто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)
Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)
Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)
Янг Чуань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)



**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES.
SERIES: MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»**

Editor-in-Chief – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

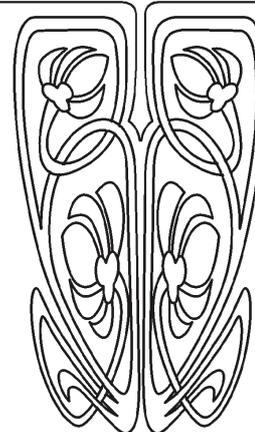
Deputy Editor-in-Chief – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)	Alexander F. Rezhnikov (Saratov, Russia)
Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)	Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)
Dmitry A. Indeitsev (St. Petersburg, Russia)	Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)
Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)	Shoji IMATANI (Kyoto, Japan)
August P. Khromov (Saratov, Russia)	Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny, Moscow region, Russia)
Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)	Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)
Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)	Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)
Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)	Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)
Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)	Yurii N. Subbotin (Ekaterinburg, Russia)
Nikita F. Morozov (St. Petersburg, Russia)	Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)
Semen R. Nasyrov (Kazan', Russia)	Vjacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)
Pavel P. Parkhomenko (Moscow, Russia)	Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)
Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)	Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)
Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)	

**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**





МАТЕМАТИКА

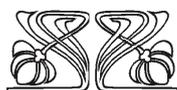
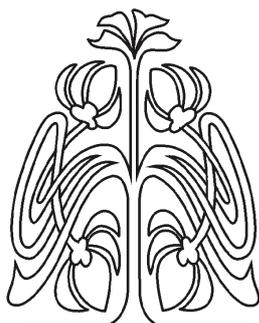
УДК 519.216.8

Мартингалные неравенства в симметричных пространствах с полумультипликативным весом

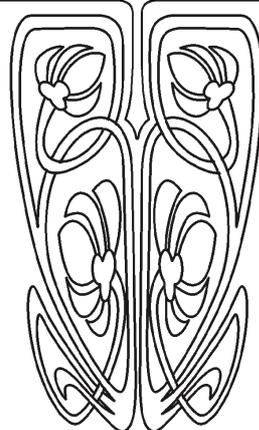
С. С. Волосивец, Н. Н. Зайцев

Волосивец Сергей Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и стохастического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83, VolosivetsSS@mail.ru

Зайцев Николай Николаевич, магистрант кафедры теории функций и стохастического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83, zaic.nick@gmail.com



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ



Пусть (Ω, Σ, P) является полным вероятностным пространством, $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ — возрастающая последовательность σ -алгебр, такая что $\cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$ порождает Σ . Если $f = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ является мартингалом по отношению к \mathcal{F} и \mathbb{E}_n — условное (математическое) ожидание по отношению к \mathcal{F}_n , то можно ввести максимальную функцию $M(f) = \sup_{n \geq 0} |f_n|$ и квадратичную функцию $S(f) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |f_i - f_{i-1}|^2 \right)^{1/2}$, $f_{-1} = 0$. В случае равномерно интегрируемых мартингалов существует $g \in L^1(\Omega)$, такая что $\mathbb{E}_n g = f_n$, и мы рассматриваем максимальную шарп-функцию $f^\# = \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}_n |g - f_{n-1}|$. Результат Буркхольдера–Ганди–Дэвиса состоит в том, что $C_1 \|M(f)\|_p \leq \|S(f)\|_p \leq C_2 \|M(f)\|_p$ при $1 < p < \infty$, где $\|\cdot\|_p$ — норма в $L^p(\Omega)$ и $C_2 > C_1 > 0$. Мы называем неравенство типа $\|M(f)\|_p \leq C \|f^\#\|_p$, $1 < p < \infty$, неравенством Фейффермана–Стейна. Известно, что мартингалное неравенство Буркхольдера–Ганди–Дэвиса справедливо в перестановочно-инвариантных банаховых функциональных пространствах с нетривиальными индексами Бойда. Мы доказываем это неравенство в более широком классе симметрических пространств (это понятие определяется как в известной монографии С. Г. Крейна, Ю. И. Петунина и Е. М. Семенова) с полумультипликативным весом. Также в этом же классе симметричных пространств получены неравенства типа Фейффермана–Стейна, использующие максимальную шарп-функцию и квадратичные шарп-функции.



Ключевые слова: мартингал, максимальная функция, максимальная шарп-функция, квадратичная функция мартингала, неравенство Буркхольдера – Ганди – Дэвиса, полумультимпликативная функция.

Поступила в редакцию: 20.04.2018 / Принята: 04.02.2019 / Опубликовано онлайн: 28.05.2019

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-126-133>

ВВЕДЕНИЕ

В теории мартингалов хорошо известны неравенства Буркхольдера – Ганди – Дэвиса, согласно которым L^p -норма максимальной функции мартингала слабо эквивалентна L^p -норме квадратичной вариации мартингала при $1 < p < \infty$ (см. [1]). Этот результат был перенесен указанными авторами [2] на случай пространств Орлича $L_\Phi[0, 1]$, где выпуклая четная функция Φ , помимо стандартных требований $\lim_{x \rightarrow 0+0} \Phi(x)/x = 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x)/x = +\infty$, удовлетворяет также Δ_2 -условию $\Phi(2t) \leq C\Phi(t)$, $t > 0$. Для перестановочно-инвариантных банаховых функциональных пространств (r.i. BFS, точное определение см. ниже) с положительным нижним индексом Бойда аналогичный результат был получен У. Джонсоном и Г. Шехтманом [3]. В работе И. Я. Новикова [4] аналог неравенства Буркхольдера – Ганди – Дэвиса был получен для симметричных пространств со свойством $\|\sigma_\tau\|_{\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}} = o(1)$, $\tau \rightarrow 0+0$ (см. следующий параграф). Более того, в [3] и [4] установлена эквивалентность выполнения неравенства Буркхольдера – Ганди – Дэвиса в пространстве и соответствующих условий на пространство. Из результатов [5, гл. 2, §§ 1, 4] вытекает, что условия У. Джонсона – Г. Шехтмана и И. Я. Новикова равносильны, а согласно ссылке [6] в [4] результаты И. Я. Новикова были доложены в 1988 году. М. Кикучи [6] установил эквивалентность условий ограниченности операторов Харди и Харди – Литтлвуда в перестановочно-инвариантных пространствах и условий выполнения некоторых мартингальных неравенств.

Мартингальный аналог известной теоремы Ч. Феффермана – И. Стейна [7] об оценке L^p -нормы максимальной функции через L^p -норму шарп-функции был установлен А. Гарсиа [8]. Более общий результат этого типа см. [9, гл. 2, теорема 2.5.3.] В последней монографии Ф. Вейца подробно изучаются свойства мартингалов и мартингальных пространств с разных точек зрения. Для пространств Орлича аналог теоремы Ч. Феффермана – И. Стейна был получен Р. Лонгом [10], а для пространств Лоренца близкие результаты доказаны И. Реном [11].

Для так называемых перестановочно-инвариантных квази-банаховых функциональных пространств аналоги неравенств Буркхольдера – Ганди – Дэвиса и Ч. Феффермана – И. Стейна были установлены К. Хо [12]. Развивая идеи Р. Лонга [10] и М. Кикучи [6], К. Хо активно использовал операторы Харди – Литтлвуда и Харди в доказательствах.

Целью настоящей работы является нахождение условий выполнения аналогов обсуждаемых выше неравенств Буркхольдера – Ганди – Дэвиса и Ч. Феффермана – И. Стейна в симметричных пространствах с полумультимпликативными весами, куда входят, например, степенные веса.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть (Ω, Σ, P) — полное вероятностное пространство, $M(\Omega)$ — множество измеримых на Ω относительно P функций. Для $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ функцией распределения назовем $P_f(\lambda) = P\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\}$, невозрастающая перестановка функции f задается равенством $f^*(t) = \inf\{\lambda : P_f(\lambda) \leq t\}$, $t > 0$.

Если $\tilde{X} = \tilde{X}(\mathbb{R}_+)$ — банахово пространство измеримых функций на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$



(т.е. $\tilde{X} \subset M(\mathbb{R}_+)$), такое что для $x, y \in M(\mathbb{R}_+)$ выполняется следующее:

1) из неравенства $|x(t)| \leq |y(t)|$ на \mathbb{R}_+ и $y \in \tilde{X}$ следует, что $x \in \tilde{X}$ и $\|x\|_{\tilde{X}} \leq \|y\|_{\tilde{X}}$;

2) из равноизмеримости $|x|, |y|$ и $x \in \tilde{X}$ следует, что $y \in \tilde{X}$ и $\|x\|_{\tilde{X}} = \|y\|_{\tilde{X}}$,

то \tilde{X} называется симметричным. Соответственно, банахово пространство $X \subset M(\Omega)$ называется симметричным, если существует симметричное пространство \tilde{X} на \mathbb{R}_+ , такое что для любого $f \in X$ верно равенство $\|f\|_X = \|f^*\|_{\tilde{X}}$.

Определим оператор растяжения равенством $(\sigma_\tau x)(t) = x(t/\tau)$ для $x \in \tilde{X}$. Известно, что σ_τ непрерывно в симметричном пространстве \tilde{X} и что существуют величины

$$\alpha_X = \lim_{\tau \rightarrow 0+0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}}}{\ln \tau} = \sup_{0 < \tau < 1} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}}}{\ln \tau} \quad (1)$$

и

$$\beta_X = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}}}{\ln \tau} = \inf_{1 < \tau < \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}}}{\ln \tau}, \quad (2)$$

называемые нижним и верхним индексами Бойда пространства X (см. монографию С. Г. Крейна, Ю. И. Петунина и Е. М. Семенова [5, гл. II, § 4, с. 134], в которой содержится развернутая теория симметричных пространств и интерполяции линейных операторов).

Если симметричное пространство X обладает также свойством Фату (т.е. условия $x_n \geq 0, x_n \uparrow x$ п.в. на Ω и $\|x_n\|_X \leq C < \infty, n \in \mathbb{N}$, влекут $x \in X$ и $\|x\|_X = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X$), то оно называется перестановочно-инвариантным банаховым функциональным пространством (г.и. BFS).

Положительная измеримая всюду конечная на $(0, +\infty)$ функция $v(t)$ называется полумультимпликативной, если для $t_1, t_2 \in (0, +\infty)$ верно неравенство $v(t_1 t_2) \leq v(t_1) v(t_2)$. Согласно [5, гл. II, § 1, теорема 1.3] для определенной выше функции $v(t)$ существуют величины аналогичные (1) и (2):

$$\alpha(v) = \lim_{\tau \rightarrow 0+0} \frac{\ln v(t)}{\ln t} = \sup_{0 < \tau < 1} \frac{\ln v(t)}{\ln t},$$

$$\beta(v) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\ln v(t)}{\ln t} = \inf_{\tau > 1} \frac{\ln v(t)}{\ln t}.$$

Весовое пространство (X, v) состоит из измеримых на Ω функций f , таких что $\|f\|_{X,v} = \|f^* v\|_{\tilde{X}} < \infty$.

Пусть $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ — возрастающая по вложению последовательность σ -алгебр из Σ , таких что Σ есть σ -алгебра, порожденная $\cup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$. Пусть также $\mathcal{F}_{-1} = \mathcal{F}_0$. Обозначим условное математическое ожидание по отношению к \mathcal{F}_n через \mathbb{E}_n . Последовательность $f = \{f_n\}_{n=0}^\infty$ случайных величин называется мартингалом по отношению к \mathcal{F} , если:

- 1) для всех $n \in \mathbb{Z}_+$ случайная величина f_n измерима относительно \mathcal{F}_n ;
- 2) для всех $n \in \mathbb{Z}_+$ математическое ожидание f_n конечно;
- 3) для всех $n \in \mathbb{N}$ верно $\mathbb{E}_{n-1}(f_n) = f_{n-1}$.

Известно, что при выполнении этих условий f_n сходится почти наверное к некоторой случайной величине f_∞ . Рассмотрим разности $d_i f = f_i - f_{i-1}, i \geq 0, f_{-1} = 0$. Введем максимальную функцию и квадратические функции (условные квадратические вариации) мартингала формулами

$$M(f) = \sup_{i \geq 0} |f_i|, \quad S(f) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |d_i f|^2 \right)^{1/2}, \quad s(f) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}_{i-1} |d_i f|^2 \right)^{1/2}.$$



Мартингал f называется равномерно интегрируемым, если

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \int_{|f_n| > y} |f_n| dP = 0.$$

В этом случае существует $g \in L^1(\Omega)$, такая что $f_n = \mathbb{E}_n g$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Для $r \geq 1$ и равномерно интегрируемого мартингала f определим следующие шарп-функции:

$$f^\# = \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}_n |g - f_{n-1}|, \quad f_r^S = \sup_{n \geq 0} \left(\mathbb{E}_n \left[\sum_{i=n}^{\infty} |d_i f|^2 \right]^{r/2} \right)^{1/r},$$

$$f_r^s = \sup_{n \geq 0} \left(\mathbb{E}_n \left[\sum_{i=n}^{\infty} E_{i-1} |d_i f|^2 \right]^{r/2} \right)^{1/r}.$$

Будем рассматривать операторы Харди – Литтлвуда $\mathcal{B}f(x) = x^{-1} \int_0^x f(t) dt$ и Харди $\mathcal{H}f(x) = \int_x^\infty t^{-1} f(t) dt$ (такие названия используются, например, в [5, гл. 2]). Известно, что операторы \mathcal{B} и \mathcal{H} ограничены в $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$ (см. [13, теоремы 327, 328]).

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Следующие две леммы установлены Е. А. Павловым [14].

Лемма 1. Пусть симметричное пространство $\tilde{X}(\mathbb{R}_+)$ и полумультимпликативная функция $v(t)$ удовлетворяют условию $\beta(v) + \beta_X < 1$. Тогда оператор Харди – Литтлвуда \mathcal{B} ограниченно действует в (\tilde{X}, v) .

Лемма 2. Пусть симметричное пространство $\tilde{X}(\mathbb{R}_+)$ и полумультимпликативная функция $v(t)$ удовлетворяют условию $\alpha(v) + \alpha_X > 0$. Тогда оператор Харди \mathcal{H} ограниченно действует в (\tilde{X}, v) .

Первое неравенство леммы 3 установлено Р. Лонгом [10, лемма 4], два остальных — И. Реном [11, лемма 1].

Лемма 3. Пусть $1 \leq r < \infty$, $f = \{f_n\}_{n \geq 0}$ — равномерно интегрируемый мартингал, $t > 0$. Тогда

$$(M(f))^*(t) \leq 4(f^\#)^*(t/2) + (M(f))^*(2t), \tag{3}$$

$$(S(f))^*(t) \leq 4(f_r^S)^*(t/2) + (S(f))^*(2t), \tag{4}$$

$$(s(f))^*(t) \leq 4(f_r^s)^*(t/2) + (s(f))^*(2t). \tag{5}$$

Лемма 4 установлена в работе Р. Багби и Д. Куртца [15], см. также [12].

Лемма 4. Пусть f, g измеримы на Ω и удовлетворяют неравенству $f^*(t) \leq f^*(2t) + Cg^*(t/2)$. Тогда

$$f^*(t) \leq 2Cg^*(t/2) + C \int_t^\infty s^{-1} g^*(s) ds, \quad t > 0.$$

Лемма 5 установлена М. Кикучи [16].



Лемма 5. Пусть $f = \{f_n\}_{n \geq 0}$ — мартингал, такой что $S(f) \in L^1(\Omega)$ или $M(f) \in L^1(\Omega)$. Тогда

$$(M(f))^*(t) \leq CQ[S(f)^*](t), \tag{6}$$

$$(S(f))^*(t) \leq CQ[M(f)^*](t), \tag{7}$$

где $Q(g)(t) = \int_t^1 u^{-1}g(u) du$, $0 \leq t \leq 1$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть $1 \leq r < \infty$, X — симметричное пространство, $v(t)$ — полумультипликативная функция, такие что $\alpha_X + \alpha(v) > 0$. Для любого равномерно интегрируемого мартингала $f = \{f_n\}_{n \geq 0}$ справедливы неравенства

$$\|M(f)\|_{X,v} \leq C\|f^\# \|_{X,v}, \quad \|S(f)\|_{X,v} \leq C\|f_r^S\|_{X,v}, \quad \|s(f)\|_{X,v} \leq C\|f_r^s\|_{X,v}.$$

Доказательство. Мы ограничимся доказательством первого из неравенств, два остальных показываются аналогично с использованием (4) и (5) вместо (3). В силу (3) и леммы 4 мы имеем

$$(M(f))^*(t) \leq 4(f^\#)^*(t/2) + (M(f))^*(2t) \leq 8(f^\#)^*(t/2) + 4 \int_t^\infty u^{-1}(f^\#)^*(u) du.$$

Поскольку функция $(f^\#)^*$ не возрастает, то

$$\int_{2^k t}^{2^{k+1}t} u^{-1}(f^\#)^*(u) du \leq (f^\#)^*(2^k t) \int_{2^k t}^{2^{k+1}t} u^{-1} du = \ln 2 (f^\#)^*(2^k t)$$

и

$$(M(f))^*(t) \leq 8(f^\#)^*(t/2) + 4 \sum_{k=0}^\infty (f^\#)^*(2^k t).$$

В последнем неравенстве использовано неравенство $\ln 2 \leq 1$.

В силу неравенства треугольника для нормы $\|\cdot\|_{\tilde{X}}$ и условия полумультипликативности $v(t)$ получаем

$$\begin{aligned} \|M(f)\|_{X,v} &= \|(M(f))^*(t)v(t)\|_{\tilde{X}} \leq 8\|(f^\#)^*(t/2)v(2)v(t/2)\|_{\tilde{X}} + \\ &+ 4 \sum_{k=0}^\infty \|(f^\#)^*(2^k t)v(2^k t)v(2^{-k})\|_{\tilde{X}} \leq \\ &\leq 8v(2)\|\sigma_2\|_{\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}}\|(f^\#)^*v\|_{\tilde{X}} + 4 \sum_{k=0}^\infty \|(\sigma_{1/2^k}\|_{\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}}v(2^{-k})\|(f^\#)^*v\|_{\tilde{X}}. \end{aligned} \tag{8}$$

По определению (см. также теорему 1.3 из [5, гл. II, § 1]) $\|\sigma_t\|_{\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}} \leq t^{\alpha_X - \varepsilon}$ и $v(t) \leq t^{\alpha(v) - \varepsilon}$ при достаточно малых t , поэтому, подбирая ε так, что $\alpha_X + \alpha(v) - 2\varepsilon > 0$, мы получаем сходимость ряда из правой части (8). В итоге $\|M(f)\|_{X,v} \leq C_1\|f^\# \|_{X,v}$, где C_1 зависит от v и \tilde{X} . Теорема доказана. \square

Теорема 2. Пусть X — симметричное пространство, $v(t)$ — полумультипликативная функция, такие что $0 < \alpha_X + \alpha(v) \leq \beta_X + \beta(v) < 1$. Тогда существуют константы $C_2 > C_1 > 0$, такие что для любого равномерно интегрируемого мартингала $f = \{f_n\}_{n \geq 0}$ справедливо неравенство Буркхольдера – Ганди – Дэвиса

$$C_1\|M(f)\|_{X,v} \leq \|S(f)\|_{X,v} \leq C_2\|M(f)\|_{X,v}.$$



Доказательство. Интегрируя неравенство (6), получаем

$$\int_0^t (M(f))^*(u) du \leq C_1 \int_0^t Q[S(f)^*](u) du. \quad (9)$$

С другой стороны, так как $(M(f))^*$ не возрастает, то также в силу (6) и (9)

$$(M(f))^*(t) \leq t^{-1} \int_0^t (M(f))^*(u) du \leq C_1 t^{-1} \int_0^t Q[S(f)^*](u) du = C_1 \mathcal{B}Q[S(f)^*](t),$$

где \mathcal{B} — оператор Харди – Литтлвуда. Но для $g \in L^1[0, 1]$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} \mathcal{B}Q(g)(t) &= t^{-1} \int_0^t \int_u^1 s^{-1} g(s) ds du = \int_0^t \int_u^t (ts)^{-1} g(s) ds du + \int_0^t \int_t^1 (ts)^{-1} g(s) ds du = \\ &= \int_0^t \int_0^s (ts)^{-1} g(s) du ds + \int_0^t t^{-1} du \int_t^1 s^{-1} g(s) ds = \mathcal{B}(g)(t) + Q(g)(t). \end{aligned}$$

Поэтому

$$(M(f))^*(t) \leq C_1 (\mathcal{B}[(S(f))^*](t) + Q[(S(f))^*](t)). \quad (10)$$

Благодаря лемме 1 мы имеем

$$\|\mathcal{B}[(S(f))^*]v\|_{\tilde{X}} \leq C_2 \|[(S(f))^*]v\|_{\tilde{X}} = C_2 \|S(f)\|_{X,v}.$$

Так как для неотрицательной функции $g(t)$ верно неравенство $Q(g)(t) \leq \mathcal{H}(g)(t)$, по лемме 2 мы находим, что $\|Q[(S(f))^*]v\|_{\tilde{X}} \leq C_3 \|S(f)\|_{X,v}$. Из неравенства (10) мы выводим, что

$$\|M(f)\|_{X,v} = \|(M(f))^*v\|_{\tilde{X}} \leq C_1 (C_2 + C_3) \|S(f)\|_{X,v}.$$

Обратное утверждение доказывается аналогично с помощью неравенства (7). Теорема доказана. \square

Библиографический список

1. *Burkholder D.* Distribution function inequalities for martingales // Ann. of Probab. 1973. Vol. 1, № 1. P. 19–42. DOI: <https://doi.org/10.1214/aop/1176997023>
2. *Burkholder D., Davis B. J., Gundy R. F.* Integral inequalities for convex functions of operators on martingales // Proc. Sixth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. Univ. of Calif. Press, 1972. Vol. 2. P. 223–240.
3. *Johnson W., Schechtman G.* Martingale inequalities in rearrangement invariant function space // Israel J. Math. 1988. Vol. 64, № 3. P. 267–275. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02882423>
4. *Новиков И. Я.* Мартингальные неравенства в симметричных пространствах // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34, № 1. С. 113–120.
5. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М. : Наука, 1978. 400 с.
6. *Kikuchi M.* Averaging Operators and Martingale Inequalities in Rearrangement Invariant Function Spaces // Canad. Math. Bull. 1999. Vol. 42, iss. 3. P. 321–334. DOI: <https://doi.org/10.4153/CMB-1999-038-7>
7. *Fefferman C., Stein E.* H^p spaces of several variables // Acta. Math. 1972. Vol. 129, P. 137–193. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02392215>
8. *Garsia A. M.* Martingale inequalities. N. Y. : Benjamin Inc., 1973. 184 p.



9. Weisz F. Martingale Hardy spaces and their Applications in Fourier Analysis. Lecture Notes in Maths. Vol. 1568. Berlin : Springer-Verlag, 1994. 220 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0073448>
10. Long R. L. Rearrangement techniques in martingale setting // Illinois J. Math. 1991. Vol. 35, № 3. P. 506–521.
11. Ren Y. A note on some inequalities of martingale sharp functions // Math. Inequal. Appl. 2013. Vol. 16, № 1. P. 153–157. DOI: <https://doi.org/10.7153/mia-16-11>
12. Ho K. P. Martingale inequalities on rearrangement-invariant quasi-Banach function spaces // Acta Sci. Math. (Szeged). 2017. Vol. 83, № 3–4. P. 619–627. DOI: <https://doi.org/10.14232/actasm-012-817-9>
13. Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. М. : Изд-во иностр. лит., 1948. 456 с.
14. Павлов Е. А. Некоторые свойства оператора Харди – Литтлвуда // Матем. заметки. 1979. Т. 260, № 6. С. 909–912.
15. Bagby R., Kurtz D. A rearranged good λ -inequality // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. Vol. 293, № 1. P. 71–81. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1986-0814913-7>
16. Kikuchi M. On the Davis inequality in Banach function spaces // Math. Nachrichten. 2008. Vol. 281, № 5. P. 697–709. DOI: <https://doi.org/10.1002/mana.200510635>

Образец для цитирования:

Волосивец С. С., Зайцев Н. Н. Мартингальные неравенства в симметричных пространствах с полумультимпликативным весом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 2. С. 126–133. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-126-133>

Martingale Inequalities in Symmetric Spaces with Semimultiplicative Weight

S. S. Volosivets, N. N. Zaitsev

Sergey S. Volosivets, <https://orcid.org/0000-0001-6870-0597>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, VolosivetsSS@mail.ru

Nikolai N. Zaitsev, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, zaic.nick@gmail.com

Let (Ω, Σ, P) be a complete probability space, $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ be an increasing sequence of σ -algebras such that $\cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$ generates Σ . If $f = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ is a martingale with respect to \mathcal{F} and \mathbb{E}_n is the conditional expectation with respect to \mathcal{F}_n , then one can introduce a maximal function $M(f) = \sup_{n \geq 0} |f_n|$ and a square function $S(f) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |f_i - f_{i-1}|^2 \right)^{1/2}$, $f_{-1} = 0$. In the case of uniformly integrable martingales there exists $g \in L^1(\Omega)$ such that $\mathbb{E}_n g = f_n$ and we consider a sharp maximal function $f^\# = \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}_n |g - f_{n-1}|$. The result of Burkholder–Davis–Gundy is that $C_1 \|M(f)\|_p \leq \|S(f)\|_p \leq C_2 \|M(f)\|_p$ for $1 < p < \infty$, where $\|\cdot\|_p$ is the norm in $L^p(\Omega)$ and $C_2 > C_1 > 0$. We call the inequality of type $\|M(f)\|_p \leq C \|f^\#\|_p$, $1 < p < \infty$ Fefferman–Stein inequality. It is known that Burkholder–Davis–Gundy martingale inequality is valid in rearrangement invariant Banach function spaces with non-trivial Boyd indices. We prove this inequality in a more wide class of symmetric spaces (the last notion is defined as in the famous monograph by S. G. Krein, Yu. I. Petunin and E. M. Semenov) with semimultiplicative weight. Also, the Fefferman–Stein type inequalities of sharp maximal function and sharp square functions are obtained in this class of symmetric spaces.



Keywords: martingale, maximal function, maximal sharp function, square function of martingale, Burkholder – Davis – Gundy inequality, semimultiplicative function.

Received: 20.04.2018 / Accepted: 04.02.2019 / Published online: 28.05.2019

References

1. Burkholder D. Distribution function inequalities for martingales. *Ann. of Probab.*, 1973, vol. 1, no. 1, pp. 19–42. DOI: <https://doi.org/10.1214/aop/1176997023>
2. Burkholder D., Davis B. J., Gundy R. F. Integral inequalities for convex functions of operators on martingales. *Proc. Sixth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob.* Univ. of Calif. Press, 1972. Vol. 2, pp. 223–240.
3. Johnson W., Schechtman G. Martingale inequalities in rearrangement invariant function space. *Israel J. Math.*, 1988, vol. 64, no. 3, pp. 267–275. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02882423>
4. Novikov I. Ya. Martingale inequalities in rearrangement invariant spaces. *Siberian Math. J.*, 1993, vol. 34, no. 1, pp. 99–105. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00971245>
5. Krein S. G., Petunin Yu. I., Semenov E. M. *Interpolation of linear operators*. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1982. 375 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1978. 400 p.).
6. Kikuchi M. Averaging Operators and Martingale Inequalities in Rearrangement Invariant Function Spaces. *Canad. Math. Bull.*, 1999, vol. 42, iss. 3, pp. 321–334. DOI: <https://doi.org/10.4153/CMB-1999-038-7>
7. Fefferman C., Stein E. H^p spaces of several variables. *Acta. Math.*, 1972, vol. 129, pp. 137–193. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02392215>
8. Garsia A. M. *Martingale inequalities*. New York, Benjamin Inc., 1973. 184 p.
9. Weisz F. *Martingale Hardy spaces and their Applications in Fourier Analysis*. Lecture Notes in Maths. Vol. 1568. Berlin, Springer-Verlag, 1994. 220 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0073448>
10. Long R. L. Rearrangement techniques in martingale setting. *Illinois J. Math.*, 1991, vol. 35, no. 3, pp. 506–521.
11. Ren Y. A note on some inequalities of martingale sharp functions. *Math. Inequal. Appl.*, 2013, vol. 16, no. 1, pp. 153–157. DOI: <https://doi.org/10.7153/mia-16-11>
12. Ho K. P. Martingale inequalities on rearrangement-invariant quasi-Banach function spaces. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 2017, vol. 83, no. 3–4, pp. 619–627. DOI: <https://doi.org/10.14232/actasm-012-817-9>
13. Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G. *Inequalities*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1934. 328 p. (Russ. ed.: Moscow, Izd-vo inostr. lit., 1948. 456 p.)
14. Pavlov E. A. Some properties of Hardy–Littlewood operator. *Math. Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1979, vol. 26, iss. 6, pp. 958–960. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01142082>
15. Bagby R., Kurtz D. A rearranged good λ -inequality. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1986, vol. 293, no. 1, pp. 71–81. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1986-0814913-7>
16. Kikuchi M. On the Davis inequality in Banach function spaces. *Math. Nachrichten*, 2008, vol. 281, no. 5, pp. 697–709. DOI: <https://doi.org/10.1002/mana.200510635>

Cite this article as:

Volosivets S. S., Zaitsev N. N. Martingale Inequalities in Symmetric Spaces with Semimultiplicative Weight. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 2, pp. 126–133 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-126-133>



УДК 517.927.25

О кратной полноте корневых функций пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и распадающимися краевыми условиями

В. С Рыхлов

Рыхлов Виктор Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83, RykhlovVS@yandex.ru

В пространстве суммируемых с квадратом функций на отрезке $[0, 1]$ рассматривается класс полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов n -го порядка. Коэффициенты дифференциального выражения предполагаются постоянными. Краевые условия являются распадающимися и двухточечными в концах 0 и 1 (l краевых условий берутся только в точке 0, а остальные $n - l$ — в точке 1). Дифференциальное выражение и краевые формы предполагаются однородными, т. е. содержат только главные части. Предполагается, что корни характеристического уравнения пучков этого класса простые, отличны от нуля и лежат на двух лучах, исходящих из начала координат, в количествах k и $n - k$. Формулируются достаточные условия m -кратной полноты с возможным конечным дефектом системы корневых функций пучков этого класса в пространстве суммируемых с квадратом функций на основном отрезке. Кратность m полноты зависит от соотношений параметров n , l и k . При этом предполагается отличие от нуля некоторых вполне конкретных определителей, построенных по коэффициентам краевых условий и корням характеристического многочлена. Дается оценка сверху возможного конечного дефекта.

Ключевые слова: пучок обыкновенных дифференциальных операторов, полиномиальный пучок дифференциальных операторов, однородное дифференциальное выражение, однородные краевые формы, кратная полнота, корневые функции, собственные и присоединенные функции, производные цепочки, распадающиеся краевые условия.

Поступила в редакцию: 07.04.2018 / Принята: 05.04.2019 / Опубликовано онлайн: 28.05.2019

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-134-151>

ВВЕДЕНИЕ

Постановка задачи

В $L_2[0, 1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный однородным (присутствуют только главные члены) дифференциальным выражением (д.в.) n -го порядка

$$\ell(y, \lambda) := \sum_{j+s=n} p_{js} \lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbb{C}, \quad p_{n0} \neq 0, \quad p_{0n} \neq 0, \quad (1)$$

и линейно независимыми однородными двухточечными распадающимися нормированными краевыми условиями

$$U_i(y, \lambda) := \sum_{j+s=\kappa_i} \lambda^s \alpha_{ijs} y^{(j)}(0) = 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad (2)$$



$$U_i(y, \lambda) := \sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s \beta_{ijs} y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{l+1, n}, \quad (3)$$

где $\lambda, \alpha_{ijs}, \beta_{ijs} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leq l \leq n-1$.

Далее используем, не повторяя в данном тексте, известные определения собственных и присоединенных функций или, кратко, корневых функций (к.ф.), m -кратной ($1 \leq m \leq n$) полноты к.ф. из [1–3].

Решается задача о нахождении условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место m -кратная полнота к.ф. этого пучка в пространстве $L_2[0, 1]$.

Краткая история вопроса

Основополагающей по этой проблеме является работа [4], в которой была сформулирована теорема об n -кратной полноте к.ф. пучка $L(\lambda)$, порожденного д.в. со специальной главной частью

$$\ell(y, \lambda) := y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\}$$

и распадающимися краевыми условиями. Эта теорема была доказана в [5] в случае аналитических коэффициентов д.в. и в [6] — в случае суммируемых коэффициентов. Случай произвольной главной части д.в. был рассмотрен в [7, 8]. Детальное исследование вопроса об n -кратной и, в частности, m -кратной ($1 \leq m \leq n-1$) полноте к.ф. пучка $L(\lambda)$, д.в. которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия — полураспадающиеся, проведено в [9]. Полураспадающиеся краевые условия — когда l ($2l \geq n$) краевых условий берутся только в одном конце основного отрезка $[0, 1]$ (например в 0), а остальные $n-l$ краевых условий берутся и в 0 и в 1.

Более подробно история вопроса изложена в [10, 11].

В частности, в [11] рассмотрен случай, когда корни характеристического уравнения пучка расположены на двух лучах, исходящих из начала. В теореме 1 из [11] получены достаточные условия кратной полноты в пространстве $L_2[0, 1]$ системы к.ф. для более общего класса пучков вида (1)–(3), когда краевые условия полураспадающихся «в широком смысле» (т.е. когда возможно выполнение не только неравенства $2l \geq n$, но и неравенства $2l < n$ в случае $1 \leq l \leq n-1$). Но, несмотря на то что краевые условия (2)–(3) являются частным случаем полураспадающихся «в широком смысле» краевых условий из [11], теорема 1 о полноте из [11] не может быть непосредственно применена к случаю распадающихся краевых условий (2)–(3), так как не все параметры в формулировке теоремы 1 из [11] определены для распадающихся краевых условий (2)–(3) (см. подробнее об этом после формулировки теорем 1 и 2 настоящей статьи).

Видоизменив доказательство теоремы 1 из [11], удалось получить достаточные условия кратной полноты и в случае распадающихся краевых условий, но, к сожалению, не во всех случаях. Чтобы сформулировать полученные результаты, введем необходимые предположения и обозначения.

Формулировка основных результатов

Предположим, что корни $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ характеристического уравнения (или, кратко, характеристики) $\sum_{j+s=n} p_{js} \omega^j = 0$ попарно различны, отличны от нуля и лежат на двух или одном лучах, исходящих из начала. Пусть на одном луче лежат k характеристик, а на другом — $n-k$ ($0 \leq k \leq n$). Не нарушая общности, можно считать,



что корни расположены следующим образом:

$$\omega_n e^{i\varphi} < \omega_{n-1} e^{i\varphi} < \dots < \omega_{k+1} e^{i\varphi} < 0 < \omega_1 e^{-i\varphi} < \omega_2 e^{-i\varphi} < \dots < \omega_k e^{-i\varphi}, \quad (4)$$

где $|\varphi| < \pi/2$. В случае одного луча ($k = n$ или $k = 0$), ради единообразия дальнейших выкладок, считаем, что $\varphi = 0$ и $k = n$, т. е. формально тоже два луча, но один луч не содержит корней.

Обозначим $[p, q]_- = \min\{p, q\}$, $[p, q]_+ = \max\{p, q\}$, $[p]_+ = [p, 0]_+$ и положим при $j = \overline{1, n}$

$$a_{ij} = \sum_{\nu+s=\kappa_i} \alpha_{i\nu s} \omega_j^\nu, \quad i = \overline{1, l}, \quad b_{ij} = \sum_{\nu+s=\kappa_i} \beta_{i\nu s} \omega_j^\nu, \quad i = \overline{l+1, n}.$$

Используя эти обозначения, введем условия отличия от нуля главного члена асимптотики характеристического определителя пучка $L(\lambda)$. Главным членом асимптотики является соответствующая растущая экспонента с коэффициентом, который есть произведение двух определителей. Один определитель выражается через числа a_{ij} , а другой — через числа b_{ij} . Конкретный вид таких определителей зависит от того, в правой или левой полуплоскости рассматривается параметр λ , а также от соотношений между n , l и k . Всего имеется четыре пары таких определителей (по два для правой и левой полуплоскостей расположения параметра λ), а следовательно, четыре условия:

$$\det(a_{ij})_{i=1, l}^{j=\overline{1, k+l-n; k+1, n}} \neq 0, \quad \det(b_{ij})_{i=l+1, n}^{j=\overline{k+l-n+1, k}} \neq 0 \quad \text{при } n - k \leq l; \quad (5)$$

$$\det(a_{ij})_{i=1, l}^{j=\overline{n-l+1, n}} \neq 0, \quad \det(b_{ij})_{i=l+1, n}^{j=\overline{1, n-l}} \neq 0 \quad \text{при } n - k \geq l; \quad (6)$$

$$\det(a_{ij})_{i=1, l}^{j=\overline{1, l}} \neq 0, \quad \det(b_{ij})_{i=l+1, n}^{j=\overline{l+1, n}} \neq 0 \quad \text{при } k \leq l; \quad (7)$$

$$\det(a_{ij})_{i=1, l}^{j=\overline{k-l+1, k}} \neq 0, \quad \det(b_{ij})_{i=l+1, n}^{j=\overline{1, k-l; k+1, n}} \neq 0 \quad \text{при } k \geq l. \quad (8)$$

Отметим, что в крайнем случае $n - k = l$ условия (5) и (6) совпадают. Аналогично в крайнем случае $k = l$ совпадают условия (7) и (8).

Теорема 1. Если $[k, n - k]_+ \leq l$ и выполняются условия (5) и (7), то при $m = 2(n - l)$ система к.ф. пучка (1)–(3) m -кратно полна в $L_2[0, 1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $d_1 := \sum_{i=l+1}^n [m - 1 - \kappa_i]_+$.

Теорема 2. Если $[k, n - k]_- \geq l$ и выполняются условия (6) и (8), то при $m = 2l$ система к.ф. пучка (1)–(3) m -кратно полна в $L_2[0, 1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $d_2 := \sum_{i=1}^l [m - 1 - \kappa_i]_+$.

Формулировка теоремы 1 почти один в один повторяет формулировку пункта (а) теоремы 1 из [11], хотя доказательство немного отличается. Это связано с тем, что в случае полураспадающихся краевых условий в теореме 1 из [11] определены и величины κ_{i0} , и величины κ_{i1} — порядки форм в 0 и 1 в смешанных краевых условиях при $i = \overline{l+1, n}$, а возможный конечный дефект системы к.ф. не превосходит величины $d_1 = \sum_{i=l+1}^n [m - 1 - \kappa_i]_+$, где $\kappa_i = \min\{\kappa_{i0}, \kappa_{i1}\}$. В случае же краевых условий (3)



настоящей статьи величины \varkappa_{i0} не определены, а возможный конечный дефект системы к.ф. в теореме 1 не превосходит вроде бы ту же величину d_1 , но отличие есть: здесь \varkappa_i есть порядки краевых условий (3), т. е. $\varkappa_i = \varkappa_{i1}$ в обозначениях статьи [11].

Формулировка же теоремы 2 настоящей статьи совсем отличается от формулировки соответствующего случая в пункте (с) теоремы 1 из [11].

Два крайних подслучая из теорем 1 и 2 объединим в отдельной теореме. Это соответствует случаю регулярного пучка.

Теорема 3. Если $[k, n-k]_- = [k, n-k]_+ = l$ или, что эквивалентно, $n = 2k = 2l$ и выполняются условия (5) (или (6)) и (7) (или (8)), то система к.ф. пучка (1)–(3) n -кратно полна в $L_2[0, 1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $[d_1, d_2]_-$ в случае, если по крайней мере для одного $i = \overline{1, n}$ выполняется неравенство $\varkappa_i > n - 1$, и с нулевым дефектом в противном случае.

В доказательстве теорем 1 и 2 отмечено, что в случае

$$[k, n - k]_- < l < [k, n - k]_+, \tag{9}$$

который исключен из рассмотрения в теоремах 1–3, используемый метод рассуждений не проходит из-за пока непреодолимых трудностей. Условие (9) — случай пучка $L(\lambda)$ с устойчивой сильной нерегулярностью, т. е. такой (см. определение в [3]), которая имеет место при любых значениях коэффициентов краевых условий α_{ijs} и β_{ijs} .

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству сформулированных теорем. Схема доказательства соответствует схеме доказательства теоремы 1 в [11]. Центральную роль в доказательстве играет основная лемма об оценке, которая формулируется и доказывается в следующем разделе.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ И ЛЕММА ОБ ОЦЕНКЕ

Хорошо известно, что уравнение $\ell(y, \lambda) = 0$ имеет фундаментальную систему решений (ф.с.р.) $\{y_j(x, \lambda)\}_{j=1}^n$ вида

$$y_j(x, \lambda) = e^{\lambda \omega_j x}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{10}$$

Наряду с ф.с.р. (10) будет использоваться ф.с.р. $\{\tilde{y}_j(x, \lambda)\}_{j=1}^n$, удовлетворяющая начальным условиям

$$\tilde{y}_j^{(s-1)}(0, \lambda) = \delta_{js}, \quad j, s = \overline{1, n},$$

где δ_{js} есть символ Кронекера. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что $\tilde{y}_j(x, \lambda)$ есть целые аналитические функции по λ .

Будем далее обозначать объекты, построенные по ф.с.р. $\{\tilde{y}_j(x, \lambda)\}_{j=1}^n$, теми же буквами, что и объекты, построенные по ф.с.р. $\{y_j(x, \lambda)\}_{j=1}^n$, но с волной наверху.

Собственные значения λ_ν , $\nu = 1, 2, \dots$, пучка (1)–(3) являются нулями целой функции $\tilde{\Delta}(\lambda) := \det(U_i(\tilde{y}_j(x, \lambda), \lambda))_{i,j=1}^n$.

Обозначим через $\tilde{\Phi}_i(x, \lambda)$ функцию, полученную из $\tilde{\Delta}(\lambda)$ в результате замены i -й строки на строку $(\tilde{y}_1(x, \lambda), \dots, \tilde{y}_n(x, \lambda))$. Непосредственно можно убедиться в том, что при фиксированном $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ (этот параметр определяет кратность полноты к.ф. и будет выбран позже) столбцы

$$\left(\frac{\partial^r \tilde{\Phi}_i(x, \lambda)}{\partial \lambda^r}, \dots, \frac{\partial^r (\lambda^{m-1} \tilde{\Phi}_i(x, \lambda))}{\partial \lambda^r} \right)^T \Bigg|_{\lambda=\lambda_\nu}, \tag{11}$$



где $i = \overline{1, n}$, $r = \overline{0, s_\nu}$, являются производными по Келдышу m -цепочками для к.ф., соответствующих с.з. λ_ν , которое является нулем $\tilde{\Delta}(\lambda)$ кратности $s_\nu + 1$.

Введем в рассмотрение функции

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) = \int_0^1 \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^{j-1} \tilde{\Phi}_i(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)} h_j(x) dx, \quad i = \overline{1, n}, \quad (12)$$

где $h_j(x) \in L_2[0, 1]$, $j = \overline{1, m}$, и обозначим $h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x))^T$.

Перепишем (12) в виде

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) = \frac{\tilde{\Delta}_i(\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (13)$$

где $\tilde{\Delta}_i(\lambda)$ получается из $\tilde{\Delta}(\lambda)$ заменой i -й строки строкой $(\tilde{u}_{n+1,1}(\lambda), \dots, \tilde{u}_{n+1,n}(\lambda))$, в которой

$$\tilde{u}_{n+1,j}(\lambda) = \int_0^1 \sum_{\nu=1}^m h_\nu(x) \lambda^{\nu-1} \tilde{y}_j(x, \lambda) dx = \lambda^{m-1} \int_0^1 h_m(x, \lambda) \tilde{y}_j(x, \lambda) dx$$

и $h_m(x, \lambda) = \sum_{\nu=1}^m h_\nu(x) \lambda^{\nu-m}$.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Функции $\tilde{\Phi}_1(x, \lambda), \dots, \tilde{\Phi}_l(x, \lambda)$ являются линейно независимыми решениями уравнения $\ell(y, \lambda) = 0$, удовлетворяющими последним $n-l$ краевым условиям (3), а функции $\tilde{\Phi}_{l+1}(x, \lambda), \dots, \tilde{\Phi}_n(x, \lambda)$ являются линейно независимыми решениями того же уравнения, удовлетворяющими первым l краевым условиям (2).*

Доказательство аналогично доказательству соответствующего утверждения в [9, с. 48–49]. Там же сформулировано и доказано другое утверждение.

Утверждение 2. *Функции $\tilde{\Theta}_1(\lambda), \dots, \tilde{\Theta}_n(\lambda)$ не зависят от выбора ф.с.р. уравнения $\ell(y, \lambda) = 0$.*

Из утверждения 2 и формулы (13) получим

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) \equiv \Theta_i(\lambda) \equiv \frac{\Delta_i(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (14)$$

Введем в рассмотрение следующие множества

$$\Pi_\varepsilon^+ = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \arg \lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon] \right\}, \quad \Pi_\varepsilon^- = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \arg \lambda \in [\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon] \right\},$$

где $\varepsilon > 0$ и достаточно мало.

Будем обозначать далее через $C(\varepsilon)$ различные константы, зависящие, возможно, только от ε , через $O_\varepsilon(1/|\lambda|)$ различные величины, для которых при $|\lambda| \gg 1$ имеют место оценки $|O_\varepsilon(1/|\lambda|)| \leq C(\varepsilon)/|\lambda|$. Кроме того, будем использовать обозначение $[a]_\varepsilon := a + O_\varepsilon(1/|\lambda|)$ при $|\lambda| \gg 1$.

Справедлива следующая лемма об оценке, которая является основной при доказательстве сформулированных теорем.



Лемма 1 (основная лемма об оценке). Пусть для пучка $L(\lambda)$ с параметрами n , l и k выполняются неравенства (4). Тогда при $|\lambda| \gg 1$ имеют место оценки

$$|\Theta_i(\lambda)| \leq C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}-\varkappa_i}, \quad (15)$$

при определенных сочетаниях величин i , n , l и k , а именно:

1) в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$ в следующих ситуациях:

- а) при $n - k < l$ и выполнении условия (5) — для $i = \overline{l+1, n}$;
- б) при $n - k = l$ и выполнении условия (5) или (6) (условия (5) и (6) в этом случае совпадают) — для $i = \overline{1, n}$;
- в) при $n - k > l$ и выполнении условия (6) — для $i = \overline{1, l}$;

2) в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$ в следующих ситуациях:

- а) при $k < l$ и выполнении условия (7) — для $i = \overline{l+1, n}$;
- б) при $k = l$ и выполнении условия (7) или (8) (условия (7) и (8) в этом случае совпадают) — для $i = \overline{1, n}$;
- в) при $k > l$ и выполнении условия (8) — для $i = \overline{1, l}$.

Доказательство. Справедливы следующие формулы:

(i) при $\sigma = \overline{1, l}$, $j = \overline{1, n}$

$$U_\sigma(y_j, \lambda) = \sum_{\nu+s=\varkappa_\sigma} \alpha_{\sigma\nu s} \omega_j^\nu \lambda^{\nu+s} = \lambda^{\varkappa_\sigma} \sum_{\nu+s=\varkappa_\sigma} \alpha_{\sigma\nu s} \omega_j^\nu = \lambda^{\varkappa_\sigma} a_{\sigma j}; \quad (16)$$

(ii) при $\sigma = \overline{l+1, n}$, $j = \overline{1, n}$

$$U_\sigma(y_j, \lambda) = \sum_{\nu+s=\varkappa_\sigma} \beta_{\sigma\nu s} \omega_j^\nu \lambda^{\nu+s} e^{\lambda\omega_j} = \lambda^{\varkappa_\sigma} e^{\lambda\omega_j} \sum_{\nu+s=\varkappa_\sigma} \beta_{\sigma\nu s} \omega_j^\nu = \lambda^{\varkappa_\sigma} e^{\lambda\omega_j} b_{\sigma j}. \quad (17)$$

Для большей ясности разобьем доказательство основной леммы на ряд лемм.

1. Рассмотрим сначала случай $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$. Так как справедливы соотношения (14), то чтобы оценить сверху $|\Theta_i(\lambda)|$, предварительно оценим снизу $|\Delta(\lambda)|$.

Лемма 2. Если $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$ и $|\lambda| \gg 1$, то при $n - k \leq l$ и выполнении условий (5) имеет место следующая оценка снизу:

$$|\Delta(\lambda)| \geq C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum_{i=1}^n \varkappa_i} \left| e^{\lambda \sum_{\nu=k+l+1-n}^k \omega_\nu} \right|, \quad (18)$$

а при $n - k \geq l$ и выполнении условий (6) — оценка снизу

$$|\Delta(\lambda)| \geq C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum_{i=1}^n \varkappa_i} \left| e^{\lambda \sum_{\nu=1}^{n-l} \omega_\nu} \right|, \quad (19)$$

где $C(\varepsilon) > 0$ есть константа, зависящая только от ε и от параметров пучка $L(\lambda)$.



Доказательство. Подставляя (16)–(17) в $\Delta(\lambda)$ и вынося множители λ^{\varkappa_i} из каждой строки, получим представление

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\sum_{i=1}^n \varkappa_i} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{lk} & a_{l,k+1} & \dots & a_{ln} \\ e^{\lambda\omega_1} b_{l+1,1} & \dots & e^{\lambda\omega_k} b_{l+1,k} & e^{\lambda\omega_{k+1}} b_{l+1,k+1} & \dots & e^{\lambda\omega_n} b_{l+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{\lambda\omega_1} b_{n1} & \dots & e^{\lambda\omega_k} b_{nk} & e^{\lambda\omega_{k+1}} b_{n,k+1} & \dots & e^{\lambda\omega_n} b_{nn} \end{vmatrix}. \quad (20)$$

Рассмотрим два подслучая.

Случай а). Пусть $n - k \leq l$ или, что то же самое, $n - l \leq k$. Раскладываем определитель $\Delta(\lambda)$ по первым l строкам, выделяем главный член, требуя отличия от нуля соответствующих определителей, а именно выполнения условий (5). Получим при $|\lambda| \gg 1$

$$\Delta(\lambda) = \pm \lambda^{\sum_{i=1}^n \varkappa_i} e^{\lambda \sum_{\nu=k-n+1}^k \omega_\nu} \det(a_{\sigma j})_{\sigma=1, l}^{j=\overline{1, k+l-n; k+1, n}} \det(b_{\sigma j})_{\sigma=l+1, n}^{j=\overline{k+l-n+1, k}} [1]_\varepsilon. \quad (21)$$

Таким образом, в случае выполнения условий (5) и $|\lambda| \gg 1$ получим оценку (18).

Случай б). Пусть $n - k \geq l$ или, что то же самое, $n - l \geq k$. Раскладываем определитель $\Delta(\lambda)$ по первым l строкам, выделяем главный член, требуя отличия от нуля соответствующих определителей, а именно выполнения условий (6). Получим при $|\lambda| \gg 1$ аналогично (21)

$$\Delta(\lambda) = \pm \lambda^{\sum_{i=1}^n \varkappa_i} e^{\lambda \sum_{\nu=1}^{n-l} \omega_\nu} \det(a_{\sigma j})_{\sigma=1, l}^{j=\overline{n-l+1, n}} \det(b_{\sigma j})_{\sigma=l+1, n}^{j=\overline{1, n-l}} [1]_\varepsilon.$$

Таким образом, в случае выполнения условий (6) и $|\lambda| \gg 1$ получим оценку (19). \square

Оценим теперь сверху $\Delta_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n}$. В соответствии с определением $\Delta_i(\lambda)$ после вынесения множителя λ^{m-1} из i -й строки и разложения оставшегося определителя по элементам этой строки получим формулу

$$\Delta_i(\lambda) = \lambda^{m-1} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \Delta_{ij} \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda\omega_j \xi} d\xi, \quad (22)$$

где $\Delta_{ij}(\lambda)$ есть минор элемента (i, j) в определителе $\Delta(\lambda)$. Учитывая формулу (20), получим представление

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum_{\sigma=1}^n \varkappa_\sigma - \varkappa_i} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{lk} & a_{l,k+1} & \dots & a_{ln} \\ e^{\lambda\omega_1} b_{l+1,1} & \dots & e^{\lambda\omega_k} b_{l+1,k} & e^{\lambda\omega_{k+1}} b_{l+1,k+1} & \dots & e^{\lambda\omega_n} b_{l+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{\lambda\omega_1} b_{n1} & \dots & e^{\lambda\omega_k} b_{nk} & e^{\lambda\omega_{k+1}} b_{n,k+1} & \dots & e^{\lambda\omega_n} b_{nn} \end{vmatrix}_{ij}, \quad (23)$$

где индекс « ij » у определителя здесь и далее означает, что в этом определителе отсутствует i -я строка и j -й столбец.



Лемма 3. Если $|\lambda| \gg 1$, то в случае 1) из леммы 1, т. е. когда $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$, имеют место следующие утверждения:

а) при $n - k < l$, $i = \overline{l+1, n}$ справедлива оценка сверху

$$|\Delta_i(\lambda)| \leq C(\varepsilon) |\lambda|^{m - \frac{3}{2} + \sum_{\sigma=1}^n \varkappa_\sigma - \varkappa_i} \left| e^{\lambda \sum_{\nu=k+l+1-n}^k \omega_\nu} \right|; \quad (24)$$

б) при $n - k = l$, $i = \overline{1, n}$ справедлива та же оценка (24);

в) при $n - k > l$, $i = \overline{1, l}$ справедлива оценка сверху

$$|\Delta_i(\lambda)| \leq C(\varepsilon) |\lambda|^{m - \frac{3}{2} + \sum_{\sigma=1}^n \varkappa_\sigma - \varkappa_i} \left| e^{\lambda \sum_{\nu=1}^{n-l} \omega_\nu} \right|. \quad (25)$$

Отметим, что при $n - k = l$ оценки (24) и (25) совпадают.

Замечание 1. Отметим, что в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$ при $n - k < l$, $i = \overline{1, l}$ вместо оценки (24) имеет место не улучшаемая оценка сверху

$$|\Delta_i(\lambda)| \leq C(\varepsilon) |\lambda|^{m - \frac{3}{2} + \sum_{\sigma=1}^n \varkappa_\sigma - \varkappa_i} \left| e^{\lambda \sum_{\nu=k+l-n}^k \omega_\nu} \right|,$$

которая не позволяет получить в дальнейшем требуемый для доказательства основных теорем не более чем степенной рост функции $|\Theta_i(\lambda)|$. Аналогично обстоит дело в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$ при $n - k > l$, $i = \overline{l+1, n}$.

Доказательство. Рассмотрим отдельно три случая: а) $n - k < l$; б) $n - k = l$; в) $n - k > l$.

Случай а). Пусть $n - k < l$ или $n - l < k$. Предположим $i = \overline{l+1, n}$. Возможны два подслучая $1 \leq j \leq k$ и $k+1 \leq j \leq n$.

Пусть $1 \leq j \leq k$. В этом подслучае разложим определитель в (23) по минорам первых l строк и выделим главную часть. Так как $n - l - 1 \leq k - 1$, то главная часть есть член, который равен произведению минора l -го порядка на алгебраическое дополнение $n - l - 1$ -го порядка с элементами, стоящими в $n - l - 1$ столбцах с номерами от $k + l + 2 - n$ до k в случае $1 \leq j \leq k + l + 1 - n$ и с номерами от $k + l + 1 - n$ до $j - 1$ и от $j + 1$ до k в случае $k + l + 2 - n \leq j \leq k$.

Следовательно, аналогично выводу формулы (21) получим следующие формулы:

(i) в подподслучае $1 \leq j \leq k + l + 1 - n$ при $|\lambda| \gg 1$

$$\begin{aligned} \Delta_{ij}(\lambda) &= \pm \lambda^{\sum_{\sigma=1}^n \varkappa_\sigma - \varkappa_i} e^{\lambda \sum_{\nu=k+l+2-n}^k \omega_\nu} \times \\ &\times \left(\det(a_{\sigma\tau})_{\sigma=1, l}^{\tau=\overline{1, j-1; j+1, k+l+1-n; k+1, n}} \det(b_{\sigma\tau})_{\sigma=l+1, i-1; i+1, n}^{\tau=\overline{k+l+2-n, k}} + O_\varepsilon(1/|\lambda|) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, в этом подподслучае при $|\lambda| \gg 1$ получим оценку сверху:

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leq C(\varepsilon) |\lambda|^{\sum_{\sigma=1}^n \varkappa_\sigma - \varkappa_i} \left| e^{\lambda \sum_{\nu=k+l+2-n}^k \omega_\nu} \right|. \quad (26)$$

(ii) в подподслучае $k + l + 2 - n \leq j \leq k$ при $|\lambda| \gg 1$

$$\begin{aligned} \Delta_{ij}(\lambda) &= \pm \lambda^{\sum_{\sigma=1}^n \varkappa_\sigma - \varkappa_i} e^{\lambda (\sum_{\nu=k+l+1-n}^k \omega_\nu - \omega_j)} \times \\ &\times \left(\det(a_{\sigma\tau})_{\sigma=1, l}^{\tau=\overline{1, k+l-n; k+1, n}} \det(b_{\sigma\tau})_{\sigma=l+1, i-1; i+1, n}^{\tau=\overline{k+l+1-n, j-1; j+1, k}} + O_\varepsilon(1/|\lambda|) \right). \end{aligned}$$



Таким образом, в этом подслучае при $|\lambda| \gg 1$ получим следующую оценку сверху:

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leq C(\varepsilon) |\lambda|^{\sum_{\sigma=1}^n \varkappa_{\sigma} - \varkappa_i} \left| e^{\lambda(\sum_{\nu=k+l+1-n}^k \omega_{\nu} - \omega_j)} \right|. \quad (27)$$

Пусть теперь $k + 1 \leq j \leq n$. В этом подслучае разложим определитель в (23) также по минорам первых l строк и выделим главную часть. Так как $n - l - 1 < k$, то главная часть есть член, который равен произведению минора l -го порядка на алгебраическое дополнение $(n - l - 1)$ -го порядка с элементами, стоящими в $n - l - 1$ столбцах с номерами от $k + l + 2 - n$ до k .

Следовательно, аналогично случаю (i), получим следующие формулы:

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \pm \lambda^{\sum_{\sigma=1}^n \varkappa_{\sigma} - \varkappa_i} e^{\lambda \sum_{\nu=k+l+2-n}^k \omega_{\nu}} \times \left(\det(a_{\sigma\tau})_{\substack{\tau=\overline{1, k+l+1-n}; \\ \sigma=\overline{1, l}}}^{\overline{k+1, j-1; j+1, n}} \det(b_{\sigma\tau})_{\substack{\tau=\overline{k+l+2-n, k} \\ \sigma=\overline{l+1, i-1; i+1, n}}} + O_{\varepsilon}(1/|\lambda|) \right).$$

Таким образом, в этом подслучае при $|\lambda| \gg 1$ получим следующую оценку сверху:

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leq C(\varepsilon) |\lambda|^{\sum_{\sigma=1}^n \varkappa_{\sigma} - \varkappa_i} \left| e^{\lambda \sum_{\nu=k+l+2-n}^k \omega_{\nu}} \right|. \quad (28)$$

Подставим найденные оценки (26)–(28) в (22). Получим при $|\lambda| \gg 1$ и $i = \overline{l+1, n}$

$$\Delta_i(\lambda) = O_{\varepsilon} \left(|\lambda|^{m-1 + \sum_{\sigma=1}^n \varkappa_{\sigma} - \varkappa_i} \left| e^{\lambda \sum_{\nu=k+l+1-n}^k \omega_{\nu}} \right| \times \left(\sum_{j=1}^{k+l+1-n} \left| e^{\lambda(\omega_j - \omega_{k+l+1-n})} \right| \left| \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda \omega_j(\xi-1)} d\xi \right| + \sum_{j=k+l+2-n}^k \left| \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda \omega_j(\xi-1)} d\xi \right| + \sum_{j=k+1}^n \left| e^{-\lambda \omega_{k+l+1-n}} \right| \left| \int_0^1 h_m(\xi, \lambda) e^{\lambda \omega_j \xi} d\xi \right| \right) \right).$$

Оценивая теперь интегралы сверху аналогично тому, как это сделано в [10, с. 351–352], получим указанную в формулировке леммы 3 оценку сверху (24).

Случай б). В случае $n - k = l$ предыдущие рассуждения полностью проходят с оценкой сверху (24) не только при $i = \overline{l+1, n}$, но и при $i = \overline{1, l}$.

Случай в). Рассмотрим теперь оставшийся случай $n - k > l$. Здесь проходят практически дословно рассуждения, аналогичные случаю $n - k < l$, но при $i = \overline{1, l}$, если применять их к определителям $\Delta_{ij}(\lambda)$ (см. формулу (22)), представленным в следующем виде:

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum_{\sigma=1}^n \varkappa_{\sigma} - \varkappa_i} e^{\lambda \sum_{\beta=1}^n \omega_{\beta}} \begin{vmatrix} e^{-\lambda \omega_1} a_{11} & \dots & e^{-\lambda \omega_k} a_{1k} & e^{-\lambda \omega_{k+1}} a_{1,k+1} & \dots & e^{-\lambda \omega_n} a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{-\lambda \omega_1} a_{l1} & \dots & e^{-\lambda \omega_k} a_{lk} & e^{-\lambda \omega_{k+1}} a_{l,k+1} & \dots & e^{-\lambda \omega_n} a_{ln} \\ b_{l+1,1} & \dots & b_{l+1,k} & b_{l+1,k+1} & \dots & b_{l+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} & b_{n,k+1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}_{ij}.$$

Применяя к определителю в этой формуле такие же рассуждения, что и в случае $n - k > l$, но предполагая $i = \overline{1, l}$, получим в итоге оценку сверху (25). \square



2. Рассмотрим теперь случай $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$.

Лемма 4. Если $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$ и $|\lambda| \gg 1$, то при $k \leq l$ и выполнении условий (7) имеет место следующая оценка снизу:

$$|\Delta(\lambda)| \geq C(\varepsilon) |\lambda|^{\sum_{i=1}^n \varkappa_i} \left| e^{\lambda \sum_{\nu=l+1}^n \omega_\nu} \right|, \quad (29)$$

а при $k \geq l$ и выполнении условий (8) — оценка снизу

$$|\Delta(\lambda)| \geq C(\varepsilon) |\lambda|^{\sum_{i=1}^n \varkappa_i} \left| e^{\lambda (\sum_{\nu=k+1}^{n-l} \omega_\nu + \sum_{\nu=1}^{k-l} \omega_\nu)} \right|. \quad (30)$$

Доказательство. Рассмотрим два подслучая.

Случай а). Пусть $k \leq l$ или, что то же самое, $n - l \leq n - k$. Раскладываем определитель $\Delta(\lambda)$ по первым l строкам, выделяем главный член, требуя отличия от нуля соответствующих определителей, а именно выполнения условий (7). Получим при $|\lambda| \gg 1$

$$\Delta(\lambda) = \pm \lambda^{\sum_{i=1}^n \varkappa_i} e^{\lambda \sum_{\nu=l+1}^n \omega_\nu} \det(a_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{1,l}}^{\tau=\overline{1,l}} \det(b_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{l+1,n}} [1]_\varepsilon. \quad (31)$$

Таким образом, при выполнении условий (7) и $|\lambda| \gg 1$ получим оценку снизу (29).

Случай б). Пусть $k \geq l$ или, что то же самое, $n - l \geq n - k$. Раскладываем определитель $\Delta(\lambda)$ по первым l строкам, выделяем главный член, требуя отличия от нуля соответствующих определителей, а именно выполнения условий (8). При $|\lambda| \gg 1$ по аналогии с (31) получим

$$\Delta(\lambda) = \pm \lambda^{\sum_{i=1}^n \varkappa_i} e^{\lambda (\sum_{\nu=k+1}^{n-l} \omega_\nu + \sum_{\nu=1}^{k-l} \omega_\nu)} \det(a_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{1,l}}^{j=\overline{k-l+1,k}} \det(b_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,k-l;k+1,n}} [1]_\varepsilon.$$

Таким образом, при выполнении условий (8) и $|\lambda| \gg 1$ получим оценку снизу (30). □

Оценим теперь сверху $\Delta_i(\lambda)$, $i = \overline{1,n}$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 5. Если $|\lambda| \gg 1$, то в случае 2) из леммы 1, т. е. когда $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$, имеют место следующие утверждения:

а) при $k < l$, $i = \overline{l+1,n}$ справедлива оценка сверху

$$|\Delta_i(\lambda)| \leq C(\varepsilon) |\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum_{\sigma=1}^n \varkappa_\sigma - \varkappa_i} \left| e^{\lambda \sum_{\nu=l+1}^n \omega_\nu} \right|; \quad (32)$$

б) при $k = l$, $i = \overline{1,n}$ справедлива та же оценка (32);

в) при $k > l$, $i = \overline{1,l}$ справедлива оценка сверху

$$|\Delta_i(\lambda)| \leq C(\varepsilon) |\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum_{\sigma=1}^n \varkappa_\sigma - \varkappa_i} \left| e^{\lambda (\sum_{\nu=k+1}^{n-l} \omega_\nu + \sum_{\nu=1}^{k-l} \omega_\nu)} \right|. \quad (33)$$

Отметим, что при $k = l$ оценки (32) и (33) совпадают.

Замечание 2. Отметим, что в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$ при $k < l$, $i = \overline{1,l}$ вместо оценки (32) имеет место не улучшаемая оценка сверху

$$|\Delta_i(\lambda)| \leq C(\varepsilon) |\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum_{\sigma=1}^n \varkappa_\sigma - \varkappa_i} \left| e^{\lambda \sum_{\nu=l}^n \omega_\nu} \right|,$$

которая не позволяет получить в дальнейшем требуемый для доказательства основных теорем не более чем степенной рост функции $|\Theta_i(\lambda)|$. Аналогично обстоит дело в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$ при $k > l$, $i = \overline{l+1,n}$.



Доказательство. Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство соответствующей леммы 3. Поэтому не приводим подробностей. \square

На основании формул (14) и лемм 2–5 получаем утверждения доказываемой основной леммы. Таким образом, лемма 1 полностью доказана. \square

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ

Доказательство теоремы 1

Пусть выполняются предположения теоремы 1, т. е. $[k, n - k]_+ \leq l$, справедливы условия (5) и (7) и $m = 2(n - l)$.

Пусть $\bar{h} := (\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_m)^T \in L_2^m[0, 1]$ и ортогональна всем производным m -цепочкам (11). Тогда в силу (12)–(14) все особенности мероморфных функций $\tilde{\Theta}_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n}$, устранимы и являются тем самым целыми функциями. На основании оценок (15) и принципа Фрагмена – Линделёфа в случаях, когда $m - 2 - \varkappa_i \geq 0$, функции $\tilde{\Theta}_i(\lambda)$ есть полиномы степени $m - 2 - \varkappa_i$, которые могут быть записаны в виде

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) \equiv \lambda^{m-2-\varkappa_i}(\bar{h}, \zeta_{i0}) + \lambda^{m-3-\varkappa_i}(\bar{h}, \zeta_{i1}) + \dots + (\bar{h}, \zeta_{i, m-2-\varkappa_i}),$$

где $\zeta_{i\nu} \in L_2^m[0, 1]$ есть вполне определенные вектор-функции (в.ф.), а в случаях, когда $m - 2 - \varkappa_i < 0$, получим тождества

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) \equiv 0.$$

Проводя далее рассуждения, полностью аналогичные рассуждениям [11, с. 295–297], получим, что справедливы тождества

$$\sum_{j=1}^k \int_0^1 \gamma_j^i e^{\lambda \omega_j x} \sum_{\beta=1}^m \lambda^{\beta-1} h_\beta(x) dx \equiv 0, \quad i = \overline{1, n-l} \quad (34)$$

для множества решений $(\gamma_1^i, \gamma_2^i, \dots, \gamma_n^i)$, $i = \overline{1, n-l}$, системы

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \gamma_j = 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad (35)$$

для которых выполняется условие

$$G_1 = \begin{vmatrix} \gamma_{k-n+l+1}^1 & \dots & \gamma_k^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{k-n+l+1}^{n-l} & \dots & \gamma_k^{n-l} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (36)$$

При получении последнего условия существенно использовалось первое неравенство в предположении (5).

Далее проводим рассуждения, которые немного отличаются от рассуждений [11, с. 297–298]. Переписываем систему (35) в виде

$$\sum_{j=1}^l a_{ij} \gamma_j = - \sum_{j=l+1}^n a_{ij} \gamma_j, \quad i = \overline{1, l}.$$

Если в правой части этой системы возьмем неизвестные $\gamma_{l+1}, \dots, \gamma_n$ произвольно, то в силу первого неравенства в предположении (7) неизвестные $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ могут



быть однозначно определены. Следовательно, существует такое множество решений $(\gamma_1^i, \gamma_2^i, \dots, \gamma_n^i)$, $i = \overline{n-l+1, m}$ ($m = 2(n-l)$), системы (35), для которых выполняется условие

$$G_2 = \begin{vmatrix} \gamma_{l+1}^{n-l+1} & \dots & \gamma_n^{n-l+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{l+1}^m & \dots & \gamma_n^m \end{vmatrix} \neq 0. \quad (37)$$

Для этого множества решений системы (35) аналогично [11, с. 297–298] можно установить, что справедливы тождества

$$\sum_{j=k+1}^n \int_0^1 \gamma_j^i e^{\lambda \omega_j x} \sum_{\beta=1}^m \lambda^{\beta-1} h_\beta(x) dx \equiv 0, \quad i = \overline{n-l+1, m}. \quad (38)$$

Завершая рассуждения совершенно аналогично [11, с. 298–299] и используя соотношения (34), (36)–(38), приходим к выводу, что $h_j(x) = 0$, $j = \overline{1, m}$, для п.в. $x \in [0, 1]$.

Следовательно, в случае выполнения условий теоремы 1 система к.ф. рассматриваемого пучка m -кратно полна в $L_2[0, 1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа d_1 . Тем самым теорема 1 полностью доказана. \square

Замечание 3. Отметим, что при $m = n$ или, что эквивалентно, при $n = 2k = 2l$, в случае, когда $\varkappa_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ при $i = \overline{1, n}$ дефект системы к.ф. будет равен нулю, так как в этом случае рассматриваемый пучок может быть линейаризован в пространстве $L_2^n[0, 1]$ и справедливо предложение [9, лемма 2.1, с. 49].

Доказательство теоремы 2

Пусть выполняются предположения теоремы 2, т. е. $[k, n-k]_- \geq l$, справедливы условия (6) и (8) и $m = 2l$.

Пусть $\bar{h} := (\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_m)^T \in L_2^m[0, 1]$ и ортогональна всем производным m -цепочкам (11). Тогда в силу (12)–(14) все особенности мероморфных функций $\tilde{\Theta}_i(\lambda)$, $i = \overline{1, l}$, устранимы и являются тем самым целыми функциями. На основании оценок (15) и принципа Фрагмена – Линделёфа в случаях, когда $m - 2 - \varkappa_i \geq 0$, функции $\tilde{\Theta}_i(\lambda)$ есть полиномы степени $m - 2 - \varkappa_i$, которые могут быть записаны в виде

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) \equiv \lambda^{m-2-\varkappa_i} (\bar{h}, \zeta_{i0}) + \lambda^{m-3-\varkappa_i} (\bar{h}, \zeta_{i1}) + \dots + (\bar{h}, \zeta_{i, m-2-\varkappa_i}),$$

где $\zeta_{i\nu} \in L_2^m[0, 1]$ есть вполне определенные в.-ф., а в случаях, когда $m - 2 - \varkappa_i < 0$, получим тождества

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) \equiv 0.$$

Отсюда аналогично [11, с. 295], требуя дополнительную ортогональность к.ф. некоторому вполне конкретному набору в.-ф., состоящему из d_2 в.-ф., получим справедливость тождеств

$$\tilde{\Delta}_i(\lambda) = \int_0^1 \sum_{j=1}^m \lambda^{j-1} \tilde{\Phi}_i(x, \lambda) h_j(x) dx \equiv 0, \quad i = \overline{1, l}. \quad (39)$$

В соответствии с предложением 1 система функций $\tilde{\Phi}_1, \dots, \tilde{\Phi}_l$ есть система линейно независимых решений уравнения $\ell(y, \lambda) = 0$, удовлетворяющих последним $n-l$



краевым условиям (3) в точке 1. Тогда (39) влечет тождества

$$\int_0^1 y(x, \lambda) \sum_{j=1}^m \lambda^{j-1} h_j(x) dx \equiv 0 \tag{40}$$

для любого решения $y(x, \lambda)$ уравнения $\ell(y, \lambda) = 0$, удовлетворяющего последним $n-l$ краевым условиям (3) в точке 1.

Ищем эти решения в виде (как раз в этом и состоит одно из главных отличий доказательства теоремы 2 от доказательства теоремы 1)

$$y(x, \lambda) = \hat{\gamma}_1 e^{\lambda \omega_1(x-1)} + \hat{\gamma}_2 e^{\lambda \omega_2(x-1)} + \dots + \hat{\gamma}_n e^{\lambda \omega_n(x-1)}. \tag{41}$$

Удовлетворяя краевые условия (3) в точке 1, получим следующую однородную систему $n-l$ линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных $\hat{\gamma}_j$:

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} \hat{\gamma}_j = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{42}$$

Далее проводим рассуждения, аналогичные соответствующим рассуждениям при доказательстве теоремы 1, но только вместо системы (35) рассматриваем систему (42), а вместо первых неравенств в условиях (5) и (7) используем вторые неравенства в условиях (6) и (8).

Тогда из (40)–(42) получим, что справедливы тождества

$$\sum_{j=k+1}^n \int_0^1 \hat{\gamma}_j^i e^{\lambda \omega_j(x-1)} \sum_{\beta=1}^m \lambda^{\beta-1} h_\beta(x) dx \equiv 0, \quad i = \overline{1, l} \tag{43}$$

для множества решений $(\hat{\gamma}_1^i, \hat{\gamma}_2^i, \dots, \hat{\gamma}_n^i)$, $i = \overline{1, l}$, системы (42), для которого выполняется условие

$$\hat{G}_1 = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{n-l+1}^1 & \dots & \hat{\gamma}_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \hat{\gamma}_{n-l+1}^l & \dots & \hat{\gamma}_n^l \end{vmatrix} \neq 0. \tag{44}$$

При получении последнего условия существенно использовалось второе неравенство в условии (6).

Совершенно аналогично доказательству теоремы 1 переписываем систему (42) в виде

$$\sum_{j=1}^{k-l} b_{ij} \hat{\gamma}_j + \sum_{j=k+1}^n b_{ij} \hat{\gamma}_j = - \sum_{j=k-l+1}^k b_{ij} \hat{\gamma}_j, \quad i = \overline{1, n}.$$

Если в правой части этой системы возьмем неизвестные $\hat{\gamma}_{k-l+1}, \dots, \hat{\gamma}_k$ произвольно, то в силу второго неравенства в условии (8) оставшиеся неизвестные $\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_{k-l}, \hat{\gamma}_{k+1}, \dots, \hat{\gamma}_n$ могут быть однозначно определены. Следовательно, существует такое множество решений $(\hat{\gamma}_1^i, \hat{\gamma}_2^i, \dots, \hat{\gamma}_n^i)$, $i = \overline{1, m}$ ($m = 2l$) системы (42), для которого выполняется условие

$$\hat{G}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{k-l+1}^{l+1} & \dots & \hat{\gamma}_k^{l+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \hat{\gamma}_{k-l+1}^m & \dots & \hat{\gamma}_k^m \end{vmatrix} \neq 0. \tag{45}$$



Для этого множества решений системы (42) аналогично [11, с. 297–298] можно установить, что справедливы тождества

$$\sum_{j=k+1}^n \int_0^1 \hat{\gamma}_j^i e^{\lambda \omega_j(x-1)} \sum_{\beta=1}^m \lambda^{\beta-1} h_\beta(x) dx \equiv 0, \quad i = \overline{l+1, m}. \quad (46)$$

Завершая рассуждения совершенно аналогично [11, с. 298–299] и используя соотношения (43)–(46), приходим к выводу, что $h_j(x) = 0$, $j = \overline{1, m}$, для п.в. $x \in [0, 1]$.

Следовательно, в случае выполнения условий теоремы 2 система к.ф. рассматриваемого пучка m -кратно полна в $L_2[0, 1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа d_2 . Тем самым теорема 2 полностью доказана. \square

Замечание 4. Отметим, что при $m = n$ или, что эквивалентно, при $n = 2k = 2l$ в случае, когда $\varkappa_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ при $i = \overline{1, n}$, дефект системы к.ф. будет равен нулю, так как в этом случае рассматриваемый пучок может быть линеаризован в пространстве $L_2^n[0, 1]$ и справедливо предложение [9, лемма 2.1, с. 49].

Доказательство теоремы 3

Доказательство теоремы 3 вытекает из теорем 1 и 2 при $n = 2k = 2l$ и замечаний 3 и 4.

3. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕОРЕМ 1 И 2

Исследуем кратную полноту системы к.ф. пучка

$$y^{(5)} - (7 + 4i)\lambda y^{(4)} + (11 + 28i)\lambda^2 y''' + (13 - 56i)\lambda^3 y'' + (32i - 42)\lambda^4 y' + 24\lambda^5 y, \quad (47)$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y(1) = y'(1) = 0. \quad (48)$$

Для рассматриваемого пучка $n = 5$, $l = 3$

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 2, \quad \omega_3 = 4, \quad \omega_4 = i, \quad \omega_5 = 3i, \quad (49)$$

т. е. характеристики лежат на двух лучах, исходящих из начала, в количествах $k = 3$ и $n - k = 2$.

Так как $[k, n - k]_+ = \max\{3, 2\} = 3 = l$, то для исследования кратной полноты можно воспользоваться теоремой 1. Для этого нужно проверить выполнение условий (5) и (7).

Подсчитаем параметры a_{ij} и b_{ij} . Из вида краевых условий (48) и (2)–(3) следует, что для рассматриваемого пучка

$$\varkappa_1 = 0, \quad \varkappa_2 = 1, \quad \varkappa_3 = 2, \quad \varkappa_4 = 0, \quad \varkappa_5 = 1;$$

$$\alpha_{100} = \alpha_{210} = 1, \quad \alpha_{201} = 0, \quad \alpha_{320} = 1, \quad \alpha_{311} = \alpha_{302} = 0, \quad \beta_{400} = \beta_{510} = 1, \quad \beta_{501} = 0.$$

Таким образом,

$$a_{1j} = 1, \quad a_{2j} = \omega_j, \quad a_{3j} = \omega_j^2, \quad b_{4j} = 1, \quad b_{5j} = \omega_j, \quad j = \overline{1, 5},$$

т. е.

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 1, \quad a_{13} = 1, \quad a_{14} = 1, \quad a_{15} = 1;$$

$$a_{21} = 1, \quad a_{22} = 2, \quad a_{23} = 4, \quad a_{24} = i, \quad a_{25} = 3i;$$

$$a_{31} = 1, \quad a_{32} = 4, \quad a_{33} = 16, \quad a_{34} = -1, \quad a_{35} = -9;$$

$$b_{41} = 1, \quad b_{42} = 1, \quad b_{43} = 1, \quad b_{44} = 1, \quad b_{45} = 1;$$

$$b_{51} = 1, \quad b_{52} = 2, \quad b_{53} = 4, \quad b_{54} = i, \quad b_{55} = 3i.$$



Проверим отличие от нуля определителей, которые фигурируют в условиях теоремы 2, а именно определителей (5) и (7):

$$\det(a_{ij})_{i=1, \overline{l}}^{j=1, \overline{k+l-n}; \overline{k+1, n}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{34} & a_{35} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & 3i \\ 1 & -1 & -9 \end{vmatrix} = 8 - 4i \neq 0,$$

$$\det(b_{ij})_{i=l+1, \overline{n}}^{j=\overline{k+l-n+1, k}} = \begin{vmatrix} b_{42} & b_{43} \\ b_{52} & b_{53} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

$$\det(a_{ij})_{i=1, \overline{l}}^{j=\overline{1, l}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

$$\det(b_{ij})_{i=l+1, \overline{n}}^{j=\overline{l+1, n}} = \begin{vmatrix} b_{44} & b_{45} \\ b_{54} & b_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ i & 3i \end{vmatrix} = 2i \neq 0.$$

Следовательно, для рассматриваемого пучка (47)–(48) все условия теоремы 1 выполнены. Так как в данном случае $m = 2(n - l) = 2(5 - 3) = 4$ и

$$d_1 = [m - 1 - \varkappa_4]_+ + [m - 1 - \varkappa_5]_+ = [3 - 0]_+ + [3 - 1]_+ = 3 + 2 = 5,$$

то по теореме 1 получим, что система к.ф. пучка (47)–(48) 4-кратно полна в $L_2[0, 1]$ с возможным конечным дефектом не больше 5.

Исследуем теперь кратную полноту системы к.ф. пучка, порожденного тем же д.в. (47), но другими краевыми условиями

$$y(0) = y(1) = y'(1) = y''(1) = y'''(1) = 0. \quad (50)$$

Для рассматриваемого пучка $n = 5$, $l = 1$ и характеристики те же, что и для уже рассмотренного примера, а именно (49), т.е. характеристики лежат на двух лучах, исходящих из начала, в количествах $k = 3$ и $n - k = 2$.

Так как $[k, n - k]_+ = \min\{3, 2\} = 2 \geq l = 1$, то для исследования кратной полноты можно воспользоваться теоремой 2. Для это нужно проверить выполнение условий (6) и (8).

Подсчитаем параметры a_{ij} и b_{ij} . Из вида краевых условий (50) и (2)–(3) следует, что для рассматриваемого пучка

$$\begin{aligned} \varkappa_1 = 0, \quad \varkappa_2 = 0, \quad \varkappa_3 = 1, \quad \varkappa_4 = 2, \quad \varkappa_5 = 3; \\ \alpha_{100} = 1, \quad \beta_{200} = \beta_{310} = 1, \quad \beta_{301} = 0, \quad \beta_{420} = 1, \quad \beta_{411} = \beta_{402} = 0, \\ \beta_{530} = 1, \quad \beta_{521} = \beta_{512} = \beta_{503} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$a_{1j} = 1, \quad b_{2j} = 1, \quad b_{3j} = \omega_j, \quad b_{4j} = \omega_j^2, \quad b_{5j} = \omega_j^3, \quad j = \overline{1, 5},$$

т.е.

$$\begin{aligned} a_{11} = 1, \quad a_{12} = 1, \quad a_{13} = 1, \quad a_{14} = 1, \quad a_{15} = 1; \\ b_{21} = 1, \quad b_{22} = 1, \quad b_{23} = 1, \quad b_{24} = 1, \quad b_{25} = 1; \\ b_{31} = 1, \quad b_{32} = 2, \quad b_{33} = 4, \quad b_{34} = i, \quad b_{35} = 3i; \\ b_{41} = 1, \quad b_{42} = 4, \quad b_{43} = 16, \quad b_{44} = -1, \quad b_{45} = -9; \\ b_{51} = 1, \quad b_{52} = 8, \quad b_{53} = 64, \quad b_{54} = -i, \quad b_{55} = -27i. \end{aligned}$$



Проверим отличие от нуля определителей, которые фигурируют в условиях теоремы 2, а именно определителей (6) и (8):

$$\det(a_{ij})_{i=1, \overline{l+1, n}}^{j=\overline{n-l+1, n}} = \det(a_{15}) = \det(1) = 1 \neq 0,$$

$$\det(b_{ij})_{i=l+1, \overline{n}}^{j=\overline{1, n-l}} = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & i \\ 1 & 4 & 16 & -1 \\ 1 & 8 & 64 & -i \end{vmatrix} = -6 + 78i \neq 0,$$

$$\det(a_{ij})_{i=1, \overline{l}}^{j=\overline{k-l+1, k}} = \det(a_{13}) = \det(1) = 1 \neq 0,$$

$$\det(b_{ij})_{i=l+1, \overline{n}}^{j=\overline{1, k-l; k+1, n}} = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{54} & b_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & i & 3i \\ 1 & 4 & -1 & -9 \\ 1 & 8 & -i & -27i \end{vmatrix} = -24 - 68i \neq 0.$$

Следовательно, для рассматриваемого пучка (47), (50) все условия теоремы 2 выполнены. Так как в данном случае $m = 2l = 2 \cdot 1 = 2$ и $d_2 = [m-1-\kappa_1]_+ = [1-0]_+ = 1$, то по теореме 2 получим, что система к.ф. пучка (47), (50) 2-кратно полна в $L_2[0, 1]$ с возможным конечным дефектом не больше 1.

Библиографический список

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 526 с.
2. Келдыш М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН. 1971. Т. 26, вып. 4(160). С. 15–41.
3. Рыжлов В. С. О полноте корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Таврический вестник информатики и математики. 2015. № 1(26). С. 69–86.
4. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 1. С. 11–14.
5. Хромов А. П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1973. 242 с.
6. Шкаликов А. А. О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями // Функц. анализ и его прилож. 1976. Т. 10, вып. 4. С. 69–80.
7. Freiling G. Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator-büschel // Math. Z. 1984. Vol. 188. P. 55–68.
8. Тихомиров С. А. Конечномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов в пространстве вектор-функций : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1987. 126 с.
9. Вагабов А. И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д : Изд-во Рост. ун-та, 1994. 160 с.
10. Рыжлов В. С. О кратной полноте корневых функций обыкновенного дифференциального полиномиального пучка с постоянными коэффициентами // СМФН. 2017. Т. 63, вып. 2. С. 340–361. DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-340-361.
11. Rykhlov V. S. Multiple Completeness of the Root Functions for a Certain Class of Pencils of Ordinary Differential Operators // Results in Mathematics. 2017. Vol. 72, iss. 1–2. P. 281–301. DOI 10.1007/s00025-016-0599-7



Образец для цитирования:

Рыхлов В. С. О кратной полноте корневых функций пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и распадающимися краевыми условиями // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 2. С. 134–151. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-134-151>

Multiple Completeness of the Root Functions of the Pencils of Differential Operators with Constant Coefficients and Splitting Boundary Conditions

V. S. Rykhlov

Victor S. Rykhlov, <https://orcid.org/0000-0003-1556-7707>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, RykhlovVS@yandex.ru

In the space of square summable functions on the main segment $[0,1]$, the class of polynomial pencils of ordinary differential operators of the n -th order is considered. The coefficients of the differential expression are assumed to be constants. The boundary conditions are assumed to be splitting and two-point at the ends 0 and 1 (l of boundary conditions is taken only at the point 0, and the remaining $n - l$ is taken at the point 1). The differential expression and the boundary forms are assumed to be homogeneous, that is, they contain only main parts. It is supposed that roots of the characteristic equation of the pencils of this class are simple, non-zero and lie on two rays emanating from the origin in quantities k and $n - k$. Sufficient conditions of m -fold system completeness of root functions of the pencils of this class in the space of square integrable functions on the main segment (with a possible finite defect) are formulated. The multiplicity m completeness depends on the relations of the parameters n , l and k . In this case, it is assumed that some completely concrete determinants differ from zero. These determinants are constructed from the coefficients of the boundary forms of the pencil and the roots of the characteristic equation. An upper bound on a possible finite defect is given.

Keywords: pencil of ordinary differential operators, polynomial pencil of differential operators, homogeneous differential expression, homogeneous boundary forms, multiple completeness, root functions, eigen- and associated functions, derived chains, splitting boundary conditions.

Received: 07.04.2018 / Accepted: 05.04.2019 / Published online: 28.05.2019

References

1. Naymark M. A. *Linear Differential Operators*. Moscow, Nauka, 1969. 526 p. (in Russian).
2. Keldysh M. V. On the completeness of the eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operators. *Russian Math. Surveys*, 1971, vol. 26, iss. 4, pp. 15–44. DOI: <https://doi.org/10.1070/RM1971v026n04ABEH003985>
3. Rykhlov V. S. On completeness of the root functions of polynomial pencils of ordinary differential operators with constant coefficients. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, 2015, no. 1(26), pp. 69–86 (in Russian).
4. Keldysh M. V. On eigenvalues and eigenfunctions of certain classes of non-selfadjoint equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1951, vol. 77, no. 1, pp. 11–14 (in Russian).
5. Khromov A. P. *Finite-dimensional perturbations of Volterra operators*. Diss. Dr. Sci. (Phys. and Math.). Novosibirsk, 1973. 242 p. (in Russian).
6. Shkalikov A. A. The completeness of eigenfunctions and associated functions of an ordinary differential operator with irregular-separated boundary conditions. *Funct. Anal. Its Appl.*, 1976, vol. 10, iss. 4, pp. 305–316. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01076030>



7. Freiling G. Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator-büschel. *Math. Z.*, 1984, vol. 188, pp. 55–68.
8. Tikhomirov S. A. *Finite-dimensional perturbations of Volterra integral operators in the space of vectorfunctions*. Diss. Cand. Sci. (Phys. and Math.). Saratov, 1987. 126 p. (in Russian).
9. Vagabov A. I. *Vvedenie v spektral'nuiu teoriyu differentsial'nykh operatorov* [Introduction to spectral theory of differential operators]. Rostov-on-Don, Izd-vo Rost. un-ta, 1994. 160 p. (in Russian).
10. Rykhlov V. S. On multiple completeness of the root functions of ordinary differential polynomial pencil with constant coefficients. *Proceedings of the Crimean autumn mathematical school-symposium, CMFD*, 2017, vol. 63, no. 2, pp. 340–361 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.22363/2413-3639-2017-63-2-340-361>
11. Rykhlov V. S. Multiple Completeness of the Root Functions for a Certain Class of Pencils of Ordinary Differential Operators. *Results in Mathematics*, 2017, vol. 72, iss. 1–2, pp. 281–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00025-016-0599-7>

Cite this article as:

Rykhlov V. S. Multiple Completeness of the Root Functions of the Pencils of Differential Operators with Constant Coefficients and Splitting Boundary Conditions. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 2, pp. 134–151 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-134-151>



УДК 517.9

Гармонический анализ медленно меняющихся на бесконечности полугрупп операторов

В. Е. Струков, И. И. Струкова

Струков Виктор Евгеньевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник кафедры системного анализа и управления, Воронежский государственный университет, Россия, 394036, Воронеж, Университетская пл., д. 1, sv.post.of.chaos@gmail.com

Струкова Ирина Игоревна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник кафедры системного анализа и управления, Воронежский государственный университет, Россия, 394036, Воронеж, Университетская пл., д. 1, irina.k.post@yandex.ru

Статья посвящена изучению сильно непрерывных ограниченных полугрупп операторов. В пространстве равномерно непрерывных функций со значениями в комплексном банаховом пространстве рассматривается подпространство интегрально исчезающих на бесконечности функций, включающее в себя подпространство исчезающих на бесконечности функций. Изучаются свойства данного подпространства. Вводится понятие медленно меняющейся на бесконечности относительно этого подпространства функции, получены условия, при которых равномерно непрерывная функция будет являться таковой. Вводится понятие медленно меняющейся на бесконечности (относительно подпространства интегрально исчезающих на бесконечности функций) полугруппы операторов и изучаются их свойства. Получены условия, при которых сильно непрерывная ограниченная полугруппа операторов является медленно меняющейся на бесконечности относительно данного подпространства. Полученные результаты будут полезны при исследовании вопросов стабилизации решений параболических уравнений при неограниченном возрастании времени.

Ключевые слова: полугруппа операторов, медленно меняющаяся на бесконечности функция, медленно меняющаяся на бесконечности полугруппа операторов, спектр Бёрлинга, банахов модуль.

Поступила в редакцию: 05.05.2018 / Принята: 03.02.2019 / Опубликовано онлайн: 28.05.2019

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-152-163>

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть X — комплексное банахово пространство, $End X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X . Пусть \mathbb{J} — один из промежутков $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Символом $C_b = C_b(\mathbb{J}, X)$ обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных на \mathbb{J} функций с нормой $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{J}} \|x(t)\|_X$, $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ — замкнутое подпространство равномерно непрерывных функций из C_b , $C_0 = C_0(\mathbb{J}, X)$ — замкнутое подпространство исчезающих на бесконечности функций, т.е. функций, для которых выполняется условие $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \|x(t)\|_X = 0$.

В банаховом пространстве $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ рассмотрим (полу-)группу операторов сдвига $S : \mathbb{J} \rightarrow End C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, действующих по правилу $(S(t)x)(\tau) = x(t + \tau)$, $t, \tau \in \mathbb{J}$.

Наряду с подпространством $C_0(\mathbb{J}, X)$ рассмотрим более широкое подпространство $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X) = \{x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X) : \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^\infty e^{-\varepsilon t - i\lambda_0 t} S(t)x dt\| = 0 \text{ для любого } \lambda_0 \in \mathbb{R}\}$ интегрально исчезающих на бесконечности функций из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$.



Лемма 1. *Подпространство $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ обладает следующими свойствами:*

1) *подпространство $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ образует замкнутое подпространство из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, инвариантное относительно операторов $S(t)$, $t \in \mathbb{J}$;*

2) *подпространство $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ является банаховым $L^1(\mathbb{R})$ -модулем;*

3) *функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ принадлежит подпространству $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ тогда и только тогда, когда для любой почти периодической функции $f \in AP(\mathbb{J}, X)$ выполняется условие*

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \left\| \int_0^\alpha x(s+t)f(s)ds \right\| = 0;$$

4) *если функция $x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$, то $fx \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ для любой почти периодической функции $f \in AP(\mathbb{J}, X)$;*

5) *функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ принадлежит пространству $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ тогда и только тогда, когда для любого $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ для любой λ_0 -направленности (f_α) выполняется условие $\lim_{\alpha} f_\alpha * x = 0$.*

Утверждения леммы 1 следуют из определения пространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$, свойств направленностей (f_α) и того факта, что почти периодическая функция является равномерным пределом линейных комбинаций экспонент.

Определение 1. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$* , если для любого $t \in \mathbb{J}$ выполняется условие

$$(S(t)x - x) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X).$$

Если в данном определении заменить подпространство $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ подпространством $C_0(\mathbb{J}, X)$, то получим определение медленно меняющейся на бесконечности функции в обычном смысле (см. [1–6]).

Множество медленно меняющихся относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ функций обозначим символом $\mathcal{C}_{sl,\infty} = \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$. Оно образует замкнутое подпространство из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, инвариантное относительно операторов $S(t)$, $t \in \mathbb{J}$, и является банаховым $L^1(\mathbb{R})$ -модулем. Кроме того, любое продолжение $y \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ функции $x \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, X)$ на \mathbb{R} со свойством $\lim_{t \rightarrow -\infty} \|y(t)\|_X = 0$ принадлежит $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

В данной статье рассматривается сильно непрерывная ограниченная полугруппа операторов (полугруппа класса C_0) $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$ с генератором (инфинитезимальным оператором) $A : D(A) \subset X \rightarrow X$. Из условия ограниченности полугруппы T следует, что спектр $\sigma(A)$ ее генератора расположен в полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda \leq 0\}$.

Определение 2. Полугруппа операторов $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$ называется *медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+, X)$* , если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \left\| \int_0^\infty e^{-\varepsilon t - i\lambda_0 t} T(t)(T(\tau)x - x)dt \right\| = 0$$

для любого $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ и для любого вектора $x \in X$ (т.е. $\varphi_x(t) = T(t)x$, $t \geq 0$, принадлежит пространству $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, X)$).



Медленно меняющиеся на бесконечности (в обычном смысле) полугруппы операторов рассматривались в [7].

Основными результатами статьи являются следующие теоремы

Теорема 1. Пусть непрерывный спектр $\sigma_c(A)$ генератора A сильно непрерывной ограниченной полугруппы T обладает свойством

$$\sigma_c(A) \cap (i\mathbb{R}) \subset \sigma_c(A) \setminus \{0\}. \quad (1)$$

Тогда полугруппа T является медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Теорема 2. Пусть сильно непрерывная ограниченная полугруппа T является медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+, X)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует медленно меняющаяся на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+, X)$ функция $B : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$, допускающая голоморфное расширение на \mathbb{C} до целой функции экспоненциального типа ε и такая, что $T(t) = B(t) + B_0(t)$, $t \geq 0$, где $B_0(t)x$, $t \geq 0$, принадлежит пространству $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+, X)$ для каждого $x \in X$.

2. БАНАХОВЫ $L^1(\mathbb{R})$ -МОДУЛИ И МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИЕСЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ

Пусть $L^1(\mathbb{R})$ — банахова алгебра определенных на \mathbb{R} измеримых по Лебегу и суммируемых комплекснозначных функций со сверткой функций $(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - \tau)g(\tau)d\tau$, $t \in \mathbb{R}$, $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, в качестве умножения. Пусть \mathcal{X} — комплексное банахово пространство и $\text{End } \mathcal{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в \mathcal{X} . Будем считать, что \mathcal{X} является невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$ -модулем (см. [8, 9]). Невырожденность банахова модуля \mathcal{X} означает, что из равенства $fx = 0$, справедливого для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, следует, что вектор $x \in \mathcal{X}$ — нулевой.

Далее через $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}dt$, $\lambda \in \mathbb{R}$, функции $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Определение 3. Спектром Бёрлинга вектора $x \in \mathcal{X}$ называется множество чисел $\Lambda(x)$ из \mathbb{R} вида $\Lambda(x) = \{\lambda_0 \in \mathbb{R} : fx \neq 0 \text{ для любой функции } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ с } \hat{f}(\lambda_0) \neq 0\}$.

Из определения следует, что $\Lambda(x) = \mathbb{R} \setminus \{\mu_0 \in \mathbb{R} : \text{существует функция } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ такая, что } \hat{f}(\mu_0) \neq 0 \text{ и } fx = 0\}$.

Справедливы следующие свойства спектра Бёрлинга векторов из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля \mathcal{X} (см. [8–12]):

Лемма 2. Для любых $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in \mathcal{X}$ справедливы свойства:

1) из условия $fx = 0$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ следует, что $x = 0$ (т.е. $L^1(\mathbb{R})$ -модуль \mathcal{X} невырожден);

2) $\Lambda(x)$ — замкнутое подмножество из \mathbb{R} , причем $\Lambda(x) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

3) $\Lambda(fx) \subset (\text{supp } \hat{f}) \cap \Lambda(x)$;



4) $fx = 0$, если $(\text{supp } \widehat{f}) \cap \Lambda(x) = \emptyset$, и $fx = x$, если множество $\Lambda(x)$ компактно и $\widehat{f} = 1$ в некоторой его окрестности;

5) $\Lambda(x) = \{\lambda_0\}$ — одноточечное множество тогда и только тогда, когда вектор $x \neq 0$ удовлетворяет равенствам $U(t)x = \exp(i\lambda_0 t)x$, $t \in \mathbb{R}$, при условии, что структура банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля на \mathcal{X} задается равенством

$$f * x = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)U(-\tau)x d\tau, \quad x \in \mathcal{X}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}), \quad (2)$$

т.е. структура $L^1(\mathbb{R})$ -модуля на \mathcal{X} ассоциирована с сильно непрерывным изометрическим представлением (группой изометрий) $U : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ (для того чтобы это подчеркнуть, иногда будет использоваться обозначение (\mathcal{X}, U));

6) функция $t \mapsto U(t)x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ для \mathcal{X} с компактным спектром Бёрлинга допускает расширение до целой функции.

Банахово пространство $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ является банаховым $L^1(\mathbb{R})$ -модулем с модульной структурой, определяемой равенствами

$$(f * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)x(t - \tau) d\tau = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)(S(-\tau)x)(t) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

и эта структура ассоциирована с представлением (группой сдвигов функций) $S : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$.

Подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$, $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ и $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ банахова пространства $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ являются замкнутыми подмодулями $L^1(\mathbb{R})$ -модуля $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ с модульной структурой, задаваемой формулой (3).

Рассмотрим фактор-пространство $\mathcal{F}(\mathbb{J}, X) = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$, которое является банаховым пространством с нормой $\|\tilde{x}\| = \inf_{y \in x + \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)} \|y\|$, где $\tilde{x} = x + \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ — класс эквивалентности, содержащий функцию $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$. Банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{J}, X)$ становится банаховой алгеброй, если умножение вводится следующим образом $\tilde{x}\tilde{y} = \widetilde{xy}$, $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathcal{F}(\mathbb{J}, X)$.

В фактор-пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{J}, X)$ структура банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля задается формулой (2), где в качестве представления U берется сильно непрерывная группа изометрических операторов $\tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{J}, X)$, описанная ниже. Для $t \geq 0$ под $\tilde{S}(t)$ будем понимать фактор-оператор, построенный по оператору $S(t)$, т.е. $\tilde{S}(t)\tilde{x} = \widetilde{S(t)x}$ для любой функции $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$. Если $t < 0$, то $\tilde{S}(t) = \tilde{S}(-t)$, если $\mathbb{J} = \mathbb{R}$. Для $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$ оператор $\tilde{S}(t)$, $t < 0$, определим формулой $\tilde{S}(t)\tilde{x} = \widetilde{S(t)y}$, $\tilde{x} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, а \tilde{y} — класс эквивалентности, построенный по функции $y \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$. Здесь $y \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ — произвольное равномерно непрерывное продолжение функции $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}_+, X)$ на \mathbb{R} , удовлетворяющее условию $\lim_{t \rightarrow -\infty} \|y(t)\|_X = 0$. Отметим, что данное определение корректно, т.е. не зависит от выбора продолжения y функции x на \mathbb{R} .

Замечание 1. Непосредственно из определения следует, что фактор-пространство $C_{b,u}(\mathbb{R}_+, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+, X)$ вкладывается в фактор-пространство $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, являясь в нем замкнутым подпространством. Поэтому в дальнейшем при доказательстве утверждений будем рассматривать банахов $L^1(\mathbb{R})$ -модуль



$\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, в котором действует изометрическая группа операторов $\tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Лемма 3. Для того чтобы функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ была медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих трех эквивалентных условий:

- 1) $\Lambda(\tilde{x}) \subset \{0\}$ для класса $\tilde{x} = x + \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$;
- 2) $f * x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\hat{f}(0) = 0$;
- 3) $f * x - x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\hat{f}(0) = 1$.

Для того чтобы функция $x_0 \in C_{b,u}(\mathbb{R}_+, X)$ была медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+, X)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из трех перечисленных условий для некоторого продолжения $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ функции x_0 на \mathbb{R} , удовлетворяющего условию $\lim_{t \rightarrow -\infty} \|x(t)\|_X = 0$.

Утверждения леммы 3 следуют из теоремы 3 и лемм 5 и 6.

Лемма 4. Пусть $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$ — сильно непрерывная ограниченная функция, для которой все функции $\varphi_x(t) = \Phi(t)x$, $t \geq 0$, принадлежат $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, X)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ функция Φ представима в виде $\Phi = \Phi_1 + \Phi_0$, где каждая функция $t \mapsto \Phi_0(t)x$, $x \in X$, принадлежит $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+, X)$ и $\Phi_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$ допускает голоморфное расширение (обозначаемое тем же символом) на \mathbb{C} до целой функции экспоненциального типа ε , причем $\Phi_1 \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, \text{End } X)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f \in L^1(\mathbb{R})$, обладающую свойствами $\hat{f}(0) = 1$, $\text{supp } \hat{f} \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$ и функция \hat{f} бесконечно дифференцируема. Тогда из формулы $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda$, $t \in \mathbb{R}$, следует, что функция f допускает расширение (обозначаемое тем же символом)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda z} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda t} e^{-\alpha\lambda} d\lambda, \quad z = t + i\alpha \in \mathbb{C}, \quad (4)$$

которое является целой функцией экспоненциального типа ε .

Из формулы (4) следует, что семейство функций f_z , $z \in \mathbb{C}$, вида $f_z(t) = f(z - t)$, $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, принадлежит алгебре $L^1(\mathbb{R})$, а функция $F : \mathbb{C} \rightarrow L^1(\mathbb{R})$ вида $F(z) = f_z$, $z \in \mathbb{C}$, является целой функцией экспоненциального типа не выше ε . При этом для любого $b > 0$ конечна величина

$$\sup_{|Imz| \leq b} \|F(z)\|_{L^1} = \sup_{|Imz| \leq b} \|f_z\|_{L^1}.$$

Положим $\Phi_1 = f * \tilde{\Phi}$, где $\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } X$ — продолжение Φ на \mathbb{R} со свойством сильной непрерывности и $\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{\Phi}(t)x = 0$ для $x \in X$. Ее голоморфным продолжением на \mathbb{C} является функция $\Phi_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - t) \tilde{\Phi}(t) dt$, $z \in \mathbb{C}$. Отметим, что $\Phi_1(t + z) = (f_z * \tilde{\Phi})(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Следовательно, функция Φ_1 является целой функцией экспоненциального типа не выше ε . Непосредственно из определения следует, что $\Phi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } X$ непрерывна в равномерной операторной топологии (ввиду



непрерывности функции $t \mapsto f_t : \mathbb{R} \rightarrow L^1(\mathbb{R})$ и каждая из функций $\varphi_x : \mathbb{R} \rightarrow X$, $x \in X$, вида $\varphi_x(t) = \Phi_1(t)x : \mathbb{R} \rightarrow X$ является медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ функцией.

Из свойства 3) леммы 3 следует, что функция Φ_0 вида $\Phi_0(t) = \Phi(t) - \Phi_1(t)$, $t \geq 0$, принадлежит пространству $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$. \square

Определение 4. Вектор x из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля (\mathcal{X}, T) называется *почти периодическим*, если $x \in \mathcal{X}_c$ и множество $\{T(t)x, t \in \mathbb{R}\}$ (орбита вектора x) предкомпактно в \mathcal{X} .

Отметим, что множество $AP(\mathcal{X})$ почти периодических векторов из \mathcal{X} образует замкнутый подмодуль из \mathcal{X} .

Для доказательства основных результатов статьи нам понадобится ряд определений (см. [8, 9]).

Определение 5. Пусть M — некоторое направленное множество и $\lambda \in \mathbb{R}$. Ограниченная направленность (f_α) , $\alpha \in M$, функций из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ называется λ -направленностью, если выполнены условия:

- 1) $\widehat{f_\alpha}(\lambda) = 1$ для всех $\alpha \in M$;
- 2) $\lim_{\alpha} f_\alpha * f = 0$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ со свойством $\widehat{f}(\lambda) = 0$.

Примерами 0-направленностей в алгебре $L^1(\mathbb{R})$ являются направленности

$$\varphi_\alpha(t) = \begin{cases} (2\alpha)^{-1}, & t \in [-\alpha, \alpha], \\ 0, & t \notin [-\alpha, \alpha], \end{cases} \quad \alpha > 0,$$

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon e^{-\varepsilon t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \varepsilon > 0.$$

Первая из них направлена по возрастанию α , а вторая — по убыванию ε .

Определение 6. Число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ отнесем к *существенному спектру* $\Lambda_{ess}(x)$ вектора x из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля (\mathcal{X}, T) , если существует λ_0 -направленность (f_α) из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, для которой выполнено условие

$$\overline{\lim}_{\alpha} \|f_\alpha x\| > 0. \tag{5}$$

Отметим, что $\Lambda_{ess}(x) \subseteq \Lambda(x)$, $x \in (\mathcal{X}, T)$.

Определение 7. Пусть x — ненулевой вектор из $L^1(\mathbb{R})$ -модуля (\mathcal{X}, T) . Число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ из $\Lambda(x)$ назовем *эргодической точкой* вектора x , если для некоторой λ_0 -направленности из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ существует

$$\lim_{\alpha} f_\alpha x = x_0 \in \mathcal{X}.$$

Множество эргодических точек вектора будем обозначать символом $\Lambda_{erg}(x)$. Если при этом $x_0 \neq 0$, то число λ_0 отнесем к *дискретному спектру* $\Lambda_d(x)$ вектора x . Отметим, что для x_0 выполняется свойство $T(t)x_0 = \lambda_0 x_0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Если же $x_0 = 0$, то число λ_0 отнесем к *непрерывному спектру* $\Lambda_c(x)$ вектора x .



Замечание 2. Из [8, теорема 2.2.7] следует, что предел в формуле (5) не зависит от выбора λ_0 -направленности (f_α) , причем если он существует для некоторой λ_0 -направленности, то он существует и для любых других λ_0 -направленностей. Следовательно, определения дискретного и непрерывного спектров корректны, а знак неравенства (5) не зависит от выбора λ_0 -направленности (f_α) .

Замечание 3. Также из определения 7 следует, что для λ -направленности (f_α) свойство $\lambda \in \Lambda_{erg}(x) \cup (\mathbb{R} \setminus \Lambda(x))$ имеет место тогда и только тогда, когда $\lim_{\alpha} f_\alpha x$ существует хотя бы для одной, а значит, для всех λ -направленностей.

3. СВОЙСТВА МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

Пусть M — некоторое направленное множество, на котором определена ограниченная направленность (e_α) из алгебры $L^1(\mathbb{R})$.

Определение 8. Ограниченная направленность (e_α) из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ называется *ограниченной аппроксимативной единицей* (о.а.е.) в алгебре $L^1(\mathbb{R})$, если выполняются следующие условия:

- 1) $\widehat{e}_\alpha(0) = 1$ для всех $\alpha \in M$;
- 2) $\lim_{\alpha} e_\alpha * f = f$ для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Из леммы 4.3 в [9] следует, что $\lim_{\alpha} e_\alpha * x = x$ для всех $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$. Этот результат будет существенно использоваться при доказательстве следующих двух лемм.

Лемма 5. Для того чтобы функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ принадлежала пространству $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, необходимо и достаточно, чтобы $f * x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\widehat{f}(0) = 0$.

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим функцию $f \in L^1(\mathbb{R})$ вида $f = S(\alpha)g - g$, $g \in L^1(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Данная функция обладает свойством $\widehat{f}(0) = 0$. Согласно тауберовой теореме Винера [13], множество таких функций плотно в максимальном идеале $M = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : \widehat{f}(0) = 0\}$. Поэтому утверждение леммы достаточно доказать для функции f рассматриваемого вида.

Возьмем произвольную функцию $x \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$. Из определения медленно меняющейся относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ функции следует, что $S(\alpha)x - x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, откуда $f * x = (S(\alpha)g - g) * x = g * (S(\alpha)x - x) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$.

Достаточность. Пусть $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ и $f * x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ с $\widehat{f}(0) = 0$. Пусть (e_α) — о.а.е. из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ и $t \in \mathbb{R}$. Из равенств $e_\alpha * (S(t)x - x) = (S(t)e_\alpha - e_\alpha) * x = f_\alpha * x$ и $\widehat{f}_\alpha(0) = 0$ следует, что $e_\alpha * (S(t)x - x) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$. Но в силу того, что $S(t)x - x = \lim_{\alpha} e_\alpha * (S(t)x - x) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, получаем, что $x \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$. \square

Лемма 6. Для того чтобы функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ принадлежала пространству $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, необходимо и достаточно, чтобы $f * x - x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\widehat{f}(0) = 1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$. Пусть f — произвольная функция из $L^1(\mathbb{R})$ со свойством $\widehat{f}(0) = 1$, а (e_α) — о.а.е. из алгебры $L^1(\mathbb{R})$. Справедливо равенство $\lim_{\alpha} e_\alpha * (x - f * x) = x - f * x$. Кроме того,



$e_\alpha * (x - f * x) = (e_\alpha * f - e_\alpha) * x = f_\alpha * x$, где $f_\alpha = e_\alpha * f - e_\alpha$. Учитывая, что $\widehat{f}_\alpha(0) = \widehat{e}_\alpha(0)\widehat{f}(0) - \widehat{e}_\alpha(0) = 0$, из леммы 5 следует, что $f_\alpha * x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, а значит, и $f * x - x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$.

Достаточность. Пусть $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ и $x - f * x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\widehat{f}(0) = 1$. Тогда с учетом того, что $(\widehat{S(t)f})(0) = 1$, имеем $f * (S(t)x - x) = (S(t)f - f) * x = ((S(t)f) * x - x) + (x - f * x) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Поскольку $\widehat{e}_\alpha(0) = 1$, то $\lim_\alpha e_\alpha * (S(t)x - x) = S(t)x - x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для любого $t \in \mathbb{R}$, откуда следует, что $x \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$. \square

Лемма 7. Если $x \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, то множество $\Lambda(x) \setminus \{0\}$ содержится в непрерывном спектре $\Lambda_c(x)$ функции x и $\Lambda_{ess}(x) \subset \{0\}$.

Доказательство. Пусть $0 \neq \gamma_0 \in \Lambda(x)$. Рассмотрим функцию $f \in L^1(\mathbb{R})$, обладающую свойствами $\gamma_0 \notin \text{supp } \widehat{f}$ и $\widehat{f}(0) = 1$. Из леммы 6 следует, что функция $x_0 = x - f * x$ принадлежит пространству $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$. Следовательно, для любой γ_0 -направленности (f_α) из $L^1(\mathbb{R})$ справедлива цепочка равенств $0 = \lim_\alpha f_\alpha * x_0 = \lim_\alpha (f_\alpha * x - f_\alpha * f * x) = \lim_\alpha f_\alpha * x$. В соответствии с определением 7 это означает, что $\gamma_0 \in \Lambda_c(x)$. \square

Теорема 3. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ принадлежит подпространству $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ тогда и только тогда, когда $\Lambda(\tilde{x}) = \Lambda(\tilde{x}, \tilde{S}) \subset \{0\}$.

Доказательство. Из леммы 5 следует, что функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ принадлежит подпространству $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ тогда и только тогда, когда $f * x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ с $\widehat{f}(0) = 0$. Значит, $x \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ тогда и только тогда, когда $f * \tilde{x} = \tilde{0}$, $\tilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X) / \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ с $\widehat{f}(0) = 0$. Непосредственно из определения 3 следует, что $x \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ тогда и только тогда, когда $\Lambda(\tilde{x}) \subset \{0\}$. \square

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = y(t), \quad t \in \mathbb{J}, \tag{6}$$

где $y \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ и $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ — генератор (инфинитезимальный оператор) сильно непрерывной ограниченной полугруппы операторов $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$

Определение 9. Непрерывная функция $x : \mathbb{J} \rightarrow X$ называется *слабым решением* (mild solution) уравнения (6) (см. [14]), если для всех $s \leq t$ из \mathbb{J} имеет место равенство

$$x(t) = T(t-s)x(s) + \int_s^t T(t-\tau)y(\tau)d\tau, \quad s \leq t, \quad s, t \in \mathbb{J}. \tag{7}$$

При $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$ равенство должно быть выполнено при $s = 0$ и $t \geq 0$. Ясно, что функция x равномерно непрерывна.



Уравнение (6) запишем в виде $\mathcal{L}x = y$, где оператор $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset C_b(\mathbb{J}, X) \rightarrow C_b(\mathbb{J}, X)$ имеет вид $\mathcal{L} = \frac{d}{dt} - A$ (см. [15–19]). Функция $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$ принадлежит области определения $D(\mathcal{L})$ оператора \mathcal{L} , если существует функция $y \in C_b(\mathbb{J}, X)$ такая, что для всех $s \leq t$ из \mathbb{J} верны равенства (7).

Лемма 8. Пусть спектр генератора A полугруппы T удовлетворяет условию (1). Тогда каждое ограниченное на \mathbb{J} слабое решение x_0 уравнения (6) является медленно меняющейся на бесконечности функцией относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$.

Доказательство. Пусть сначала $\mathbb{J} = \mathbb{R}$. Число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ выберем таким образом, чтобы $\lambda_0 > \alpha$, где число α удовлетворяет условию $\|T(t)\| \leq Me^{\alpha t}$, $t \geq 0$, для некоторой постоянной $M > 0$. Тогда согласно [15] оператор $\mathcal{L} - \lambda_0 I$ непрерывно обратим и обратный оператор $B = (\mathcal{L} - \lambda_0 I)^{-1} \in \text{End } C_b(\mathbb{R}, X)$ представим в виде $Bx = G_0 * x$, $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$, где $G_0(\tau) = T(\tau)e^{-\lambda_0 \tau}$, $\tau \geq 0$, и $G_0(\tau) = 0$ для $\tau < 0$. Следовательно, оператор B перестановочен с оператором свертки, т.е. $B(f * x) = f * Bx$, для любых $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$. Таким же свойством обладает и оператор \mathcal{L} . В частности, $f * x_0 \in D(\mathcal{L})$ и для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ имеет место равенство

$$\mathcal{L}(f * x_0) = f * y \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X). \quad (8)$$

Рассмотрим произвольное ненулевое число $\mu_0 \in \mathbb{R}$. В силу условия (1) существует $\delta > 0$ такое, что отрезок $[\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta]$ не содержит точки 0. Рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию $\widehat{f}_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, для которой $\widehat{f}_0(\mu_0) \neq 0$ и $\text{supp } \widehat{f}_0 \subset [\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta]$. Тогда она является преобразованием Фурье некоторой функции $f_0 \in L^1(\mathbb{R})$, а функция

$$\widehat{F}(\lambda) = \begin{cases} \widehat{f}_0(\lambda)(i\lambda I - A)^{-1}, & \lambda \in [\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta], \\ 0, & \lambda \notin [\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta] \end{cases}$$

является преобразованием Фурье некоторой суммируемой функции $F : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } X$. Тогда из (8) получаем, что $F * \mathcal{L}(f_0 * x_0) = F * f_0 * y \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$.

Отметим, что $f_0 * x_0$ (ввиду ее бесконечной дифференцируемости) есть классическое решение уравнения (6) с правой частью $f_0 * y$. Из последнего равенства следует, что $f_0 \widetilde{x}_0 = 0$ для $\widetilde{x}_0 = x_0 + \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$. Следовательно, $\mu_0 \notin \Lambda(\widetilde{x}_0)$. Ввиду произвольности выбора числа $\mu_0 \neq 0$ из \mathbb{R} получаем, что $\Lambda(\widetilde{x}_0) \subset \{0\}$. Тогда из условия 1) леммы 3 следует, что $x_0 \in \mathcal{C}_{st\infty}(\mathbb{R}, X)$.

Пусть теперь $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$. Рассмотрим непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, обладающую свойствами $\text{supp } \varphi \subset [1, \infty)$ и $\varphi(t) = 1$ для всех $t \in [2, \infty)$. Далее символом φx_0 обозначена функция, равная нулю на промежутке $(-\infty, 0]$ и являющаяся произведением функций φ и x_0 на \mathbb{R}_+ . Но тогда из определения оператора \mathcal{L} следует, что $\varphi x_0 \in D(\mathcal{L})$ и $\mathcal{L}(\varphi x_0) = \dot{\varphi} x_0 + \varphi y \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, где функция φy считается равной нулю на промежутке $(-\infty, 0]$. При этом оператор \mathcal{L} считается действующим в пространстве $C_b(\mathbb{R}, X)$. Таким образом, случай $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$ сводится к случаю $\mathbb{J} = \mathbb{R}$. \square

Доказательство теоремы 1. Поскольку каждая из функций $\varphi_x(t) = T(t)x$, $t \geq 0$, $x \in X$, принадлежащая пространству $C_{b,u}(\mathbb{R}_+, X)$, является слабым решением уравнения (6), где $y = 0$, то из леммы 8 следует, что все эти функции являются медленно меняющимися на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+, X)$. Значит,



согласно определению 2, полугруппа $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$ является медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Доказательство теоремы 2 следует из леммы 4.

Благодарности. Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00097), работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732А).

Библиографический список

1. Баскаков А. Г., Калужина Н. С. Теорема Бёрлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 5. С. 643–661. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8963>
2. Струкова И. И. Спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций и банаховы пределы // Вестн. ВГУ. Сер. Физика. Математика. 2015. № 3. С. 161–165.
3. Baskakov A., Strukova I. Harmonic analysis of functions periodic at infinity // Eurasian Math. J. 2016. Vol. 7, № 4. P. 9–29.
4. Струкова И. И. О теореме Винера для периодических на бесконечности функций // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 186–198. DOI: <https://doi.org/10.17377/smzh.2016.57.114>
5. Струкова И. И. О гармоническом анализе периодических на бесконечности функций // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 28–38.
6. Струкова И. И. Гармонический анализ периодических на бесконечности функций в пространствах Степанова // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 172–182. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-172-182>
7. Баскаков А. Г., Калужина Н. С., Поляков Д. М. Медленно меняющиеся на бесконечности полугруппы операторов // Изв. вузов. Матем. 2014. № 7. С. 3–14. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X14070019>
8. Баскаков А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // СМФН. 2004. Т. 9. С. 3–151. DOI: <https://doi.org/10.1007%2Fs10958-006-0286-4>
9. Баскаков А. Г., Криштал И. А. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, № 3. С. 3–54. DOI: <https://doi.org/10.4213/im639>
10. Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж : Изд-во Воронеж. ун-та, 1987. 165 с.
11. Баскаков А. Г. Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений // Матем. заметки. 1978. Т. 24, № 2. С. 195–206.
12. Баскаков А. Г. Неравенства бернштейновского типа в абстрактном гармоническом анализе // Сиб. матем. журн. 1979. Т. 20, № 5. С. 942–952.
13. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М. : Физматлит, 1963. 256 с.
14. Chicone C., Latushkin Y. Evolution Semigroups in Dynamical Systems and Differential Equations // Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 70. 361 p.
15. Баскаков А. Г. Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прил. 1996. Т. 30, вып. 3. С. 1–11.
16. Баскаков А. Г. Линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и полугруппы разностных операторов // Матем. заметки. 1996. Т. 59, № 6. С. 811–820.



17. Баскаков А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений // Изв. РАН. Сер. матем. 2009. Т. 73, № 2. С. 3–68. DOI: <https://doi.org/10.4213/im2643>
18. Баскаков А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // УМН. 2013. Т. 68, № 1. С. 77–128. DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9505>
19. Баскаков А. Г. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве // Матем. заметки. 2015. Т. 97, № 2. С. 174–190. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10285>

Образец для цитирования:

Струков В. Е., Струкова И. И. Гармонический анализ медленно меняющихся на бесконечности полугрупп операторов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 2. С. 152–163. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-152-163>

Harmonic Analysis of Operator Semigroups Slowly Varying at Infinity

V. E. Strukov, I. I. Strukova

Victor E. Strukov, <https://orcid.org/0000-0002-5113-2375>, Voronezh State University, 1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394036, Russia, sv.post.of.chaos@gmail.com

Irina I. Strukova, <https://orcid.org/0000-0003-2355-0091>, Voronezh State University, 1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394036, Russia, irina.k.post@yandex.ru

The article focuses on studying of strongly continuous bounded operator semigroups. In the space of uniformly continuous functions with values in a complex Banach space we consider the subspace of integrally vanishing at infinity functions. This subspace includes the subspace of vanishing at infinity functions, but it is wider. We study the properties of the subspace under consideration. We introduce the definition of slowly varying at infinity (with regard to the subspace of integrally vanishing at infinity functions) function and study the conditions under which a uniformly continuous function belongs to this type. We also introduce the definition of slowly varying at infinity (with regard to the subspace of integrally vanishing at infinity functions) operator semigroup, study its properties and derive the conditions under which a strongly continuous bounded operator semigroup belongs to this type. The results derived in the article might be useful for research of stabilization of parabolic equations solutions with unlimited increase of time.

Keywords: operator semigroup, slowly varying at infinity function, slowly varying at infinity operator semigroup, Beurling spectrum, Banach module.

Received: 05.05.2018 / Accepted: 03.02.2019 / Published online: 28.05.2019

Acknowledgements: The first author was supported by Russian Foundation for Basic Research (project No. 18-31-00097) and the second author was supported by Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-01-00732A).

References

1. Baskakov A.G., Kaluzhina N.S. Beurling's theorem for functions with essential spectrum from homogeneous spaces and stabilization of solutions of parabolic equations. *Math. Notes*, 2012, vol. 92, no. 5, pp. 587–605. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434612110016>



2. Strukova I. I. Spectra of algebras of slowly varying and periodic at infinity functions and Banach limits. *Proceedings of Voronezh State University. Ser. Physics. Mathematics*, 2015, no. 3, pp. 161–165 (in Russian).
3. Baskakov A., Strukova I. Harmonic analysis of functions periodic at infinity. *Eurasian Math. J.*, 2016, vol. 7, no. 4, pp. 9–29.
4. Strukova I. I. About Wiener theorem for periodic at infinity functions. *Siberian Math. J.*, 2016, vol. 57, iss. 1, pp. 145–154. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446616010146>
5. Strukova I. I. About harmonic analysis of periodic at infinity functions. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 1, pp. 28–38 (in Russian).
6. Strukova I. I. Harmonic analysis of periodic at infinity functions from Stepanov spaces. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 172–182 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-172-182>
7. Baskakov A. G., Kaluzhina N. S., Polyakov D. M. Slowly varying at infinity operator semigroups. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2014, vol. 58, no. 7, pp. 1–10. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X14070019>
8. Baskakov A. G. Theory of representations of Banach algebras, and abelian groups and semigroups in the spectral analysis of linear operators. *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2006, vol. 137, no. 4, pp. 4885–5036. DOI: <https://doi.org/10.1007%2Fs10958-006-0286-4>
9. Baskakov A. G., Krishtal I. A. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. *Izv. Math.*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 439–486. DOI: <https://doi.org/10.1070/IM2005v069n03ABEH000535>
10. Baskakov A. G. *Garmonicheskij analiz linejnykh operatorov* [Harmonic analysis of linear operators]. Voronezh, VSU Publ., 1987. 165 p. (in Russian).
11. Baskakov A. G. Spectral tests for the almost periodicity of the solutions of functional equations. *Math. Notes*, 1978, vol. 24, no. 1–2, pp. 606–612. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01105312>
12. Baskakov A. G. Bernšteĭn-type inequalities in abstract harmonic analysis. *Siberian Math. J.*, 1979, vol. 20, no. 5, pp. 665–672.
13. Wiener N. *The Fourier Integral and Certain of its Applications*. Cambridge Univ. Press, reprint by Dover, CUP Archive, 1988, 201 p. (Russ. ed.: Moscow, Fizmatlit, 1963. 256 p.).
14. Chicone C., Latushkin Y. Evolution Semigroups in Dynamical Systems and Differential Equations. *Amer. Math. Soc.*, 1999, vol. 70, 361 p.
15. Baskakov A. G. Semigroups of difference operators in spectral analysis of linear differential operators. *Funct. Anal. Its Appl.*, 1996, vol. 30, iss. 3, pp. 149–157. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02509501>
16. Baskakov A. G. Linear differential operators with unbounded operator coefficients and semigroups of bounded operators. *Math. Notes*, 1996, vol. 59, no. 6, pp. 586–593. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02307207>
17. Baskakov A. G. Spectral analysis of differential operators with unbounded operator-valued coefficients, difference relations and semigroups of difference relations. *Izv. Math.*, 2009, vol. 73, no. 2, pp. 215–278. DOI: <https://doi.org/10.1070/IM2009v073n02ABEH002445>
18. Baskakov A. G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. *Russian Math. Surveys*, 2013, vol. 68, no. 1, pp. 69–116. DOI: <https://doi.org/10.1070/RM2013v068n01ABEH004822>
19. Baskakov A. G. Harmonic and spectral analysis of power bounded operators and bounded semigroups of operators on Banach spaces. *Math. Notes*, 2015, vol. 97, no. 2, pp. 164–178. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434615010198>

Cite this article as:

Strukov V. E., Strukova I. I. Harmonic Analysis of Operator Semigroups Slowly Varying at Infinity. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 2, pp. 152–163 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-152-163>



УДК 517.968.4

О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на прямой

Х. А. Хачатрян

Хачатрян Хачатур Агавардович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики НАН Армении, Республика Армения, 0019, Ереван, просп. Маршала Баграмяна, д. 24/5, Khach82@rambler.ru

В последние годы возрос интерес к нелинейным интегральным уравнениям типа свертки в связи с их применением в различных областях математической физики, в частности, в p -адической теории открыто-замкнутой струны, кинетической теории газов, в теории переноса излучения в спектральных линиях. Работа посвящена вопросам построения нетривиальных решений и изучению их асимптотического поведения для одной системы нелинейных интегральных уравнений типа свертки с симметричным ядром на всей числовой оси. Результаты работы базируются на сочетании методов построения инвариантных конусных отрезков для соответствующего нелинейного монотонного оператора с методами теории линейных операторов типа свертки. Сформулирована и доказана конструктивная теорема о существовании двух асимптотически разных однопараметрических семейств положительных и ограниченных решений, что является основным отличием от ранее полученных результатов. Более того, из структуры указанной системы нелинейных уравнений следует, что всевозможные сдвиги построенных решений также удовлетворяют данной системе. Особое внимание уделено изучению асимптотического поведения этих решений на концах прямой. Вычислены пределы построенных решений в $\pm\infty$ и доказана принадлежность построенных решений пространствам $L_1(0, +\infty)$ и $L_1(-\infty, 0)$ соответственно. В конце работы приводятся конкретные частные примеры указанных систем уравнений, удовлетворяющих всем условиям основной теоремы.

Ключевые слова: система уравнений, вектор-функция, спектральный радиус, монотонность, последовательные приближения, ядро, теорема Фробениуса – Перрона.

Поступила в редакцию: 29.10.2018 / Принята: 26.03.2019 / Опубликовано онлайн: 28.05.2019

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-164-181>

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Работа посвящена исследованию следующей системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на всей прямой:

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} K_{ij}(x-t) G_j(f_j(t)) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

относительно искомой вектор-функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$ (T — знак транспонирования). Матричное ядро $K(x) = (K_{ij}(x))_{i,j=1}^{n \times n}$ — определенная на \mathbb{R} непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $K_{ij}(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $K_{ij} \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, где $L_1(\mathbb{R})$ — пространство суммируемых на \mathbb{R} функций, а $M(\mathbb{R})$ — пространство существенно ограниченных функций на \mathbb{R} ;



II) $r(A) = 1$, где $r(A)$ — спектральный радиус матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n \times n}$:

$$a_{ij} := \int_{\mathbb{R}} K_{ij}(x) dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, n;$$

III) $K_{ij}(-x) = K_{ij}(x)$, $x \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $K_{ij}(x) \downarrow$ по x на \mathbb{R}^+ , $i, j = 1, 2, \dots, n$;

IV) $\int_0^{\infty} x K_{ij}(x) dx < +\infty$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Система (1), кроме чисто теоретического интереса, имеет приложения в различных областях естествознания. В частности, такие уравнения возникают в p -адической теории струны, в теории переноса излучения, в кинетической теории газов, в теории марковских процессов, в теории географического распространения эпидемии (см. [1–12]).

В линейном случае система (1) исследовалась при $\nu(K_{ij}) := \int_{\mathbb{R}} x K_{ij}(x) dx \neq 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) в работах [13–15], а в нелинейном случае она исследовалась, когда $n = 1$, нелинейность зависит также от переменной t и $\nu(K_{ij}) := \nu(K) \neq 0$ (см. [16]).

В настоящей работе при достаточно общих условиях на $\{G_j\}_{j=1}^n$ мы будем заниматься построением двух асимптотически разных однопараметрических семейств положительных и ограниченных решений для систем (1) в случае, когда выполняются условия I)–IV). В конце будут приведены частные примеры функций $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n \times n}$ и $\{G_i(u)\}_{i=1}^n$, имеющих и теоретический, и прикладной интерес.

Для формулировки основной теоремы настоящей работы нам понадобятся ниже-приведенные обозначения и вспомогательные факты. Из условия II) согласно теореме Фробениуса – Перрона (см. [17]) существует вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$ с положительными координатами η_i , $i = 1, 2, \dots, n$, такой, что

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \eta_j = \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{2}$$

Пусть $g_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, n$ — непрерывные и нечетные функции, удовлетворяющие следующим условиям (рис. 1):

A) $g_j(u) \uparrow$ по u на $[-\eta_j^*, \eta_j^*]$, $j = 1, 2, \dots, n$, где

$$\eta_j^* = \frac{\eta_j}{\min_{1 \leq j \leq n} \eta_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n; \tag{3}$$

B) функции $\{g_j(u)\}_{j=1}^n$ выпуклы вверх на отрезках $[0, \eta_j^*]$, $j = 1, 2, \dots, n$ соответственно;

C) $g_j(\eta_j^*) = \eta_j^*$, $j = 1, 2, \dots, n$, причем η_j^* является первым положительным корнем уравнения $g_j(u) = u$, $j = 1, 2, \dots, n$.

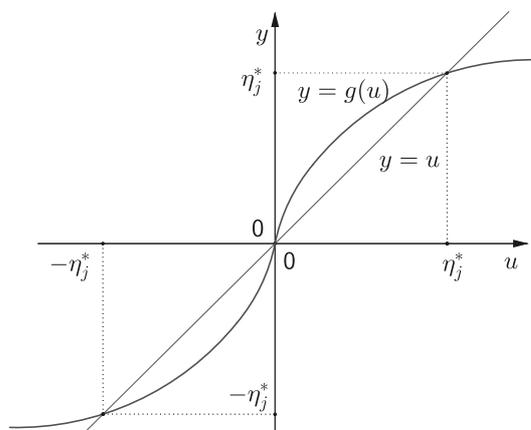


Рис. 1. Эскиз графика функции $y = g_j(u)$ на $[-\eta_j^*, \eta_j^*]$
 Fig. 1. Sketch of $y = g_j(u)$ function graph on $[-\eta_j^*, \eta_j^*]$

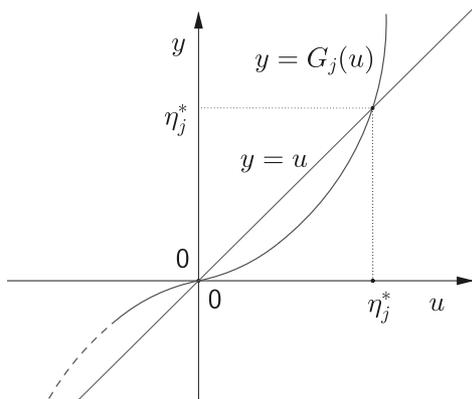


Рис. 2. Эскиз графика функции $y = G_j(u)$ на $[0, \eta_j^*]$
 Fig. 2. Sketch of $y = G_j(u)$ function graph on $[0, \eta_j^*]$

Предположим, что $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$ допускают следующие представления (рис. 2):

$$G_j(u) = \eta_j^* - g_j(\eta_j^* - u), \quad u \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполняются условия I)–IV), A)–C) и (4). Тогда система (1) обладает двумя покомпонентно положительными решениями $f^*(x) = (f_1^*(x), f_2^*(x), \dots, f_n^*(x))^T$, $\tilde{f}(x) = (\tilde{f}_1(x), \tilde{f}_2(x), \dots, \tilde{f}_n(x))^T$ (рис. 3), причем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_j^*(x) &= 0, & \lim_{x \rightarrow -\infty} f_j^*(x) &= 2\eta_j^*, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{f}_j(x) &= 2\eta_j^*, & \lim_{x \rightarrow -\infty} \tilde{f}_j(x) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (5)$$

$$f_j^* \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad \tilde{f}_j \in L_1(\mathbb{R}^-), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

$$f_j^*(x) \downarrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}, \quad \tilde{f}_j(x) \uparrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

$$f_j^*, \tilde{f}_j \in C(\mathbb{R}) \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

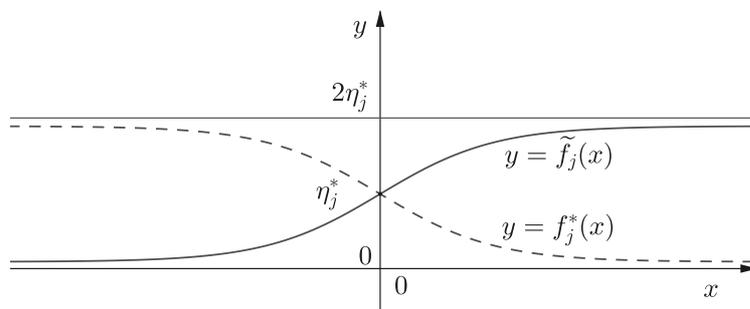


Рис. 3. Эскизы графиков функций $y = f_j^*(x)$ и $y = \tilde{f}_j(x)$
 Fig. 3. Sketches of $y = f_j^*(x)$ and $y = \tilde{f}_j(x)$ functions graphs

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Шаг 1. В силу непрерывности и монотонности функций $\{g_j(u)\}_{j=1}^n$ на отрезках $[-\eta_j^*, \eta_j^*]$, $j = 1, 2, \dots, n$ существуют обратные к $\{g_j(u)\}_{j=1}^n$ функции

$$Q_j := g_j^{-1}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Наряду с системой (1) рассмотрим следующую вспомогательную систему:

$$Q_i(\varphi_i(x)) = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} K_{ij}(x-t)\varphi_j(t)dt, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R} \quad (10)$$



относительно вектор-функции $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))^T$. Прямой проверкой можно убедиться, что если $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^n$ являются непрерывными и ограниченными решениями системы

$$Q_i(\psi_i(x)) = \sum_{j=1}^n \int_0^{\infty} (K_{ij}(x-t) - K_{ij}(x+t)) \psi_j(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad (11)$$

и

$$0 \leq \psi_i(x) \leq \eta_i^*, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

то их нечетные продолжения на $\mathbb{R}^- := \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \psi_i(x), & \text{если } x \in \mathbb{R}^+, \\ -\psi_i(-x), & \text{если } x \in \mathbb{R}^-, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

будут удовлетворять системе (10), при этом в силу непрерывности ядерных функций $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n \times n}$ и нелинейности $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ функции $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ будут непрерывными на множестве \mathbb{R} и

$$-\eta_i^* \leq \varphi_i(x) \leq \eta_i^* \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Шаг 2. Пусть $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ — числовые параметры из промежутка $(0, 1)$. Рассмотрим следующие характеристические уравнения:

$$\sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^{\infty} K_{ij}(t) e^{-pt} dt = \frac{\varepsilon_i \eta_i^*}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Ниже убедимся, что для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ характеристическое уравнение (14) обладает единственным положительным решением p_i .

Действительно, рассмотрим функции

$$\chi_i(p) = \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^{\infty} K_{ij}(t) e^{-pt} dt - \frac{\varepsilon_i \eta_i^*}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

определенные на множестве $[0, +\infty)$. Заметим, что при любом $i = 1, 2, \dots, n$

$$\chi_i(p) \downarrow \text{ по } p \text{ на } [0, +\infty), \quad (15)$$

$$\chi_i(0) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_{ij} \eta_j^* - \frac{1}{2} \varepsilon_i \eta_i^* = \frac{1 - \varepsilon_i}{2} \eta_i^* > 0, \quad \chi_i(+\infty) = -\frac{\varepsilon_i \eta_i^*}{2} < 0, \quad (16)$$

$$\chi_i \in C[0, +\infty). \quad (17)$$

Из (15)–(17) в силу теоремы Больцано – Коши (см. [18]) следует, что для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ уравнение (14) имеет единственное решение $p_i > 0$. Обозначим через

$$p^* = \min\{p_1, p_2, \dots, p_n\}. \quad (18)$$



Совершая аналогичные рассуждения, как при доказательстве леммы 2.1 и формулы (2.7) из работы [19], приходим к следующему неравенству:

$$\sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^{\infty} (K_{ij}(x-t) - K_{ij}(x+t)) (1 - e^{-p^*t}) dt \geq \eta_i^* \varepsilon_i (1 - e^{-p^*x}), \quad (19)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad x \geq 0.$$

Шаг 3. Для системы (11) рассмотрим следующие итерации:

$$Q_i(\psi_i^{(m+1)}(x)) = \sum_{j=1}^n \int_0^{\infty} (K_{ij}(x-t) - K_{ij}(x+t)) \psi_j^{(m)}(t) dt, \quad (20)$$

$$\psi_i^{(0)}(x) = \eta_i^*, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Легко можно убедиться, что

$$\psi_i^{(m)}(x) \downarrow \text{ по } m. \quad (21)$$

Ниже индукцией по m убедимся, что

$$\psi_i^{(m)}(x) \geq \min_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{\xi_j}{\eta_j^*} \right) \eta_i^* (1 - e^{-p^*x}), \quad x \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (22)$$

где ξ_i — единственный корень уравнения $Q_i(u) = \varepsilon_i u$. При $m = 0$ неравенство (22) сразу следует из цепочки неравенств:

$$\min_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{\xi_j}{\eta_j^*} \right) \eta_i^* (1 - e^{-p^*x}) \leq \eta_i^* \min_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{\xi_j}{\eta_j^*} \right) \leq \eta_i^* = \psi_i^{(0)}(x),$$

ибо $\xi_i \leq \eta_i^*$, $i = 1, 2, \dots, n$ (рис. 4).

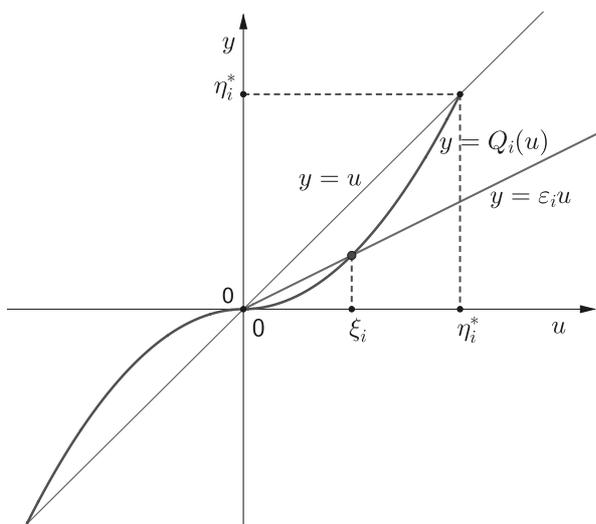


Рис. 4. Эскиз графика функции $y = Q_i(u)$ на $[0, \eta_i^*]$

Fig. 4. Sketch of $y = Q_i(u)$ function graph on $[0, \eta_i^*]$

Пусть (22) имеет место при некотором $m \in \mathbb{N}$. Тогда, учитывая (19) и выпуклость вниз функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ на отрезках $[0, \eta_i^*]$, из (20) будем иметь:

$$Q_i(\psi_i^{(m+1)}(x)) \geq \min_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{\xi_j}{\eta_j^*} \right) \varepsilon_i \eta_i^* (1 - e^{-p^*x}), \quad (23)$$

$$x \geq 0.$$

Так как

$$0 \leq \min_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{\xi_j}{\eta_j^*} \right) \eta_i^* (1 - e^{-p^*x}) \leq \xi_i, \quad (24)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

то с учетом выпуклости вниз функции Q_i на отрезке $[0, \eta_i^*]$ из (23) и (24) получаем



$$Q_i(\psi_i^{(m+1)}(x)) \geq Q_i\left(\min_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{\xi_j}{\eta_j^*}\right) \eta_i^* (1 - e^{-p^*x})\right), \quad (25)$$

ибо $Q_i(u) \leq \varepsilon_i u$, $u \in [0, \xi_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

В силу монотонности функций Q_i на отрезке $[-\eta_i^*, \eta_i^*]$ из (25) приходим к следующей оценке снизу:

$$\psi_i^{(m+1)}(x) \geq \min_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{\xi_j}{\eta_j^*}\right) \eta_i^* (1 - e^{-p^*x}), \quad x \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (26)$$

Индукцией по m нетрудно доказать, что

$$\psi_i^{(m)} \in C(\mathbb{R}^+), \quad m = 0, 1, 2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (27)$$

Из (21) и (22) заключаем, что последовательность непрерывных на \mathbb{R}^+ вектор-функций $\psi^{(m)}(x) = (\psi_1^{(m)}(x), \psi_2^{(m)}(x), \dots, \psi_n^{(m)}(x))^T$, $m = 0, 1, 2, \dots$, имеет поточечный предел, когда $m \rightarrow \infty$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \psi_i^{(m)}(x) = \psi_i(x), \quad x \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (28)$$

причем предельная вектор-функция $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x))^T$ согласно теореме Б. Леви (см. [20]) и непрерывности функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ удовлетворяет системе (11). Из (21) и (22) для предельной вектор-функции приходим также к следующим оценкам:

$$\min_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{\xi_j}{\eta_j^*}\right) \eta_i^* (1 - e^{-p^*x}) \leq \psi_i(x) \leq \eta_i^*, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (29)$$

Из непрерывности функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ на отрезках $\{[-\eta_i^*, \eta_i^*]\}_{i=1}^n$ и ядерных функций $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ на \mathbb{R} с учетом (29) и (11) следует непрерывность функций $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^n$ на \mathbb{R}^+ .

Шаг 4. Записывая итерации (20) в следующем виде:

$$Q_i(\psi_i^{(m+1)}(x)) = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^x K_{ij}(\tau) \psi_j^{(m)}(x - \tau) d\tau - \sum_{j=1}^n \int_0^{\infty} K_{ij}(x + t) \psi_j^{(m)}(t) dt,$$

$$\psi_i^{(0)}(x) = \eta_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

и учитывая монотонность ядер $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$, индукцией по m легко можно доказать, что

$$\psi_i^{(m)}(x) \uparrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (30)$$

Из (30) сразу следует, что

$$\psi_i(x) \uparrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (31)$$

Таким образом, в силу (31), (29) и непрерывности функций $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^n$ на \mathbb{R}^+ можем утверждать, что существует предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi_i(x) = \lambda_i < +\infty, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (32)$$



причем

$$\min_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{\xi_j}{\eta_j^*} \right) \eta_i^* \leq \lambda_i \leq \eta_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (33)$$

С другой стороны, используя известное свойство операции свертки о предельном переходе под знаком интеграла, с учетом (32) будем иметь (см. [13, 14])

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \int_0^{\infty} K_{ij}(x-t) \psi_j(t) dt = \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (34)$$

Заметим, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \int_0^{\infty} K_{ij}(x+t) \psi_j(t) dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (35)$$

Действительно, с учетом (29) имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \sum_{j=1}^n \int_0^{\infty} K_{ij}(x+t) \psi_j(t) dt \right| \leq \sum_{j=1}^n \int_0^{\infty} |K_{ij}(x+t)| |\psi_j(t)| dt \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_x^{\infty} K_{ij}(\tau) d\tau \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Итак, учитывая (34), (35), (30), непрерывность функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ на отрезках $\{[-\eta_i^*, \eta_i^*]\}_{i=1}^n$ и переходя к пределу в (11), когда $x \rightarrow +\infty$, приходим к следующей системе нелинейных алгебраических уравнений:

$$Q_i(\lambda_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (36)$$

относительно элементов $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$, удовлетворяющих двойным неравенствам (33).

Шаг 5. Во-первых, прямой проверкой можно убедиться, что числа $\lambda_i = \eta_i^*$, ($i = 1, 2, \dots, n$) удовлетворяют системе (36). Ниже докажем, что система (36) в классе векторов

$$\mathfrak{M} := \left\{ c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T : \min_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{\xi_j}{\eta_j^*} \right) \eta_i^* \leq c_i \leq \eta_i^* \right\}$$

обладает единственным решением $\eta^* = (\eta_1^*, \eta_2^*, \dots, \eta_n^*)^T$. Предположим обратное. Тогда

$$B := \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\eta_i^* - \lambda_i}{\eta_i^*} = \frac{\eta_{i_0}^* - \lambda_{i_0}}{\eta_{i_0}^*} > 0$$

и $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{i_0}, \lambda_{i_0+1}, \dots, \lambda_n)^T$ является решением системы (36). Из выпуклости вниз функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ на отрезках $\{[0, \eta_i^*]\}_{i=1}^n$ сразу следует, что (рис. 5)

$$Q_{i_0}(\lambda_{i_0}) \leq \frac{\eta_{i_0}^* - Q_{i_0}(\delta_{i_0}^*)}{\eta_{i_0}^* - \delta_{i_0}^*} \lambda_{i_0} + \eta_{i_0}^* \frac{Q_{i_0}(\delta_{i_0}^*) - \delta_{i_0}^*}{\eta_{i_0}^* - \delta_{i_0}^*}, \quad (37)$$



где

$$\delta_{i_0}^* := \min_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{\xi_j}{\eta_j^*} \right) \eta_{i_0}^* \leq \xi_{i_0} < \eta_{i_0}^*. \tag{38}$$

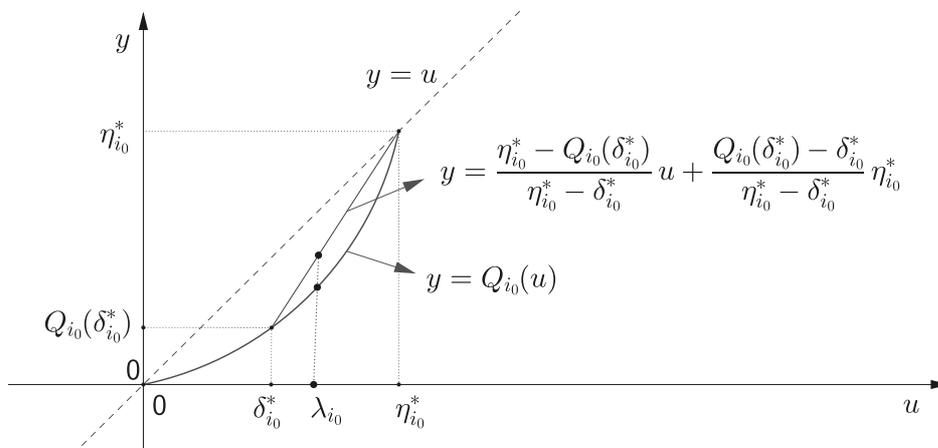


Рис. 5. Эскиз графика функции $y = Q_{i_0}(u)$ на $[0, \eta_{i_0}^*]$

Fig. 5. Sketch of $y = Q_{i_0}(u)$ function graph on $[0, \eta_{i_0}^*]$

С другой стороны, из (36) в силу теоремы Фробениуса – Перрона следует, что

$$0 < \eta_{i_0}^* - Q_{i_0}(\lambda_{i_0}) = \sum_{j=1}^n a_{i_0j} (\eta_j^* - \lambda_j) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{\eta_j^* - \lambda_j}{\eta_j^*} \right) \eta_{i_0}^* = B \cdot \eta_{i_0}^*. \tag{39}$$

Из (37) следует, что

$$\eta_{i_0}^* - Q_{i_0}(\lambda_{i_0}) \geq (\eta_{i_0}^* - \lambda_{i_0}) \frac{\eta_{i_0}^* - Q_{i_0}(\delta_{i_0}^*)}{\eta_{i_0}^* - \delta_{i_0}^*}. \tag{40}$$

Оценки (39) и (40) влекут за собой следующее неравенство:

$$B \geq \frac{\eta_{i_0}^* - \lambda_{i_0}}{\eta_{i_0}^*} \cdot \frac{\eta_{i_0}^* - Q_{i_0}(\delta_{i_0}^*)}{\eta_{i_0}^* - \delta_{i_0}^*},$$

из которого следует, что

$$B = \frac{\eta_{i_0}^* - \lambda_{i_0}}{\eta_{i_0}^*} \leq \frac{\eta_{i_0}^* - \delta_{i_0}^*}{\eta_{i_0}^* - Q_{i_0}(\delta_{i_0}^*)} \cdot B \leq \rho \cdot B, \tag{41}$$

где

$$\rho := \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{\eta_i^* - \delta_i^*}{\eta_i^* - Q_i(\delta_i^*)} \right) < 1.$$

Из (41) приходим к противоречию. Таким образом, $\lambda_i = \eta_i^*$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Шаг 6. На этом шаге докажем, что

$$\eta_i^* - \psi_i \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{42}$$

С этой целью сперва индукцией по m убедимся, что

$$\eta_i^* - \psi_i^{(m)} \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad m = 0, 1, 2, \dots \tag{43}$$



В случае $m = 0$ включение (43) сразу следует из (20). Предположим, что (43) имеет место при некотором $m \in \mathbb{N}$. Тогда, принимая во внимание (29) и простое неравенство $Q_i(u) \leq u$, для всех $u \in [0, \eta_i^*]$ на основании теоремы Фробениуса – Перрона из (20) будем иметь

$$\begin{aligned} 0 \leq \eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x) &\leq \eta_i^* - Q_i(\psi_i^{(m+1)}(x)) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \eta_j^* - \\ &- \sum_{j=1}^n \int_0^\infty K_{ij}(x-t) \psi_j^{(m)}(t) dt + \sum_{j=1}^n \int_0^\infty K_{ij}(x+t) \psi_j^{(m)}(t) dt \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_0^\infty K_{ij}(x-t) (\eta_j^* - \psi_j^{(m)}(t)) dt + 2 \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_x^\infty K_{ij}(t) dt =: J_i + I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Так как $K_{ij} \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $\eta_j^* - \psi_j^{(m)} \in L_1(\mathbb{R}^+)$, то $J_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$. С другой стороны, поскольку $\int_0^\infty x K_{ij}(x) dx < +\infty$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ (см. условие IV)), то в силу теоремы Фубини $I_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$. Следовательно, $J_i + I_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$. Из полученного неравенства

$$0 \leq \eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x) \leq J_i + I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

с учетом вышесказанного получаем, что

$$\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)} \in L_1(\mathbb{R}^+).$$

Теперь докажем следующую априорную оценку снизу:

$$\eta_i^* - Q_i(\psi_i^{(m+1)}(x)) \geq (\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)) \frac{\eta_i^* - Q_i(\alpha_i)}{\eta_i^* - \alpha_i}, \quad x \geq 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (44)$$

где

$$\alpha_i := \min_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{\xi_j}{\eta_j^*} \right) \eta_i^* (1 - e^{-p^*}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (45)$$

Для простоты дальнейшего изложения обозначим через

$$\gamma_i := \frac{\eta_i^* - Q_i(\alpha_i)}{\eta_i^* - \alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Сперва заметим, что из (29) следует:

$$\eta_i^* \geq \psi_i^{(m+1)} \geq \alpha_i > 0, \quad x \geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (46)$$

В силу выпуклости вниз функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ на отрезках $\{[0, \eta_i^*]\}_{i=1}^n$ будем иметь

$$\begin{aligned} Q_i(\psi_i^{(m+1)}(x)) &\leq \frac{\eta_i^* - Q_i(\alpha_i)}{\eta_i^* - \alpha_i} \psi_i^{(m+1)}(x) + \eta_i^* \frac{Q_i(\alpha_i) - \alpha_i}{\eta_i^* - \alpha_i}, \\ x \geq 1, \quad i &= 1, 2, \dots, n, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

откуда приходим к (44).



Теперь проинтегрируем по x в пределах от 0 до $+\infty$ обе части следующего неравенства:

$$\begin{aligned} \eta_i^* - Q_i(\psi_i^{(m+1)}(x)) &\leq \sum_{j=1}^n \int_0^\infty K_{ij}(x-t) \left(\eta_j^* - \psi_j^{(m)}(t) \right) dt + \\ &+ 2 \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_x^\infty K_{ij}(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Тогда, учитывая четность ядерных функций $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$, (21), (40), следующее простое неравенство:

$$\eta_i^* - Q_i(\psi_i^{(m+1)}(x)) \geq \eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \geq 0$$

и теорему Фробениуса – Перрона, будем иметь

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*} dx + \gamma_i \int_1^\infty \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*} dx \leq \\ &\leq \frac{2}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^\infty x K_{ij}(x) dx + \frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^\infty \frac{\eta_j^* - \psi_j^{(m)}(t)}{\eta_j^*} \int_{-t}^\infty K_{ij}(\tau) d\tau dt = \\ &= \frac{2}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^\infty x K_{ij}(x) dx + \frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^1 \frac{\eta_j^* - \psi_j^{(m)}(t)}{\eta_j^*} \int_{-t}^\infty K_{ij}(\tau) d\tau dt + \\ &+ \frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_1^\infty \frac{\eta_j^* - \psi_j^{(m)}(t)}{\eta_j^*} \int_{-t}^\infty K_{ij}(\tau) d\tau dt \leq \frac{2}{\eta_i} \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^\infty x K_{ij}(x) dx + \\ &+ \frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_{-1}^\infty K_{ij}(\tau) d\tau \cdot \max_{1 \leq j \leq n} \left(\int_0^1 \frac{\eta_j^* - \psi_j^{(m)}(t)}{\eta_j^*} dt \right) + \\ &+ \frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^n a_{ij} \eta_j^* \cdot \max_{1 \leq j \leq n} \left(\int_1^\infty \frac{\eta_j^* - \psi_j^{(m)}(t)}{\eta_j^*} dt \right) \leq \frac{2}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^\infty x K_{ij}(x) dx + \\ &+ \left(1 - \frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_1^\infty K_{ij}(\tau) d\tau \right) \cdot \max_{1 \leq j \leq n} \left(\int_0^1 \frac{\eta_j^* - \psi_j^{(m+1)}(t)}{\eta_j^*} dt \right) + \\ &+ \max_{1 \leq j \leq n} \left(\int_1^\infty \frac{\eta_j^* - \psi_j^{(m+1)}(t)}{\eta_j^*} dt \right) \leq 2 \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^\infty x K_{ij}(x) dx \right) + \\ &+ \max_{1 \leq j \leq n} \left(\int_1^\infty \frac{\eta_j^* - \psi_j^{(m+1)}(t)}{\eta_j^*} dt \right) + \left(1 - \min_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_1^\infty K_{ij}(\tau) d\tau \right) \times \\ &\quad \times \max_{1 \leq j \leq n} \left(\int_0^1 \frac{\eta_j^* - \psi_j^{(m+1)}(t)}{\eta_j^*} dt \right). \end{aligned}$$



Из полученной оценки в силу неотрицательности слагаемых в правой части, в свою очередь, следует, что

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq i \leq n} \left(\int_0^1 \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*} dx \right) + \min_{1 \leq i \leq n} \gamma_i \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \int_1^\infty \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*} dx = \\ & = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\int_0^1 \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*} dx + \min_{1 \leq j \leq n} \gamma_j \cdot \int_1^\infty \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*} dx \right) \leq \\ & \leq 2 \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^\infty x K_{ij}(x) dx \right) + \max_{1 \leq i \leq n} \left(\int_1^\infty \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*} dx \right) + \\ & + \left(1 - \min_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_1^\infty K_{ij}(\tau) d\tau \right) \right) \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \left(\int_0^1 \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*} dx \right) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \left(\min_{1 \leq j \leq n} \gamma_j - 1 \right) \max_{1 \leq i \leq n} \left(\int_1^\infty \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*} dx \right) + \min_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_1^\infty K_{ij}(\tau) d\tau \right) \times \\ & \times \max_{1 \leq i \leq n} \int_0^1 \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*} dx \leq 2 \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^\infty x K_{ij}(x) dx. \end{aligned} \quad (48)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq j \leq n} \gamma_j - 1 &= \min_{1 \leq j \leq n} \frac{\eta_j^* - Q_j(\alpha_j)}{\eta_j^* - \alpha_j} - 1 = \frac{\eta_{j_0}^* - Q_{j_0}(\alpha_{j_0})}{\eta_{j_0}^* - \alpha_{j_0}} - 1 = \\ &= \frac{\alpha_{j_0} - Q_{j_0}(\alpha_{j_0})}{\eta_{j_0}^* - \alpha_{j_0}} > 0, \quad j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}, \end{aligned}$$

ибо $\alpha_{j_0} = \min_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{\xi_i}{\eta_i^*} \right) \eta_{j_0}^* < \eta_{j_0}^*$, а функции $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ выпуклы вниз на отрезках $\{[0, \eta_i^*]\}_{i=1}^n$.

Из (48) следует, что

$$\begin{aligned} & \min \left\{ \left(\min_{1 \leq j \leq n} \gamma_j - 1 \right); \min_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_1^\infty K_{ij}(\tau) d\tau \right) \right\} \times \\ & \times \left(\max_{1 \leq i \leq n} \int_1^\infty \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*} dx + \max_{1 \leq i \leq n} \int_0^1 \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*} dx \right) \leq \\ & \leq 2 \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^\infty x K_{ij}(x) dx \right) \end{aligned}$$



или

$$\min \left\{ \left(\min_{1 \leq j \leq n} \gamma_j - 1 \right); \min_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_1^\infty K_{ij}(\tau) d\tau \right) \right\} \times \\ \times \max_{1 \leq i \leq n} \left(\int_0^\infty \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*} dx \right) \leq 2 \left(\frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^\infty x K_{ij}(x) dx \right)$$

в силу неотрицательности подынтегральных функций. Откуда сразу получаем

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left(\int_0^\infty \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*} dx \right) \leq \\ \leq 2 / \min \left\{ \left(\min_{1 \leq j \leq n} \gamma_j - 1 \right); \min_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_1^\infty K_{ij}(\tau) d\tau \right) \right\} \times \\ \times \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^\infty x K_{ij}(x) dx \right). \quad (49)$$

Следовательно, из (49) в силу теоремы Б. Леви заключаем, что $\eta_i^* - \psi_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \dots, n$ и

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left(\int_0^\infty \frac{\eta_i^* - \psi_i(x)}{\eta_i^*} dx \right) \leq \\ \leq 2 / \min \left\{ \left(\min_{1 \leq j \leq n} \gamma_j - 1 \right); \min_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_1^\infty K_{ij}(\tau) d\tau \right) \right\} \times \\ \times \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_0^\infty x K_{ij}(x) dx \right).$$

Шаг 7. Заметим также, что

$$\eta_i^* - Q_i(\psi_i(x)) \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (50)$$

Действительно, из (11) с учетом (29) и теоремы Фробениуса – Перрона будем иметь

$$0 \leq \eta_i^* - Q_i(\psi_i(x)) \leq 2 \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int_x^\infty K_{ij}(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^n \int_0^\infty K_{ij}(x-t) (\eta_j^* - \psi_j(t)) dt. \quad (51)$$

Так как $\eta_j^* - \psi_j \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $K_{ij} \in L_1(\mathbb{R})$ и $\int_0^\infty x K_{ij}(x) dx < +\infty$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, то в силу теоремы Фубини правая часть неравенства (51) принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^+)$. Из (51) приходим к (50). В силу (42) и (50) из (12), (11), (31) и (10) следует, что

- $\eta_i^* \pm \varphi_i \in L_1(\mathbb{R}^\mp)$, $\eta_i^* \pm Q_i(\varphi_i) \in L_1(\mathbb{R}^\mp)$, $i = 1, 2, \dots, n$,



- $\varphi_i(x) \uparrow$ по x на \mathbb{R} , $i = 1, 2, \dots, n$,
- $\varphi_i \in C(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Следовательно, функции

$$f_i^*(x) := \eta_i^* - Q_i(\varphi_i(x)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (52)$$

$$\tilde{f}_i(x) := \eta_i^* + Q_i(\varphi_i(x)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (53)$$

обладают свойствами (5)–(8) соответственно.

Шаг 8. Для завершения доказательства теоремы нам остается проверить, что функции вида (52), (53) удовлетворяют системе (1).

Действительно, учитывая (9), (4), нечетность функций $\{Q_j(u)\}_{j=1}^n$, условие II) и теорему Фробениуса – Перрона, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} K_{ij}(x-t) G_j(\tilde{f}_j(t)) dt &= \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} K_{ij}(x-t) \left(\eta_j^* - g_j(\eta_j^* - \tilde{f}_j(t)) \right) dt = \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \eta_j^* - \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} K_{ij}(x-t) g_j(-Q_j(\varphi_j(t))) dt = \\ &= \eta_i^* - \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} K_{ij}(x-t) g_j(Q_j(-\varphi_j(t))) dt = \eta_i^* + \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} K_{ij}(x-t) \varphi_j(t) dt = \\ &= \eta_i^* + Q_i(\varphi_i(x)) = \tilde{f}_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Аналогично можно доказать, что функции вида (52) также удовлетворяют системе (1). Таким образом, теорема полностью доказана. \square

Замечание 1. Прямой проверкой можно убедиться, что всевозможные сдвиги построенных решений $f^*(x) = (f_1^*(x), f_2^*(x), \dots, f_n^*(x))^T$, $\tilde{f}(x) = (\tilde{f}_1(x), \tilde{f}_2(x), \dots, \tilde{f}_n(x))^T$ также удовлетворяют системе (1). Таким образом, мы получаем два асимптотически разных однопараметрических семейства положительных решений.

3. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим следующую матрицу:

$$A = \left(\int_{\mathbb{R}} K_{ij}(x) dx \right)_{i,j=1}^{n \times n} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $r(A) = 1$. Следовательно, согласно теореме Фробениуса – Перрона, существует вектор $(\eta_1^*, \eta_2^*)^T$ с положительными координатами, такой что

$$\begin{cases} \frac{7}{8}\eta_1^* + \frac{1}{8}\eta_2^* = \eta_1^*, \\ \frac{3}{8}\eta_1^* + \frac{5}{8}\eta_2^* = \eta_2^*. \end{cases} \quad (54)$$

Из (54) сразу следует, что $\eta_1^* = \eta_2^*$. В качестве $(\eta_1^*, \eta_2^*)^T$ выберем столбец $(1, 1)^T$.



Рассмотрим теперь нелинейность вида

$$Q_i(u) = u^3, \quad i = 1, 2. \quad (55)$$

Очевидно, что $Q_i(\eta_i^*) = \eta_i^*$, $i = 1, 2$. Убедимся, что система (36) в случае нелинейности (55) в классе векторов с положительными координатами обладает только решением $(1, 1)^T$. В данном случае система принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{7}{8}\eta_1 + \frac{1}{8}\eta_2 = \eta_1^3, \\ \frac{3}{8}\eta_1 + \frac{5}{8}\eta_2 = \eta_2^3. \end{cases} \quad (56)$$

Обозначив через $t := \eta_1/\eta_2 > 0$, приходим к следующему алгебраическому уравнению 4-го порядка относительно t :

$$3t^4 + 5t^3 - 7t - 1 = 0$$

или

$$(t - 1)(3t^3 + 8t^2 + 8t + 1) = 0. \quad (57)$$

Из (57) получаем, что $t = 1$, а уравнение $3t^3 + 8t^2 + 8t + 1 = 0$, очевидно, не имеет положительных решений.

Итак, $\eta_1 = \eta_2$. Из (56) получаем, что $\eta_1^3 = \eta_1$, откуда $\eta_1 = 0$ или $\eta_1 = \pm 1$. Так как $\eta_i > 0$, $i = 1, 2$, то $\eta_1 = \eta_2 = 1$.

Замечание 2. В работе [19] система (36) исследовалась в том частном случае, когда $Q_i(u) = c_i u^3 + (1 - c_i)u$, $i = 1, 2, \dots, n$, $c_i \in (0, 1]$, а элементы матрицы $A = \left(\int_{\mathbb{R}} K_{ij}(\tau) d\tau \right)_{i,j=1}^{n \times n}$ удовлетворяют условиям II) и $\frac{\min_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}}{\max_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Заметим, что для рассматриваемой матрицы A последнее условие не выполняется, так как

$$\frac{\min_{1 \leq i,j \leq 2} a_{ij}}{\max_{1 \leq i,j \leq 2} a_{ij}} = \frac{1/8}{7/8} = \frac{1}{7} < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Однако система (36) в классе \mathfrak{M} обладает единственным решением $(1, 1)^T$.

В качестве примеров ядерных функций $(K_{ij}(x))_{i,j=1}^{n \times n}$ могут служить следующие функции:

- 1) $K_{ij}(x) = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-x^2}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$;
- 2) $K_{ij}(x) = \frac{a_{ij}}{2} \cdot e^{-|x|}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Приведем теперь примеры функций $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$. С этой целью сперва рассмотрим примеры функций $\{g_j(u)\}_{j=1}^n$:

- 1) $g_j(u) = \sqrt[p]{(\eta_j^*)^{p-1}u}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $u \in \mathbb{R}$, где $p > 2$ — любое нечетное число;
- 2) $g_j(u) = \begin{cases} \frac{1-e^{-u}}{1-e^{-\eta_j^*}} \eta_j^*, & u \geq 0, \\ \frac{e^u-1}{1-e^{-\eta_j^*}} \eta_j^*, & u < 0, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n;$



$$3) g_j(u) = \begin{cases} u + \frac{2\eta_j^*}{\pi} \sin^2 \frac{\pi u}{2\eta_j^*}, & u \geq 0, \\ u - \frac{2\eta_j^*}{\pi} \sin^2 \frac{\pi u}{2\eta_j^*}, & u < 0, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда функции $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$ имеют структуру (4).

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета по науке Министерства образования и науки Республики Армения в рамках научного проекта № SCS 18T-1A004.

Библиографический список

1. Владимиров В. С., Волович Я. И. О нелинейном уравнении динамики в теории p -адической струны // ТМФ. 2004. Т. 138, № 3. С. 355–368. DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf36>
2. Владимиров В. С. Об уравнении p -адической открытой струны для скалярного поля тахионов // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, № 3. С. 55–80. DOI: <https://doi.org/10.4213/im640>
3. Владимиров В. С. О решениях p -адических струнных уравнений // ТМФ. 2011. Т. 167, № 2. С. 163–170. DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6631>
4. Жуковская Л. В. Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн // ТМФ. 2006. Т. 146, № 3. С. 402–409. DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2043>
5. Хачатрян Х. А. О разрешимости некоторых классов нелинейных уравнений в теории p -адической струны // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82, № 2. С. 172–193. DOI: <https://doi.org/10.4213/im8580>
6. Енгибарян Н. Б. Об одной задаче нелинейного переноса излучения // Астрофизика. 1966. Т. 2, № 1. С. 31–36. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01014505>
7. Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А. О разрешимости нелинейного модельного уравнения Больцмана в задаче плоской ударной волны // ТМФ. 2016. Т. 189, № 2. С. 239–255. DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9108>
8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения : в 2 т. Т. 2. М. : Мир, 1984. 752 с.
9. Kendall D. G. Mathematical models of the spread of infection // Mathematics and Computer Science in Biology and Medicine. L. : H. M. S. O., 1965. P. 213–225.
10. Diekmann O. Thresholds and Traveling Waves for the Geographical Spread of infection // Journal of Math. Biology. 1978. Vol. 6. P. 109–130. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02450783>
11. Diekmann O. Limiting behaviour in an epidemic model // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1977. Vol. 1, № 5. P. 459–470. DOI: [https://doi.org/10.1016/0362-546X\(77\)90011-6](https://doi.org/10.1016/0362-546X(77)90011-6)
12. Diekmann O. Run for your life. A note on the asymptotic speed of propagation of an epidemic // Journal of Differential Equations. 1979. Vol. 33, iss. 1. P. 58–73. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(79\)90080-9](https://doi.org/10.1016/0022-0396(79)90080-9)
13. Енгибарян Н. Б. Консервативные системы интегральных уравнений свертки на полупрямой и всей прямой // Матем. сб. 2002. Т. 193, № 6. С. 61–82. DOI: <https://doi.org/10.4213/sm660>
14. Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б. Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. 1984. Т. 22. С. 175–244.
15. Сгибнев М. С. Матричный аналог теоремы восстановления Блеквелла на прямой // Матем. сб. 2006. Т. 197, № 3. С. 69–86. DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1538>



16. Хачатрян Х. А. О положительной разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на полуоси и на всей прямой // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. Т. 79, вып. 2. С. 205–224. DOI: <https://doi.org/10.4213/im8245>
17. Ланкастер П. Теория матриц. М. : Наука, 1982. 28 с.
18. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 2. М. : Физматлит, 1966. 600 с.
19. Хачатрян Х. А., Терджян Ц. Э., Аветисян М. О. Однопараметрическое семейство ограниченных решений для одной системы нелинейных интегральных уравнений на всей прямой // Изв. НАН Армении : Математика. 2018. Т. 53, № 4. С. 72–86.
20. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. . Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1981. 544 с.

Образец для цитирования:

Хачатрян Х. А. О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на прямой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 2. С. 164–181. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-164-181>

The Solvability of a System of Nonlinear Integral Equations of Hammerstein Type on the Whole Line

Kh. A. Khachatryan

Khachatur A. Khachatryan, <https://orcid.org/0000-0002-4835-943X>, Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Armenia, 24/5 Marshal Baghramian Ave., Yerevan 0019, Republic of Armenia, Khach82@rambler.ru

In recent years, the interest has grown in nonlinear integral equations of convolution type in connection with their application in various fields of mathematical physics, in particular, in the p -adic theory of an open-closed string, kinetic theory of gases, in the theory of radiation transfer in spectral lines. The paper is devoted to the questions of construction of nontrivial solutions and the study of their asymptotic behavior for one system of nonlinear integral equations of convolution type with a symmetric kernel on the whole axis. The results of the work are based on the combination of methods of invariant conical segments construction for the corresponding nonlinear monotone operator with methods of the theory of linear operators of convolution type. A constructive theorem on the existence of two asymptotically different one-parameter families of positive and bounded solutions was formulated and proved, which is the main difference from the previously obtained results. Moreover, from the structure of this system of nonlinear equations follows that all possible shifts of the constructed solutions also satisfy the system. Special attention is paid to the study of the asymptotic behavior of these solutions at the ends of the line. The limits of these solutions in $\pm\infty$ are calculated and it is proved that the constructed solutions belong to the $L_1(0, +\infty)$ and $L_1(-\infty, 0)$ spaces respectively.

Keywords: system of equations, vector-function, spectral radius, monotonicity, successive approximations, kernel, Frobenius – Perron theorem.

Received: 29.10.2018 / Accepted: 26.03.2019 / Published online: 28.05.2019

Acknowledgements: This work was supported by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Armenia as part of the scientific project No. SCS 18T-1A004.



References

1. Vladimirov V. S., Volovich Ya. I. Nonlinear dynamics equation in p -adic string theory. *Theoret. and Math. Phys.*, 2004, vol. 138, no. 3, pp. 297–309. DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf36>
2. Vladimirov V. S. The equation of the p -adic open string for the scalar tachyon field. *Izv. Math.*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 487–512. DOI: <https://doi.org/10.4213/im640>
3. Vladimirov V. S. Solutions of p -adic string equations. *Theoret. and Math. Phys.*, 2011, vol. 167, no. 2, pp. 539–546. DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6631>
4. Joukovskaya L. V. Iterative method for solving nonlinear integral equations describing rolling solutions in string theory. *Theoret. and Math. Phys.*, 2006, vol. 146, no. 3, pp. 335–342. DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2043>
5. Khachatryan Kh. A. On the solvability of certain classes of non-linear integral equations in p -adic string theory. *Izv. Math.*, 2018, vol. 82, no. 2, pp. 407–427. DOI: <https://doi.org/10.4213/im8580>
6. Engibaryan N. B. On a problem of nonlinear radiation transfer. *Astrofizika*, 1966, vol. 2, no. 1, pp. 31–36. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01014505>
7. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A. Solvability of a nonlinear model Boltzmann equation in the problem of a plane shock wave. *Theoret. and Math. Phys.*, 2016, vol. 189, no. 2, pp. 1609–1623. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0040577916110064>
8. Feller W. *Introduction to Probability Theory and Its Applications*. John Wiley and Sons, Inc., 1971. 669 p. (Russ. ed.: in 2 vols. Vol. 2. Moscow, Mir, 1984. 752 p.).
9. Kendall D. G. Mathematical models of the spread of infection. *Mathematics and Computer Science in Biology and Medicine*, London, H. M. S. O., 1965, pp. 213–225.
10. Diekmann O. Thresholds and Traveling Waves for the Geographical Spread of infection. *Journal of Math. Biology*, 1978, vol. 6, pp. 109–130. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02450783>
11. Diekmann O. Limiting behaviour in an epidemic model. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1977, vol. 1, no. 5, pp. 459–470. DOI: [https://doi.org/10.1016/0362-546X\(77\)90011-6](https://doi.org/10.1016/0362-546X(77)90011-6)
12. Diekmann O. Run for your life. A note on the asymptotic speed of propagation of an epidemic. *Journal of Differential Equations*, 1979, vol. 33, iss. 1, pp. 58–73. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(79\)90080-9](https://doi.org/10.1016/0022-0396(79)90080-9)
13. Engibaryan N. B. Conservative systems of integral convolution equations on the half-line and the entire line. *Sb. Math.*, 2002, vol. 193, no. 6, pp. 847–867. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM2002v193n06ABEH000660>
14. Arabadzhyan L. G., Engibaryan N. B. Convolution equations and nonlinear functional equations. *J. Soviet Math.*, 1987, vol. 36, iss. 6, pp. 745–791. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01085507>
15. Sgibnev M. S. The matrix analogue of the Bleckwell renewal theorem on the real line. *Sb. Math.*, 2006, vol. 197, no. 3, pp. 369–386. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM2006v197n03ABEH003762>
16. Khachatryan Kh. A. Positive solvability of some classes of non-linear integral equations of Hammerstein type on the semi-axis and on the whole line. *Izv. Math.*, 2015, vol. 79, iss. 2, pp. 411–430. DOI: <https://doi.org/10.1070/IM2015v079n02ABEH002748>
17. Lancaster P. *Theory of Matrices*. New York, Academic Press, 1969. 316 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1982. 28 p.).
18. Fikhtengol'ts G. M. *The Fundamentals of Mathematical Analysis* : International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, vol. 2 (73). Pergamon Press, 1965. 540 p. (Russ. ed.: in 3 vols. Vol. 2. Moscow, Fizmatlit, 1966. 600 p.).



19. Khachatryan Kh. A., Terjyan Ts. E., Avetisyan M. H. A one-parameter family of bounded solutions for a system of nonlinear integral equations on the whole line. *Proceedings of the NAS Armenia: Mathematics*, 2018, vol. 53, iss. 4, pp. 201–211 (in Russian).
20. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elements of the theory of functions and functional analysis*: vol. I, II. Albany, New York, Graylock Press, 1957. 129 p.; 1961. 128 p. (Russ. ed.: Moscow, 1981. 544 p.).

Cite this article as:

Khachatryan Kh. A. The Solvability of a System of Nonlinear Integral Equations of Hammerstein Type on the Whole Line. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 2, pp. 164–181 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-164-181>



МЕХАНИКА

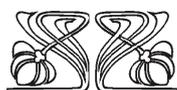
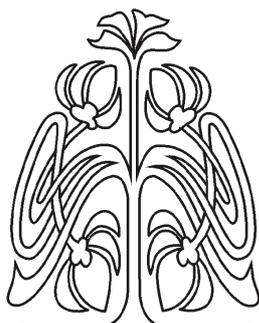
УДК 536.423:532.52

Влияние пузырьков на структуру течения и трение в восходящем турбулентном газожидкостном потоке

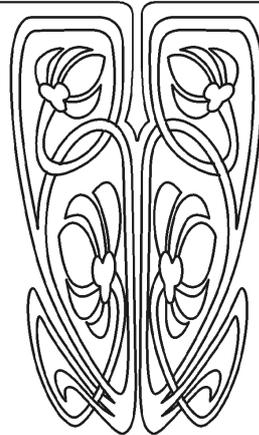
Б. А. Снигерев

Снигерев Борис Александрович, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт механики и машиностроения — обособленное структурное подразделение ФИЦ КазНЦ РАН, Россия, 420111, Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31, snigerev@imm.knc.ru

В работе представлены результаты расчетного исследования локальной структуры восходящего газожидкостного потока в вертикальной трубе. Математическая модель основана на использовании двухжидкостного эйлера подхода с учетом обратного влияния пузырьков на осредненные характеристики и турбулентность несущей фазы. Записываются уравнения сохранения массы и количества движения в виде уравнений Навье – Стокса, осредненных по Рейнольдсу для каждой фазы. Для турбулентных напряжений записываются соотношения в предположении гипотезы Буссинеска. Турбулентная вязкость для несущей жидкой фазы определяется с использованием двухпараметрической модели турбулентности, модифицированной для двухфазных сред. В уравнения для переноса кинетической энергии турбулентности и ее диссипации вводятся дополнительные слагаемые для кинетической энергии, вызванные пульсациями пузырьков. Движение дисперсной фазы определяется действием сил межфазного взаимодействия. В качестве основных сил рассматриваются следующие компоненты: сила Архимеда, сила сопротивления, присоединенная сила, вращательная сила Магнуса, пристеночная сила. Для описания распределения пузырьков по размерам в двухфазном потоке записывается уравнение для сохранения количества частиц, учитывающее процессы коалесценции и дробления. Для решения уравнения сохранения количества пузырьков применяется подход, основанный на методе фракций. Спектр распределения частиц по размерам делится на ряд фракций с фиксированными границами, при этом предполагается возможность обмена пузырьками между разными фракциями в результате коалесценции и дробления. В рамках этого метода распределение пузырьков по размерам аппроксимируется кусочно-равновероятным распределением, таким образом, задача описания спектра капель по размерам сводится к решению уравнений для объемных концентраций отдельных фракций. Численно исследовано влияние изменения степени дисперсности газовой фазы, объемного расходного газосодержания, скорости дисперсной фазы на локальную



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





структуру и поверхностное трение в двухфазном потоке. Сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными показало, что разработанный подход позволяет адекватно описывать турбулентные газожидкостные течения в широком диапазоне изменения газосодержания и начальных размеров пузырьков.

Ключевые слова: многофазное течение, турбулентность, эйлерово описание, перепад давления.

Поступила в редакцию: 07.07.2018 / Принята: 11.11.2018 / Опубликовано онлайн: 28.05.2019

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-182-195>

ВВЕДЕНИЕ

Двухфазные пузырьковые турбулентные течения широко распространены в различных областях промышленности, таких как химическая, пищевая, фармацевтическая, атомная и теплоэнергетика. Сложность моделирования этих потоков связана с большим количеством явлений различной природы, поскольку такие течения характеризуются сильным взаимным влиянием несущей и дисперсной фазы, сопровождаются процессами теплообмена, фазовых переходов, коалесценции, дробления и т. д. Поэтому моделирование турбулентных пузырьковых потоков представляет немалый практический интерес и ему посвящено большое количество публикаций [1–3]. Тем не менее, недостаточно изученными остаются вопросы о детальной турбулентной структуре для двухфазных потоков, полидисперсности распределения пузырьков, закономерностях динамики двухфазного потока. Это связано с тем, что на структуру течения и гидравлическое сопротивление в газожидкостных потоках влияет большое число гидродинамических и геометрических параметров, что особенно важно в инженерных приложениях. В настоящее время в литературе имеется большое количество экспериментальных данных и расчетных рекомендаций по гидродинамическому сопротивлению и теплоотдаче при течении газожидкостных потоков в трубах разного диаметра (см., например, монографию [3]). Экспериментальному изучению турбулентных пузырьковых течений посвящены работы [4–8]. Важная информация содержится в [5], где изложены результаты экспериментального исследования гидродинамического сопротивления при течении пароводяной смеси в обогреваемой трубе. Определено влияние обогрева на сопротивление трения смеси и дана эмпирическая зависимость для расчета потери давления трения в области небольших паросодержаний. Также для сравнения приводятся результаты для необогреваемых труб. Показано, что на относительный перепад давления в трубе при течении газожидкостного потока оказывает влияние не только давление, но и массовая скорость. С увеличением массовой скорости происходит уменьшение относительной потери давления на трение, а также уменьшение значения паросодержания, при котором начинается «кризис сопротивления». В работах [5, 6] в результате измерений гидравлического сопротивления и трения в вертикальных каналах была обнаружена область течения с аномальными значениями этих величин. Измеренные величины сопротивления на порядок превышают значения, получающиеся по соответствующим расчетным методикам. Эта область соответствует режиму пузырькового течения при малых приведенных скоростях жидкой фазы. Наряду с экспериментальными исследованиями газожидкостных потоков проводятся численные моделирования двухфазных пузырьковых течений. На основе эйлерова континуального подхода в работах [9–11] предложены эффективные методы, получены аппроксимации уравнения, описывающие



эволюцию функции распределения частиц по размерам в газожидкостном потоке.

Целью настоящей работы является детальное численное исследование характеристик турбулентного восходящего потока в трубе при изменении массовых скоростей и расходных газосодержаний сред. Основное внимание уделено анализу турбулентной структуры течения, полидисперсности газожидкостного потока, а также поверхностного трения двухфазного течения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для математического описания пространственного движения двухфазной среды применяется эйлеров подход, основанный на модели взаимопроникающих и взаимодействующих континуумов, который сводится к описанию условий разделенного движения фаз и определению величин, описывающих межфазное взаимодействие. Система уравнений Навье – Стокса, осредненных по Рейнольдсу, для описания динамики газожидкостного потока имеет следующий вид [2, 11]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m \alpha_m) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_m \rho_m V_{mj}) = 0, \quad \alpha_l + \alpha_g = 1, \quad m = l, g, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_m \rho_m V_{mj}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_m \rho_m V_{mi} V_{mj}) = & -\alpha_m \frac{\partial P}{\partial x_i} + \alpha_m \rho_m g_i + M_{mi} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\alpha_m \mu_{\text{eff}, m} \left(\frac{\partial V_{mi}}{\partial x_j} + \frac{\partial V_{mj}}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_m \mu_{\text{eff}, m} \frac{\partial V_{mn}}{\partial x_n} \delta_{ij} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

В системе уравнений (1)–(2) t – время, ρ_l, ρ_g – плотности сплошной и газовой фаз соответственно, α_l, α_g – объемные концентрации несущей и дисперсной фазы, g_i – сила тяжести, V_{mi} – компоненты скорости m фазы, M_{mi} – силы межфазного взаимодействия, P – давление, $\mu_{\text{eff}, m}$ – эффективная динамическая вязкость m фазы. Для описания турбулентных характеристик газожидкостного потока применяется расширенная двухпараметрическая модель турбулентности, определяемая через эффективную вязкость $\mu_{\text{eff}, m}$, состоящую из динамической вязкости несущей среды $\mu_{\text{lam}, l}$, турбулентной вязкости $\mu_{t, l}$, вязкости $\mu_{\text{BI}, l}$ [12], учитывающая влияние наличия пузырьков в несущей среде на турбулентные характеристики газожидкостного потока в виде

$$\mu_{\text{eff}, l} = \mu_{\text{lam}, l} + \mu_{t, l} + \mu_{\text{BI}, l}. \quad (3)$$

Для вычисления $\mu_{t, l}$ применяется формула Колмогорова, а для $\mu_{\text{BI}, l}$ – соотношение, предложенное в работе [12]:

$$\mu_{t, l} = \frac{C_\mu \rho_l k_l^2}{\varepsilon_l}, \quad \mu_{\text{BI}, l} = C_{\mu b} \rho_l \alpha_l d_s |V_{gi} - V_{li}|, \quad \mu_{\text{eff}, g} = \frac{\rho_g}{\rho_l} \mu_{\text{eff}, l}, \quad C_{\mu b} = 0.6. \quad (4)$$

Для определения кинетической энергии турбулентности k и скорости диссипации жидкой фазы ε используется модель турбулентности $k - \varepsilon$, модифицированная для двухфазных сред [11, 12]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_l \rho_l k_l) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_l \rho_l V_{li} k_l) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_l \frac{\mu_{\text{eff}, l}}{\sigma_l} \frac{\partial k_l}{\partial x_j} \right) + \alpha_l (G_l - \rho_l \varepsilon), \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_l \rho_l \varepsilon_l) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_l \rho_l V_{li} \varepsilon_l) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_l \frac{\mu_{\text{eff}, l}}{\sigma_l} \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial x_j} \right) + \alpha_l \frac{\varepsilon_l}{k_l} (C_{\varepsilon 1} G_l - C_{\varepsilon 2} \rho_l \varepsilon_l), \quad (6)$$



$$G_l = \frac{1}{2} \mu_{\text{eff}, l} \left[\frac{\partial V_{mi}}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial V_{mj}}{\partial x_i} \right)^T \right]^2. \quad (7)$$

Значения постоянных в модели турбулентности приняты равными

$$C_\mu = 0.09, \quad C_{\varepsilon_1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon_2} = 1.92, \quad \sigma_l = 1.0. \quad (8)$$

Для полидисперсного потока вклад межфазного взаимодействия в эйлеровом приближении складывается из силы сопротивления \overrightarrow{M}_g^D , подъемной силы \overrightarrow{F}_g^L , присоединенной силы $\overrightarrow{M}_g^{VM}$:

$$M_{li} = -M_{gi} = - (M_{gi}^D + M_{gi}^L + M_{gi}^{VM}). \quad (9)$$

Эти силы рассчитываются по следующим формулам:

$$M_{gi}^D = \frac{3}{4} \alpha_g \varrho_l \frac{C_d}{d_s} |V_{gi} - V_{li}| (V_{gi} - V_{li}), \quad M_{gi}^L = C_L \alpha_g \varrho_l (V_{gi} - V_{li}) \times (\nabla \times V_{li}), \quad (10)$$

$$M_{gi}^{VM} = C_{VM} \alpha_g \varrho_l \left(\frac{\partial V_{li}}{\partial t} - \frac{\partial V_{gi}}{\partial t} \right), \quad C_{VM} = 0.5. \quad (11)$$

Здесь C_D — коэффициент сопротивления частицы:

$$C_D = \begin{cases} 24(1 + 0.15\text{Re}^{0.687})/\text{Re}, & \text{Re} \leq 1000, \\ 0.44, & \text{Re} > 1000, \end{cases} \quad (12)$$

где $\text{Re} = 2\varrho_l |V_{gi} - V_{li}| d_s / \mu_l$ — число Рейнольдса относительного движения фаз, d_s — средний диаметр пузырьков.

Коэффициент подъемной силы C_L определяется как

$$C_L = \begin{cases} \min[0.288 \tanh(0.121 \text{Re}); f(\text{Eo}_d)], & \text{Eo}_d < 4, \\ f(\text{Eo}_d), & 4 \leq \text{Eo}_d \leq 10, \\ -0.29, & \text{Eo}_d > 10, \end{cases} \quad (13)$$

$$f(\text{Eo}_d) = 0.00105 \text{Eo}_d^3 - 0.0159 \text{Eo}_d^2 - 0.0204 \text{Eo}_d + 0.474, \quad \text{Eo}_d = g(\varrho_l - \varrho_g) d_s^2 / \sigma.$$

Здесь $f(\text{Eo}_d)$ — функция, зависящая от числа Этвоша Eo_d , σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Для описания полидисперсности двухфазных потоков записываются уравнения для расчета распределения пузырьков по размерам вследствие фазовых переходов, слияния, разрушения и других процессов с учетом турбулентности.

В данной работе принимаются во внимание только процессы коалесценции и дробления, которые являются основными механизмами, приводящими к полидисперсному распределению пузырьков по размерам. Предполагается, что пузырьки при этом сохраняют сферическую форму. Эволюция спектра капель описывается кинетическим уравнением для удельной концентрации пузырьков $n(v, t)$ [11].

Для расчета полидисперсности пузырьков применяется метод эйлеровых фракций, основанный на разбиении всего спектра частиц на отдельные дискретные классы с фиксированными размерами v_i ($i = 1, M_f$, M_f — число фракций). Количество частиц в каждом классе, объем которых находится в пределах между v_i и v_{i+1} ,



определяется через $N_i = \int_{v_i}^{v_{i+1}} n(v, t) dv$. Метод предполагает возможность обмена пузырьками между классами частиц с разными диаметрами в результате процессов коалесценции и разрушения.

Введем функцию f_i , определяемую как доля концентрации пузырьков i -го размера от общего числа пузырьков, для которой выполняются соотношения $f_i = \alpha_i / \alpha_g$, $\alpha_g f_i = N_i v_i$. Запишем уравнение для эволюции функции f_i в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g f_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_g V_{gj} f_i) = B_a^i - D_a^i + B_b^i - D_b^i, \quad i = 1, M_f, \quad (14)$$

$$B_a^i = \int_{v_i}^{v_{i+1}} B_a dv, \quad D_a^i = \int_{v_i}^{v_{i+1}} D_a dv, \quad B_b^i = \int_{v_i}^{v_{i+1}} B_b dv, \quad D_b^i = \int_{v_i}^{v_{i+1}} D_b dv.$$

Слагаемое B_a определяет прирост концентрации пузырьков за счет слияния частиц с суммарным объемом v , а D_a — убыль за счет слияния частиц v с остальными. Изменение концентрации за счет процессов дробления описывают следующие два слагаемых: B_a определяет прирост за счет дробления частиц большего объема, D_a — убывание в результате дробления частиц с объемом v . Для завершения постановки задачи требуется задание начального распределения частиц на входе.

В данной работе для определения функций B_a , B_b , D_a , D_b используются эмпирические выражения, полученные в [13, 14].

Для замыкания системы уравнений (1)–(14) требуется найти силы межфазного взаимодействия, определяемые соотношениями (9)–(13). Неизвестный параметр d_s , выражающий средний объемно-поверхностный диаметр пузырьков в объеме v_i , определяется через f_i :

$$d_s = \sum_{i=1}^{M_f} f_i / \left(\sum_{i=1}^{M_f} f_i / d_i \right). \quad (15)$$

Движение газожидкостного потока описывается системой уравнений сохранения для несущей и газовой фаз (1)–(2), дополненной модифицированной двухпараметрической моделью турбулентности для двухфазной среды (5)–(7). Силы межфазного взаимодействия (9)–(13), действующие на элементарный объем среды, определяются через характеристики потока, доли объемного газосодержания α_g , среднего диаметра пузырьков d_s . Зная характеристики потока в текущий момент времени, решаем систему уравнений (14) и находим распределение f_i для каждой группы пузырьков, что позволяет определить d_s в каждом элементарном конечном объеме сетки. Распределение f_i дает дополнительную информацию о распределении частиц по размерам в объеме потока двухфазной среды. В рамках данного подхода движение полидисперсного двухфазного газожидкостного потока описывается замкнутой системой уравнений (1)–(7), (9)–(15).

Рассчитанные в данной работе потери давления на трение сравниваются с известными расчетными соотношениями, полученными в результате обработки большого числа экспериментальных данных для различных режимов течения двухфазного потока. Для расчета потери давления на трение в двухфазном потоке ΔP_F^{TP} различают два типа моделей: гомогенные и модели с разделением движения фаз [2, 15]. Потери давления на трение определяются через значения градиента давления двухфазного потока $(dp/dz)_F^{TP}$. Для гомогенной модели двухфазная среда рассматривается в виде смеси с переменной плотностью ρ_{TP} , вязкостью μ_{TP} . Градиент давления вычисляется



по аналогичной формуле для однофазной жидкости в виде

$$(dp/dz)_F^{TP} = \frac{G_{TP}^2}{2D\varrho_{TP}} f_{TP}, \quad (16)$$

где $G_{TP} = \varrho_l \langle J_l \rangle + \varrho_g \langle J_g \rangle$ — полный расход смеси, а для плотности ϱ_{TP} и вязкости смеси μ_{TP} применяются соотношения

$$\varrho_{TP} = \left(\frac{x}{\varrho_g} + \frac{1-x}{\varrho_l} \right)^{-1}, \quad \mu_{TP} = x\mu_g + (1-x)\mu_l. \quad (17)$$

В (17) x — массовое содержание газовой фазы $x = \varrho_g \langle J_g \rangle / G_{TP}$. Для определения коэффициента трения f_{TP} применяется соотношение, аналогичное для однофазного потока в виде

$$f_{TP} = \begin{cases} 16/\text{Re}_{TP} & \text{Re}_{TP} \leq 2000, \\ 0.079 \times \text{Re}_{TP}^{-0.25} & \text{Re}_{TP} > 2000, \end{cases} \quad \text{Re}_{TP} = \frac{G_{TP}D}{\mu_{TP}}. \quad (18)$$

Для сравнения потери давления рассчитываются с помощью эмпирического соотношения, полученного в работе [15], где авторы исходят из известной формулы для перепада давления при течении однородной смеси. Градиент потери давления на трение для двухфазного потока $(dp/dz)_F^{TP}$ выражается в виде некоторой функции, зависящей от градиентов давления для однофазных потоков $(dp/dz)_F^{lo}$, $(dp/dz)_F^{go}$, предполагая, что однородные среды с жидкостью или газом при течении по трубе имеют тот же расход G_{TP} . В работе [15] аппроксимация для определения $(dp/dz)_F^{TP}$ предложена в виде

$$(dp/dz)_F^{TP} = F(1-x)^{1/3} + (dp/dz)_F^{lo} x^3, \quad (19)$$

$$F = (dp/dz)_F^{lo} + 2[(dp/dz)_F^{go} - (dp/dz)_F^{lo}] x.$$

В соотношении (19) градиенты давления для однофазных потоков $(dp/dz)_F^{lo}$, $(dp/dz)_F^{go}$ вычисляются по формулам

$$(dp/dz)_F^{lo} = \frac{G_{TP}^2}{2D\varrho_l} f_{lo}, \quad (dp/dz)_F^{go} = \frac{G_{TP}^2}{2D\varrho_g} f_{go},$$

где f_{lo} , f_{go} — коэффициенты трения для несущей и дисперсной фаз, вычисляемые аналогично (18).

2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для численного решения систем уравнений используется метод конечных объемов с использованием библиотеки OpenFOAM, предоставляющей пользователю инструменты для аппроксимации дифференциальных операторов на структурированных и неструктурированных сетках [16]. При помощи метода Гаусса интегралы по контрольному объему сводятся к поверхностным, а значение искомой функции на поверхности ячейки получается путем интерполяции ее значений в центроидах соседних ячеек. Для конвективных слагаемых дифференциальных уравнений применяется процедура QUICK. Для дискретизации производной по времени использовалась неявная схема Эйлера первого порядка точности. Коррекции поля давления осуществляются по конечно-объемной согласованной процедуре SIMPLEC. В ходе реализации



метода конечных объемов задача сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений. Решение системы выполняется методом сопряженных градиентов с предобуславливанием. Расчетная область представляет собой канал с входной и выходной частями и твердыми стенками. Во входном сечении S_1 задаются следующие условия:

$$S_1: V_3^l = V_0^l, V_3^g = V_0^g, V_1^l = V_2^l = V_1^g = V_2^g = 0, p = p_0, \alpha_g = \alpha_0, k_l = k_l^0, \varepsilon_l = \varepsilon_l^0, \\ M_f = 6, f_3 = 1, d_3 = 0.0025, f_i = 0 \ (i = 1, 6, i \neq 3), d_1^{\min} = 0.001, d_6^{\max} = 0.012,$$

на выходной границе —

$$S_2: \partial V_i / \partial x_3 = \partial f_i / \partial x_3 = \partial p / \partial x_3 = \partial k_l / \partial x_3 = \partial \varepsilon_l / \partial x_3 = 0.$$

На твердой стенке S_3 принимаются условия прилипания и граничные условия для турбулентных переменных в виде

$$V_\psi^l = V_\psi^g = V_\tau^l = V_\tau^g = 0, \quad f_i = 0, k_l = 0, \varepsilon_l = \mu_t (\partial^2 V_i / \partial \psi^2) = 0,$$

где (ψ, τ) — компоненты единичного вектора нормали к поверхности. Условия на границе симметрии имеют вид $S_4: V_\psi^l = V_\psi^g = 0$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Проверка представленной модели была проведена путем сравнения результатов расчетов с экспериментальными данными. Был выбран эксперимент, проведенный в работе [17], в котором изучалось полидисперсное пузырьковое течение в вертикальной трубе. Эксперимент проводился с водовоздушной смесью при атмосферном давлении и постоянной комнатной температуре.

В таблице представлены основные параметры для выбранного эксперимента, где $\langle J_l \rangle, \langle J_g \rangle$ — приведенные скорости жидкости и газа соответственно.

Характеристика экспериментов [17]

Characteristics of the experiments [17]

	$\langle J_l \rangle$ м/с	$\langle J_g \rangle$ м/с	α	d мм	D мм
L1	0.986	0.0473	0.051	2.5	50.8
L2	0.986	0.321	0.231	2.5	50.8

На входе подается монодисперсный пузырьковый поток. С учетом приведенных значений сред вычислялись начальные значения скорости текущей среды. Двухфазное течение в вертикальной тру-

бе предполагается осесимметричным, поэтому для численного моделирования выбирается расчетная область, состоящая из кругового сектора с радиусом $r_0 = D/2 = 2.54 \times 10^{-3}$ м, длиной $H = 3.06$ м и углом раствора 5° . Проведены численные расчеты на сетках конечных объемов, состоящих из $M_e = 32600, 84200, 168600$ узлов. В сечении плоскости ox_1x_2 число разбиений по координатам вдоль оси трубы и по длине для различных сеток составляет $L_1 = 20 \times 200, L_2 = 40 \times 400, L_3 = 60 \times 600$. Численное решение на сетке L_2 отличается от L_3 менее чем на 2%, поэтому все приведенные численные результаты выполнены с помощью сетки конечных объемов с разбиением L_2 .

Задаются следующие параметры компонентов двухфазной среды вода–воздух: $\rho_l = 998.2$ кг/м³, $\rho_g = 0.2$ кг/м³, $\mu_l = 1.1 \times 10^{-3}$ Па·с, $\mu_g = 1.7 \times 10^{-5}$ Па·с. Распределение частиц по размерам представлено в виде шести групп пузырьков ($M_f = 6$) с минимальным диаметром $d_1^{\min} = 10^{-3}$ м и максимальным $d_6^{\max} = 1.2 \times 10^{-2}$ м.



На рис. 1 показаны картины течения газожидкостного потока при $\langle J_l \rangle = 0.986$ м/с, $\langle J_g \rangle = 0.321$ м/с в виде изолинии осевой скорости несущей фазы V_3^l , изолинии объемного газосодержания α_g , среднего диаметра пузырьков d_s .

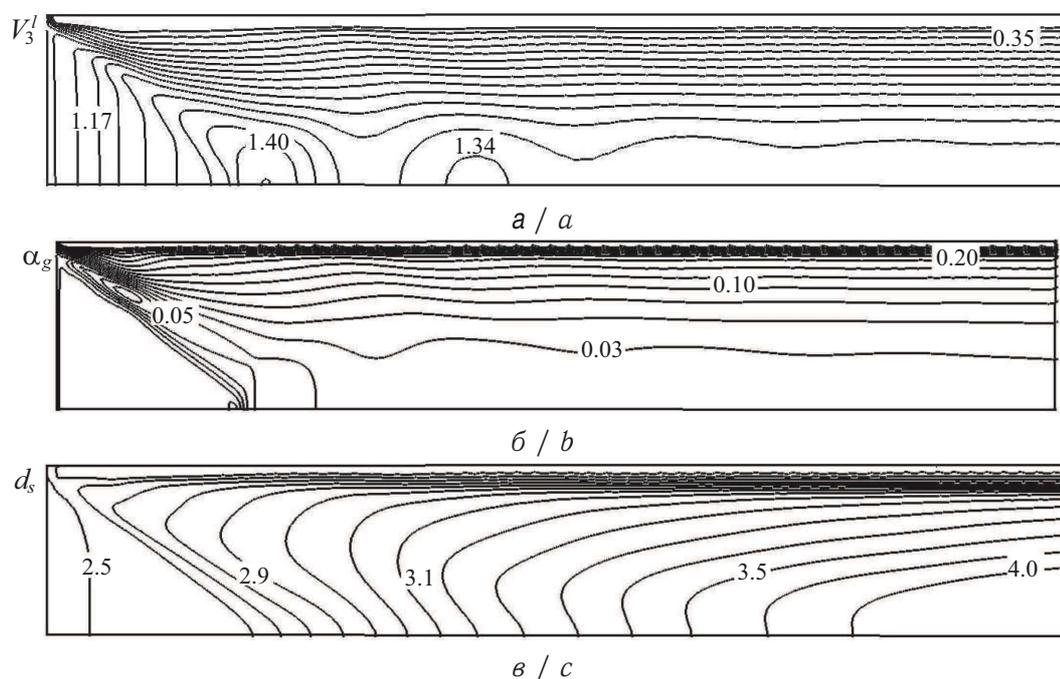


Рис. 1. Картина течения газожидкостного потока ($L1$) в виде изолиний осевой скорости V_3^l , м/с (а), объемного газосодержания α_g (б) и среднего диаметра пузырьков d_s , мм (в)

Fig. 1. Flow pattern of the gas-liquid flow ($L1$) in the form of isolines of the axial velocity V_3^l , m/s (a), gas content α_g (b), mean diameter of bubbles d_s , mm (c)

Видно, что на входном участке наблюдается треугольная область перестройки поля скоростей с равномерного профиля скорости пузырьков на входе к параболическому по мере продвижения вверх по трубе, а также увеличение скорости пузырьков в центральной части канала и замедление скоростей пузырьков, находящихся ближе к стенкам. Две зоны равномерного распределения скорости разделяет полоса, характеризующаяся наиболее резким изменением как направления, так и величины скорости. Наиболее выражено проявляется наличие данной зоны в распределении объемного газосодержания во входной части трубы, что иллюстрирует рис. 1, б. Отчетливо видна зона с равномерным распределением объемного газосодержания, что является следствием потока пузырьков одинакового диаметра во входной части трубы. Поскольку на входе в эксперименте [17] подаются пузырьки постоянного размера с диаметром $d_s = 2.5$ мм, то отчетливо наблюдается сужающаяся по ширине трубы зона с равномерным распределением α_g .

Представлены расчетные и экспериментальные данные по распределению характеристик несущего и полидисперсного потока в развитом турбулентном течении в сечении $x_2/D = 53.6$ вдоль радиуса трубы (r — расстояние от оси трубы). На рис. 2, а приведены сравнительные данные осредненного профиля осевой составляющей скорости несущей фазы V_3^l газожидкостного потока для $\langle J_l \rangle = 0.98$ м/с



и $\langle J_g \rangle = 0.0473, 0.321$ м/с (режимы L_1, L_2). Введение небольшой концентрации пузырьков ($\alpha_g = 0.051$) приводит к тому, что профиль скорости жидкой фазы становится практически плоским в ядре потока (рис. 2, а, кривая 1). Влияние пузырьков проявляется в том, что вблизи стенки происходит увеличение градиента скорости. Повышение скорости и концентрации пузырьков ($\alpha_g = 0.231$) приводит к уменьшению влияния дисперсной фазы на профиль скорости. Градиенты профиля скорости в пристеночной области уменьшаются, а сам профиль становится более параболическим, соответствующим однофазному потоку.

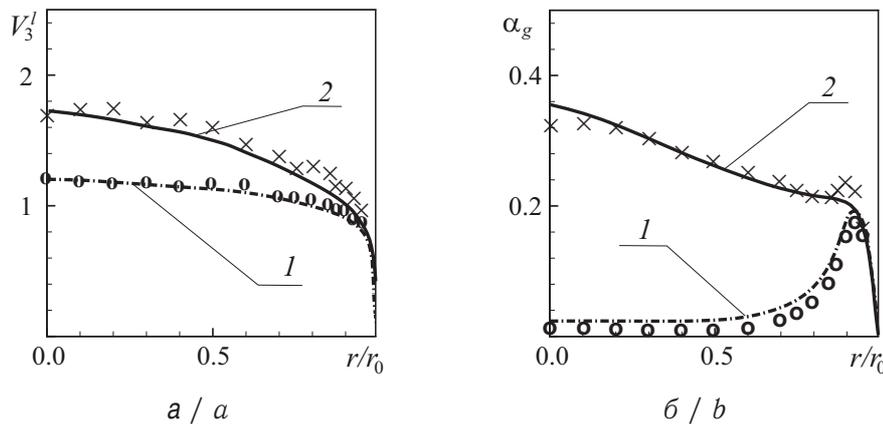


Рис. 2. Сравнение расчетных результатов (линии 1, 2) и экспериментальных данных $L1, L2$ (символы) для V_3^l , м/с (а) и α_g (б)

Fig. 2. Comparison of calculated results (lines 1, 2) and experimental data $L1, L2$ (symbols) for V_3^l , m/s (a) and α_g (b)

При небольших скоростях течения смеси наблюдаются пиковая концентрация пузырьков в пристеночной области и равномерное пологое распределение концентрации пузырьков в ядре потока при различных концентрациях газа (рис. 2, б). Аналогичные результаты в эюре распределения α_g вдоль радиуса трубы подтверждаются экспериментальными данными многих исследователей. Так, седлообразные профили газосодержания вдоль сечения трубы обнаружены экспериментально при течении восходящего газожидкостного потока в [8–10]. В этих работах пиковое распределение объемного газосодержания в пристеночной области и равномерное в ядре потока (называемого «скин-эффектом») получено при течении пузырьковой смеси в трубе при $Re_l = 6.0 \times 10^3 - 6.0 \times 10^4$.

Отличие степени воздействия межфазных сил на пузырьки различного размера приводит к тому, что пузырьки с диаметром меньше исходного смещаются в пристеночную область. Отметим, что рассматриваемый режим течения можно характеризовать как поток, в котором основная масса пузырьков движется в пристеночной области.

На рис. 3 в сечении $x_3/D = 53.6$ показано распределение частиц по размерам в виде доли частиц N_i соответствующего диаметра d_i от общего числа пузырьков в области потока N_s . Переход от режима L_1 (рис. 3, а) к режиму L_2 (рис. 3, б) приводит к увеличению $N_s = 0.62 \times 10^6$ до 1.22×10^6 . Увеличение скорости потока ведет к более интенсивному вовлечению пузырьков в турбулентные пульсационные движения, которые сопровождаются процессами коалесценции пузырьков.

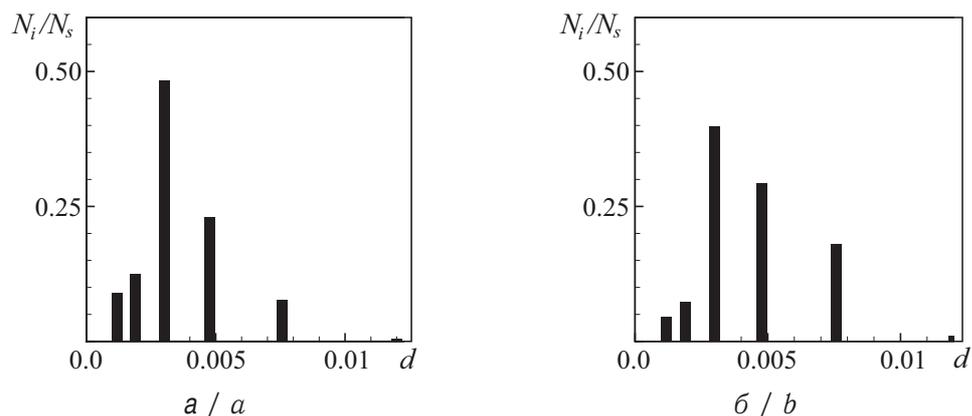


Рис. 3. Распределение частиц по размерам для режимов течения $L1, L2$: N_i/N_s для $L1$ (а) и $L2$ (б)
 Fig. 3. Particle size distribution for flow regimes $L1, L2$: N_i/N_s for $L1$ (a) and $L2$ (b)

На рис. 4, а показано распределение среднего объемно-поверхностного диаметра пузырьков d_s вдоль радиуса трубы для двух режимов. При малых скоростях течения жидкости (кривая 1) наблюдается равномерное распределение среднего диаметра пузырьков по сечению канала. В этом случае в единице объема находится небольшое число пузырьков и их влияние мало, также интенсивность процессов коалесценции и дробления при этом незначительна, заметно некоторое равновесное состояние. При этом число пузырьков, образующихся в результате слияния, примерно равно количеству частиц, которые распались на более мелкие в результате столкновения с другими частицами. Увеличение скорости и концентрации газовой фазы приводит к росту d_s до 4 мм, что свидетельствует о преобладании интенсивности процессов коалесценции пузырьков над их скоростью распада.

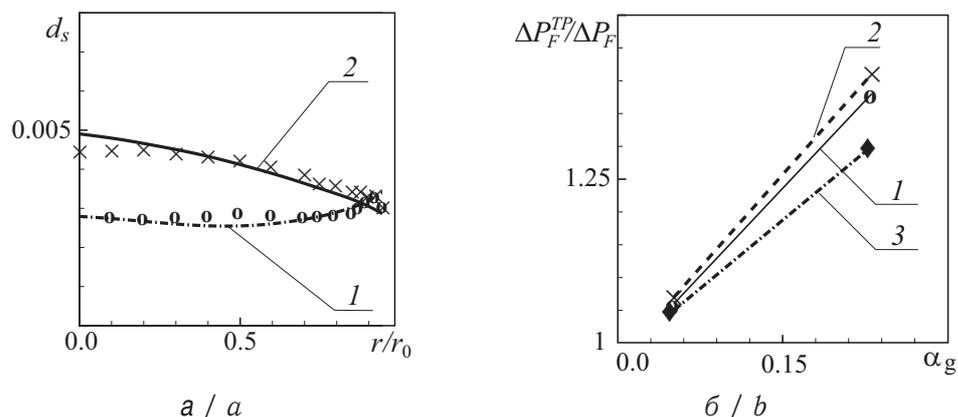


Рис. 4. Сравнение расчетных (линии 1, 2) и экспериментальных данных $L1, L2$ (символы) для среднего диаметра пузырьков d_s (а); результатов $\Delta P_F^{TP}/\Delta P_F$ (б): 1 — расчет, 2 — [15], 3 — [2]
 Fig. 4. Comparison of calculated (lines 1, 2) and experimental data $L1, L2$ (symbols) for the mean diameter of bubbles d_s (a); the results of $\Delta P_F^{TP}/\Delta P_F$ (b): 1 — calculation, 2 — [15], 3 — [2]

На рис. 4, б представлены результаты расчета потери давления на трение в двухфазном потоке ΔP_F^{TP} по отношению к потерям давления ΔP_F в однофазном потоке



при идентичных условиях. Здесь расчеты данной работы помечены линией 1, по формуле (16) — линией 3, (19) — линией 2. Результаты расчетов потерь давления по гомогенной модели (рис. 4, б, линия 3) дают заниженные результаты, а расчеты по соотношениям [15] (рис. 4, б, линия 2) близки с результатами данной работы. Увеличение трения для двухфазного потока по сравнению с однофазным подтверждаются в экспериментах [4–7]. Это объясняется возрастанием градиента скорости в жидкости в пристенной зоне (рис. 2, а) за счет более пологой формы в центральной части для двухфазного по сравнению с однофазным. Увеличение расхода газовой фазы приводит к росту гидравлического сопротивления трения, однако, как отмечено в работах [4–7], с увеличением общего расхода смеси относительное давление $\Delta P_F^{TP} / \Delta P_F$ уменьшается. Добавление газовой фазы в турбулентный поток приводит к возрастанию перепада давлений на трение. Это влияние возрастает с увеличением объемного газосодержания. Увеличение скорости двухфазного потока приводит к уменьшению относительного давления на трение за счет более сильного роста трения в однофазном потоке по сравнению с пузырьковым потоком. Результаты расчетов удовлетворительно согласуются с зависимостями из работы [15].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена эйлерова двухжидкостная модель для описания процесса переноса полидисперсных пузырьков в турбулентных газожидкостных потоках при значительных газосодержаниях газовой фазы. Для моделирования турбулентного потока жидкой фазы используется модифицированная двухпараметрическая модель турбулентности $k-\varepsilon$. Учет распределения пузырьков по размерам в газожидкостном потоке реализуется на основе разбиения всей системы частиц на отдельные группы (фракции) с фиксированными диаметрами, для каждой из которых записывается уравнение сохранения частиц с учетом процессов коалесценции и дробления пузырьков. Наблюдается удовлетворительное согласие между результатами расчетов и измерений профилей скорости и локального газосодержания по сечению трубы. Увеличение объемного газосодержания в газожидкостном потоке приводит к возрастанию трения на стенке по сравнению с однофазным течением. Это влияние возрастает с увеличением объемного расходного газосодержания дисперсной фазы. Увеличение скорости двухфазного потока приводит к снижению трения на стенке за счет более сильного роста трения в однофазном потоке по сравнению с многофазным. На основе сопоставления результатов численной модели с экспериментальными данными при течении пузырькового восходящего потока в вертикальной трубе показана применимость предложенной модели для численного моделирования газожидкостных потоков при значительных газосодержаниях дисперсной фазы.

Библиографический список

1. Броунштейн Б. И., Щеголев В. В. Гидродинамика, массо-теплообмен в колонных аппаратах. Л. : Химия, 1988. 336 с.
2. Баттерворс Д., Хьюитт С. Теплопередача в двухфазном потоке. М. : Энергия, 1980. 328 с.
3. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М. : Наука, 1978. 336 с.
4. Бурдуков А. П., Валукина Н. В., Накоряков В. Е. Особенности течения газожидкостной пузырьковой смеси при малых числах Рейнольдса // ПМТФ. 1975. № 4. С. 137–141.



5. Тарасова Н. В., Леонтьев А. И. Гидравлическое сопротивление при течении пароводяной смеси в обогреваемой вертикальной трубе // ТВТ. 1965. Т. 3, № 1. С. 115–123.
6. Ганчев Б. Г., Пересадыко В. Г. Процессы гидродинамики и теплообмена в опускающих пузырьковых потоках // ИФЖ. 1985. Т. 49, № 2. С. 181–189.
7. Горелик Р. С., Кашинский О. Н., Накоряков В. Е. Исследование опускающего пузырькового течения в трубе // ПМТФ. 1987. № 1. С. 69–74.
8. Kashinsky O. N., Lobanov P. D., Pakhomov M. A. Experimental and numerical study of downward bubbly flow in a pipe // Int. J. Heat Mass Transfer. 2006. Vol. 49. P. 3717–3722. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.02.004>
9. Зайчик Л. И., Мукин Р. В., Мукина Л. С., Стрижов В. Ф. Развитие диффузионно-инерционной модели для расчета пузырьковых турбулентных течений. Изотермическое полидисперсное турбулентное течение в вертикальной трубе // ТВТ. 2012. Т. 50, № 5. С. 665–675. DOI: <https://doi.org/10.1134/s0018151x12040220>
10. Пахомов М. А., Терехов В. И. Моделирование турбулентной структуры течения в восходящем полидисперсном газожидкостном потоке // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 2. С. 83–89.
11. Pflieger D., Gomes S., Wagner G. H., Gilbert N. Hydrodynamics simulations of laboratory scale bubble columns: fundamentals studies on the eulerian-eulerian modeling approach // Chem. Eng. Sci. 1999. Vol. 54, № 4. P. 5091–5095. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0009-2509\(99\)00261-4](https://doi.org/10.1016/s0009-2509(99)00261-4)
12. Sato Y., Sadatomi M., Sekoguchi K. Momentum and heat transfer in two-phase bubble flow-I. Theory // Int. J. Multiphase Flow. 1981. Vol. 7. P. 167–177. DOI: [https://doi.org/10.1016/0301-9322\(81\)90003-3](https://doi.org/10.1016/0301-9322(81)90003-3)
13. Luo H., Svendsen H. Theoretical model for drop and bubble breakup in turbulent dispersions // AIChE. J. 1996. Vol. 46. P. 1225–1231. DOI: <https://doi.org/10.1024/aic.712452004>
14. Prince M. J., Blanch H. W. Bubble coalescence and break-up in air sparged bubble columns // AIChE. J. 1990. Vol. 36. P. 1485–1489. DOI: <https://doi.org/10.1002/aic.690361004>
15. Muller-Steinhagen H., Heck K. A simple friction pressure drop correlation for two-phase flow in pipes // Chem. Eng. Prog. 1986. Vol. 26. P. 297–308. DOI: [https://doi.org/10.1016/0255-2701\(86\)80008-3](https://doi.org/10.1016/0255-2701(86)80008-3)
16. Weller N. G., Tabor G., Jasak H. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object oriented techniques // Computers in Physics. 1998. Vol. 12. P. 620–624. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.168744>
17. Hibiki T., Ishii M., Xiao Z. Axial interfacial area transport of vertical bubble flows // Int. J. Heat Mass Transfer. 2001. Vol. 44. P. 1869–1871. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(00\)00232-5](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(00)00232-5)

Образец для цитирования:

Снигерев Б. А. Влияние пузырьков на структуру течения и трение в восходящем турбулентном газожидкостном потоке // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 2. С. 182–195. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-182-195>



The Effect of Bubbles on the Structure of Flow and the Friction in Upward Turbulent Gas–Liquid Flow

B. A. Snigerev

Boris A. Snigerev, <https://orcid.org/0000-0003-2134-3355>, Institute of Mechanics and Engineering, FRC Kazan Scientific Center of RAS, 2/31 Lobachevsky St., Kazan 420111, Russia, snigerev@imm.knc.ru

This paper presents the computational study results of the ascending gas-liquid flow local structure in a vertical pipe. The mathematical model is based on the use of two-fluid Eulerian approach taking into account the inverse influence of bubbles on averaged characteristics and turbulence of the carrying phase. The equations conservation of mass and momentum quantity of motion in the form of Navier–Stokes equations averaged over Reynolds for each phase are written down. For turbulent stresses the relations under the assumption of the Boussinesq hypothesis are written. Turbulent viscosity for the carrier liquid phase is determined using a two-parameter turbulence model modified for two-phase media. In the equations for transferring the kinetic energy of turbulence and its dissipation, additional terms for the kinetic energy, caused by pulsations of bubbles are introduced. As the main forces, the following components are considered: Archimedes force, resistance force, attachment force, Magnus rotational force, near-wall frictional force. To describe the bubble size distribution in a two-phase flow, an equation for preservation of the number of particles, taking into account the processes of coalescence and breakup is written. To solve the number of bubbles conservation equation, an approach based on the method of fractions is applied. The particle size distribution spectrum is divided into a number of fractions with fixed boundaries. It is assumed that bubbles can be exchanged between different fractions as a result of coalescence and breakups. In the framework of this method, the bubble size distribution is approximated by a piecewise equiprobable. Thus, the problem of describing the spectrum of drops by size reduces to the solution of equations for the volume concentrations of individual fractions. The effect of changes in the degree of dispersion of the gas phase volumetric gas flow rate, the velocity of the dispersed phase to the local structure and surface friction in a two-phase flow are numerically investigated. Comparison of the simulation results with experimental data showed that the developed approach allows to adequately describe turbulent gas-liquid flows in a wide range of gas content and initial bubble sizes.

Keywords: multi-phase flow, turbulence, Euler method, pressure drop.

Received: 07.07.2018 / Accepted: 11.11.2018 / Published online: 28.05.2019

References

1. Brounchtein B. I., Chegolev B. B. *Gidrodinamika, masso-teploobmen v kolonnykh apparatax* [Hydrodynamics, mass and heat transfer in bubble columns]. Leningrag, Khimia, 1988. 336 p. (in Russian).
2. Butterworth D., Hewitt G. F. *Two-phase flow and heat transfer*. Oxford Press, 1977. 321 p. (Russ. ed.: Moscow, Energiya, 1980. 328 p.).
3. Nigmatulin R. I. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred* [Fundamentals of multiphase media]. Moscow, Nauka, 1978. 336 p. (in Russian).
4. Burdukov A. P., Valukina N. V., Nakoryakov V. E. Special characteristics of the flow of a gas-liquid bubble-type mixture with small Reynolds number. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1975, vol. 16, iss. 4, pp. 592–597. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00858302>



5. Tarasova N. V., Leontiev A. I. Gidravlichesкое soprotivlenie pri techenii parovodianoj smesi v obogrevaemoj trube [Hydraulic resistance when the flow of steam-water mixture in a heated tube]. *Teploviz. Vys. Temp.*, 1965, vol. 3, no. 1, pp. 115–123 (in Russian).
6. Ganchev B. G., Peresadko V. G. Processes of hydrodynamics and heat exchange in descending bubble flows. *Journal of Engineering Physics*, 1985, vol. 49, iss. 2, pp. 879–885. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00872635>
7. Gorelik P. C., Kashinsky O. N., Nakoryakov V. E. Study of downward bubbly flow in a vertical pipe. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1987, vol. 28, iss. 1, pp. 64–67. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00918774>
8. Kashinsky O. N., Lobanov P. D., Pakhomov M. A. Experimental and numerical study of downward bubbly flow in a pipe. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2006, vol. 49, pp. 3717–3722. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.02.004>
9. Zaichik L. I., Mukin R. V., Strizhov V. F. Development of a diffusion-inertia model for calculating bubble turbulent flows: isothermal polydispersed flow in a vertical pipe. *High Temperature*, 2012, vol. 50, iss. 5, pp. 665–675. DOI: <https://doi.org/10.1134/s0018151x12040220>
10. Paxomov M. A., Terexov V. I. Modeling of the turbulent flow structure of an upward a polydisperse gas-liquid flow. *Fluid Dynamics*, 2015, vol. 50, iss. 2, pp. 229–239. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462815020076>
11. Pflieger D., Gomes S., Wagner G. H., Gilbert N. Hydrodynamics simulations of laboratory scale bubble columns: fundamentals studies on the eulerian-eulerian modeling approach. *Chem. Eng. Sci.*, 1999, vol. 54, no. 4, pp. 5091–5095. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0009-2509\(99\)00261-4](https://doi.org/10.1016/s0009-2509(99)00261-4)
12. Sato Y., Sadatomi M., Sekoguchi K. Momentum and heat transfer in two-phase bubble flow-I. Theory. *Int. J. Multiphase Flow*, 1981, vol. 7, pp. 167–177. DOI: [https://doi.org/10.1016/0301-9322\(81\)90003-3](https://doi.org/10.1016/0301-9322(81)90003-3)
13. Luo H., Svendsen H. Theoretical model for drop and bubble breakup in turbulent dispersions. *AIChE J.*, 1996, vol. 46, pp. 1225–1231. DOI: <https://doi.org/10.1024/aic.712452004>
14. Prince M. J., Blanch H. W. Bubble coalescence and break-up in air sparged bubble Columns. *AIChE. J.*, 1990, vol. 36, pp. 1485–1489. DOI: <https://doi.org/10.1002/aic.690361004>
15. Muller-Steinhagen H., Heck K. A simple friction pressure drop correlation for two-phase flow in pipes. *Chem. Eng. Prog.*, 1986, vol. 26, pp. 297–308. DOI: [https://doi.org/10.1016/0255-2701\(86\)80008-3](https://doi.org/10.1016/0255-2701(86)80008-3)
16. Weller N. G., Tabor G., Jasak H. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object oriented techniques. *Computers in Physics*, 1998, vol. 12, pp. 620–624. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.168744>
17. Hibiki T., Ishii M., Xiao Z. Axial interfacial area transport of vertical bubble flows. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2001, vol. 44, pp. 1869–1871. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(00\)00232-5](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(00)00232-5)

Cite this article as:

Snigerev B. A. The Effect of Bubbles on the Structure of Flow and the Friction in Upward Turbulent Gas–Liquid Flow. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 2, pp. 182–195 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-182-195>



ИНФОРМАТИКА

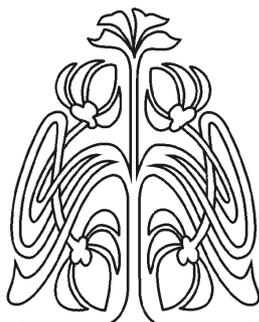
УДК 007

Предотвращение аварийных комбинаций событий при управлении человеко-машинными системами

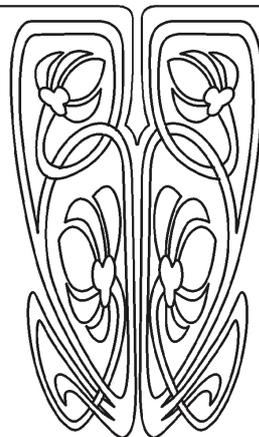
А. С. Богомолов

Богомолов Алексей Сергеевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия, 410029, Саратов, ул. Рабочая, д. 24; доцент кафедры математической кибернетики и компьютерных наук, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83, alexbogomolov@ya.ru

В работе исследуется проблема аварийных комбинаций событий. Аварийной комбинацией событий называется совокупность дефектов техники, программного обеспечения и человеческих ошибок, относительно неопасных по отдельности, но приводящих к аварии при возникновении в определенном порядке на определенном отрезке времени. Современные средства предупреждения могут парировать преимущественно отдельные неблагоприятные воздействия, а для эффективного предотвращения критических режимов необходимо математическое обеспечение системного анализа аварийных комбинаций событий на различных интервалах времени. Задача управления предотвращением аварийных комбинаций событий поставлена как задача вариационного исчисления на условный экстремум. Предлагается метод решения поставленной задачи на основе анализа деревьев отказов и путей успешного функционирования. Предлагаемый метод позволяет выделять минимальные множества неблагоприятных событий, парирование которых дает возможность снизить вероятность аварийных комбинаций до безопасного уровня. Определены и доказаны свойства путей успешного функционирования, включая точные оценки для их количества, что позволяет ранжировать задачи по временной сложности и повысить эффективность их решения. Разработаны эвристические подходы, позволяющие учитывать порядок возникновения событий при управлении процессом предотвращения их аварийных комбинаций. Заданные последовательности инцидентов учитываются за счет выделения подграфов и агрегирования событий. Полученные результаты предназначены для использования в системах поддержки принятия решения на различных уровнях при управлении предотвращением критических режимов и аварий человек-машинных и организационных систем.



**НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ**





Ключевые слова: комбинация событий, человеко-машинная система, дерево отказов, вероятность аварии, путь успешного функционирования, порядок событий.

Поступила в редакцию: 09.09.2018 / Принята: 07.10.2018 / Опубликовано онлайн: 28.05.2019

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-196-206>

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Исследуется проблема аварийных комбинаций событий при управлении человеко-машинными системами. Полагаем, что события e_1 и e_2 находятся в аварийной комбинации, если событие e_1 вызывает нехватку ресурса для реакции $R(e_2)$ системы на событие e_2 . Таким образом, аварийные комбинации снижают безопасность системы за счет влияния некоторых событий на возможность парирования других событий. В настоящей работе для решения проблемы аварийных комбинаций событий при управлении человеко-машинными системами рассматривается задача со следующей формальной постановкой.

Пусть $\bar{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — множество ситуаций, вызываемых аварийными комбинациями событий на отрезке времени $[t_n, t_k]$, $P(A, t)$ — вероятность аварии $A \in \bar{A}$, $s(t)$ — состояние системы, $x(t)$ — состояние внешней среды, $u(t)$ — управляющие воздействия на систему в момент времени t , $s(t) \in S(t)$, $x(t) \in X(t)$, $u(t) \in U(x)$.

Требуется определить управляющие воздействия $u(t_1), \dots, u(t_k)$ на $[t_n, t_k]$, при которых справедливо

$$\forall t \in [t_n, t_k] \quad \forall x(t) \in X(t) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad p(A_i, t) \leq \varepsilon; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^n F(s(t_i), x(t_i), u(t_i), t_i) \rightarrow \min, \tag{2}$$

где ε — заданное достаточно малое число (ограничение для вероятности аварий), $F(s(t), x(t), u(t), t)$ — заданная функция, определяющая затраты заданного ЛПР подмножества ресурсов системы, и выполняются граничные условия, определяющие поведение системы в начальный и конечный моменты времени:

$$F_n(s(t_n), x(t_n), u(t_n), t_n) = 0, \quad F_k(s(t_k), x(t_k), u(t_k), t_k) = 0,$$

и ограничения

$$C(t) \leq F_p(s(t), x(t), u(t), t) \leq D(t),$$

связанные с функционированием системы соответственно ее целям и нормативам, где $F_n(s(t), x(t), u(t), t)$, $F_k(s(t), x(t), u(t), t)$, $C(t)$, $D(t)$, $F_p(s(t), x(t), u(t), t)$ — заданные функции.

2. РАЗРАБОТАННОСТЬ ПРОБЛЕМАТИКИ

Для анализа влияния различных событий на функционирование сложных систем используются методы общей теории систем и системного анализа, дискретной и непрерывной математики, теории вероятностей и математической статистики, применяемые для количественного и качественного решения задач на различных этапах жизненного цикла. Определены в стандартах и исследованы методы анализа логических деревьев отказов (FTA, Fault Tree Analysis) и событий (ETA, Event



Tree Analysis), анализа видов и критичности отказов (FME(C)A, Failure Modes Effects (and Criticality)), анализа работоспособности системы (HAZOP, Hazard and Operability Studies) и анализа структурных схем надежности (RBD, Reliability Block Diagram). Существующие системы предупреждения критических режимов работают с отдельными неблагоприятными событиями без количественного и качественного анализа их суммарного эффекта, взаимодействия с уже произошедшими событиями и рекомендаций по предотвращению наступающих аварийных комбинаций событий. Определенный анализ возможного совокупного эффекта разнородных неблагоприятных событий осуществляется, как правило, на этапах проектирования, а системы, действующие в процессе эксплуатации, в качестве результата анализа опасности выдают значения качественных характеристик.

В исследовании нарушений функционирования человеко-машинных систем и определении методов предупреждения таких нарушений получен широкий диапазон значимых результатов, которые лежат как преимущественно в технической области [1, 2], так и в области анализа человеческого фактора [3] и социотехнических систем [4]. При этом в качестве причин, обуславливающих негативное воздействие человека в системе, рассматриваются как физические недомогания, возникающие из-за условий работы [5, 6], так и умышленное причинение вреда [7–9]. В области изучения совместного действия неблагоприятных событий достаточно давно задокументирован и широко исследуется «эффект домино» (Domino Effect, каскадный эффект) [10–13], являющийся частным случаем развития рассматриваемых в настоящей работе опасных комбинации событий. Для случаев пожароопасных и взрывоопасных производств, а также природных катаклизмов каскадные эффекты исследовались методами анализа риска и вероятностными методами. Критические сочетания событий первоначально рассматривались преимущественно для авиационных транспортных систем [14–18]. При этом определялась вероятность возникновения критического сочетания в случае, если порядок событий неважен. Для этого использовались деревья отказов, графы событий и системы линейных дифференциальных уравнений Колмогорова – Чепмена [19, 20]. При этом под отказами понимались проявление дефектов техники, ошибки операторов, компьютерных программ, а также неблагоприятные внешние события, комбинации которых приводят к инцидентам, авариям и катастрофам. Для представления модели аварийных комбинаций событий используются минимальные сечения деревьев отказов, характеризующих развитие аварий из заданного множества \bar{A} . Для каждого минимального сечения из m элементов составлялась система из 2^m уравнений Колмогорова – Чепмена относительно $P_0(t), \dots, P_{2^m-1}(t)$ — вероятностей событий, соответствующих вершинам графа событий G_m , отражающего возможные варианты последовательностей развития событий из заданной комбинации. Для построения такой системы дифференциальных уравнений должны быть известны векторы λ и μ значений интенсивности возникновения и парирования отказов, представляемых концевыми вершинами дерева. При этом λ понимались как выражение возмущающих воздействий, а мероприятия, позволяющие обеспечить значения μ , при которых будет выполняться условие (1), понимались как искомые управляющие воздействия $u(t)$.

Таким образом, в основе решения обозначенной выше проблемы рассматривалась следующая задача. Пусть известно дерево отказов, описывающее множество аварий $\bar{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$, и вектор λ интенсивности возникновения отказов $E = \{e_1, \dots, e_k\}$,



приводящих к авариям из \bar{A} . Требуется найти вектор μ значений интенсивности парирования отказов $E = \{e_1, \dots, e_k\}$, при котором для вероятностей аварий из множества \bar{A} будут выполняться условия (1), (2), а также требуемые граничные и начальные условия.

Следует заметить, что если при известных λ и μ вероятности аварий можно при определенных условиях найти из решения систем уравнений Колмогорова – Чепмена, то подходы к снижению перебора для нахождения таких векторов μ , которые при известных значениях векторов λ приводили бы в исходной задаче к выполнению условия (1), не были разработаны в достаточной степени. Без таких методов решение задачи является затруднительным, так как показано, что для мощности $N(T)$ множества минимальных сечений дерева T справедливы точные оценки

$$|Or(T)| + 1 \leq |N(T)| \leq \prod_{d \in Or(T)} |\deg(d)| ,$$

где $Or(T)$ — множество вершин дерева T , связанных с оператором дизъюнкции, $\deg(d)$ — множество вершин, входящих в вершину d дерева T . Это означает, что количество уравнений Колмогорова – Чепмена может быть достаточно велико уже для одной аварии. В случае большой мощности множества аварий \bar{A} переборный поиск одного вектора μ , доставляющего условие (1) для всех минимальных сечений, еще менее продуктивен.

Для преодоления указанных ограничений предлагается следующий подход, позволяющий выделять минимальные множества событий для предотвращения заданных аварийных комбинаций с учетом того значения, которое имеет порядок возникающих событий.

3. ПРЕДЛАГАЕМЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ

Предлагаемый подход основывается на использовании путей успешного функционирования (ПУФ) дерева T , множество которых $M(T)$ находится по тем же алгоритмам, что и множество минимальных сечений $N(T)$, применяемым к инвертированному дереву. ПУФ представляют собой минимальные подмножества $E = \{e_1, \dots, e_k\}$, каждый из которых пересекается со всеми минимальными сечениями дерева T . ПУФ считается реализованным, если все события, входящие в него, не произошли. Соответственно, если ПУФ реализуется, то минимальные сечения реализоваться не могут.

Показано, что количество ПУФ подчиняется точной оценке

$$|And(T)| + 1 \leq |M(T)| \leq \prod_{d \in And(T)} |\deg(d)| ,$$

где $And(T)$ — множество вершин дерева T , связанных с оператором конъюнкции.

Предлагается в упомянутой выше задаче искать вектор μ' интенсивностей парирования событий из некоторого ПУФ $E' \subseteq E = \{e_1, \dots, e_k\}$ такой, что вероятность реализации этого ПУФ будет

$$\forall t \in [t_n, t_k] \quad \forall x(t) \in X(t) \quad p(E', t) \geq 1 - \varepsilon , \tag{3}$$

где ε — заданное достаточно малое число из (1).



В силу несовместимости реализации минимальных сечений и ПУФ условие (3) предполагается заменой для условия (1). Эта замена, с одной стороны, позволяет рассматривать в случае каждого отдельно взятого ПУФ только одну систему дифференциальных уравнений Колмогорова – Чепмена. С другой стороны, множество ПУФ доставляет совокупность вариантов, каждый из которых потенциально может быть использован для решения задачи и нахождения необходимых значений μ' . Выбор конкретного варианта ПУФ связан с требованием (2), а также граничными и начальными условиями задачи. При выборе ПУФ следует учитывать, что ни один ПУФ не пересекается одновременно со всеми остальными ПУФ и ни один ПУФ дерева T не совпадает ни с одним минимальным сечением дерева T , если дерево нетривиально. Выбор ПУФ для решения задачи упрощается также за счет использования операции сокращения числа элементов в ПУФ.

Использование сокращенных ПУФ

Наблюдение, на котором основана предлагаемая эвристика, заключается в том, что не всегда требуется предотвратить реализацию всех минимальных сечений дерева T . На практике в ряде случаев требуется противодействовать реализации некоторого подмножества $N' \subseteq N(T)$ множества минимальных сечений. В этом случае использовать ПУФ полностью не требуется и показано, что для любого множества подмножества $N' \subseteq N(T)$ множества минимальных сечений дерева T справедливы следующие утверждения:

- 1) если $E_0 \in M(T)$, то множество $E'_0 = \bigcup_{B \in N'} B \cap E_0$ является ПУФ для предупреждения реализации сечений из N' , B — элементы множества N' ;
- 2) если E' — ПУФ для N' , то $E' \subseteq E_0$, где E_0 — некоторый ПУФ для исходного дерева T .

Таким образом, для заданного подмножества минимальных сечений $N' \subseteq N(T)$ по указанной выше формуле для E'_0 можно получить все варианты ПУФ, которые представляют собой усеченные варианты ПУФ из $M(T)$. Так как для реализации усеченных вариантов при тех же ограничениях требуется меньше ресурсов, чем для реализации полных ПУФ, приведенные результаты позволяют расширить возможности для решения задачи для различных подмножеств $N(T)$.

Ниже предлагаются эвристические методы, позволяющие учесть порядок событий в аварийных комбинациях и снизить количество решаемых систем уравнений Колмогорова – Чепмена.

4. ЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ УЧЕТА ПОРЯДКА СОБЫТИЙ В АВАРИЙНЫХ КОМБИНАЦИЯХ

При нахождении вероятностей реализации минимальных сечений из m элементов традиционно решаются системы из 2^m уравнений Колмогорова – Чепмена. При решении этих систем порядок событий в минимальном сечении не учитывается, что может не согласовываться с практикой: не все $m!$ последовательностей из событий e_1, \dots, e_m обычно являются аварийной комбинацией. Вычисляемая в результате решения этих систем вероятность без учета порядка больше вероятности комбинаций в определенных порядках. Заметим, что если вычисляемые вероятности мажорируются заданным ε как в условии (1), то и вероятности комбинаций в определенных порядках также подпадают под это условие.



Однако иногда порядок наступления событий в аварийной комбинации более важен. Например, к пожару обычно приводит ситуация, когда сначала выходит из строя противопожарное средство, а уже затем происходит возгорание, а не наоборот. Для таких случаев имеет смысл разрабатывать подходы, позволяющие определять вероятность наступления событий в заданном (полностью или частично) порядке.

Ниже предлагается концепция эвристических методов, позволяющих учитывать порядок событий и вместе с тем сокращать количество дифференциальных уравнений, решаемых для определения вероятностей развития аварийных комбинаций событий.

Агрегирование событий

Пусть требуется найти вероятность реализации набора событий e_1, \dots, e_m , которые составляют минимальное сечение или ПУФ. При этом известно, что события $e_1, \dots, e_{m'}$ для некоторого $m' < m$ должны произойти до событий $e_{m'+1}, \dots, e_m$. Такая ситуация может иметь место в случае, если порядок событий в аварийной комбинации важен. Например, именно события $e_1, \dots, e_{m'}$ приводят к невозможности парирования событий $e_{m'+1}, \dots, e_m$ и, таким образом, весь набор составляет аварийную комбинацию.

Для решения системы Колмогорова – Чепмена требуются начальные условия, а также интенсивности возникновения $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ и парирования μ_1, \dots, μ_m событий e_1, \dots, e_m .

Рассмотрим два события \bar{e}_1, \bar{e}_2 , которые получаются объединением событий

$$e_1, \dots, e_m: \bar{e}_1 = e_1, \dots, e_{m'}, \bar{e}_2 = e_{m'+1}, \dots, e_m.$$

Задачу нахождения вероятности комбинации событий e_1, \dots, e_m представим как задачу нахождения вероятности комбинации двух событий \bar{e}_1, \bar{e}_2 . Вероятности \bar{e}_1, \bar{e}_2 можно определить отдельно как вероятности комбинации событий $e_1, \dots, e_{m'}$ и $e_{m'+1}, \dots, e_m$ путем решения систем Колмогорова – Чепмена из $2^{m'} + 2^{m-m'} + 4$ уравнений соответственно, а вероятность комбинации событий \bar{e}_1, \bar{e}_2 — путем решения системы из четырех аналогичных уравнений. Общее количество решаемых уравнений, таким образом, будет равно $2^{m'} + 2^{m-m'} + 4$, что при росте m существенно меньше 2^m , и, кроме того, при небольших значениях m' соответствующей системы дифференциальных уравнений могут решаться аналитически.

Ограничением описанного подхода является первенство событий $e_1, \dots, e_{m'}$ и то, что после решения систем Колмогорова – Чепмена, в которых будут найдены вероятности событий \bar{e}_1 и \bar{e}_2 , нужно будет установить частоты их возникновения и парирования в виде постоянных величин $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$, а также начальные условия для решения системы из четырех уравнений для определения вероятности наступления комбинации событий \bar{e}_1, \bar{e}_2 . Сделать это можно, используя эвристические соображения, связанные с начальными условиями для исходной системы и поведением найденных вероятностей $P_{\bar{e}_1}(t), P_{\bar{e}_2}(t)$. Например, если эти вероятности достаточно мало меняются на исследуемых отрезках, полагать их практически постоянными при некоторых условиях.

Учет заданного порядка событий

Пусть требуется определить вероятность аварийной комбинации, в которой события идут в заданном порядке e_1, \dots, e_m . В этом случае из графа событий предлагает-



ся высечь только один путь, соответствующий заданной последовательности развития событий, и уравнения Колмогорова – Чепмена строятся только для вероятностей событий $P_0(t), P_{e_1}(t), P_{e_1, e_2}(t), \dots, P_{e_1, e_2, \dots, e_m}(t)$ соответственно в количестве $m + 1$. Это количество существенно меньше 2^m , что снижает количество дифференциальных уравнений в системе. Ограничение данного подхода заключается в том, что требуется определить условия для выполнения эвристик, касающихся вероятностей возникновения событий e_1, \dots, e_m в прочих порядках, отличных от заданного.

При соблюдении условий, допускающих применение предлагаемых эвристических методов, эти методы могут комбинироваться (в том числе применяясь неоднократно) и существенно снижать сложность вычисления вероятностей развития аварийных комбинаций событий в случаях, когда задан порядок или несколько его вариантов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагается метод определения управляющих воздействий по предотвращению аварийных комбинаций событий в человеко-машинных системах. В предлагаемом подходе используются пути успешного функционирования системы, позволяющие определять минимальные множества событий для предотвращения аварийных комбинаций. Предлагаются эвристические методы, позволяющие учесть порядок событий в аварийной комбинации и снизить количество дифференциальных уравнений, решаемых для определения вероятностей развития аварийных комбинаций событий.

Библиографический список

1. *Makhutov N. A.* Ranges of the Validity of Power Scaling Laws in the Description of Scale Effects of the Strength of Extended Elements of Machines and Structures // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2013. Vol. 42, iss. 5. P. 364–373. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618813050075>
2. *Makhutov N. A., Reznikov D. O.* A Criterion Base for Assessment of Strength, Lifetime, Reliability, Survivability, and Security of Machines and Man-Machine Systems // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2017. Vol. 46, iss. 2. P. 132–141. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618817020108>
3. *Braglia M., Di Donato L., Zhang L., Gabbriellini R., Marrazzini L.* The house of safety: A novel method for risk assessment including human misbehaviour // *Safety Science*. 2018. № 110. P. 249–264. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ssci.2018.08.015>
4. *Avila S.* Reliability analysis for socio-technical system, case propene pumping // *Engineering Failure Analysis*. 2015. № 56. P. 177–184. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2015.02.023>
5. *Bogomolov A. V., Sviridyuk G. A., Keller A. V., Zinkin V. N., Alekhin M. D.* Information-logical modeling of information collection and processing at the evaluation of the functional reliability of the aviation ergate control system operator // 2018 Third International Conference on Human Factors in Complex Technical Systems and Environments (ERGO)s and Environments (ERGO). St. Petersburg, 2018. P. 106–110. DOI: <https://doi.org/10.1109/ERGO.2018.8443849>
6. *Богомолов А. В.* Методика унификации медико-биологических эффектов комбинированного воздействия физических факторов // Системный анализ в медицине (САМ 2016) : материалы X междунар. науч. конф. / под общ. ред. В. П. Колосова. Благовещенск, 2016. С. 23–26.
7. *Makhutov N. A., Reznikov D. O., Khaziakhmetov R.* Basic scenarios of terrorist attacks at hydropower engineering facilities // *Risk Analysis, Dam Safety, Dam Security and Critical*



- Infrastructure Management : Proceedings of the 3IWRDD-FORUM / ed. I. E. Bueno. CRC Press/Balkema ; Taylor & Francis Group, 2011. P. 389–395.
8. *Reznikov D. O.* Technological and Intelligent Terrorism: Specific Features and Assessment Approaches // Comparative Analysis of Technological and Intelligent Terrorism Impacts on Complex Technical Systems. 2012. № 102. P. 45–60. DOI: <https://doi.org/10.3233/978-1-61499-131-1-45>
 9. *Reniers G. L. L., Audenaert A.* Preparing for major terrorist attacks against chemical clusters: Intelligently planning protection measures w.r.t. domino effects // Process Safety and Environmental Protection. 2014. Vol. 92, iss. 6. P. 583–589. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.psep.2013.04.002>
 10. *Zhang L., Landucci G., Reniers G., Khakzad N., Zhou J.* DAMS: A Model to Assess Domino Effects by Using Agent-Based Modeling and Simulation // Risk Analysis. 2018. Vol. 38, № 8. P. 1585–1600. DOI: <https://doi.org/10.1111/risa.12955>
 11. *Chen C., Reniers G., Zhang L.* An innovative methodology for quickly modeling the spatial-temporal evolution of domino accidents triggered by fire // Journal of Loss Prevention in the Process Industries. 2018. № 54. P. 312–324. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jlp.2018.04.012>
 12. *Khakzad N., Khan F., Amyotte P., Cozzani V.* Domino Effect Analysis Using Bayesian Networks // Risk Analysis. 2013. Vol. 33, № 2. P. 292–306. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1539-6924.2012.01854.x>
 13. *Kadri F., Birregah B., Chatelet E., Cozzani V.* The Impact of Natural Disasters on Critical Infrastructures: A Domino Effect-based Study // Journal of Homeland Security and Emergency Management. 2014. Vol. 11, iss. 2. P. 217–241. DOI: <https://doi.org/10.1515/jhsem-2012-0077>
 14. *Богомолов А. С., Иващенко В. А., Кушников В. А., Резчиков А. Ф., Цвиркун А. Д., Цесарский Л. Г., Филимонюк Л. Ю.* Моделирующий комплекс для анализа неблагоприятных сочетаний событий в авиационных транспортных системах // Проблемы управления. 2018. Вып. 1. С. 74–79.
 15. *Rezchikov L. Yu., Kushnikov V. A., Ivashchenko V. A., Bogomolov A. S., Filimonjuk L. Yu.* Models and Algorithms of Automata Theory for the Control of an Aircraft Group // Automation and Remote Control. 2018. Vol. 79, iss. 10. P. 1863–1870. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117918100107>
 16. *Filimonjuk L. Yu.* The problem of critical events' combinations in air transportation systems // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2017. № 575. P. 244–254. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-57261-1-38>
 17. *Резчиков А. Ф., Кушников В. А., Иващенко В. А., Богомолов А. С., Филимонюк Л. Ю., Шоломов К. И.* Представление динамических причинно-следственных связей в человеко-машинных системах // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 109–116. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-1-109-116>
 18. *Богомолов А. С.* Анализ путей возникновения и предотвращения критических сочетаний событий в человеко-машинных системах // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 219–230. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-219-230>
 19. *Ostreichovsky V. A., Shevchenko Y. N., Yurkov N. K., Kochegarov I. I., Grishko A. K.* Time Factor in the Theory of Anthropogenic Risk Prediction in Complex Dynamic Systems // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 944. P. 012085. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012085>



20. *Острейковский В. А.* Математические методы и модели техногенного риска в теории безопасности атомных станций. Курган : Курганский Дом печати, 2017. 448 с.

Образец для цитирования:

Богомолов А. С. Предотвращение аварийных комбинаций событий при управлении человеко-машинными системами // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 2. С. 196–206. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-196-206>

Prevention of Accidental Combinations of Events in the Control of Human-Machine Systems

A. S. Bogomolov

Aleksey S. Bogomolov, <https://orcid.org/0000-0002-6972-3181>, Institute of Precision Mechanics and Control, RAS, 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia; Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, alexbogomolov@ya.ru

In the work the problem of accidental combinations of events is investigated. An accidental combination of events is a set of defects in equipment, software and human errors, relatively non-dangerous separately but leading to an accident when they occur in a certain order at a certain time interval. Modern warning tools can parry mainly individual adverse effects and to effectively prevent critical modes it is necessary to provide mathematical analysis of systems for accidental combinations of events at different time intervals. The task of managing the prevention of accidental combinations of events is set as the task of the variational calculus on the conditional extremum. A method for solving the problem based on the analysis of failure trees and ways of successful operation is proposed. The given method allows selecting the minimum set of adverse events, the parrying of which makes it possible to reduce the likelihood of emergency combinations to a safe level. The properties of the paths of successful functioning were determined and proved including accurate estimates for their number which allows ranking tasks by time complexity and increasing the efficiency of their solution. Heuristic approaches were developed which allow to take into account the order of occurrence of events when managing the process of preventing their emergency combinations. The specified sequence of incidents are taken into account by allocating graphs and event aggregation. The obtained results are intended for use in decision support systems at various levels in managing the prevention of critical conditions and accidents of human-machine and organizational systems.

Keywords: combination of events, human-machine system, tree of failures, probability of an accident, way of successful functioning, order of events.

Received: 09.09.2018 / Accepted: 07.10.2018 / Published online: 28.05.2019

References

1. Makhutov N. A. Ranges of the Validity of Power Scaling Laws in the Description of Scale Effects of the Strength of Extended Elements of Machines and Structures. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2013, vol. 42, iss. 5, pp. 364–373. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618813050075>
2. Makhutov N. A., Reznikov D. O. A Criterion Base for Assessment of Strength, Lifetime, Reliability, Survivability, and Security of Machines and Man-Machine Systems. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2017, vol. 46, iss. 2, pp. 132–141. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618817020108>



3. Braglia M., Di Donato L., Zhang L., Gabbrielli R., Marrazzini L. The house of safety: A novel method for risk assessment including human misbehaviour. *Safety Science*, 2018, no. 110, pp. 249–264. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ssci.2018.08.015>
4. Avila S. Reliability analysis for socio-technical system, case propene pumping. *Engineering Failure Analysis*, 2015, no. 56, pp. 177–184. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2015.02.023>
5. Bogomolov A. V., Sviridyuk G. A., Keller A. V., Zinkin V. N., Alekhin M. D. Information-logical modeling of information collection and processing at the evaluation of the functional reliability of the aviation ergate control system operator. *2018 Third International Conference on Human Factors in Complex Technical Systems and Environments (ERGO)s and Environments (ERGO)*. St. Petersburg, 2018, pp. 106–110. DOI: <https://doi.org/10.1109/ERGO.2018.8443849>
6. Bogomolov A. V. The technique of unification of medical and biological effects of the combination of effects of physical factors. *Sistemnyi analiz v meditsine (SAM 2016). Materialy X mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii [Systems Analysis in Medicine (SAM 16): Proc. X Int. Sci. Conf.]*. Blagoveschensk, 2016, pp. 23–26 (in Russian).
7. Makhutov N. A., Reznikov D. O., Khaziakhmetov R. Basic scenarios of terrorist attacks at hydropower engineering facilities. *Risk Analysis, Dam Safety, Dam Security and Critical Infrastructure Management: Proceedings of the 3IWRDD-FORUM / ed. I. E. Bueno*. CRC Press / Balkema; Taylor & Francis Group, 2011, pp. 389–395.
8. Reznikov D. O. Technological and Intelligent Terrorism: Specific Features and Assessment Approaches. *Comparative Analysis of Technological and Intelligent Terrorism Impacts on Complex Technical Systems*, 2012, no. 102, pp. 45–60. DOI: <https://doi.org/10.3233/978-1-61499-131-1-45>
9. Reniers G. L. L., Audenaert A. Preparing for major terrorist attacks against chemical clusters: Intelligently planning protection measures w.r.t. domino effects. *Process Safety and Environmental Protection*, 2014, vol. 92, no. 6, pp. 583–589. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.psep.2013.04.002>
10. Zhang L., Landucci G., Reniers G., Khakzad N., Zhou J. DAMS: A Model to Assess Domino Effects by Using Agent-Based Modeling and Simulation. *Risk Analysis*, 2018, vol. 38, no. 8, pp. 1585–1600. DOI: <https://doi.org/10.1111/risa.12955>
11. Chen C., Reniers G., Zhang L. An innovative methodology for quickly modeling the spatial-temporal evolution of domino accidents triggered by fire. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, 2018, no. 54, pp. 312–324. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jlp.2018.04.012>
12. Khakzad N., Khan F., Amyotte P., Cozzani V. Domino Effect Analysis Using Bayesian Networks. *Risk Analysis*, 2013, vol. 33, no. 2, pp. 292–306. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1539-6924.2012.01854.x>
13. Kadri F., Birregah B., Chatelet E., Cozzani V. The Impact of Natural Disasters on Critical Infrastructures: A Domino Effect-based Study. *Journal of Homeland Security and Emergency Management*, 2014, vol. 11, iss. 2, pp. 217–241. DOI: <https://doi.org/10.1515/jhsem-2012-0077>
14. Bogomolov A. S., Ivashchenko V. A., Kushnikov V. A., Rezchikov L. Yu., Tsvirkun A. D., Tsesarskiy L. G., Filimonyuk L. Yu. Modeling complex for critical events combinations analysis in aviation transport systems. *Control Sciences*, 2018, iss. 1, pp. 74–79 (in Russian).
15. Rezchikov L. Yu., Kushnikov V. A., Ivashchenko V. A., Bogomolov A. S., Filimonyuk L. Yu. Models and Algorithms of Automata Theory for the Control of an Aircraft Group. *Automation and Remote Control*, 2018, vol. 79, iss. 10, pp. 1863–1870. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117918100107>



16. Filimonyuk L. Yu. The problem of critical events' combinations in air transportation systems. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, 2017, no. 575, pp. 244–254. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-57261-1-38>
17. Rezhnikov L. Yu., Kushnikov V. A., Ivashchenko V. A., Bogomolov A. S., Filimonyuk L. Yu., Sholomov K. I. The Dynamical Cause-effect Links' Presentation in Human-machine Systems. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 109–116 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-1-109-116>
18. Bogomolov A. S. Analysis of the Ways of Occurrence and Prevention of Critical Combinations of Events in Man-machine Systems. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 219–230 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-219-230>
19. Ostreikovskiy V. A., Shevchenko Y. N., Yurkov N. K., Kochegarov I. I., Grishko A. K. Time Factor in the Theory of Anthropogenic Risk Prediction in Complex Dynamic Systems. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 944, pp. 012085. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012085>
20. Ostreikovskiy V. A. *Matematicheskie metody i modeli tekhnogennogo riska v teorii bezopasnosti atomnykh stantsiy* [Mathematical methods and models of technogenic risk in the theory of safety of nuclear power plants]. Kurgan, Kurganskii Dom Pechati, 2017. 448 p. (in Russian).

Cite this article as:

Bogomolov A. S. Prevention of Accidental Combinations of Events in the Control of Human-Machine Systems. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 2, pp. 196–206 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-196-206>



УДК 681.5.037

Оценка качества нестационарных систем на плоскости обратной частотной характеристики

В. М. Иванов

Иванов Владимир Михайлович, кандидат технических наук, доцент кафедры электропривода и автоматизации промышленных установок, Ульяновский государственный технический университет, Россия, 432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32, v.ivanov@ulstu.ru

При оценке качества линейных систем широко используются прямые показатели качества, к которым относятся: время регулирования, перерегулирование, декремент затухания. Наряду с прямыми показателями используются косвенные оценки качества. Для нелинейных систем одним из таких показателей качества является степень устойчивости или, иначе, мера быстродействия. Как показано в ряде работ, исследование свойств нелинейных систем в этом случае сводится к анализу абсолютной устойчивости процессов. В данной работе рассматривается структурное представление нестационарной линеаризованной системы, которое позволяет более наглядно показать постановочную часть задачи и обосновать переход к системе с обобщенной нелинейностью. Нестационарная параметрическая характеристика, обусловленная множительным звеном, может находиться в четырех квадрантах. Однако для большинства практических задач характеристика множительного звена может быть представлена как двухквадрантная, поскольку одна из переменных, характеризующая текущее значение параметра, выступает как положительная величина. Основные особенности структурной схемы связаны с тем, что изменение коэффициента Δk эквивалентно возмущающему воздействию $\Delta k x_0$, вызванному начальными условиями. Нестационарные свойства сопряженного контура являются основной причиной свободного процесса, который характеризует переход от некоторого начального состояния к устойчивому состоянию равновесия. Начальные условия определены исходным контуром и эквивалентны входному воздействию. Таким образом, система с множительным звеном в общем случае может быть представлена как система с обобщенной нелинейностью. Исследование производится в плоскости обратной частотной характеристики, что позволяет упростить задачу анализа систем с двумерной нелинейностью множительных звеньев. В качестве практического приложения рассмотрен алгоритм расчета и анализа частотных характеристик с целью графического их представления и определения областей устойчивости.

Ключевые слова: двумерная нелинейность множительных звеньев, степень устойчивости, круговой критерий, обратная частотная характеристика.

Поступила в редакцию: 05.09.2018 / Принята: 09.02.2019 / Опубликовано онлайн: 28.05.2019

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-207-216>

ВВЕДЕНИЕ

При оценке качества линейных систем широко используются прямые показатели качества, к которым относятся: время регулирования, перерегулирование, декремент затухания. Наряду с прямыми показателями используются косвенные оценки качества. Для нелинейных систем одним из таких показателей качества является степень устойчивости или, иначе, мера быстродействия.

Как показано в работах [1, 2], исследование свойств нелинейных систем в этом случае сводится к анализу абсолютной устойчивости процессов. Основопологающей



работой в этом направлении была статья А. И. Лурье и В. Н. Постникова [3], в которой с помощью функций Ляпунова отыскивались условия устойчивости равновесия. В дальнейшем решение данной задачи получило развитие в работах [4–9].

В начале 1960-х гг. румынским ученым В. М. Поповым было получено аналитическое условие абсолютной устойчивости для нелинейных систем и дана его геометрическая интерпретация [10, 11]. На основании этого критерия можно судить об абсолютной устойчивости по модифицированной частотной характеристике линейной части. Работы В. М. Попова значительно упростили исследование абсолютной устойчивости нелинейных систем и сделали его наглядным [12]. Частотные характеристики в инженерной практике широко используются как для анализа, так и синтеза динамических систем. Однако процесс построения частотных характеристик является трудоемким и, несмотря на существование современных программных пакетов, используемых для научных и инженерных вычислений [13, 14], требует разработки дополнительных алгоритмов применительно к нелинейным системам.

В данной работе рассматривается структурное представление нестационарной линеаризованной системы, которое позволяет более наглядно представить постановочную часть задачи и обосновать переход к системе с обобщенной нелинейностью. Исследование производится в плоскости обратной частотной характеристики [15], что позволяет упростить задачу анализа систем, нелинейность которых обусловлена двухмерной нелинейностью множительных звеньев. В качестве практического приложения рассмотрен алгоритм расчета и анализа частотных характеристик с целью графического их представления и определения областей устойчивости.

1. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

В наиболее общем случае нестационарная параметрическая характеристика, обусловленная множительным звеном (МЗ), может находиться в четырех квадрантах, однако для большинства практических задач характеристика МЗ может быть представлена как двухквадрантная, поскольку одна из величин, характеризующая текущее значение параметра, представляет собой положительную величину. Это позволяет свести задачу анализа к исследованию систем с нестационарной нелинейностью $y = \Phi(x, t)$, характеристика которой не выходит из заданного сектора $[0, k]$ или $[k_1, k_2]$, образованного прямолинейными лучами $y = k_1x$ и $y = k_2x$, т. е. удовлетворяющая условиям

$$0 \leq \frac{\Phi(x, t)}{x} \leq k \quad \text{или} \quad k_1 \leq \frac{\Phi(x, t)}{x} \leq k_2.$$

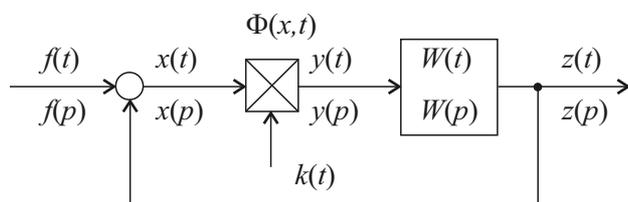


Рис. 1. Структурная схема системы управления с множительным звеном

Fig. 1. Structural diagram of a control system with a multiplier link

Рассмотрим систему, где объект управления обозначен передаточной функцией $W(p)$, а нелинейность определена нестационарной характеристикой множительного звена (рис. 1).

Один из методов, используемых при исследовании нелинейных систем, основан на их линеаризации. Линеаризацию можно производить по звеньям. При этом функцию двух



переменных $F(x, y)$ в некоторой окрестности точки $M(x_0, y_0)$ можно разложить в ряд Тейлора

$$F(x, y) = F_0(x, y) + F_1(x, y) + F_2(x, y) + F_3(x, y) + \dots,$$

где $F_0(x, y) = F(x_0, y_0)$;

$$F_1(x, y) = F'_x(x, y)\Delta x + \frac{1}{2!}F''_{xx}(x, y)\Delta x^2 + \frac{1}{3!}F'''_{xxx}(x, y)\Delta x^3 + \dots;$$

$$F_2(x, y) = F'_y(x, y)\Delta y + \frac{1}{2!}F''_{yy}(x, y)\Delta y^2 + \frac{1}{3!}F'''_{yyy}(x, y)\Delta y^3 + \dots;$$

$$F_3(x, y) = F''_{xy}(x, y)\Delta x\Delta y + \frac{1}{2!}F'''_{xxy}(x, y)\Delta x^2\Delta y + \frac{1}{2!}F'''_{xyy}(x, y)\Delta x\Delta y^2 + \dots$$

Для множительного звена $\Phi(x, t) = y = kx$ обозначим отклонения входных и выходных величин: $\Delta x = x - x_0$, $\Delta k = k - k_0$, $\Delta y = y - y_0$.

Тогда, полагая равными нулю частные производные выше первого порядка и смешанные производные выше второго порядка, получим

$$y_0 + \Delta y = k_0x_0 + \Delta kx_0 + \Delta xk_0 + \Delta x\Delta k.$$

Структурная схема в виде двух взаимосвязанных подсистем показана на рис. 2. Здесь в качестве исходного принят контур, характеризующий начальные условия x_0, y_0, z_0 . Сопряженный контур, характеризующий приращение выходной координаты Δz , сформирован из условия изменения Δk в момент времени $t = t_0 > 0$. Изменение входного сигнала $f(t)$ к этому моменту закончено, и можно считать приращение $\Delta x = -\Delta z$.

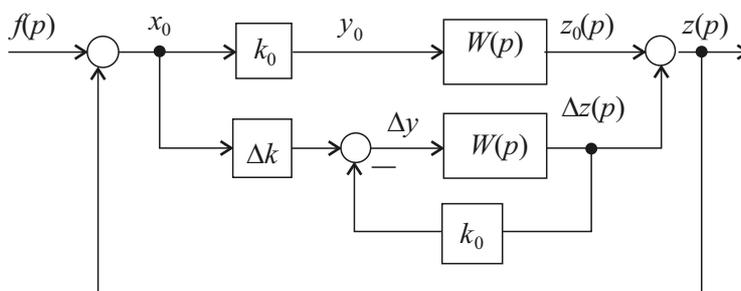


Рис. 2. Структурная схема линейризованной системы
Fig. 2. Structural diagram of a linearized system

Основные особенности структурной схемы связаны с тем, что изменение коэффициента Δk эквивалентно возмущающему воздействию Δkx_0 , вызванному начальными условиями. Нестационарные свойства сопряженного контура являются основной причиной свободного процесса, который характеризует переход от некоторого начального состояния к устойчивому состоянию равновесия. Начальные условия определены исходным контуром и эквивалентны входному воздействию

$$f_n(p) = \frac{f(p)}{1 + k_0W(p)}.$$

С учетом этого, структурную схему (см. рис. 2) можно представить в виде преобразованной нелинейной системы (рис. 3), где коэффициен-

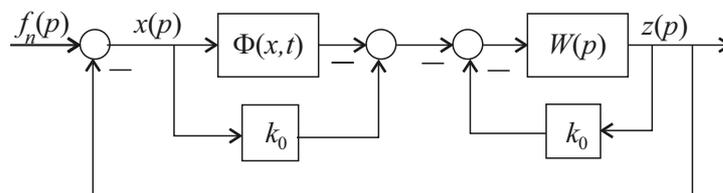


Рис. 3. Структурная схема преобразованной нелинейной системы
Fig. 3. Structural diagram of the transformed nonlinear system



ты k_0 не оказывают влияния на основную обратную связь. Таким образом, система с множительным звеном в общем случае может быть представлена как система с обобщенной нелинейностью.

Передаточная функция преобразованной линейной части будет равна

$$W_{\Pi}(p) = \frac{W(p)}{1 + k_0 W(p)}.$$

Приращение $\Delta k(t)$ соответствует характеристике преобразованного нелинейного элемента

$$\Phi_{\Pi}(x, t) = k_0 - \Phi(x, t).$$

Так как эквивалентные преобразования не изменяют свойств системы, то преобразованная и исходная система (см. рис. 1) имеют одни и те же свойства и, следовательно, тождественны друг другу. В случае абсолютно устойчивой исходной системы преобразованная система также будет устойчива.

2. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ПО МЕРЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Одной из оценок свободного процесса в нелинейных системах является степень устойчивости или, иначе, мера быстродействия. Под степенью устойчивости понимается абсолютное значение вещественной части ближайшего к мнимой оси корня [16]

$$\xi_0 = \min_v |\operatorname{Re} p_v|.$$

Величина ξ_0 определяет наибольшую постоянную времени системы и косвенно характеризует наибольшее быстродействие.

При рассмотрении свободных процессов [17], вызываемых убывающими воздействиями, временная характеристика линейной части преобразованной системы равна

$$w_1(t) = w(t)e^{\xi_0 t}.$$

С учетом этого частотная характеристика линейной части преобразованной нелинейной системы может быть представлена в виде смещенной частотной характеристики

$$W_1(j\omega) = \int_0^{\infty} w_1(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} w(t)e^{-(j\omega - \xi_0)t} dt = W(j\omega - \xi_0).$$

Для систем с неустойчивой или нейтральной линейной частью достаточные условия [17, 18], при выполнении которых процессы в нелинейной системе абсолютно устойчивы и все отклонения будут иметь степень устойчивости $\xi = \xi_0$ не меньше заданной, имеют следующий вид:

$$\operatorname{Re}(1 + qj\omega) \frac{W(j\omega - \xi_0)}{1 + rW(j\omega - \xi_0)} + \frac{1}{k - r} > 0;$$

$$r < \Phi(x) < k - r.$$

Критерий Попова обобщается также на системы с нестационарной нелинейностью, где для абсолютной устойчивости процесса, вызванного ограниченным воздействием, достаточно, чтобы смещенная частотная характеристика удовлетворяла условиям

$$\operatorname{Re} \frac{W(j\omega - \xi_0)}{1 + rW(j\omega - \xi_0)} + \frac{1}{k - r} \geq 0 \tag{1}$$



для всех $0 \leq \omega \leq \infty$ при соответствующих ограничениях $r < d\Phi(x, t)/dx < k$, наложенных на нелинейный элемент.

Как следует из формулировки критерия, никаких ограничений на характер изменения коэффициента во времени не накладывается, кроме ограничений на его максимальное и минимальное значения.

В случае использования обратной смещенной частотной характеристики условие (1) можно записать в виде

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\frac{1}{W(j\omega - \xi_0)} + r} + \frac{1}{k - r} \geq 0. \quad (2)$$

Представим обратную частотную характеристику линейной части в виде

$$\frac{1}{W(j\omega - \xi_0)} = P(\omega, \xi_0) + jQ(\omega, \xi_0),$$

где $P(\omega, \xi_0) = \operatorname{Re}[1/W(j\omega - \xi_0)]$, $Q(\omega, \xi_0) = \operatorname{Im}[1/W(j\omega - \xi_0)]$.

Тогда после подстановки $1/W(j\omega)$ в неравенство (2) получим

$$\operatorname{Re} \frac{1}{P(\omega, \xi_0) + r + jQ(\omega, \xi_0)} + \frac{1}{k - r} > 0$$

или

$$\operatorname{Re} \frac{P(\omega, \xi_0) + r - jQ(\omega, \xi_0)}{(P(\omega, \xi_0) + r)^2 + Q^2(\omega, \xi_0)} + \frac{1}{k - r} > 0.$$

Выделяя действительную часть и производя тождественные преобразования, получим

$$P^2(\omega, \xi_0) + (k + r)P(\omega, \xi_0) + Q^2(\omega, \xi_0) + kr \geq 0.$$

Прибавим в правую и левую части равенства члены $\frac{(k+r)^2}{4}$, тогда уравнение

$$\left(P(\omega, \xi_0) + \frac{k+r}{2}\right)^2 + Q^2(\omega, \xi_0) = \frac{(k+r)^2}{4}$$

на плоскости обычной обратной частотной характеристики $1/W(j\omega)$ определит окружность с центром на действительной оси и пересекающую последнюю в точках $-r$, $-k$. Координата центра окружности определяется точкой $-\frac{k+r}{2}$, а ее радиус величиной $R = \frac{k-r}{2}$. При этом для выполнения условий абсолютной устойчивости процессов достаточно, чтобы смещенная частотная характеристика $1/W(j\omega - \xi_0)$ не пересекала (k, r) — окружность.

Следует отметить, что аналитические методы исследования абсолютной устойчивости процессов в нелинейных системах имеют определенные ограничения, так как распространяются на системы с невозрастающей амплитудно-частотной характеристикой. При этом данные условия выполняются в системах с передаточной функцией линейной части

$$W(p) = \frac{K_{lp}}{p \prod_{i=2}^n (1 + T_i p)},$$

где n — порядок системы, K_{lp} — коэффициент передачи линейной части системы.



Пример. Оценим быстродействие (степень устойчивости) системы как системы с переменным коэффициентом усиления $k(t)$, передаточная функция линейной части которой равна

$$W(p) = \frac{k}{T_1 p [T_2 p (T_3 p + 1) + 1]},$$

где $T_1 = 2T_2$, $T_2 = 2T_3$, $T_3 = 0,04$, $K = 1$.

Смещенная частотная характеристика линейной части, полученная заменой p на $(j\omega - \xi_0)$, запишется так:

$$W(j\omega - \delta) = \frac{K}{T_1(j\omega - \xi_0) \{T_2(j\omega - \xi_0) [T_3(j\omega - \xi_0) + 1] + 1\}}.$$

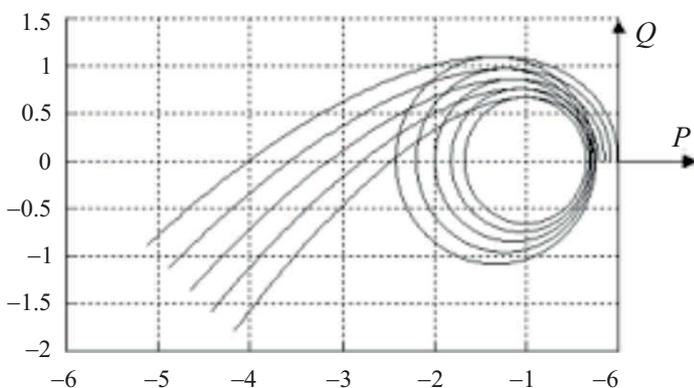
Обратные смещенные частотные характеристики

$$\begin{aligned} \frac{1}{W(j\omega - \xi_0)} &= T_1 T_2 T_3 (3\omega^2 - \xi_0^2) \xi_0 + T_1 T_2 (\xi_0^2 - \omega^2) - T_1 \xi_0 + \\ &+ j [T_1 T_2 T_3 (3\xi_0^2 - \omega^2) + 2T_1 T_2 \omega \xi_0 + T_1 \omega] = \\ &= 0,000512(3\omega^2 - \xi_0^2)\delta_0 + 0,0128(\xi_0^2 - \omega^2) - 0,16\xi_0 + \\ &+ j[0,000512(3\xi_0^2 - \omega^2)\omega - 0,0256\omega\xi_0 + 0,16\omega]. \end{aligned}$$

Графические и программные возможности системы MATLAB позволяют производить промежуточный анализ матричных данных и находить взаимосвязанные решения при их построении. Алгоритм расчета и вывода графической информации включает в себя следующие основные шаги:

- для заданного интервала изменения частоты ω от 0 до 20 с шагом 0.1 производят расчет векторов (\mathbf{p} — действительной и \mathbf{q} — мнимой части) смещенной на \mathbf{e} частотной характеристики;
- по ряду точек строят график параметрической функции (\mathbf{q} от \mathbf{p});
- для области графика, соответствующего выпуклому множеству, определяют вектор \mathbf{r} радиусов из условий определения вписанной окружности;
- анализируют вектор радиусов на максимум, определяют центр окружности и производят вывод окружности на график.

Ниже представлена программа и графики функции (рис. 4) с областями устойчивости.



```
function graphic
w=[0:0.1:20]; % угловая частота
for e=0:0.5:2 % степень устойчивости
p1=0.000512*(3*e.*w.^2-e.^3)
p2=0.0128*(e.^2-w.^2)
p3=-0.16*e
p=p1+p2+p3 % действительная часть
q1=0.000512*(3*e.*w.^2-w.^3)
q2=-0.0256*e.*w q3=0.16*w
q=q1+q2+q3 % мнимая часть
hold on
plot(p,q) % вывод графика кривой
% D-разбиения
```

Рис. 4. Смещенные частотные характеристики и их области абсолютной устойчивости
 Fig. 4. Displaced frequency characteristics and their areas of absolute stability



```

grid on % определение максимального радиуса вписанной окружности
k=1
while (q(k)>=0) % для внутренней области D-разбиения
ds(k)=q(k)+p(k)
if (ds(k)<=0) % если окружность вписывается,
r(k)=q(k) % то загружаем радиус
d(k)=p(k) % и его центр
else
r(k)=0
d(k)=-1
end
k=k+1;
end
[rm,m]=max(r) % выборка максимального радиуса
dm=d(m) % и его центра
t=[0:0.01:2*pi]; % круговая интерполяция
x1=-rm.*(1-sin(t))
x1=x1+(dm+rm) % смещение по действительной оси
y1=rm.*cos(t)
hold on
plot(x1,y1,'R') % вывод вписанной окружности
r=0
d=0
end
end

```

Окружности, касательные к частотным характеристикам, определяют критические значения k_g и r_g коэффициентов передачи, соответствующие областям абсолютной устойчивости состояния равновесия, внутри которых система имеет степень устойчивости, не менее заданной ξ_0 . Откуда следует, что при увеличении меры быстродействия ξ_0 соответствующие области абсолютной устойчивости сужаются. Кривая D — разбиения по коэффициенту усиления — представляет собой отрицательную обратную частотную характеристику, что позволяет довольно легко сопоставить области устойчивости по линейному частотному критерию.

Представленный метод анализа применим и для системы с передаточной функцией $W(p) = \frac{K_{TP}}{p}$, т. е. для случая $n = 1$.

Данный вариант, связанный с построением смещенных частотных характеристик для интегрирующего звена (рис. 5), можно интерпретировать следующим образом:

1) области абсолютной устойчивости исходной системы (см. рис. 1) соответствуют окружностям бесконечного радиуса;

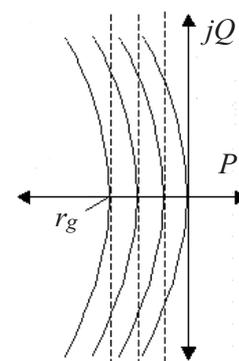


Рис. 5. Смещенные частотные характеристики и области устойчивости для объекта управления, представленного интегрирующим звеном

Fig. 5. Offset frequency characteristics and areas of stability for the control object represented by the integrating element



2) для обеспечения быстродействия не меньше заданного минимальный коэффициент множительного звена $k_{0\min}$ должен выбираться из условия $r_g = \xi_0 = |\operatorname{Re} p_1|$, что соответствует значению $k_{0\min} = \xi_0/K_{lp}$ для всех $\xi_0 > 0$.

Таким образом, использование кругового критерия в данном случае с учетом секторальных ограничений на характеристики множительного звена не противоречит условиям абсолютной устойчивости интегрирующего звена, охваченного отрицательной обратной связью.

Библиографический список

1. Наумов Б. Н., Цыпкин Я. З. Частотный критерий абсолютной устойчивости процессов в нелинейных системах автоматического управления // Автомат. и телемех. 1964. Т. 25, вып. 6. С. 852–867.
2. Наумов Б. Н. Исследование абсолютной устойчивости положения равновесия в нелинейных системах автоматического управления при помощи логарифмических частотных характеристик // Автомат. и телемех. 1965. Т. 26, вып. 4. С. 591–600.
3. Лурье А. И., Постников В. Н. К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. 1944. Т. 8, № 3. С. 246–248.
4. Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М. : Госэнергоиздат, 1955. 312 с.
5. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М. : Изд-во АН СССР, 1963. 140 с.
6. Megretski A., Rantzer A. System analysis via integral quadratic constraints // IEEE Trans. Automat. Contr. 1997. Vol. 42, № 6. P. 819–830. DOI: <https://doi.org/10.1109/9.587335>
7. Liu Z., Lü S., Zhong S., Ye M. Improved Robust Stability Criteria of Uncertain Neutral Systems with Mixed Delays // Abstr. Appl. Anal. 2009. Vol. 2009. P. 1–18. DOI: <https://doi.org/10.1155/2009/294845>
8. Wu M., He Y., She J.-H. Stability Analysis, Robust Control of Time-Delay Systems. Beijing : Science Press ; L. : Springer, 2010. 335 p.
9. Shatyrko A., Khusainov D. On the Interval Stability of Weak-Nonlinear Control Systems with Aftereffect // Sci. World J. 2016. Vol. 2016. P. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.1155/2016/6490826>
10. Попов В. М. Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования // Автомат. и телемех. 1961. Т. 22, № 8. С. 961–979.
11. Попов В. М. Гиперустойчивость автоматических систем. М. : Наука, 1970. 454 с.
12. Haddad W. M., Kapila V. Absolute stability criteria for multiple slope-restricted monotonic nonlinearities // Proceedings of American Control Conference. 1994. Vol. 1. P. 1020–1021. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACC.1994.751901>.
13. Дьяконов В. MATLAB 6 : учебный курс СПб. : Питер, 2001. 592 с.
14. Дьяконов В. П. Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления. М. : ДМК Пресс, 2008. 576 с.
15. Следящие приводы : в 2 т. Т. 1. Теория и проектирование следящих приводов / под ред. В. К. Чемоданова. М. : Энергия, 1976. 480 с.
16. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. М. : Наука, 1979. 768 с.
17. Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем. М. : Наука, 1977. 560 с.
18. Воронов А. А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М. : Наука, 1979. 336 с.

Образец для цитирования:

Иванов В. М. Оценка качества нестационарных систем на плоскости обратной частотной характеристики // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 2. С. 207–216. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-207-216>



Estimation of Quality of Non-Stationary Systems on the Return Frequency Characteristic Plane

V. M. Ivanov

Vladimir M. Ivanov, <https://orcid/0000-0002-0332-5738>, Ulyanovsk State Technical University, 32 Severny Venetz St., Ulyanovsk 432027, Russia, v.ivanov@ulstu.ru

Direct quality parameters, such as time of regulation, overshoot, damping decrement are widely used for estimation of linear systems quality. Alongside with direct parameters indirect estimations of quality are used. One of such quality parameters for nonlinear systems is the degree of stability or response speed. A number of research studies show that properties of nonlinear systems investigation is reduced to the analysis of absolute stability of processes. The study considers structural representation of non-stationary linearized system, which allows to present additional evidence the statement of problem and to prove transition to the system with the generalized non-linearity. In general, the non-stationary parametrical characteristic caused by a multiplying part, can be present in four quadrants. However, in most practical problems the characteristic of the multiplying part can be presented as two quadrants, because one of the variables, describing the current value of the parameter is represented by a positive value. The basic features of the block diagram are defined by the fact that a change of Δk factor is equivalent to $\Delta k x_0$ revolting influence caused by entry conditions. Non-stationary properties of the interfaced contour define the free process characterized by transition from the initial state to a steady status of the balance. Entry conditions are defined by an initial contour and are equivalent to the input impact. Thus, the system with a multiplying part can be generally presented as a system with the generalized non-linearity. We studied return the frequency characteristic plane that allows to simplify analytical problems of the systems with two-dimensional non-linearity of multiplying parts. Practical applications demonstrate the algorithm of calculation and analysis of the frequency characteristics for the purpose of their graphic representation and definition of stability.

Keywords: two-dimensional nonlinearity of multipliers, degree of stability, circular criterion, return frequency characteristic.

Received: 05.09.2018 / Accepted: 09.02.2019 / Published online: 28.05.2019

References

1. Naumov B. N., Tsyppin Ya. Z. Frequency criterion for process absolute stability in non-linear automatic control system. *Avtomat. i Telemekh.* [Automation and Remote Control], 1964, vol. 25, iss. 6, pp. 852–867 (in Russian).
2. Naumov B. N. An investigation of absolute stability of the equilibrium state in nonlinear automatic control systems by means of logarithmic frequency characteristics. *Autom. Remote Control*, 1965, vol. 26, iss. 4, pp. 593–601.
3. Lur'e A. I., Postnikov V. N. K teorii ustoychivosti reguliruemyykh sistem [To the theory of stability of adjustable systems]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 1944, vol. 8, no. 3, pp. 246–248 (in Russian).
4. Letov A. M. *Ustoychivost' nelineynykh reguliruemyykh sistem* [Stability of nonlinear adjustable systems]. Moscow, Gosenergoizdat, 1955. 312 p. (in Russian).
5. Ajzerman M. A., Gantmaher F. R. *Absolyutnaya ustoychivost' reguliruemyykh sistem* [Absolute stability of adjustable systems]. Moscow, Izd-vo AN SSSR, 1963. 140 p. (in Russian).
6. Megretski A., Rantzer A. System analysis via integral quadratic constraints. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1997, vol. 42, no. 6, pp. 819–830. DOI: <https://doi.org/10.1109/9.587335>



7. Liu Z., Lü S., Zhong S., Ye M. Improved Robust Stability Criteria of Uncertain Neutral Systems with Mixed Delays. *Abstr. Appl. Anal.*, 2009, vol. 2009, pp. 1–18. DOI: <https://doi.org/10.1155/2009/294845>
8. Wu M., He Y., She J.-H. *Stability Analysis, Robust Control of Time-Delay Systems*. Beijing, Science Press; London, Springer, 2010. 335 p.
9. Shatyrko A., Khusainov D. On the Interval Stability of Weak-Nonlinear Control Systems with Aftereffect. *Sci. World J.*, 2016, vol. 2016, pp. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.1155/2016/6490826>
10. Popov V. M. On absolute stability of non-linear automatic control systems. *Automat. i Telemekh.* [Automation and Remote Control], 1961, vol. 22, iss. 8, pp. 961–979 (in Russian).
11. Popov V. M. *Giperustoichivost' avtomaticheskikh system* [Hyperstability of Automatic Systems]. Moscow, Nauka, 1970. 454 p. (in Russian).
12. Haddad W. M., Kapila V. Absolute stability criteria for multiple slope-restricted monotonic nonlinearities. *Proceedings of American Control Conference*, 1994, vol. 1, pp. 1020–1021. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACC.1994.751901>.
13. D'yakonov V. *MATLAB 6: uchebnyj kurs* [MATLAB 6: training course]. St. Petersburg, Piter, 2001. 592 p. (in Russian).
14. D'yakonov V. P. *Mathematica 5.1/5.2/6. Programmirovaniye i matematicheskie vychisleniya* [Mathematica 5.1/5.2/6. Programming and mathematical calculations]. Moscow, DMK Press, 2008. 576 p. (in Russian).
15. *Sledyaschie privody : v 2 t.* [The watching drives : in 2 vols.]. Vol. 1 / ed. by V. K. Chemođanov. Moscow, Energiya, 1976. 480 p. (in Russian).
16. Besekerskiy V. A., Popov E. P. *Teoriya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya* [Theory of systems of automatic control]. Moscow, Nauka, 1979. 768 p. (in Russian).
17. Tsypkin Ya. Z. *Osnovy teorii avtomaticheskikh system* [Fundamentals of the theory of automatic systems]. Moscow, Nauka, 1977. 560 p. (in Russian).
18. Voronov A. A. *Ustoichivost', upravlyaemost', nablyudaemost'* [Stability, controllability, observability]. Moscow, Nauka, 1979. 336 p. (in Russian).

Cite this article as:

Ivanov V. M. Estimation of Quality of Non-Stationary Systems on the Return Frequency Characteristic Plane. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 2, pp. 207–216 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-207-216>



UDC 501.1

The Use of a Genetic Algorithm in Modeling the Electrophysical Properties of a Layered Nanocomposite

R. P. Kim, S. P. Romanchuk, D. V. Terin, S. A. Korchagin

Roman P. Kim, <https://orcid.org/0000-0002-7986-5810>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, kimrp1988@gmail.com

Sergey P. Romanchuk, <https://orcid.org/0000-0001-9828-7297>, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St., Saratov 410054, Russia

Denis V. Terin, <https://orcid.org/0000-0003-2850-4406>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, terinden@mail.ru

Sergey A. Korchagin, <https://orcid.org/0000-0001-8042-4089>, Engels Technological Institute of Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 17 Svoboda Sq., Engels 413100, Saratov Region, Russia, korchaginser@gmail.com

The research proposes an approach to solving the problem of selecting layered nanocomposite components with given electrical properties. The known methods for modeling the nanocomposites electrical characteristics are based on a preliminary analysis of such characteristics as the dielectric constant and electrical conductivity of the materials that make up a nanocomposite. The study proposes an algorithm for the selection of components of a layered nanocomposite using a genetic algorithm. Mathematical modeling of nanocomposite electrical properties is carried out using an effective medium model. We consider composite materials based on nanoporous silicon and partially oxidized porous silicon as an example. We have analyzed the frequency dependences of the dielectric constant and nanocomposite electrical conductivity when interacting with electromagnetic radiation. We have also studied efficiency of the proposed method depending on the rate of convergence and various parameters (mutation coefficient, population size, etc.). We developed a software package for modeling the electrical properties of a nanocomposite using a genetic algorithm. The results of the research can reduce the time and cost of creating new functional materials.

Keywords: genetic algorithm, mathematical modeling, layered nanocomposite, software package, effective medium model.

Received: 29.01.2019 / Accepted: 05.03.2019 / Published online: 28.05.2019

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-217-225>

INTRODUCTION

Layered nanocomposites are promising materials that are used in applied science (aircraft industry, astronautics, microelectronics, radar, etc.). Recent studies [1–3] show high potential for the development of design and prediction methods for nanocomposites with specified electrical properties. Works [4,5] present the problem of nanocomposite electrical properties modeling using the effective medium model (Fig. 1), the

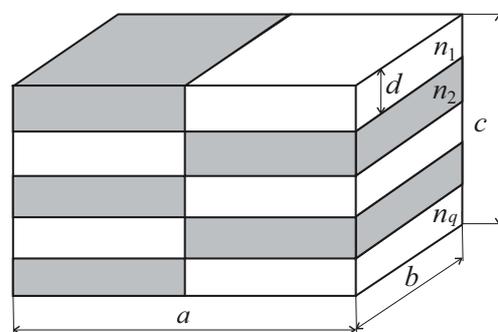


Fig. 1. Structure of layered nanocomposite



essence of which is that a heterogeneous medium is considered as homogeneous with the same level of polarization. Such model has been proved in numerous experiments [6,7], however, it has several limitations, for example, the wavelength of external radiation must be an order of magnitude larger than the dimensions of the inhomogeneities that make up the nanocomposite medium. In addition, with an increase in the number of components that make up a nanocomposite, the number of model parameters increases, which is reduced to solving polynomial equations of higher orders. When using algorithms for sequential search for roots, we can observe high computational error. Methods of simultaneous search for roots (the Abert – Erlich method [8] and the Duran – Kerner method [9]) solve this problem, however, the computation time increases, which is an important factor when conducting express analysis and observing lack of access to high-performance computing systems. In some cases, to simulate nanocomposites electrical properties we can use the method of equivalent circuits, where the nanocomposite components are represented as electrical equivalents [10]. The essence of the method lies in the possibility of using the theory of electrical circuits methods, where the task is partly solved at the stage of its formulation. In works [11,12] electrical properties were modeled using quantum mechanical methods of calculation (for example, Agranovich – Ginsburg, Kudo – Greenwood methods), which provide the most accurate results, but also require more computational power compared to other methods of modeling.

Today, researchers in the field of mathematical modeling of nanocomposites use specialized software systems, such as Gaussian, Abinit, GAMESS, SIESTA, and others. As a rule, the indicated modeling methods and their toolsets are aimed at solving the problem of direct determination of property of the resulting nanocomposite. One of the urgent tasks is the selection of nanocomposite material composition that satisfies a number of properties, for example, the dielectric constant, electrical conductivity, etc., depending on the frequency of external electromagnetic field, which is an inverse problem. Automating the process of finding the optimal composition of a nanocomposite is an important area at the crossroads of information technologies and materials science [13], which allows reducing the time and cost of designing and creating new materials with desired properties.

In the present study, the search for nanocomposite components with the required properties is implemented using a genetic algorithm [14], which is heuristic.

1. MATHEMATICAL MODEL OF A LAYERED NANOCOMPOSITE

A layered nanocomposite consisting of two different materials is the object of the present study (Fig. 1). The nanocomposite is described by the following parameters: ε is the complex dielectric constant; σ is electrical conductivity; d is the width of the block entering into the plane-parallel layer, consisting of 2 material types (a grey block and a white block, respectively); n is the layer number (the index corresponds to ordinal numbering); a , b , c are the length, width and height of the nanocomposite. The values ε and σ are parameters that depend on the composition of the nanocomposite and the wavelength of the incident radiation λ . The alternation of blocks, which correspond to certain materials and constitute the nanocomposites, occurs as the layer number grows. The values of the parameters d , a , b , c can be controlled.

An effective medium model is proposed to be used as a simulation for the dielectric constant and electrical conductivity of the research object, since we consider a composite medium with parameters for which the use of this theory is permissible within



the framework of the study. We view the layers including blocks of 5 to 40 nm width. The wavelength of electromagnetic radiation is an order of magnitude larger than the block sizes (from 400 to 1000 nm). In this research an anisotropic medium is investigated, radiation propagates perpendicular to the layers, therefore, the corresponding pixel permittivity will appear as the tensor:

$$\varepsilon_{effij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{effxx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{effyy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{effzz} \end{pmatrix} = f(\varepsilon_{ij1}, \varepsilon_{ij2}, \Delta),$$

where $\varepsilon_{ij1}, \varepsilon_{ij2}$ is dielectric constant tensor of the blocks of 1st and 2nd material types, respectively. For the components of the tensor $\varepsilon_{effxx}, \varepsilon_{effyy}$:

$$\varepsilon_{eff} = \frac{\sum_{k=1}^n \varepsilon_{ijk} \Delta_k}{\sum_{k=1}^n \Delta_k}$$

for ε_{effzz} :

$$\varepsilon_{eff} = \left(\frac{\sum_{k=1}^n \varepsilon_{ijk}^{-1} \Delta_k}{\sum_{k=1}^n \Delta_k} \right)^{-1},$$

i.e. for the investigated nanocomposite that consists of 2 materials:

$$\varepsilon_{effxx} = \frac{\varepsilon_{xx1}\Delta_1 + \varepsilon_{xx2}\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2}, \quad \varepsilon_{effyy} = \frac{\varepsilon_{yy1}\Delta_1 + \varepsilon_{yy2}\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2}, \quad \varepsilon_{effzz} = \left(\frac{\varepsilon_{zz1}^{-1}\Delta_1 + \varepsilon_{zz2}^{-1}\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} \right)^{-1}.$$

The nanocomposite conductivity tensor will have the form:

$$\sigma_{effij} = \begin{pmatrix} \sigma_{effxx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{effyy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{effzz} \end{pmatrix} = f(\sigma_{ij1}, \sigma_{ij2}, \Delta),$$

where σ_{ij1} is the conductivity tensor of the blocks of the 1st and 2nd material types, respectively. The effective conductivity is found from the basic macroscopic equations $\text{rot } E = 0, \text{div } j = 0$ and Ohm's law: $j = \sigma E$. When substituting averaged magnitude $\left\langle \int_{V_i}^{\square} E dV \right\rangle_i$ with the integral of the electric field strength E_i inside a separate block placed in a layer with conductivity tensor σ_{eff} we obtain basic equation for the conductivity model:

$$\sum_{i=1}^n v_i (\sigma_{eff} - \sigma_i) \langle E \rangle_i = 0,$$

where v_i is the dimensionless concentration of the i component ($\sum_{i=1}^n v_i = 1$).

Models for a layered structure corresponding to the components $\sigma_{effxx}, \sigma_{effyy}$ are of the form:

$$j = (\Delta_1 \sigma_{xx1} + \Delta_2 \sigma_{xx2}) E, \quad \sigma_{effxx} = \Delta_1 \sigma_{xx1} + \Delta_2 \sigma_{xx2}.$$

For σ_{effzz} component:

$$E = j \left(\frac{\Delta_1}{\sigma_{zz1}} + \frac{\Delta_2}{\sigma_{zz2}} \right), \quad \sigma_{effzz} = \frac{\sigma_{zz1} \sigma_{zz2}}{\Delta_1 \sigma_{zz1} + \Delta_2 \sigma_{zz2}}.$$



2. GENETIC ALGORITHM

The genetic algorithm is a method of optimization [15], which is based on the imitation of natural selection processes. We propose using genetic algorithm in this study. The algorithm helps to solve the problem of searching for the composition of a layered nanocomposite with specified electrical properties. The genetic algorithm works with a finite set of solutions generating new data by applying selection, mutation and crossing operators. Output, external and internal parameters are a quantitative assessment of the object properties.

The external parameters $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ affect the research object (external electromagnetic radiation) and are defined as constants or functions. Internal parameters or control variables $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ (composite composition, geometric parameters of blocks, etc.) describe the internal state of the object and take combination of values $\bar{y} \in Y$. Output parameters or quality parameters of the object $\bar{z} = (z_1, z_2, \dots, z_k)$ (the dielectric constant or electrical conductivity of a nanocomposite) provide a numerical estimate of the nanocomposite properties and depend on the control variables $\bar{z} = \bar{z}(\bar{Y})$. To solve the problem, it is necessary to choose the most accurate solution based on quantitative index $\varphi (\varphi(\bar{Y}) \in \sigma)$. Where φ is the output parameter scale γ_i . The choice of the best solution comes down to the choice of those solutions that match the lowest value of the criteria $\varphi(\varphi' = \varphi(\bar{Y}') = \min_{\beta \in B} \varphi(\bar{Y}'))$, where \bar{Y}' is the best solution, $\varphi' = \varphi(\bar{Y}')$ is the lowest value of the criteria in the search field. As a result it is necessary to find such nanocomposite composition, where the value of the dielectric constant (conductivity) is as close as possible to the given one.

Development of the algorithm begins with the use of the smallest indivisible unit of a species subjected to evolutionary transformation. This is an individual species, which is a layered nanocomposite. It is represented by a vector of internal parameters or a

genotype. A phenotype (a manifestation of external features) appears in the case individual's interaction with external environment. This phenotype is characterized by individual's adaptation. Thus, there is a criterion for assessing one individual in relation to the others. The set of individuals with a similar genotype constitute a population, the area of which is the set, where individuals are located. Fig. 2 shows a general view of the genetic algorithm consisting of several main phases: generation, crossing, mutation, selection.

In the initial stage we generate the starting population and assess adaptability of an individual species. We calculate the objective function for this purpose. The next stage is cross-breeding and increasing the size. The population size depends on

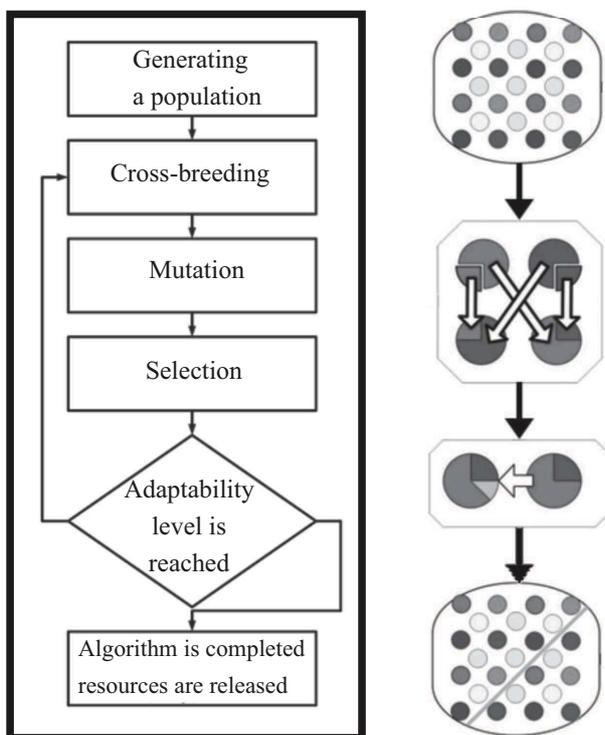


Fig. 2. General view of the genetic algorithm



the choice of a cross-breeding mechanism, so the population can double, triple or grow in any proportion. The genotype that determines descendants of individuals varies, i.e. a new generation goes through a phase of mutation, which can take place either randomly or according to a predetermined algorithm. The next stage is the analysis of adaptability (we calculate the objective function of a nanocomposite and decide to what extent the obtained characteristics are approximate to the desired ones).

The analysis of adaptability is carried out for each individual in the next stage. Only the fittest individuals remain in the population, the rest are killed. If we find nanocomposite composition with the desired properties in this stage, the process stops, otherwise we perform transition to the cross-breeding stage.

We have implemented the genetic algorithm in the programming language C ++. Fig. 3 shows the main classes of the developed software package.

The Evolution class models evolution process (crossing, mutation, selection). We have developed the Materials class that allows us to use the properties of materials. This class allows to obtain characteristics of various materials and compounds depending on the wavelength of external electromagnetic radiation (we have downloaded the data about the properties from the source [16]).

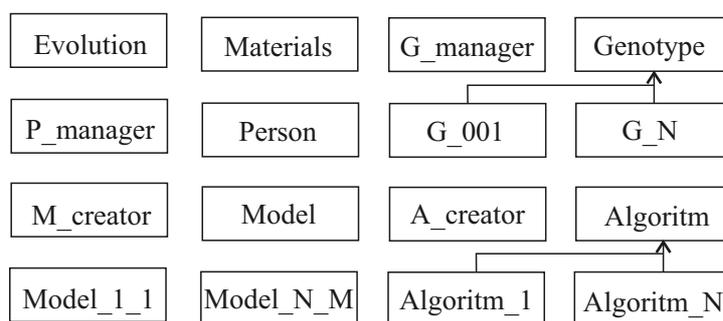


Fig. 3. Class hierarchy

We have created and configured a genotype (the Genotype class) for the current task before initiation of the evolution process. Settings and management of a genotype are performed using the G-Manager class. Genotype contains a set of genotypes for various composites (structure, number of components, shape of inclusions). Then we have a generated population (the Person class) and the evolution process starts. We have developed the Model class for the objective function. This class encapsulates a method for calculating composite properties and the Algorithm class for implementing numerical methods to find the roots of polynomial equations with complex variables.

Fig. 4 shows the block diagram of the implemented genetic algorithm of the developed software package.

3. RESULTS OF A COMPUTATIONAL EXPERIMENT

We have considered the task of selecting layered nanocomposite components (the object of the present study) as a computational experiment. The research object should satisfy the following properties: the dielectric constant must be varied within $\epsilon_{eff} \in [0, 2; 0, 8]$ at the wavelength of external electromagnetic radiation $\lambda \in [400; 1000]$. The results of the calculations have showed that the most suitable materials are $TiO_2 - SiO_2$ components. Such materials can be used for creating a nanocomposite with the characteristics and structure considered as the research object. Fig. 5 shows graphs of the $TiO_2 - SiO_2$ nanocomposite dependencies on the wavelength of the electromagnetic radiation. The graph shows that only a nanocomposite with parallel connection of layers corresponds to the conditions of the problem.

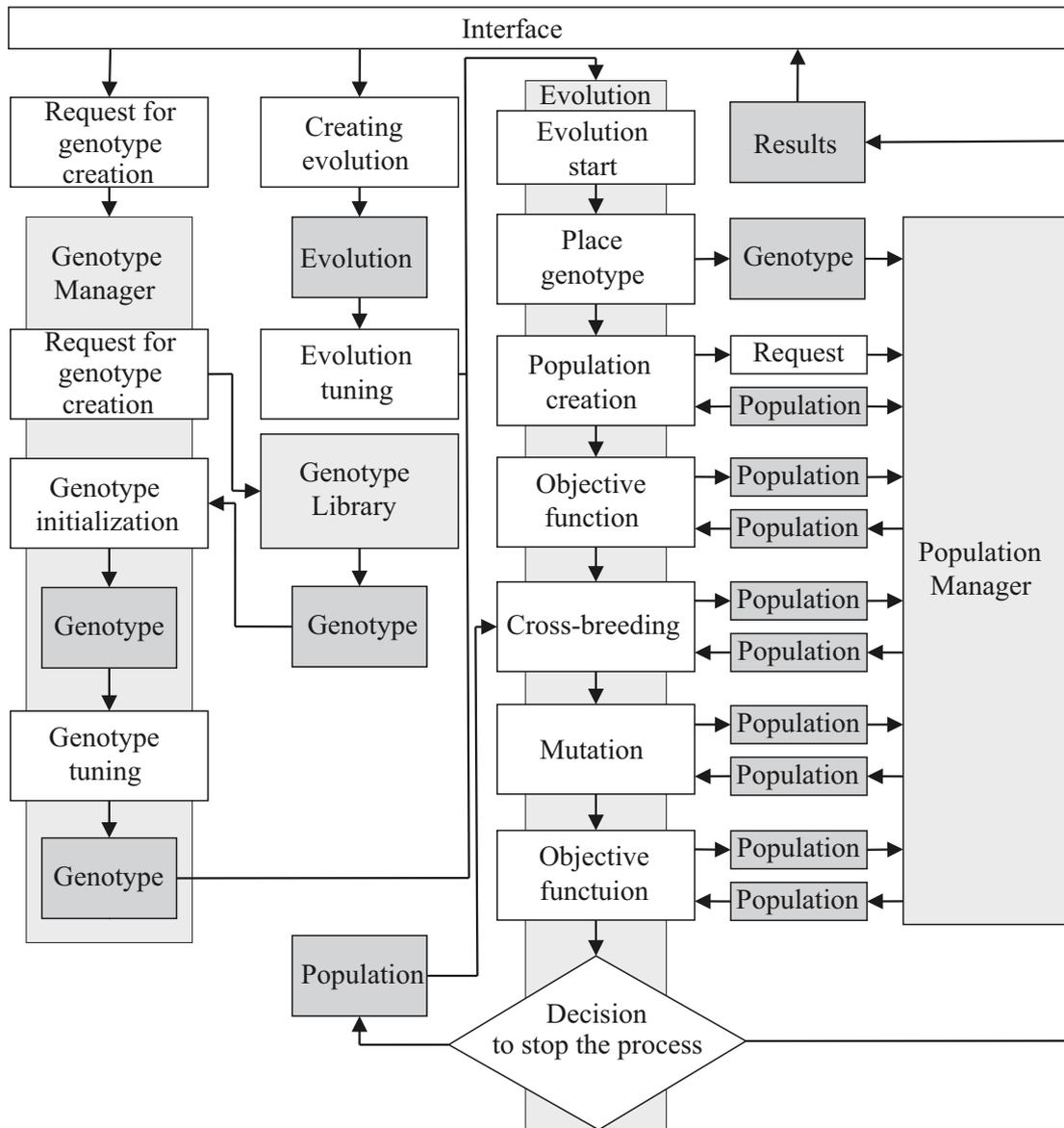


Fig. 4. Block diagram of the implemented genetic algorithm [17]

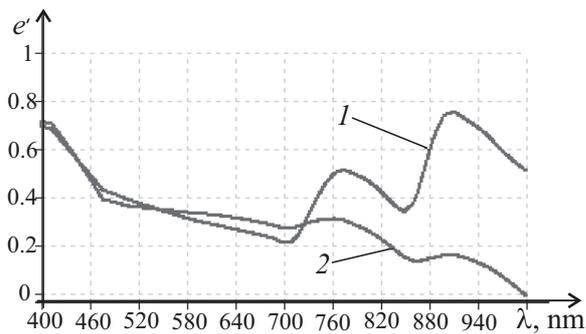


Fig. 5. The dependence of the dielectric constant on the wavelength of electromagnetic radiation: 1 — parallel connection of layers, 2 — series connection of layers

Received information about the composition of the material allows to conduct additional computational experiments which will provide additional information about the nanocomposite, for example, the dependence of the complex dielectric constant on TiO_2 volume fraction entering into the nanocomposite (Fig. 6).

The results of the genetic algorithm affect such parameters as population size, mutation probability, etc. We have analyzed the effect of these parameters.

We have generated 100 experiments with random characteristics of the genotype and the same objective function for each population from 10 to 500 individuals in increments



of 10. The number of iterations has limited evolution. Population size influences the convergence rate of the genetic algorithm. High population size allows you to describe the largest possible area for solution variants and perform more calculations per iteration.

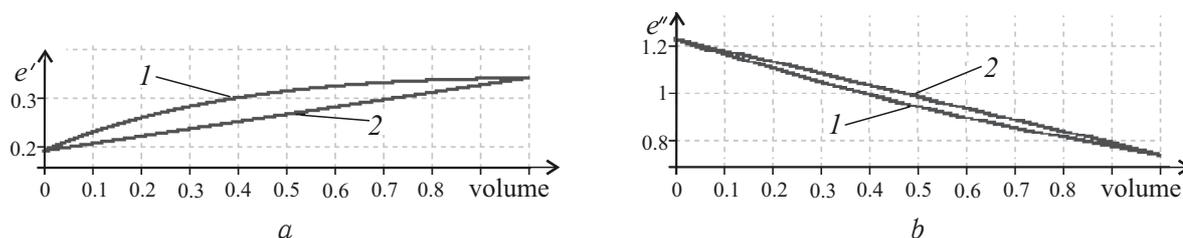


Fig. 6. The dependence of the real (a) and imaginary (b) parts of dielectric constant on the volume fraction: 1 – parallel connection of layers, 2 – series connection of layers

CONCLUSION

The research presents the possibility of using genetic algorithm in problems of modeling the electrical properties of a layered nanocomposite. We have developed a software package to solve the problem of predicting the electrical properties of a nanocomposite. The software package allowed us to carry out a computational selection experiment on finding optimal components for creating materials with specified characteristics. The obtained results can reduce time and cost of creating new functional materials.

Acknowledgements: This work was supported by Russian Foundation for Basic Research (project No. 18-07-00752A).

References

1. Msekh M. A., Cuong N. H., Zi G., Areias P., Zhuang X., Rabczuk T. Fracture properties prediction of clay/epoxy nanocomposites with interphase zones using a phase field model. *Engineering Fracture Mechanics*, 2018, vol. 188, pp. 287–299. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.08.002>
2. Vu-Bac N., Silani M., Lahmer T., Zhuang X., Rabczuk T. A unified framework for stochastic predictions of mechanical properties of polymeric nanocomposites. *Computational Materials Science*, 2015, vol. 96, pt. B, pp. 520–535. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.04.066>
3. Zare Y., Rhee K. Y., Hui D. Influences of nanoparticles aggregation/agglomeration on the interfacial/interphase and tensile properties of nanocomposites. *Composites Part B: Engineering*, 2017, vol. 122, pp. 41–46. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.04.008>
4. Korchagin S. A., Terin D. V., Klinaev Yu. V. Simulation of a fractal composite and study of its electrical characteristics. *Mat. Mod. Chisl. Met.*, 2017, iss. 13, pp. 22–31 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2017-1-2231>
5. Balagurov B. Ya. Conduction of the three-dimensional model of a composite with structural anisotropy. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2016, vol. 123, iss. 2, pp. 348–356. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063776116060017>
6. Zarubin V. S., Kuvirkin G. N., Savelieva I. Yu. Evaluation of dielectric permittivity of composite with dispersed inclusions. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Instrument Engineering*, 2015, no. 3(102). pp. 50–64 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2015-3-50-64>
7. Zarubin V. S., Sergeeva E. S. Application of mathematical modeling to determine the thermoelastic characteristics of nano-reinforced composites. *Math. Models Comput. Simul.*, 2017, vol. 29, no. 10, pp. 288–298. DOI: <https://doi.org/10.1134/S2070048218030134>



8. Aberth O. Iteration methods for finding all zeros of a polynomial simultaneously. *Mathematics of Computation*, 1973, vol. 27, no. 122, pp. 339–344.
9. Kerner I. O. Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen. *Numerische Mathematik*, 1966, vol. 8, pp. 290–294.
10. Korchagin S. A., Terin D. V., Romanchuk S. P. Synergetics of mathematical models for analysis of composite materials. *Izvestiya VUZ. Applied nonlinear dynamics*, 2015, vol. 23, no. 3, pp. 55–64 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2015-23-3-55-64>
11. Aleksandrov Y. M., Yatsishen V. V. Calculation of the elements of the complex dielectric tensor for anisotropic materials. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2015, vol. 18, no. 1, pp. 23–27 (in Russian).
12. Kasumova R. D., Amirov Sh. Sh., Shamilova Sh. A. Parametric interaction of optical waves in metamaterials under low-frequency pumping. *Quantum Electronics*, 2017, vol. 47, no. 7, pp. 655–660. DOI: <http://dx.doi.org/10.1070/QEL16395>
13. Toader G., Rusen E., Teodorescu M., Diacon A., Stanescu P. O., Damian C., Rotariu T., Rotariu A. New polyurea MWCNTs nanocomposite films with enhanced mechanical properties. *J. Appl. Polym. Sci.*, 2017, vol. 134, iss. 28, p. 45061. DOI: <https://doi.org/10.1002/app.45061>
14. Kramer O. *Genetic algorithm essentials*. Springer, 2017. 94 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-52156-5>
15. Huang Yu., Du L., Liu K., Yao X., Risacher Sh. L., Guo L., Saykin A. J., Shen L. A Fast SCCA Algorithm for Big Data Analysis in Brain Imaging Genetics. *Graphs in Biomedical Image Analysis, Computational Anatomy and Imaging Genetics. GRAIL 2017, MICGen 2017, MFCA 2017. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 10551. Springer, Cham, 2017. pp. 210–219. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-67675-3_19
16. *Handbook of optical constants of solids* : in 5 vols. / ed. by E. D. Palik. San Diego, Academic Press, 1997. Vol. 3. 999 p.
17. Romanchuk S. P., Korchagin S. A., Terin D. V. Simulation of the characteristics of a nanocomposite material with spherical inclusions using the genetic algorithm. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2018, no. 2, pp. 21–31 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2018-2-2131>

Cite this article as:

Kim R. P., Romanchuk S. P., Terin D. V., Korchagin S. A. The Use of a Genetic Algorithm in Modeling the Electrophysical Properties of a Layered Nanocomposite. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 2, pp. 217–225. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-217-225>

УДК 501.1

Использование генетического алгоритма в задачах моделирования электрофизических свойств слоистого нанокompозита

Р. П. Ким, С. П. Романчук, Д. В. Терин, С. А. Корчагин

Ким Роман Павлович, начальник отдела аппаратно-программных систем, Поволжский региональный центр новых информационных технологий, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83, kimrp1988@gmail.com

Романчук Сергей Петрович, ассистент кафедры информационной безопасности автоматизированных систем, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, Саратов, ул. Политехническая, д. 77



Терин Денис Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры материаловедения, технологии и управления качеством, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83, terinden@mail.ru

Корчагин Сергей Алексеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры естественных и математических наук, Энгельсский технологический институт (филиал) Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю. А., Россия, 413100, Саратовская область, Энгельс, пл. Свободы, д. 17, korchaginser@gmail.com

В статье рассматривается подход к решению задачи подбора компонент слоистого нанокompозита с заданными электрическими свойствами. Известные методы моделирования электрических характеристик нанокompозитов основаны на предварительном анализе таких характеристик, как диэлектрическая проницаемость и электропроводность материалов, входящих в состав нанокompозита. В работе предлагается алгоритм подбора компонент слоистого нанокompозита с использованием генетического алгоритма. Математическое моделирование электрических свойств нанокompозита (в качестве примера рассмотрены композиционные материалы на основе нанопористого кремния и частично окисленного пористого кремния) осуществляется с использованием модели эффективной среды. Проведены анализ частотных зависимостей диэлектрической проницаемости и электропроводности нанокompозита при взаимодействии с электромагнитным излучением, а также анализ эффективности предложенного метода в зависимости от скорости схождения и различных параметров (коэффициента мутации, численности популяции и проч.). Разработан программный комплекс моделирования электрических свойств нанокompозита с использованием генетического алгоритма. Полученные результаты могут сократить сроки и издержки создания новых функциональных материалов.

Ключевые слова: генетический алгоритм, математическое моделирование, слоистый нанокompозит, программный комплекс, модель эффективной среды.

Поступила в редакцию: 29.01.2019 / Принята: 05.03.2019 / Опубликовано онлайн: 28.05.2019

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-07-00752А).

Образец для цитирования:

Kim R. P., Romanchuk S. P., Terin D. V., Korchagin S. A. The Use of a Genetic Algorithm in Modeling the Electrophysical Properties of a Layered Nanocomposite [Ким Р. П., Романчук С. П., Терин Д. В., Корчагин С. А. Использование генетического алгоритма в задачах моделирования электрофизических свойств слоистого нанокompозита] // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 2. С. 217–225. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-217-225>



UDC 004.75

Administration of Virtual Data Processing Center over OpenFlow

V. M. Solovyev, A. A. Belousov

Vladimir M. Solovyev, <https://orcid.org/0000-0003-3778-8201>, Volga Region Centre of New Information Technologies in Volga Region, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, svm@sgu.ru

Aleksandr A. Belousov, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, tortyt1@gmail.com

This paper researches the building principles and administration of virtual data processing centers based on hyper-converged systems over OpenFlow. We provide the implementation features of such virtual centers on the basis of software-defined networking that is managed by a dedicated controller (a server). We suggest the graph administration model of hyper-converged system resources compliant with required performance on the one hand and economic requirements on the other. Based on the proposed model, the implementation of a greedy control algorithm for the virtual data processing center over OpenFlow was examined. This algorithm assigns the requests to physical resources by using of dedicated server software. The advantages of such hyper-converged system model on performance issues were outlined, e.g., multi-threaded routing and security, elimination of the majority of current threats. We summarize the possibilities of transition to network infrastructure in these virtual data processing centers. Such infrastructure is focused on data and usage of blockchain technology providing high reliability and content protection.

Keywords: converged infrastructure, hyper-converged infrastructure, software defined networks, OpenFlow, virtual data center, service level agreement, multi-threaded routing, quality of service, Data Oriented Network Architecture (DONA), blockchain.

Received: 29.05.2018 / Accepted: 05.09.2018 / Published online: 28.05.2019

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-226-232>

Virtual data processing center (VDPC) refers to hyper-converged infrastructure (HCI) that allows us to create virtual machines, data warehouses, switchers and routers, and communication channels. The main task of VDPC is to accept a client connection (tenant¹) and update it with the help of virtualization technology in network topology. The basis of the mechanism of VDPC resources administration refers to a model extended for HCI tasks [1]. The network topology in this model is represented by graph $T = (C \cup M \cup K \cup L)$, C is a plurality of computing nodes, M is a plurality of data warehouses, K is a plurality of switching elements, L is a plurality of communication channels. Each of plurality has its own vectors of scalar argument defined. This argument sets up the parameters of computing nodes — $c \in C$, of data (memory) warehouses — $m \in M$, of crosspoints — $k \in K$ and of communication channels — $l \in L$ respectively.

$$\begin{aligned} fct(c) &= (ct_1(c), ct_2(c), \dots, ct_n(c)), \\ fmt(m) &= (mt_1(m), mt_2(m), \dots, mt_n(m)), \\ fkt(k) &= (kt_1(k), kt_2(k), \dots, kt_n(k)), \\ flt(l) &= (lt_1(l), lt_2(l), \dots, lt_n(l)). \end{aligned} \tag{1}$$

¹A tenant represents the requests for virtual machines, data warehouses, switchers, routers, communication channels, and all virtual communication channels.



In this model VDPC resources are specified by graph $R = (V \cup S \cup D)$, V is a plurality of applications deployed in virtual machines, S is a plurality of virtual data warehouses, D is a plurality of communication channels between virtual machines and data warehouses. Each plurality has its own vectors of scalar argument defined. This argument sets up the parameters of virtual machines — $v \in V$, virtual data warehouses — $s \in S$, communication channels including switching elements that provide required service level agreement (SLA²) — $d \in D$ respectively:

$$\begin{aligned} fvr(v) &= (vr_1(v), vr_2(v), \dots, vr_n(v)), \\ fsr(s) &= (sr_1(s), sr_2(s), \dots, sr_n(s)), \\ fdr(d) &= (dr_1(d), dr_2(d), \dots, dr_n(d)). \end{aligned} \quad (2)$$

The parameters (2) providing SLA coincide with corresponding parameters (1) and are represented by mapping of resource requests to HCI topology:

$$O : R \rightarrow T \cup \{\emptyset\} = \{V \rightarrow C \cup \{\emptyset\}, \quad S \rightarrow M \cup \{\emptyset\}, \quad D \rightarrow K \cup \{\emptyset\}, \quad L\{\emptyset\}\}. \quad (3)$$

Resource requests from the expression(3) determine three relationship types between request parameters r_i and physical resources t_i , based on HCI topology:

- the requested resources correspond to resources identified by topology $r_i = t_i$;
- overload of physical resources $r_i > t_i$ that violates SLA;
- underload of physical resources $r_i < t_i$ that requires a topology reconfiguration for economic reasons.

In the last case available resources can be represented by residual graph $T_{res} = (\cup M \cup K \cup L)$ that redefines the parameters as follows:

$$\begin{aligned} fct_{res}(c) &= fct(c) - \sum_{v \in V} fvr(v), \quad fmt_{res}(m) = fmt(m) - \sum_{s \in S} fsr(s), \\ fkt_{res}(k) &= fkt(k) - \sum_{d \in D} fdr(d), \quad flt_{res}(l) = flt(l) - \sum_{l \in L} fdr(d). \end{aligned} \quad (4)$$

Automatic migration of HCI structures managed by controllers over OpenFlow enables us to meet both SLA and economic requirements. Migration is carried out even if it is not possible to assign the warehouse on demand, and data is added to multiple warehouses. In that case, one part of the applications can work with data warehouse, meanwhile the other part can work with data located in different physical storage. In accordance with migration plan, virtual structure relocation should comply with the following requirements:

- there is no SLA violation during relocation;
- relocation is implemented at given time constraints. Automatic operation of controllers enables us to achieve that.

Input to migration is a plurality of incoming requests $Z = \{R_i\}$, a plurality of queried requests $W = \{R_i\}$, a graph of remaining resources T_{res} , and time constraint on migration τ . During migration, a new node s' and a virtual communication channel between nodes s and s' are added to the graph of requested resources R .

²SLA (Service Level Agreement) is a formal contract between a service provider and a client that sets out agreed service quality, service description and the rights of the parties. Such agreement serves as an assessment tool for quality of provided network services.



The administration of VDPC over OpenFlow is based on a greedy algorithm³ of request assignment to physical resources, with the use of controller (server) software. Expression (4) describes such a greedy algorithm. As an optimization criterion, the most compact allocation of request elements (2) is applied. A similar approach is widely used in data processing centers and by cloud providers [2, 3]. The quality of VDPC administration depends on selected greedy criteria: next request — K_R , virtual node — K_V , physical node — K_C . Criteria K_V and K_C rely on the cost function defined as a weighted sum of required parameters considering the resource deficit. This function is represented as follows: $d(i) = (\sum_R \sum_{e \in R} r_{r,i} - \sum_{c \in C} r_{c,i}) / \sum_R \sum_{e \in R} r_{e,i}$. Then the cost function of an assignment of element e will appear as $r(e) = \sum_{i=1}^n d(i)r_{e,i}$. In this equation the selected element HCI is characterized by a vector of values of required resource parameters $(r_{e,1}, r_{e,2}, \dots, r_{e,n})$. To calculate the measure of the resource deficit, firstly, it is necessary to subtract the values of available physical resources for the required resource parameter from the common value of this resource parameter in all requests. Then the measure is calculated as a quotient of this difference by total sum of required resources. We can define the cost function as weighted sum of required resource parameters considering the resource deficit. According to criterion K_V , the HCI virtual element with maximum cost function is chosen. This allows us to assign primarily the most resource-deficient elements and then assign all the other virtual elements. According to criterion K_C , the HCI physical element with minimum cost function is chosen. By this, we can ensure maximal utilization (loading) of computing resources. According to criterion K_C , the query with the maximum weighted sum of requested resources is chosen.

The general framework of administration algorithm will be as follows.

1. Scheduler⁴ analyses incoming requests of resources $Z = \{R_i\}$.
2. If plurality $\{R_i\} \notin \emptyset$ is not empty, the program selects another request R_i according to greedy criterion K_R . Otherwise, algorithm terminates its functioning.
3. Using the elements of request R_i , the program forms a plurality of virtual nodes $U = \{V \cup S\}$. Where it is not possible to form a plurality of virtual nodes U , it proceeds to step 14.
4. Scheduler selects another element N from formed plurality of virtual nodes U on the basis of greedy criterion K_V . Then this element is placed in queue Q which contains the elements awaiting an assignment.
5. Using the elements C_i , scheduler forms a plurality of physical nodes $\{C_i\} \notin \emptyset$. It is possible to assign the element N to these nodes based on correct accomplishment of mapping(3). Otherwise, if $\{C_i\} \in \emptyset$, program calls the procedure of limited enumeration.
6. The program selects a physical resource from the formed plurality of physical nodes on the basis of greedy criterion K_C . It redefines the values of physical resources parameters according to functions (4).
7. Scheduler selects all virtual channels D_i that link element N to elements of request R_i to be assigned.
8. Scheduler sorts a plurality of channels $\{D_i\} \notin \emptyset$ by the value of the capacity in ascending order.

³The greedy algorithm is an optimization algorithm based on locally optimal decisions that are made at each stage. Whereby, we assume that the final decision will also prove optimal.

⁴Scheduler is a program (service) driven by controller software. The principal scheduler function is to start other programs.



9. The program selects a virtual channel L_i from a plurality of channels $\{D_i\}$. It should ensure the shortest route that links element N to elements of request R_i . Where it is not possible to plot the route, it calls the procedure of virtual channel assignment on a physical resource. It redefines the values of physical resources according to functions (4).
10. Scheduler adds the virtual nodes linked with N to queue Q . By this, it follows the order of virtual channels from sorted plurality $\{D_i\}$. These channels connect the nodes.
11. Scheduler deletes N from U and Q .
12. If Q is not empty, program proceeds to step 4.
13. If U is not empty, program proceeds to step 3. Otherwise, if U is empty, program proceeds to step 1.
14. The program cancels all assignments of the elements of request R_i and removes the request from a plurality $Z = \{R_i\}$. Then it proceeds to step 2.

This algorithm contains two procedures described in [2]. The first one is a procedure of limited enumeration; the second one refers to a procedure of virtual channel assignment to a physical resource. A scheduler calls the procedure of limited enumeration if it is not possible to assign the next virtual node N from a plurality of requests to any physical resource. This procedure analyses a subset of a plurality of physical nodes $\{C_i\}$ from a graph of physical resources. Specified enumeration depth determines the subset capacity; the quantity of viewed subsets is limited. The program views only subsets whose total quantity of nodes' remaining resources allows us to assign the current element N . The procedure ensures the execution of step 5 if the program changes (selects) the enumeration depth and quantity of viewed subsets. Scheduler calls the procedure of virtual channel assignment to a physical resource when it is not possible to plot a route that links element N to element of request R_i via virtual channel. The route searching mechanism is based on modified Dijkstra's algorithm [4]. However, it can include only switching elements and communication channels of the physical network to which ratios of mapping accuracy are applied (3). If it is not possible to assign a virtual channel that connects the storage element, the storage search is accomplished. This storage should have the resources to create storage element replication. The replication requires the quantity of resources equivalent to the quantity of storage element resources. All storages selected for replication creation are considered in ascending order of total route length. Furthermore, the possibility of creation of communication channel l for replication is considered. This channel provides capacity and required data-flow intensity. If the communication channel l can not provide the required parameters, program considers another variation of replication mapping. The result is the route that provides coherence between element N and replication. The parameter variations of route and communication channel provide favorable result. The same approach to virtual machines has been widely recognized and studied [5].

Analyzed HCI control algorithm over OpenFlow enables us to plan the computing resources, resources of data storage and network resources of self-organizing cloud platform, by using of SDN technological solutions. This algorithm mechanism also complies with SLA. The algorithm allows us to use physical resources rationally by eliminating their segmentation, with the help of virtual resources migration. The algorithm enables us to administrate the hyper-converged system by specifying the data flows routing



policies. Whereby, it uses the virtual network control functions of virtual and physical devices from different manufacturers. We refer to devices that support OpenFlow protocol. The proposed solution allows us to integrate different networks administrated over OpenFlow and transfer data flows between them effectively, by means of multi-threaded routing (MRT).

We can consider hyper-converged systems as applied to any computing platforms (e.g., hard, programming, cloud, neuromorphic, quantum) which provide user an access to various services. These systems should be user-friendly and support multiple infrastructure layers, surely including layers of safety, reliability, communication services; providing QoS for various data. Furthermore, the network behind HCI should have the opportunities to work with different types of terminals (mobile, desktop, active network, advanced UX/UI⁵ etc.). This network should also have single management platform (controller, server) for the full package of services, applications, hardware, and data transfer channels. Whereby, it should select data transfer channel in real time based on QoS and applications needs for capacity and nature of traffic. Convergent technologies are not the endpoint in evolution of the next-generation computing systems. These technologies already allow us to take a content-centric approach onto prevalidated HCI infrastructure. They enable us to create computing systems that leapfrog over end-to-end paradigm towards content or data addressing paradigm (Information Centric Networking, or ICN). This paradigm implies data organization, regardless of location (server, host), through distributed network caching. Expected benefits of this approach include more efficient use of expensive network resources, scalability of computing systems and their adaptability to volatile QoS. The paradigm is based on the primitives *publish/subscribe*, that is to publish the content (make it available) and declare it. These primitives are realized in Data Oriented Network Architecture (DONA). It works as follows: the element of such system receives a request from a similar element or host. Whereby, two scenarios are possible. If the element contains required data in cash, it will implement the request. If the DONA element does not contain the content, it will request similar elements which have data. When it gets a response, it caches the content and implements the request. This universal mechanism is applicable to any protocol, forming a global single mechanism of caching and content delivery. In addition, this mechanism is supported by all network nodes and aimed at all users, not just ICN users. Such a network ensures content security, not security of its delivery. It relies on a content-based model and draws on the concept of reputation, because the provider must sign the content, so users can always define it. Data Oriented Network Architecture interacts well with blockchain⁶ technology that provides the high reliability of content storage and protection. Network entry is protected cryptographically. Unauthorized entry requires enormous computing resources proportional to the network size. It allows us to exclude

⁵UX/UI (User Experience/User Interface) refers to an interface design that meets current requirements.

⁶The revolutionary technology of blockchain was created by Satoshi Nakamoto. This technology helps to allocate the digital content without copying it. Pertinently, it resembles a digital book data of which and their modifications are duplicated in the network for several thousands of times and are regularly updated. This distributed database without a central storage node is stored in the network. It provides its users the hosting, such as Google Docs during collective work. Each group of blockchain transactions is a block, and miners conduct the audit of them (digital content). Therefore, this technology operates with chain of blocks created by complex cryptographic algorithms.



human or machine error, missed operations, unauthorized entry etc. In future, over the course of evolution, HCI will employ other network technologies.

References

1. Clos C. A study of non-blocking switching networks. *The Bell System Technical Journal*, 1953, vol. 32, iss. 2, pp. 406–424. DOI: <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1953.tb01433.x>
2. Zotov I. A., Kostenko V. A. Resource allocation algorithm in data centers with a unified scheduler for different types of resources. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2015, vol. 15, no. 1, pp. 59–68.
3. Meng X., Pappas V., Zhang L. Improving the Scalability of Data Center Networks with Traffic-aware Virtual Machine Placement. *2010 Proceedings IEEE INFOCOM*. San Diego, CA, 2010, pp. 1–9. DOI: <https://doi.org/10.1109/INFOCOM.2010.5461930>
4. Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C. *Introduction to Algorithms*. Cambridge MA, MIT Press and McGrawHill, 2001. 1202 p.
5. Zhao M., Figueiredo R. J. Experimental Study of Virtual Machine Migration in Support of Reservation of Cluster Resources. *VTDC '07 Proceedings of the 2nd international workshop on Virtualization technology in distributed computing*. New York, NY, USA, ACM, 2007, pp. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.1145/1408654.1408659>

Cite this article as:

Solovyev V. M., Belousov A. A. Administration of Virtual Data Processing Center over OpenFlow. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 2, pp. 226–232. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-226-232>

УДК 004.75

Управление виртуальным центром обработки данных по протоколу OpenFlow

В. М. Соловьев, А. А. Белоусов

Соловьев Владимир Михайлович, кандидат технических наук, доцент кафедры математической кибернетики и компьютерных наук, начальник Поволжского регионального центра новых информационных технологий, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83, svm@sgu.ru

Белоусов Александр Александрович, магистрант, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83, tortyt1@gmail.com

В работе рассмотрены принципы построения виртуальных центров обработки данных на основе гиперконвергентных вычислительных систем и управление ими по протоколу OpenFlow. Приведены особенности реализации таких виртуальных центров на основе программно-конфигурируемой сети, управляемой выделенным контроллером (сервером). Предложена графовая модель управления ресурсами гиперконвергентной вычислительной системы, отвечающая требованиям заданного качества обслуживания, с одной стороны, и экономическими требованиями, с другой. На основе предложенной модели рассмотрен вариант реализации жадного алгоритма управления виртуальным центром обработки данных по протоколу OpenFlow и осуществляющего назначение запросов на физические ресурсы, используя программное обеспечение выделенного сервера. Показаны преимущества такой модели гиперконвергентной вычислительной системы в вопросах производительности за счет много-



поточковой маршрутизации и безопасности, исключения большей части современных угроз. В работе приведены возможности перехода в таких виртуальных центрах обработки данных на сетевую инфраструктуру, ориентированную на данные и использование в ней технологии blockchain, обеспечивающей высокую надежность и защиту контента.

Ключевые слова: конвергентная инфраструктура, гиперконвергентная инфраструктура, программно-определяемые сети, OpenFlow, виртуальный центр данных, соглашение об уровне обслуживания, многопоточная маршрутизация, качество обслуживания, Data Oriented Network Architecture (DONA), блокчейн.

Поступила в редакцию: 29.05.2018 / Принята: 05.09.2018 / Опубликовано онлайн: 28.05.2019

Образец для цитирования:

Solovyev V. M., Belousov A. A. Administration of Virtual Data Processing Center over OpenFlow [Соловьев В. М., Белоусов А. А. Управление виртуальным центром обработки данных по протоколу OpenFlow] // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 2. С. 226–232. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-226-232>



УДК 517.11

Тестирование нечетких линейных автоматов

Д. В. Сперанский

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры железнодорожной автоматики, телемеханики и связи, Российский университет транспорта (МИИТ), Россия, 125993, Москва, ул. Часовая, д. 22/2, Speranskiy.dv@gmail.com

В статье рассматривается задача синтеза тестов для нечетких линейных автоматов (НЛА). Сейчас известно несколько разновидностей НЛА, используемых в качестве моделей реальных нечетких систем. В статье вводится и исследуется одна конкретная разновидность НЛА. Она предполагает проявление нечеткости поведения автомата за счет использования в характеристических матрицах элементов специального вида. Каждый такой элемент представляет собой некоторое множество элементов поля, над которым задан НЛА. В процессе функционирования автомата такой альтернативный элемент матрицы замещается случайным образом одним из элементов упомянутого множества на каждом такте. Для НЛА вводится понятие допустимой неисправности. Содержательно она состоит в замещении множества альтернативных элементов матриц одним элементом этого множества. Предложенный в статье метод синтеза тестов для обнаружения неисправностей указанного вида сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений. Метод ориентирован на μ -определенные и синхронизируемые НЛА и синтезирует тесты достаточно короткой длины, не превосходящей его размерности.

Ключевые слова: нечеткие линейные автоматы, обнаружение неисправностей, метод синтеза тестов.

Поступила в редакцию: 25.02.2018 / Принята: 11.11.2018 / Опубликовано онлайн: 28.05.2019

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-233-240>

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что детерминированный автомат во многих случаях является удобной и адекватной моделью многих реальных процессов и систем. Вместе с тем модели их функционирования могут носить приближенный характер. Это связано с тем, что соответствующая информация по объективным причинам порою формулируется в терминах плохо формализуемых понятий (например, «мало», «много», «высокий», «низкий» и т. п.). Понятно, что представление подобной информации на традиционном математическом языке, включающем классические понятия (множества, отношения, двузначная логика и т. п.), приводит к огрублению математической модели.

Очевидно, что для адекватного отражения нечеткости исходной информации требуется соответствующий математический инструментарий. Важным шагом на пути его получения явилось создание Л. Заде теории нечетких множеств [1]. Подтверждением полезности и эффективности концепции нечеткости (размытости) являются многочисленные практические приложения теории в различных предметных областях.

В последние годы значительный интерес проявляется к агрегированным системам. Отдельные компоненты таких систем могут быть как детерминированными, так и нечетко функционирующими блоками. В таких системах появляются новые качества, не сводящиеся к качествам их частей по отдельности. Это позволяет создавать более адекватные модели реальных сложных систем. Упомянутая нечеткость может



относиться и к алгоритмам функционирования, и к исходным данным, и к значениям на выходах системы. Сейчас известны различные разновидности нечетких автоматов, используемых в качестве моделей систем. Одна из них для произвольных автоматов предложена в [2]. Конкретизация этой разновидности для случая нечетких линейных автоматов (НЛА) описана в [3] и использована нами в предлагаемой статье.

Целью нашего исследования является изучение проблемы тестирования нечетких дискретных линейных систем, описываемых моделями НЛА. Важность этой проблемы в практическом аспекте не нуждается в комментариях.

1. ОПИСАНИЕ НЛА

Напомним вначале понятие детерминированного линейного автомата (ЛА), заданного над полем $GF(p)$, подробное описание которого имеется в [4, 5]. ЛА — это система с l входами и m выходами. Входные и выходные сигналы ЛА — это элементы поля $GF(p)$, где p — простое число. Состояниями ЛА являются упорядоченные совокупности элементов задержек, входящих в состав ЛА. Обозначим число задержек ЛА через n , которое называют размерностью ЛА. Функции переходов и выходов ЛА над полем $GF(p)$ задаются уравнениями

$$\bar{s}(t+1) = A\bar{s}(t) + B\bar{u}(t), \quad (1)$$

$$\bar{y}(t) = C\bar{s}(t) + D\bar{u}(t). \quad (2)$$

Здесь $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times l}$, $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, $D = [d_{ij}]_{m \times l}$ — характеристические матрицы с элементами из поля $GF(p)$. Входной вектор $\bar{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_l(t)]'$, выходной вектор $\bar{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_m(t)]'$, вектор состояний $\bar{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_n(t)]'$ представляют собой упорядоченные столбцы из элементов того же поля. Известно [4, 5], что конечное состояние ЛА и его выходная реакция в результате подачи на его входы последовательности длины $t+1$ из начального состояния $\bar{s}(0)$ вычисляются по формулам

$$\bar{s}(t+1) = A^{t+1}\bar{s}(0) + A^t B\bar{u}(t) + \dots + AB\bar{u}(t-1) + B\bar{u}(t), \quad (3)$$

$$\bar{y}(t) = CA^t\bar{s}(0) + CA^{t-1}B\bar{u}(0) + \dots + CB\bar{u}(t-1) + D\bar{u}(t). \quad (4)$$

Перейдем теперь к определению НЛА. Вначале отметим, что все сказанное выше о ЛА в полной мере относится и к НЛА. Что же касается нечеткости функционирования НЛА, то ее можно реализовать, закладывая соответствующий механизм в любую комбинацию из четырех матриц, фигурирующих в уравнениях (1)–(4). Поясним принцип работы такого механизма на примере одной матрицы, участвующей в реализации нечеткости функционирования совместно с некоторыми другими матрицами из уравнений (1)–(4). Пусть, например, нечеткость функционирования НЛА моделируется с использованием матрицы B . Элементы матрицы B будем записывать в форме $b_{ij} = b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_f$, где b_i ($i = 1, \dots, f$) — символьная запись элементов из поля $GF(p)$, над которым задан НЛА. Эта запись означает, что на любом такте дискретного времени функционирования НЛА элемент b_{ij} может оказаться замещенным любым из элементов b_1, b_2, \dots, b_f . Отсюда следует, что форма записи уравнений переходов (1) и выходов (2) НЛА не изменится, так же как и вид формул (3) и (4).

Заметим, что описанный механизм возникновения нечеткости функционирования автомата вполне согласуется с ситуацией, имеющей место в реальных дискретных устройствах. Проиллюстрируем это на примере RS — триггера. Известно, что комбинация входных сигналов $R = 1, S = 1$ является для него запрещенной. Причиной



запрета служит неопределенность состояния триггера (0 или 1), в котором он может оказаться после ее подачи. Иными словами, если запрещенная комбинация на входы триггера не попадает, то дискретное устройство, содержащее его в своем составе, функционирует как детерминированное. В случае возникновения на входах триггера запрещенной комбинации это же устройство превращается в нечетко функционирующее.

Операции умножения и сложения матриц в приведенных формулах (1)–(4) выполняются как обычные матричные операции, но с учетом символьной формы записи элементов матриц-операндов. Отметим, что в символьных записях в формулах (1)–(4) участвуют три операции — умножения (\cdot), сложения ($+$) и (\vee), которую назовем операцией выбора.

Две первые операции — это классические операции над элементами поля $GF(p)$. При вычислениях по упомянутым формулам предполагается, что операция выбора « \vee » обладает свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности (относительно операций умножения и сложения). Конечной целью вычислений является перевод символьных выражений из формы $\prod \sum$ в форму $\sum \prod$.

Проиллюстрируем сказанное на примере умножения двух следующих матриц с элементами в символьном представлении:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (p_1 \vee p_2) & (p_4 \vee p_5) & p_7 \\ p_3 & p_6 & (p_8 \vee p_9) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \vee r_2 \\ r_3 \\ r_4 \vee r_5 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} (p_1 \vee p_2)(r_1 \vee r_2) + (p_4 \vee p_5)r_3 + p_7(r_4 \vee r_5) \\ p_3(r_1 \vee r_2) + p_6 r_3 + (p_8 \vee p_9)(r_4 \vee r_5) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} (p_1 r_1 \vee p_1 r_2 \vee p_2 r_1 \vee p_2 r_2) + (p_4 r_3 \vee p_5 r_3) + (p_7 r_4 \vee p_7 r_5) \\ (p_3 r_1 \vee p_3 r_2) + p_6 r_3 + (p_8 r_4 \vee p_8 r_5 \vee p_9 r_4 \vee p_9 r_5) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть эти матрицы состоят из элементов поля $GF(2) = \{0, 1\}$ и элементы p_i и r_j таковы: $p_1 = 1, p_2 = 0, p_4 = 0, p_5 = 1, p_7 = 1, p_3 = 1, p_6 = 1, p_8 = 0, p_9 = 1, r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = 0, r_4 = 1, r_5 = 0$.

Тогда матрица-результат, поскольку операции сложения и умножения выполняются по правилам двоичной арифметики, примет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} (0 \vee 1 \vee 0 \vee 0) + (0 \vee 0) + (1 \vee 0) \\ (0 \vee 1) + 0 + (0 \vee 0 \vee 1 \vee 0) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Эта матрица интерпретируется как множество матриц-столбцов вида $[a_{11} a_{12}]'$, элементы a_{11} которых получаются при всех возможных вариантах выбора трех слагаемых из первой строки в (5). Легко подсчитать, что этот элемент может быть получен из $16 = 4 \times 2 \times 2$ возможных вариантов сумм, элемент a_{12} — из $8 = 2 \times 1 \times 4$ вариантов. Таким образом, общее число различных способов получения матрицы-результата равно $16 \times 8 = 128$. Понятно, что среди них могут быть совпадающие. Следовательно, число различных матриц-результатов может оказаться значительно меньше. Так, в нашем примере первое слагаемое в a_{11} имеет два возможных варианта выбора ($0 \vee 1$), второе — один вариант (0) и третье — два варианта ($0 \vee 1$). Аналогично дело обстоит и с элементом a_{12} — в нем те же варианты выбора. Поэтому матрица (5) упрощается и принимает вид

$$\begin{bmatrix} (0 \vee 1) + (0) + (0 \vee 1) \\ (0 \vee 1) + (0) + (0 \vee 1) \end{bmatrix}.$$



Понятно, что из нее матрица-результат может быть получена 16 различными способами. Ясно, что и среди этих матриц также могут быть совпадающие. В нашем примере, как легко проверить, попарно различных результатов будет четыре:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

На основе матриц с элементами последнего вида за счет выбора различных альтернатив элемента можно получить все множество вариантов матриц, соответствующих исходной НЛА.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Далее рассматривается следующая задача. Пусть задан НЛА A и некоторая его неисправная модификация из множества допустимых. Требуется построить такую входную последовательность (тест), которая эту неисправность обнаруживает.

Опишем множество допустимых неисправностей. Предполагается, что появление неисправностей в НЛА приводит к замещению некоторых элементов матриц НЛА другими. Если замещаемый элемент имеет множество альтернатив (например $b_{ij} = b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_f$), то он замещается каким-либо одним конкретным элементом из соответствующего множества. Если элемент матрицы не имеет альтернативных вариантов, то он замещается некоторым конкретным элементом поля $GF(p)$ в случае возникновения соответствующей неисправности. В противном случае элемент матрицы сохраняет свое прежнее значение. Таким образом, описанный процесс представляет собой механизм порождения неисправностей в НЛА. Неисправности введенного типа вполне естественно трактовать как традиционные константные неисправности дискретных устройств. Понятно, что возникающие неисправности преобразуют исходный НЛА в детерминированный ЛА.

Отметим, что любому НЛА A можно поставить в соответствие множество $G() = \{A_1, A_2, \dots, A_q\}$ детерминированных ЛА, полученных из A фиксацией в его матрицах одного из конкретных вариантов выбора альтернативных элементов. Иными словами, множество $G(A)$ есть множество детерминированных ЛА, которые в совокупности моделируют все возможные варианты поведения исходного НЛА.

Исходя из сказанного, естественно считать проверяемый НЛА A исправным, если в результате тестирования будет установлено, что его реакция на тест совпадает с реакцией на тот же тест одного из ЛА, входящих в состав множества $G(A)$. Если же реакция на тест проверяемого НЛА A не совпадет с реакцией на тот же тест ни с одним из детерминированных ЛА из множества $G(A)$, то проверяемый НЛА будем считать неисправным.

3. МЕТОД СИНТЕЗА ТЕСТОВ ДЛЯ НЛА

Задача, аналогичная сформулированной выше, была рассмотрена в [6] для детерминированных ЛА. В основу описываемого ниже метода положен подход, использованный в [6]. Для простоты изложения ограничимся рассмотрением задачи для так называемых μ -определенных и синхронизируемых НЛА.

Напомним, что детерминированный ЛА имеет конечную память глубины μ , если для любого t справедливо соотношение

$$\bar{y}(t) = f(\bar{u}(t), \bar{u}(t-1), \dots, \bar{u}(t-\mu), \bar{y}(t-1), \dots, \bar{y}(t-\mu)),$$



где $\bar{u}(t)$ и $\bar{y}(t)$ — входные и выходные векторы ЛА. Из [4, 5] известно, что каждый ЛА имеет конечную память глубины μ , где μ — размерность ЛА.

ЛА называется μ -определенным, если его выход $\bar{y}(t)$ зависит только от предыдущих μ входов:

$$\bar{y}(t) = g(\bar{u}(t), \bar{u}(t-1), \dots, \bar{u}(t-\mu)).$$

Известно [4, 5], что необходимым и достаточным условием μ -определенности ЛА A является выполнение равенства $CA^\mu = [0]$, где $[0]$ — нулевая матрица (вектор), C , A — матрицы, фигурирующие в формулах (1) и (2).

Напомним [4, 5], что входная последовательность ЛА называется синхронизирующей (СП), если независимо от начального состояния ЛА она переводит его в одно и то же конечное состояние. В [5] доказано, что необходимым и достаточным условием для существования СП длины μ ЛА A является выполнение равенства $A^\mu = [0]$. Отсюда вытекает, что каждый синхронизируемый ЛА является одновременно и μ -определенным.

Введем теперь аналогичные понятия для нечетких автоматов. НЛА A будем называть μ -определенным (синхронизируемым), если таковыми являются все ЛА из множества $G(A) = \{A_1, A_2, \dots, A_q\}$, введенного выше.

Пусть A^* , B^* , C^* , D^* — матрицы некоторого тестируемого НЛА, а A_0 , B_0 , C_0 , D_0 являются матрицами какого-либо конкретного ЛА A_{i_0} из множества $G(A)$, соответствующего исправному НЛА. Далее оба этих автомата предполагаются μ -определенными и синхронизируемыми. В общем случае они имеют разную глубину памяти — μ_1 и μ_2 соответственно. Положим $\mu = \max(\mu_1, \mu_2)$, тогда легко понять, что $CA^k = [0]$ и $C^*(A^*)^k = [0]$ для всех $k \geq \mu$.

Если на исправный и неисправный ЛА подать одну и ту же входную последовательность $T = \bar{u}(0), \bar{u}(1), \dots, \bar{u}(\mu)$ длины $\mu + 1$, то с учетом только что приведенных равенств и формулы (4) полной реакции детерминированного линейного автомата реакции тестируемого и исправного автомата A_{i_0} независимо от их начальных состояний имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{y}^*(\mu) &= C^*(A^*)^{\mu-1}B^*\bar{u}(0) + C^*(A^*)^{\mu-2}B^*\bar{u}(1) + \dots + C^*B^*\bar{u}(\mu-1) + D^*\bar{u}(\mu), \\ \bar{y}(\mu) &= CA^{\mu-1}B\bar{u}(0) + CA^{\mu-2}B\bar{u}(1) + \dots + CB\bar{u}(\mu-1) + D\bar{u}(\mu). \end{aligned}$$

Произведя вычитание, получим

$$\bar{y}(\mu) - \bar{y}^*(\mu) = [CA^{\mu-1}B\bar{u}(0) - C^*(A^*)^{\mu-1}B]\bar{u}(0) + \dots + [D - D^*]\bar{u}(\mu). \quad (6)$$

Понятно, что тестируемый автомат не идентичен автомату A_{i_0} , если их реакции различны, т. е. разность $\bar{y}(\mu) - \bar{y}^*(\mu)$ отлична от нуля. Равенство (6) будем рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно координат вектора $\hat{u} = [\bar{u}_1(0), \dots, \bar{u}_l(0), \dots, \bar{u}_1(\mu), \dots, \bar{u}_l(\mu)]$. Обозначим через Q матрицу системы (6), тогда она примет вид

$$Q \cdot \hat{u} = \hat{y}, \quad (7)$$

где \hat{y} — некоторый m -мерный ненулевой вектор.

Решая эту систему при всевозможных ненулевых векторах \hat{y} , получим все множество тестов T , различающих тестируемый НЛА и автомат A_{i_0} . Если описанным способом построить тесты, различающие тестируемый автомат и каждый линейный автомат из множества $G(A)$, то совокупность всех этих тестов, очевидно, и есть



полный тест, обнаруживающий неисправность в НЛА. Напомним, что неисправность НЛА трактуется нами так, как это было определено выше.

Поскольку множество всех ненулевых векторов \hat{u} велико даже при небольших значениях p , l , μ , то процесс поиска решений СЛАУ (7) может оказаться очень трудоемким. Чтобы избавиться от этого недостатка, рассмотрим только одну однородную СЛАУ с матрицей Q . Найдем ее решение, которое обозначим как U_0 , тогда множество векторов U/U_0 , где U есть множество всех векторов \hat{u} размерности $\mu + 1$, очевидно, и есть искомый тест. Таким образом, задача свелась к решению одной однородной системы.

Заметим, что предложенный метод синтеза тестов предполагает, что неисправные НЛА сохраняют свойства μ -определенности или синхронизируемости. Вместе с тем это требование, по-видимому, не является слишком ограничительным. В самом деле, оно заведомо выполняется, если возникающие в НЛА неисправности сказываются только на характеристических матрицах B , C , D . Однако не всякое изменение матрицы A сохраняет упомянутые свойства.

Отметим, что по аналогии с [6] можно предложить метод синтеза тестов для произвольных НЛА, не требуя наличия у них свойств μ -определенности или синхронизируемости. Этот метод, так же как и в [6] для случая детерминированного ЛА, базируется на том, что любой ЛА имеет конечную память.

Из описания предложенного метода синтеза тестов следует, что построенные с его применением тесты имеют длину $\mu + 1$, где μ — глубина памяти ЛА. Известно [4, 5], что $\mu \leq n$, где n — размерность ЛА, т.е. метод строит достаточно короткие по длине тесты.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проблема тестирования цифровых устройств является одной из важных и сложных. В частности, известны работы, например [7, 8], посвященные тестированию устройств, описываемых моделью детерминированного линейного автомата. Однако методы, предложенные в них для синтеза тестов даже для более простых, чем нечетко функционирующие, устройств, предполагают ряд существенных ограничений. К числу таких ограничений относится, к примеру, наличие информации о начальном состоянии устройства или требование специальной его технической реализации. Следует отметить, что первое ограничение практически почти никогда не выполняется, а второе требует дополнительных затрат.

Предложенный в статье метод не имеет указанных ограничений и при этом синтезирует достаточно короткие тесты. К числу преимуществ этого метода относится также то, что он сводит исследуемую задачу к решению СЛАУ, для чего имеется эффективный математический аппарат.

Библиографический список

1. Zadeh L. A. Fuzzy sets // Information and Control. 1965. Vol. 8, iss. 3. P. 338–353. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)
2. Сперанский Д. В. Эксперименты с нечеткими автоматами // Автоматика и телемеханика. 2015. № 2. С. 107–124.
3. Speranskiy D. V. Synchronization of fuzzy linear automata // Automatic Control and Computer Sciences. 2016. Vol. 50, iss. 2. P. 72–79. DOI: <https://doi.org/10.3103/S014641161602005X>
4. Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов. М. : Наука, 1966. 288 с.



5. Сперанский Д. В. Лекции по теории экспериментов с конечными автоматами. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. 287 с.
6. Сперанский Д. В. О тестировании линейных автоматов // Автоматика и телемеханика. 2000. № 5. С. 157–165.
7. Агибалов Г. П., Юфат А. Г. О простых экспериментах для линейных инициальных автоматов // Автоматика и вычислительная техника. 1972. № 2. С. 17–19.
8. Колесов Н. В. Построение проверяющего теста для линейного конечного автомата // Автоматика и телемеханика. 1982. № 2. С. 61–66.

Образец для цитирования:

Сперанский Д. В. Тестирование нечетких линейных автоматов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 2. С. 233–240. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-233-240>

Fuzzy Linear Automata Testing

D. V. Speranskiy

Dmitriy V. Speranskiy, <https://orcid.org/0000-0002-6882-0297>, Russian University of Transport (MIIT), 22/2 Chasovaja St., Moscow 125993, Russia, Speranskiy.dv@gmail.com

The article deals with the problem of synthesis of tests for fuzzy linear automata (FLA). Now several varieties of FLA are used as models of real fuzzy systems. The article introduces and investigates one particular type of FLA. The fuzziness of the behavior of the automaton is suggested to appear due to the use of elements of a special type in the characteristic matrices. Each such element is a certain set of elements of the field over which the FLA is given. During the functioning of the FLA (at each clock cycle) an alternative matrix element is replaced randomly by one of the elements of the alternative set. The notion of the FLA acceptable fault is introduced. Substantially it means replacing the alternative elements of matrices by one element of the sets corresponding to them. The method of the tests synthesis for detecting faults of this type is proposed. This method reduces to solving systems of linear algebraic equations. The method is oriented to μ -definite and synchronized FLA and synthesizes tests of sufficiently short length (not more than FLA dimension).

Keywords: fuzzy linear automata, fault detection, test synthesis method.

Received: 25.02.2018 / Accepted: 11.11.2018 / Published online: 28.05.2019

References

1. Zadeh L. A. Fuzzy sets. *Information and Control*, 1965, vol. 8, iss. 3, pp. 338–353. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)
2. Speranskii D. V. Experiments with fuzzy finite state machines. *Autom. Remote Control*, 2015, vol. 76, iss. 2, pp. 278–291. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117915020071>
3. Speranskiy D. V. Synchronization of fuzzy linear automata. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2016, vol. 50, iss. 2, pp. 72–79. DOI: <https://doi.org/10.3103/S014641161602005X>
4. Gill A. *Introduction to the theory of finite-state machines*. New York, McGraw-Hill, 1962. 207 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1966. 288 p.).
5. Speranskiy D. V. *Lektsii po teorii eksperimentov s konechnymi avtomatami* [Lectures on the theory of experiments with finite automata]. Moscow, BINOM. Laboratoriya znaniy Publ., 2010. 287 p. (in Russian).



6. Speranskii D. V. A test for linear automata. *Autom. Remote Control*, 2000, vol. 61, iss. 5, pp. 858–865 (in Russian).
7. Agibalov G. P., Yufat A. G. O prostykh eksperimentakh dlya lineinykh initsial'nykh avtomatov [On simple experiments for linear initial automata]. *Avtomatika i vychislitel'naya tekhnika* [Automatic Control and Computer Sciences], 1972, no. 2, pp. 17–19 (in Russian).
8. Kolesov N. V. Designing a checking test for a linear finite automaton. *Autom. Remote Control*, 1982, vol. 43, iss. 2, pp. 185–189.

Cite this article as:

Speranskiy D. V. Fuzzy Linear Automata Testing. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 2, pp. 233–240 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-233-240>



Подписка на II полугодие 2019 года

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год

Цена свободная

Оформить подписку онлайн можно в интернет-каталоге «Пресса по подписке» (www.akc.ru)

Адрес издательства:

410012, Саратов, Астраханская, 83

Тел.: +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89

Факс: +7(845-2) 27-85-29

E-mail: izvestiya@info.sgu.ru

Адрес редколлегии серии:

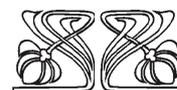
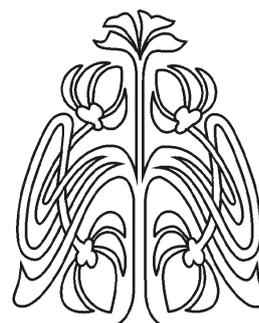
410012, Саратов, Астраханская, 83,

СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mami@info.sgu.ru

Website: <http://mami.sgu.ru/>



ПОДПИСКА

