УДК 517.927.25

О кратной полноте корневых функций пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и распадающимися краевыми условиями

В. С Рыхлов

Рыхлов Виктор Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83, RykhlovVS@yandex.ru

В пространстве суммируемых с квадратом функций на отрезке $[0,1]$ рассматривается класс полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов n-го порядка. Коэффициенты дифференциального выражения предполагаются постоянными. Краевые условия являются распадающимися и двухточечными в концах 0 и 1 (l краевых условий берутся только в точке 0, а остальные $n-l$ — в точке 1). Дифференциальное выражение и краевые формы предполагаются однородными, т. е. содержат только главные части. Предполагается, что корни характеристического уравнения пучков этого класса простые, отличны от нуля и лежат на двух лучах, исходящих из начала координат, в количествах k и $n-k$. Формулируются достаточные условия m-кратной полноты с возможным конечным дефектом системы корневых функций пучков этого класса в пространстве суммируемых с квадратом функций на основном отрезке. Кратность m полноты зависит от соотношений параметров n, l и k. При этом предполагается отличие от нуля некоторых вполне конкретных определителей, построенных по коэффициентам краевых условий и корням характеристического многочлена. Дается оценка сверху возможного конечного дефекта.

Ключевые слова: пучок обыкновенных дифференциальных операторов, полиномиальный пучок дифференциальных операторов, однородное дифференциальное выражение, однородные краевые формы, кратная полнота, корневые функции, собственные и присоединенные функции, производные цепочки, распадающиеся краевые условия.

Поступила в редакцию: 07.04.2018 / Принята: 05.04.2019 / Опубликована онлайн: 28.05.2019

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-134-151

ВВЕДЕНИЕ

Постановка задачи

В $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный однородным (присутствуют только главные члены) дифференциальным выражением (д.в.) n-го порядка

$$\ell(y,\lambda) := \sum_{j+s=n} p_{js}\lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js}\in\mathbb{C}, \quad p_{n0}\neq 0, \quad p_{0n}\neq 0, \tag{1}$$

и линейно независимыми однородными двухточечными распадающимися нормированными краевыми условиями

$$U_i(y,\lambda) := \sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s \alpha_{ijs} y^{(j)}(0) = 0, \quad i=\overline{1,l}, \tag{2}$$

$$U_i(y,\lambda) := \sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s \beta_{ijs} y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{l+1,n}, \tag{3}$$

где $\lambda, \alpha_{ijs}, \beta_{ijs} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_i, \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leqslant l \leqslant n-1$.

Далее используем, не повторяя в данном тексте, известные определения собственных и присоединенных функций или, кратко, корневых функций (к.ф.), m-кратной ($1 \leqslant m \leqslant n$) полноты к.ф. из [1–3].

Решается задача о нахождении условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место m-кратная полнота к.ф. этого пучка в пространстве $L_2[0,1]$.

Краткая история вопроса

Основополагающей по этой проблеме является работа [4], в которой была сформулирована теорема об n-кратной полноте к.ф. пучка $L(\lambda)$, порожденного д.в. со специальной главной частью

$$\ell(y,\lambda) := y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\}$$

и распадающимися краевыми условиями. Эта теорема была доказана в [5] в случае аналитических коэффициентов д.в. и в [6] — в случае суммируемых коэффициентов. Случай произвольной главной части д.в. был рассмотрен в [7, 8]. Детальное исследование вопроса об n-кратной и, в частности, m-кратной ($1 \leqslant m \leqslant n-1$) полноте к.ф. пучка $L(\lambda)$, д.в. которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия — полураспадающиеся, проведено в [9]. Полураспадающиеся краевые условия — когда l ($2l \geqslant n$) краевых условий берутся только в одном конце основного отрезка $[0,1]$ (например в 0), а остальные $n-l$ краевых условий берутся и в 0 и в 1.

Более подробно история вопроса изложена в [10, 11].

В частности, в [11] рассмотрен случай, когда корни характеристического уравнения пучка расположены на двух лучах, исходящих из начала. В теореме 1 из [11] получены достаточные условия кратной полноты в пространстве $L_2[0,1]$ системы к.ф. для более общего класса пучков вида (1)–(3), когда краевые условия полураспадающихся «в широком смысле» (т. е. когда возможно выполнение не только неравенства $2l \geqslant n$, но и неравенства $2l < n$ в случае $1 \leqslant l \leqslant n-1$). Но, несмотря на то что краевые условия (2)–(3) являются частным случаем полураспадающихся «в широком смысле» краевых условий из [11], теорема 1 о полноте из [11] не может быть непосредственно применена к случаю распадающихся краевых условий (2)–(3), так как не все параметры в формулировке теоремы 1 из [11] определены для распадающихся краевых условий (2)–(3) (см. подробнее об этом после формулировки теорем 1 и 2 настоящей статьи).

Видоизменив доказательство теоремы 1 из [11], удалось получить достаточные условия кратной полноты и в случае распадающихся краевых условий, но, к сожалению, не во всех случаях. Чтобы сформулировать полученные результаты, введем необходимые предположения и обозначения.

Формулировка основных результатов

Предположим, что корни $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ характеристического уравнения (или, кратко, характеристики) $\sum\limits_{j+s=n} p_{js}\omega^j = 0$ попарно различны, отличны от нуля и лежат на двух или одном лучах, исходящих из начала. Пусть на одном луче лежат k характеристик, а на другом — $n-k$ ($0 \leqslant k \leqslant n$). Не нарушая общности, можно считать, что корни расположены следующим образом:

$$\omega_n e^{i\varphi} < \omega_{n-1} e^{i\varphi} < \cdots < \omega_{k+1} e^{i\varphi} < 0 < \omega_1 e^{-i\varphi} < \omega_2 e^{-i\varphi} < \cdots < \omega_k e^{-i\varphi}, \qquad (4)$$

где $|\varphi| < \pi/2$. В случае одного луча ($k = n$ или $k = 0$), ради единообразия дальнейших выкладок, считаем, что $\varphi = 0$ и $k = n$, т. е. формально тоже два луча, но один луч не содержит корней.

Обозначим $[p,q]_- = \min\{p,q\}$, $[p,q]_+ = \max\{p,q\}$, $[p]_+ = [p,0]_+$ и положим при $j = \overline{1,n}$

$$a_{ij} = \sum_{\nu+s=\varkappa_i} \alpha_{i\nu s}\omega_j^\nu, \quad i = \overline{1,l}, \qquad b_{ij} = \sum_{\nu+s=\varkappa_i} \beta_{i\nu s}\omega_j^\nu, \quad i = \overline{l+1,n}.$$

Используя эти обозначения, введем условия отличия от нуля главного члена асимптотики характеристического определителя пучка $L(\lambda)$. Главным членом асимптотики является соответствующая растущая экспонента с коэффициентом, который есть произведение двух определителей. Один определитель выражается через числа a_{ij}, а другой — через числа b_{ij}. Конкретный вид таких определителей зависит от того, в правой или левой полуплоскости рассматривается параметр λ, а также от соотношений между n, l и k. Всего имеется четыре пары таких определителей (по два для правой и левой полуплоскостей расположения параметра λ), а следовательно, четыре условия:

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,k+l-n};\overline{k+1,n}} \neq 0, \quad \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{k+l-n+1,k}} \neq 0 \quad \text{при} \quad n-k \leqslant l; \qquad (5)$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{n-l+1,n}} \neq 0, \quad \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,n-l}} \neq 0 \quad \text{при} \quad n-k \geqslant l; \qquad (6)$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,l}} \neq 0, \quad \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{l+1,n}} \neq 0 \quad \text{при} \quad k \leqslant l; \qquad (7)$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{k-l+1,k}} \neq 0, \quad \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,k-l};\overline{k+1,n}} \neq 0 \quad \text{при} \quad k \geqslant l. \qquad (8)$$

Отметим, что в крайнем случае $n-k = l$ условия (5) и (6) совпадают. Аналогично в крайнем случае $k = l$ совпадают условия (7) и (8).

Теорема 1. *Если* $[k, n-k]_+ \leqslant l$ *и выполняются условия* (5) *и* (7), *то при* $m = 2(n-l)$ *система к.ф. пучка* (1)–(3) m*-кратно полна в* $L_2[0,1]$ *с возможным конечным дефектом, не превышающим числа* $d_1 := \sum\limits_{i=l+1}^{n} [m-1-\varkappa_i]_+$.

Теорема 2. *Если* $[k, n-k]_- \geqslant l$ *и выполняются условия* (6) *и* (8), *то при* $m = 2l$ *система к.ф. пучка* (1)–(3) m*-кратно полна в* $L_2[0,1]$ *с возможным конечным дефектом, не превышающим числа* $d_2 := \sum\limits_{i=1}^{l} [m-1-\varkappa_i]_+$.

Формулировка теоремы 1 почти один в один повторяет формулировку пункта (a) теоремы 1 из [11], хотя доказательство немного отличается. Это связано с тем, что в случае полураспадающихся краевых условий в теореме 1 из [11] определены и величины $\varkappa_{i0}$, и величины $\varkappa_{i1}$ — порядки форм в 0 и 1 в смешанных краевых условиях при $i = \overline{l+1,n}$, а возможный конечный дефект системы к.ф. не превосходит величины $d_1 = \sum_{i=l+1}^{n} [m-1-\varkappa_i]_+$, где $\varkappa_i = \min\{\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1}\}$. В случае же краевых условий (3) настоящей статьи величины $\varkappa_{i0}$ не определены, а возможный конечный дефект системы к.ф. в теореме 1 не превосходит вроде бы ту же величину d_1, но отличие есть: здесь $\varkappa_i$ есть порядки краевых условий (3), т. е. $\varkappa_i = \varkappa_{i1}$ в обозначениях статьи [11].

Формулировка же теоремы 2 настоящей статьи совсем отличается от формулировки соответствующего случая в пункте (c) теоремы 1 из [11].

Два крайних подслучая из теорем 1 и 2 объединим в отдельной теореме. Это соответствует случаю регулярного пучка.

Теорема 3. *Если $[k, n-k]_- = [k, n-k]_+ = l$ или, что эквивалентно, $n = 2k = 2l$ и выполняются условия* (5) *(или* (6)*) и* (7) *(или* (8)*), то система к.ф. пучка* (1)–(3) *n-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $[d_1, d_2]_-$ в случае, если по крайней мере для одного $i = \overline{1,n}$ выполняется неравенство $\varkappa_i > n-1$, и с нулевым дефектом в противном случае.*

В доказательстве теорем 1 и 2 отмечено, что в случае

$$[k, n-k]_- < l < [k, n-k]_+, \tag{9}$$

который исключен из рассмотрения в теоремах 1–3, используемый метод рассуждений не проходит из-за пока непреодолимых трудностей. Условие (9) — случай пучка $L(\lambda)$ с устойчивой сильной нерегулярностью, т. е. такой (см. определение в [3]), которая имеет место при любых значениях коэффициентов краевых условий α_{ijs} и β_{ijs}.

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству сформулированных теорем. Схема доказательства соответствует схеме доказательства теоремы 1 в [11]. Центральную роль в доказательстве играет основная лемма об оценке, которая формулируется и доказывается в следующем разделе.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ И ЛЕММА ОБ ОЦЕНКЕ

Хорошо известно, что уравнение $\ell(y, \lambda) = 0$ имеет фундаментальную систему решений (ф.с.р.) $\{y_j(x, \lambda)\}_{j=1}^n$ вида

$$y_j(x, \lambda) = e^{\lambda\omega_j x}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{10}$$

Наряду с ф.с.р. (10) будет использоваться ф.с.р. $\{\tilde{y}_j(x, \lambda)\}_{j=1}^n$, удовлетворяющая начальным условиям

$$\tilde{y}_j^{(s-1)}(0, \lambda) = \delta_{js}, \ j, s = \overline{1,n},$$

где δ_{js} есть символ Кронекера. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что $\tilde{y}_j(x, \lambda)$ есть целые аналитические функции по λ.

Будем далее обозначать объекты, построенные по ф.с.р. $\{\tilde{y}_j(x, \lambda)\}_{j=1}^n$, теми же буквами, что и объекты, построенные по ф.с.р. $\{y_j(x, \lambda)\}_{j=1}^n$, но с волной наверху.

Собственные значения λ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, пучка (1)–(3) являются нулями целой функции $\tilde{\Delta}(\lambda) := \det\big(U_i(\tilde{y}_j(x, \lambda), \lambda)\big)_{i,j=1}^n$.

Обозначим через $\tilde{\Phi}_i(x, \lambda)$ функцию, полученную из $\tilde{\Delta}(\lambda)$ в результате замены i-й строки на строку $(\tilde{y}_1(x, \lambda), \ldots, \tilde{y}_n(x, \lambda))$. Непосредственно можно убедиться в том, что при фиксированном $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (этот параметр определяет кратность полноты к.ф. и будет выбран позже) столбцы

$$\left(\frac{\partial^r \tilde{\Phi}_i(x, \lambda)}{\partial \lambda^r}, \ldots, \frac{\partial^r \big(\lambda^{m-1} \tilde{\Phi}_i(x, \lambda)\big)}{\partial \lambda^r} \right)^T \Bigg|_{\lambda = \lambda_\nu}, \tag{11}$$

где $i = \overline{1,n}$, $r = \overline{0, s_\nu}$, являются производными по Келдышу m-цепочками для к.ф., соответствующих с.з. λ_ν, которое является нулем $\tilde{\Delta}(\lambda)$ кратности $s_\nu + 1$.

Введем в рассмотрение функции

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) = \int_0^1 \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^{j-1}\tilde{\Phi}_i(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} h_j(x)\,dx, \quad i = \overline{1,n}, \tag{12}$$

где $h_j(x) \in L_2[0,1]$, $j = \overline{1,m}$, и обозначим $h(x) = \big(h_1(x), \dots, h_m(x)\big)^T$.

Перепишем (12) в виде

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) = \frac{\tilde{\Delta}_i(\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{13}$$

где $\tilde{\Delta}_i(\lambda)$ получается из $\tilde{\Delta}(\lambda)$ заменой i-й строки строкой $(\tilde{u}_{n+1,1}(\lambda), \dots, \tilde{u}_{n+1,n}(\lambda))$, в которой

$$\tilde{u}_{n+1,j}(\lambda) = \int_0^1 \sum_{\nu=1}^m h_\nu(x)\lambda^{\nu-1}\tilde{y}_j(x,\lambda)\,dx = \lambda^{m-1}\int_0^1 h_m(x,\lambda)\tilde{y}_j(x,\lambda)\,dx$$

и $h_m(x,\lambda) = \sum_{\nu=1}^m h_\nu(x)\lambda^{\nu-m}$.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Функции $\tilde{\Phi}_1(x,\lambda)$, …, $\tilde{\Phi}_l(x,\lambda)$ являются линейно независимыми решениями уравнения $\ell(y,\lambda) = 0$, удовлетворяющими последним $n - l$ краевым условиям* (3)*, а функции $\tilde{\Phi}_{l+1}(x,\lambda)$, …, $\tilde{\Phi}_n(x,\lambda)$ являются линейно независимыми решениями того же уравнения, удовлетворяющими первым l краевым условиям* (2).

Доказательство аналогично доказательству соответствующего утверждения в [9, с. 48–49]. Там же сформулировано и доказано другое утверждение.

Утверждение 2. *Функции $\tilde{\Theta}_1(\lambda)$, …, $\tilde{\Theta}_n(\lambda)$ не зависят от выбора ф.с.р. уравнения $\ell(y,\lambda) = 0$.*

Из утверждения 2 и формулы (13) получим

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) \equiv \Theta_i(\lambda) \equiv \frac{\Delta_i(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{14}$$

Введем в рассмотрение следующие множества

$$\Pi_\varepsilon^+ = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \arg\lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon]\Big\}, \quad \Pi_\varepsilon^- = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \arg\lambda \in [\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon]\Big\},$$

где $\varepsilon > 0$ и достаточно мало.

Будем обозначать далее через $C(\varepsilon)$ различные константы, зависящие, возможно, только от ε, через $O_\varepsilon(1/|\lambda|)$ различные величины, для которых при $|\lambda| \gg 1$ имеют место оценки $|O_\varepsilon(1/|\lambda|)| \leqslant C(\varepsilon)/|\lambda|$. Кроме того, будем использовать обозначение $[a]_\varepsilon := a + O_\varepsilon(1/|\lambda|)$ при $|\lambda| \gg 1$.

Справедлива следующая лемма об оценке, которая является основной при доказательстве сформулированных теорем.

Лемма 1 (основная лемма об оценке). *Пусть для пучка $L(\lambda)$ с параметрами n, l и k выполняются неравенства* (4). *Тогда при $|\lambda| \gg 1$ имеют место оценки*

$$|\Theta_i(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}-\varkappa_i}, \tag{15}$$

при определенных сочетаниях величин i, n, l и k, а именно:

1) *в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$ в следующих ситуациях:*

   а) *при $n-k<l$ и выполнении условия* (5) — *для $i=\overline{l+1,n}$;*

   б) *при $n-k=l$ и выполнении условия* (5) *или* (6) (*условия* (5) *и* (6) *в этом случае совпадают*) — *для $i=\overline{1,n}$;*

   в) *при $n-k>l$ и выполнении условия* (6) — *для $i=\overline{1,l}$;*

2) *в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$ в следующих ситуациях:*

   а) *при $k<l$ и выполнении условия* (7) — *для $i=\overline{l+1,n}$;*

   б) *при $k=l$ и выполнении условия* (7) *или* (8) (*условия* (7) *и* (8) *в этом случае совпадают*) — *для $i=\overline{1,n}$;*

   в) *при $k>l$ и выполнении условия* (8) — *для $i=\overline{1,l}$.*

Доказательство. Справедливы следующие формулы:
(i) при $\sigma=\overline{1,l}$, $j=\overline{1,n}$

$$U_\sigma(y_j,\lambda)=\sum_{\nu+s=\varkappa_\sigma}\alpha_{\sigma\nu s}\omega_j^\nu\lambda^{\nu+s}=\lambda^{\varkappa_\sigma}\sum_{\nu+s=\varkappa_\sigma}\alpha_{\sigma\nu s}\omega_j^\nu=\lambda^{\varkappa_\sigma}a_{\sigma j}; \tag{16}$$

(ii) при $\sigma=\overline{l+1,n}$, $j=\overline{1,n}$

$$U_\sigma(y_j,\lambda)=\sum_{\nu+s=\varkappa_\sigma}\beta_{\sigma\nu s}\omega_j^\nu\lambda^{\nu+s}e^{\lambda\omega_j}=\lambda^{\varkappa_\sigma}e^{\lambda\omega_j}\sum_{\nu+s=\varkappa_\sigma}\beta_{\sigma\nu s}\omega_j^\nu=\lambda^{\varkappa_\sigma}e^{\lambda\omega_j}b_{\sigma j}. \tag{17}$$

Для большей ясности разобьем доказательство основной леммы на ряд лемм.

1. Рассмотрим сначала случай $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$. Так как справедливы соотношения (14), то чтобы оценить сверху $|\Theta_i(\lambda)|$, предварительно оценим снизу $|\Delta(\lambda)|$.

Лемма 2. *Если $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$ и $|\lambda| \gg 1$, то при $n-k \leqslant l$ и выполнении условий* (5) *имеет место следующая оценка снизу:*

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum_{i=1}^n \varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum_{\nu=k+l+1-n}^k \omega_\nu}\right|, \tag{18}$$

а при $n-k \geqslant l$ и выполнении условий (6) — *оценка снизу*

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum_{i=1}^n \varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum_{\nu=1}^{n-l} \omega_\nu}\right|, \tag{19}$$

где $C(\varepsilon)>0$ есть константа, зависящая только от ε и от параметров пучка $L(\lambda)$.

Доказательство. Подставляя (16)–(17) в $\Delta(\lambda)$ и вынося множители $\lambda^{\varkappa_i}$ из каждой строки, получим представление

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\sum_{i=1}^{n}\varkappa_i} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{l1} & \dots & a_{lk} & a_{l,k+1} & \dots & a_{ln} \\ e^{\lambda\omega_1}b_{l+1,1} & \dots & e^{\lambda\omega_k}b_{l+1,k} & e^{\lambda\omega_{k+1}}b_{l+1,k+1} & \dots & e^{\lambda\omega_n}b_{l+1,n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ e^{\lambda\omega_1}b_{n1} & \dots & e^{\lambda\omega_k}b_{nk} & e^{\lambda\omega_{k+1}}b_{n,k+1} & \dots & e^{\lambda\omega_n}b_{nn} \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Рассмотрим два подслучая.

Случай а). Пусть $n-k \leqslant l$ или, что то же самое, $n-l \leqslant k$. Раскладываем определитель $\Delta(\lambda)$ по первым l строкам, выделяем главный член, требуя отличия от нуля соответствующих определителей, а именно выполнения условий (5). Получим при $|\lambda| \gg 1$

$$\Delta(\lambda) = \pm\lambda^{\sum_{i=1}^{n}\varkappa_i} e^{\lambda\sum_{\nu=k-n+l+1}^{k}\omega_\nu} \det(a_{\sigma j})_{\sigma=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,k+l-n};\overline{k+1,n}} \det(b_{\sigma j})_{\sigma=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{k+l-n+1,k}}[1]_\varepsilon. \tag{21}$$

Таким образом, в случае выполнения условий (5) и $|\lambda| \gg 1$ получим оценку (18).

Случай б). Пусть $n-k \geqslant l$ или, что то же самое, $n-l \geqslant k$. Раскладываем определитель $\Delta(\lambda)$ по первым l строкам, выделяем главный член, требуя отличия от нуля соответствующих определителей, а именно выполнения условий (6). Получим при $|\lambda| \gg 1$ аналогично (21)

$$\Delta(\lambda) = \pm\lambda^{\sum_{i=1}^{n}\varkappa_i} e^{\lambda\sum_{\nu=1}^{n-l}\omega_\nu} \det(a_{\sigma j})_{\sigma=\overline{1,l}}^{j=\overline{n-l+1,n}} \det(b_{\sigma j})_{\sigma=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,n-l}}[1]_\varepsilon.$$

Таким образом, в случае выполнения условий (6) и $|\lambda| \gg 1$ получим оценку (19). $\square$

Оценим теперь сверху $\Delta_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$. В соответствии с определением $\Delta_i(\lambda)$ после вынесения множителя λ^{m-1} из i-й строки и разложения оставшегося определителя по элементам этой строки получим формулу

$$\Delta_i(\lambda) = \lambda^{m-1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j\xi}\,d\xi, \tag{22}$$

где $\Delta_{ij}(\lambda)$ есть минор элемента (i,j) в определителе $\Delta(\lambda)$. Учитывая формулу (20), получим представление

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma - \varkappa_i} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{l1} & \dots & a_{lk} & a_{l,k+1} & \dots & a_{ln} \\ e^{\lambda\omega_1}b_{l+1,1} & \dots & e^{\lambda\omega_k}b_{l+1,k} & e^{\lambda\omega_{k+1}}b_{l+1,k+1} & \dots & e^{\lambda\omega_n}b_{l+1,n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ e^{\lambda\omega_1}b_{n1} & \dots & e^{\lambda\omega_k}b_{nk} & e^{\lambda\omega_{k+1}}b_{n,k+1} & \dots & e^{\lambda\omega_n}b_{nn} \end{vmatrix}_{ij}, \tag{23}$$

где индекс «ij» у определителя здесь и далее означает, что в этом определителе отсутствует i-я строка и j-й столбец.

Лемма 3. *Если $|\lambda| \gg 1$, то в случае 1) из леммы 1, т. е. когда $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$, имеют место следующие утверждения:*

а) при $n-k<l$, $i=\overline{l+1,n}$ справедлива оценка сверху

$$|\Delta_i(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum_{\nu=k+l+1-n}^{k}\omega_\nu}\right|; \tag{24}$$

б) при $n-k=l$, $i=\overline{1,n}$ справедлива та же оценка (24);

в) при $n-k>l$, $i=\overline{1,l}$ справедлива оценка сверху

$$|\Delta_i(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum_{\nu=1}^{n-l}\omega_\nu}\right|. \tag{25}$$

Отметим, что при $n-k=l$ оценки (24) и (25) совпадают.

Замечание 1. Отметим, что в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$ при $n-k<l$, $i=\overline{1,l}$ вместо оценки (24) имеет место не улучшаемая оценка сверху

$$|\Delta_i(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum_{\nu=k+l-n}^{k}\omega_\nu}\right|,$$

которая не позволяет получить в дальнейшем требуемый для доказательства основных теорем не более чем степенной рост функции $|\Theta_i(\lambda)|$. Аналогично обстоит дело в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$ при $n-k>l$, $i=\overline{l+1,n}$.

Доказательство. Рассмотрим отдельно три случая: а) $n-k<l$; б) $n-k=l$; в) $n-k>l$.

Случай а). Пусть $n-k<l$ или $n-l<k$. Предположим $i=\overline{l+1,n}$. Возможны два подслучая $1 \leqslant j \leqslant k$ и $k+1 \leqslant j \leqslant n$.

Пусть $1 \leqslant j \leqslant k$. В этом подслучае разложим определитель в (23) по минорам первых l строк и выделим главную часть. Так как $n-l-1 \leqslant k-1$, то главная часть есть член, который равен произведению минора l-го порядка на алгебраическое дополнение $n-l-1$-го порядка с элементами, стоящими в $n-l-1$ столбцах с номерами от $k+l+2-n$ до k в случае $1 \leqslant j \leqslant k+l+1-n$ и с номерами от $k+l+1-n$ до $j-1$ и от $j+1$ до k в случае $k+l+2-n \leqslant j \leqslant k$.

Следовательно, аналогично выводу формулы (21) получим следующие формулы:

(i) в подподслучае $1 \leqslant j \leqslant k+l+1-n$ при $|\lambda| \gg 1$

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \pm\lambda^{\sum_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}e^{\lambda\sum_{\nu=k+l+2-n}^{k}\omega_\nu}\times$$
$$\times\left(\det(a_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{1,l}}^{\tau=\overline{1,j-1};\overline{j+1,k+l+1-n};\overline{k+1,n}}\det(b_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{l+1,i-1};\overline{i+1,n}}^{\tau=\overline{k+l+2-n,k}}+O_\varepsilon(1/|\lambda|)\right).$$

Таким образом, в этом подподслучае при $|\lambda| \gg 1$ получим оценку сверху:

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum_{\nu=k+l+2-n}^{k}\omega_\nu}\right|. \tag{26}$$

(ii) в подподслучае $k+l+2-n \leqslant j \leqslant k$ при $|\lambda| \gg 1$

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \pm\lambda^{\sum_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}e^{\lambda\left(\sum_{\nu=k+l+1-n}^{k}\omega_\nu-\omega_j\right)}\times$$
$$\times\left(\det(a_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{1,l}}^{\tau=\overline{1,k+l-n};\overline{k+1,n}}\det(b_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{l+1,i-1};\overline{i+1,n}}^{\tau=\overline{k+l+1-n,j-1};\overline{j+1,k}}+O_\varepsilon(1/|\lambda|)\right).$$

Таким образом, в этом подслучае при $|\lambda| \gg 1$ получим следующую оценку сверху:

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum_{\sigma=1}^{n} \varkappa_\sigma - \varkappa_i} \left| e^{\lambda\left(\sum_{\nu=k+l+1-n}^{k} \omega_\nu - \omega_j\right)} \right|. \tag{27}$$

Пусть теперь $k+1 \leqslant j \leqslant n$. В этом подслучае разложим определитель в (23) также по минорам первых l строк и выделим главную часть. Так как $n-l-1 < k$, то главная часть есть член, который равен произведению минора l-го порядка на алгебраическое дополнение $(n-l-1)$-го порядка с элементами, стоящими в $n-l-1$ столбцах с номерами от $k+l+2-n$ до k.

Следовательно, аналогично случаю (i), получим следующие формулы:

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \pm\lambda^{\sum_{\sigma=1}^{n} \varkappa_\sigma - \varkappa_i} e^{\lambda \sum_{\nu=k+l+2-n}^{k} \omega_\nu} \times$$
$$\times \left(\det(a_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{1,l}}^{\tau=\overline{1,k+l+1-n};\overline{k+1,j-1};\overline{j+1,n}} \det(b_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{l+1,i-1};\overline{i+1,n}}^{\tau=\overline{k+l+2-n,k}} + O_\varepsilon(1/|\lambda|) \right).$$

Таким образом, в этом подслучае при $|\lambda| \gg 1$ получим следующую оценку сверху:

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum_{\sigma=1}^{n} \varkappa_\sigma - \varkappa_i} \left| e^{\lambda \sum_{\nu=k+l+2-n}^{k} \omega_\nu} \right|. \tag{28}$$

Подставим найденные оценки (26)–(28) в (22). Получим при $|\lambda| \gg 1$ и $i = \overline{l+1,n}$

$$\Delta_i(\lambda) = O_\varepsilon \Bigg(|\lambda|^{m-1+\sum_{\sigma=1}^{n} \varkappa_\sigma - \varkappa_i} \left| e^{\lambda \sum_{\nu=k+l+1-n}^{k} \omega_\nu} \right| \times$$
$$\times \Bigg(\sum_{j=1}^{k+l+1-n} \left| e^{\lambda(\omega_j - \omega_{k+l+1-n})} \right| \left| \int_0^1 h_m(\xi,\lambda) e^{\lambda\omega_j(\xi-1)}\, d\xi \right| + \sum_{j=k+l+2-n}^{k} \left| \int_0^1 h_m(\xi,\lambda) e^{\lambda\omega_j(\xi-1)}\, d\xi \right| +$$
$$+ \sum_{j=k+1}^{n} \left| e^{-\lambda\omega_{k+l+1-n}} \right| \left| \int_0^1 h_m(\xi,\lambda) e^{\lambda\omega_j \xi}\, d\xi \right| \Bigg)\Bigg).$$

Оценивая теперь интегралы сверху аналогично тому, как это сделано в [10, с. 351–352], получим указанную в формулировке леммы 3 оценку сверху (24).

Случай б). В случае $n-k=l$ предыдущие рассуждения полностью проходят с оценкой сверху (24) не только при $i=\overline{l+1,n}$, но и при $i=\overline{1,l}$.

Случай в). Рассмотрим теперь оставшийся случай $n-k>l$. Здесь проходят практически дословно рассуждения, аналогичные случаю $n-k<l$, но при $i=\overline{1,l}$, если применять их к определителям $\Delta_{ij}(\lambda)$ (см. формулу (22)), представленным в следующем виде:

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum_{\sigma=1}^{n} \varkappa_\sigma - \varkappa_i} e^{\lambda \sum_{\beta=1}^{n} \omega_\beta} \begin{vmatrix} e^{-\lambda\omega_1} a_{11} & \ldots & e^{-\lambda\omega_k} a_{1k} & e^{-\lambda\omega_{k+1}} a_{1,k+1} & \ldots & e^{-\lambda\omega_n} a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{-\lambda\omega_1} a_{l1} & \ldots & e^{-\lambda\omega_k} a_{lk} & e^{-\lambda\omega_{k+1}} a_{l,k+1} & \ldots & e^{-\lambda\omega_n} a_{ln} \\ b_{l+1,1} & \ldots & b_{l+1,k} & b_{l+1,k+1} & \ldots & b_{l+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nk} & b_{n,k+1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}_{ij}.$$

Применяя к определителю в этой формуле такие же рассуждения, что и в случае $n-k>l$, но предполагая $i=\overline{1,l}$, получим в итоге оценку сверху (25). $\square$

2. Рассмотрим теперь случай $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$.

Лемма 4. *Если* $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$ *и* $|\lambda| \gg 1$, *то при* $k \leqslant l$ *и выполнении условий* (7) *имеет место следующая оценка снизу:*

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum_{i=1}^n \varkappa_i} \left|e^{\lambda \sum_{\nu=l+1}^n \omega_\nu}\right|, \tag{29}$$

а при $k \geqslant l$ *и выполнении условий* (8) — *оценка снизу*

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum_{i=1}^n \varkappa_i} \left|e^{\lambda\left(\sum_{\nu=k+1}^{n-l} \omega_\nu + \sum_{\nu=1}^{k-l} \omega_\nu\right)}\right|. \tag{30}$$

Доказательство. Рассмотрим два подслучая.

Случай а). Пусть $k \leqslant l$ или, что то же самое, $n-l \leqslant n-k$. Раскладываем определитель $\Delta(\lambda)$ по первым l строкам, выделяем главный член, требуя отличия от нуля соответствующих определителей, а именно выполнения условий (7). Получим при $|\lambda| \gg 1$

$$\Delta(\lambda) = \pm\lambda^{\sum_{i=1}^n \varkappa_i} e^{\lambda \sum_{\nu=l+1}^n \omega_\nu} \det(a_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{1,l}}^{\tau=\overline{1,l}} \det(b_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{l+1,n}} [1]_\varepsilon. \tag{31}$$

Таким образом, при выполнения условий (7) и $|\lambda| \gg 1$ получим оценку снизу (29).

Случай б). Пусть $k \geqslant l$ или, что то же самое, $n-l \geqslant n-k$. Раскладываем определитель $\Delta(\lambda)$ по первым l строкам, выделяем главный член, требуя отличия от нуля соответствующих определителей, а именно выполнения условий (8). При $|\lambda| \gg 1$ по аналогии с (31) получим

$$\Delta(\lambda) = \pm\lambda^{\sum_{i=1}^n \varkappa_i} e^{\lambda\left(\sum_{\nu=k+1}^n \omega_\nu + \sum_{\nu=1}^{k-l} \omega_\nu\right)} \det(a_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{1,l}}^{j=\overline{k-l+1,k}} \det(b_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,k-l};\overline{k+1,n}} [1]_\varepsilon.$$

Таким образом, при выполнения условий (8) и $|\lambda| \gg 1$ получим оценку снизу (30). □

Оценим теперь сверху $\Delta_i(\lambda)$, $i = \overline{1,n}$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 5. *Если* $|\lambda| \gg 1$, *то в случае 2) из леммы 1, т. е. когда* $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$, *имеют место следующие утверждения:*

а) при $k < l$, $i = \overline{l+1,n}$ *справедлива оценка сверху*

$$|\Delta_i(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum_{\sigma=1}^n \varkappa_\sigma - \varkappa_i} \left|e^{\lambda \sum_{\nu=l+1}^n \omega_\nu}\right|; \tag{32}$$

б) при $k = l$, $i = \overline{1,n}$ *справедлива та же оценка* (32);

в) при $k > l$, $i = \overline{1,l}$ *справедлива оценка сверху*

$$|\Delta_i(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum_{\sigma=1}^n \varkappa_\sigma - \varkappa_i} \left|e^{\lambda\left(\sum_{\nu=k+1}^n \omega_\nu + \sum_{\nu=1}^{k-l} \omega_\nu\right)}\right|. \tag{33}$$

Отметим, что при $k = l$ *оценки* (32) *и* (33) *совпадают.*

Замечание 2. Отметим, что в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$ при $k < l$, $i = \overline{1,l}$ вместо оценки (32) имеет место не улучшаемая оценка сверху

$$|\Delta_i(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum_{\sigma=1}^n \varkappa_\sigma - \varkappa_i} \left|e^{\lambda \sum_{\nu=l}^n \omega_\nu}\right|,$$

которая не позволяет получить в дальнейшем требуемый для доказательства основных теорем не более чем степенной рост функции $|\Theta_i(\lambda)|$. Аналогично обстоит дело в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$ при $k > l$, $i = \overline{l+1,n}$.

Доказательство. Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство соответствующей леммы 3. Поэтому не приводим подробностей. □

На основании формул (14) и лемм 2–5 получаем утверждения доказываемой основной леммы. Таким образом, лемма 1 полностью доказана. □

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ

Доказательство теоремы 1

Пусть выполняются предположения теоремы 1, т. е. $[k, n-k]_+ \leqslant l$, справедливы условия (5) и (7) и $m = 2(n-l)$.

Пусть $\bar h := (\bar h_1, \ldots \bar h_m)^T \in L_2^m[0,1]$ и ортогональна всем производным m-цепочкам (11). Тогда в силу (12)–(14) все особенности мероморфных функций $\tilde\Theta_i(\lambda)$, $i = \overline{l+1, n}$, устранимы и являются тем самым целыми функциями. На основании оценок (15) и принципа Фрагмена – Линделёфа в случаях, когда $m - 2 - \varkappa_i \geqslant 0$, функции $\tilde\Theta_i(\lambda)$ есть полиномы степени $m - 2 - \varkappa_i$, которые могут быть записаны в виде

$$\tilde\Theta_i(\lambda) \equiv \lambda^{m-2-\varkappa_i}\big(\bar h, \zeta_{i0}\big) + \lambda^{m-3-\varkappa_i}\big(\bar h, \zeta_{i1}\big) + \cdots + \big(\bar h, \zeta_{i,m-2-\varkappa_i}\big),$$

где $\zeta_{i\nu} \in L_2^m[0,1]$ есть вполне определенные вектор-функции (в.-ф.), а в случаях, когда $m - 2 - \varkappa_i < 0$, получим тождества

$$\tilde\Theta_i(\lambda) \equiv 0.$$

Проводя далее рассуждения, полностью аналогичные рассуждениям [11, с. 295–297], получим, что справедливы тождества

$$\sum_{j=1}^{k} \int_0^1 \gamma_j^i e^{\lambda\omega_j x} \sum_{\beta=1}^{m} \lambda^{\beta-1} h_\beta(x)\, dx \equiv 0, \quad i = \overline{1, n-l} \tag{34}$$

для множества решений $(\gamma_1^i, \gamma_2^i, \ldots, \gamma_n^i)$, $i = \overline{1, n-l}$, системы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\gamma_j = 0, \quad i = \overline{1, l}, \tag{35}$$

для которых выполняется условие

$$G_1 = \begin{vmatrix} \gamma_{k-n+l+1}^1 & \ldots & \gamma_k^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{k-n+l+1}^{n-l} & \ldots & \gamma_k^{n-l} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{36}$$

При получении последнего условия существенно использовалось первое неравенство в предположении (5).

Далее проводим рассуждения, которые немного отличаются от рассуждений [11, с. 297–298]. Переписываем систему (35) в виде

$$\sum_{j=1}^{l} a_{ij}\gamma_j = -\sum_{j=l+1}^{n} a_{ij}\gamma_j, \quad i = \overline{1, l}.$$

Если в правой части этой системы возьмем неизвестные $\gamma_{l+1}, \ldots, \gamma_n$ произвольно, то в силу первого неравенства в предположении (7) неизвестные $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ могут быть однозначно определены. Следовательно, существует такое множество решений $(\gamma_1^i, \gamma_2^i, \dots, \gamma_n^i)$, $i = \overline{n-l+1, m}$ $(m = 2(n-l))$, системы (35), для которых выполняется условие

$$G_2 = \begin{vmatrix} \gamma_{l+1}^{n-l+1} & \dots & \gamma_n^{n-l+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{l+1}^{m} & \dots & \gamma_n^{m} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{37}$$

Для этого множества решений системы (35) аналогично [11, с. 297–298] можно установить, что справедливы тождества

$$\sum_{j=k+1}^{n} \int_0^1 \gamma_j^i e^{\lambda\omega_j x} \sum_{\beta=1}^{m} \lambda^{\beta-1} h_\beta(x)\, dx \equiv 0, \quad i = \overline{n-l+1, m}. \tag{38}$$

Завершая рассуждения совершенно аналогично [11, с. 298–299] и используя соотношения (34), (36)–(38), приходим к выводу, что $h_j(x) = 0$, $j = \overline{1, m}$, для п.в. $x \in [0, 1]$.

Следовательно, в случае выполнения условий теоремы 1 система к.ф. рассматриваемого пучка m-кратно полна в $L_2[0, 1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа d_1. Тем самым теорема 1 полностью доказана. □

Замечание 3. Отметим, что при $m = n$ или, что эквивалентно, при $n = 2k = 2l$, в случае, когда $\varkappa_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ при $i = \overline{1, n}$ дефект системы к.ф. будет равен нулю, так как в этом случае рассматриваемый пучок может быть линеаризован в пространстве $L_2^n[0, 1]$ и справедливо предложение [9, лемма 2.1, с. 49].

Доказательство теоремы 2

Пусть выполняются предположения теоремы 2, т. е. $[k, n-k]_- \geqslant l$, справедливы условия (6) и (8) и $m = 2l$.

Пусть $\bar h := (\bar h_1, \dots \bar h_m)^T \in L_2^m[0, 1]$ и ортогональна всем производным m-цепочкам (11). Тогда в силу (12)–(14) все особенности мероморфных функций $\tilde\Theta_i(\lambda)$, $i = \overline{1, l}$, устранимы и являются тем самым целыми функциями. На основании оценок (15) и принципа Фрагмена – Линделёфа в случаях, когда $m - 2 - \varkappa_i \geqslant 0$, функции $\tilde\Theta_i(\lambda)$ есть полиномы степени $m - 2 - \varkappa_i$, которые могут быть записаны в виде

$$\tilde\Theta_i(\lambda) \equiv \lambda^{m-2-\varkappa_i}\big(\bar h, \zeta_{i0}\big) + \lambda^{m-3-\varkappa_i}\big(\bar h, \zeta_{i1}\big) + \dots + \big(\bar h, \zeta_{i,m-2-\varkappa_i}\big),$$

где $\zeta_{i\nu} \in L_2^m[0, 1]$ есть вполне определенные в.-ф., а в случаях, когда $m - 2 - \varkappa_i < 0$, получим тождества

$$\tilde\Theta_i(\lambda) \equiv 0.$$

Отсюда аналогично [11, с. 295], требуя дополнительную ортогональность к.ф. некоторому вполне конкретному набору в.-ф., состоящему из d_2 в.-ф., получим справедливость тождеств

$$\tilde\Delta_i(\lambda) = \int_0^1 \sum_{j=1}^{m} \lambda^{j-1} \tilde\Phi_i(x, \lambda) h_j(x)\, dx \equiv 0, \quad i = \overline{1, l}. \tag{39}$$

В соответствии с предложением 1 система функций $\tilde\Phi_1, \dots, \tilde\Phi_l$ есть система линейно независимых решений уравнения $\ell(y, \lambda) = 0$, удовлетворяющих последним $n-l$

краевым условиям (3) в точке 1. Тогда (39) влечет тождества

$$\int_0^1 y(x,\lambda)\sum_{j=1}^{m}\lambda^{j-1}h_j(x)\,dx \equiv 0 \tag{40}$$

для любого решения $y(x,\lambda)$ уравнения $\ell(y,\lambda)=0$, удовлетворяющего последним $n-l$ краевым условиям (3) в точке 1.

Ищем эти решения в виде (как раз в этом и состоит одно из главных отличий доказательства теоремы 2 от доказательства теоремы 1)

$$y(x,\lambda) = \hat\gamma_1 e^{\lambda\omega_1(x-1)} + \hat\gamma_2 e^{\lambda\omega_2(x-1)} + \dots + \hat\gamma_n e^{\lambda\omega_n(x-1)}. \tag{41}$$

Удовлетворяя краевые условия (3) в точке 1, получим следующую однородную систему $n-l$ линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных $\hat\gamma_j$:

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\hat\gamma_j = 0, \quad i=\overline{l+1,n}. \tag{42}$$

Далее проводим рассуждения, аналогичные соответствующим рассуждениям при доказательстве теоремы 1, но только вместо системы (35) рассматриваем систему (42), а вместо первых неравенств в условиях (5) и (7) используем вторые неравенства в условиях (6) и (8).

Тогда из (40)–(42) получим, что справедливы тождества

$$\sum_{j=k+1}^{n}\int_0^1 \hat\gamma_j^i e^{\lambda\omega_j(x-1)}\sum_{\beta=1}^{m}\lambda^{\beta-1}h_\beta(x)\,dx \equiv 0, \quad i=\overline{1,l} \tag{43}$$

для множества решений $(\hat\gamma_1^i, \hat\gamma_2^i, \dots, \hat\gamma_n^i)$, $i=\overline{1,l}$, системы (42), для которого выполняется условие

$$\hat G_1 = \begin{vmatrix} \hat\gamma_{n-l+1}^1 & \dots & \hat\gamma_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \hat\gamma_{n-l+1}^l & \dots & \hat\gamma_n^l \end{vmatrix} \neq 0. \tag{44}$$

При получении последнего условия существенно использовалось второе неравенство в условии (6).

Совершенно аналогично доказательству теоремы 1 переписываем систему (42) в виде

$$\sum_{j=1}^{k-l} b_{ij}\hat\gamma_j + \sum_{j=k+1}^{n} b_{ij}\hat\gamma_j = -\sum_{j=k-l+1}^{k} b_{ij}\hat\gamma_j, \quad i=\overline{l+1,n}.$$

Если в правой части этой системы возьмем неизвестные $\hat\gamma_{k-l+1},\dots,\hat\gamma_k$ произвольно, то в силу второго неравенства в условии (8) оставшиеся неизвестные $\hat\gamma_1,\dots,\hat\gamma_{k-l}$, $\hat\gamma_{k+1},\dots,\hat\gamma_n$ могут быть однозначно определены. Следовательно, существует такое множество решений $(\hat\gamma_1^i, \hat\gamma_2^i, \dots, \hat\gamma_n^i)$, $i=\overline{l+1,m}$ $(m=2l)$ системы (42), для которого выполняется условие

$$\hat G_2 = \begin{vmatrix} \hat\gamma_{k-l+1}^{l+1} & \dots & \hat\gamma_k^{l+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \hat\gamma_{k-l+1}^{m} & \dots & \hat\gamma_k^{m} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{45}$$

Для этого множества решений системы (42) аналогично [11, с. 297–298] можно установить, что справедливы тождества

$$\sum_{j=k+1}^{n} \int_0^1 \hat{\gamma}_j^i e^{\lambda\omega_j(x-1)} \sum_{\beta=1}^{m} \lambda^{\beta-1} h_\beta(x)\, dx \equiv 0, \quad i = \overline{l+1, m}. \tag{46}$$

Завершая рассуждения совершенно аналогично [11, с. 298–299] и используя соотношения (43)–(46), приходим к выводу, что $h_j(x) = 0$, $j = \overline{1, m}$, для п.в. $x \in [0, 1]$.

Следовательно, в случае выполнения условий теоремы 2 система к.ф. рассматриваемого пучка m-кратно полна в $L_2[0, 1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа d_2. Тем самым теорема 2 полностью доказана. □

Замечание 4. Отметим, что при $m = n$ или, что эквивалентно, при $n = 2k = 2l$ в случае, когда $\varkappa_i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ при $i = \overline{1, n}$, дефект системы к.ф. будет равен нулю, так как в этом случае рассматриваемый пучок может быть линеаризован в пространстве $L_2^n[0, 1]$ и справедливо предложение [9, лемма 2.1, с. 49] .

Доказательство теоремы 3

Доказательство теоремы 3 вытекает из теорем 1 и 2 при $n = 2k = 2l$ и замечаний 3 и 4.

3. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕОРЕМ 1 И 2

Исследуем кратную полноту системы к.ф. пучка

$$y^{(5)} - (7+4i)\lambda y^{(4)} + (11+28i)\lambda^2 y''' + (13-56i)\lambda^3 y'' + (32i-42)\lambda^4 y' + 24\lambda^5 y, \tag{47}$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y(1) = y'(1) = 0. \tag{48}$$

Для рассматриваемого пучка $n = 5$, $l = 3$

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 2, \quad \omega_3 = 4, \quad \omega_4 = i, \quad \omega_5 = 3i, \tag{49}$$

т. е. характеристики лежат на двух лучах, исходящих из начала, в количествах $k = 3$ и $n - k = 2$.

Так как $[k, n-k]_+ = \max\{3, 2\} = 3 = l$, то для исследования кратной полноты можно воспользоваться теоремой 1. Для этого нужно проверить выполнение условий (5) и (7).

Подсчитаем параметры a_{ij} и b_{ij}. Из вида краевых условий (48) и (2)–(3) следует, что для рассматриваемого пучка

$$\varkappa_1 = 0, \quad \varkappa_2 = 1, \quad \varkappa_3 = 2, \quad \varkappa_4 = 0, \quad \varkappa_5 = 1;$$

$$\alpha_{100} = \alpha_{210} = 1,\ \alpha_{201} = 0,\ \alpha_{320} = 1,\ \alpha_{311} = \alpha_{302} = 0,\ \beta_{400} = \beta_{510} = 1,\ \beta_{501} = 0.$$

Таким образом,

$$a_{1j} = 1, \quad a_{2j} = \omega_j, \quad a_{3j} = \omega_j^2, \quad b_{4j} = 1, \quad b_{5j} = \omega_j, \quad j = \overline{1, 5},$$

т. е.

$$\begin{array}{lllll}
a_{11} = 1, & a_{12} = 1, & a_{13} = 1, & a_{14} = 1, & a_{15} = 1; \\
a_{21} = 1, & a_{22} = 2, & a_{23} = 4, & a_{24} = i, & a_{25} = 3i; \\
a_{31} = 1, & a_{32} = 4, & a_{33} = 16, & a_{34} = -1, & a_{35} = -9; \\
b_{41} = 1, & b_{42} = 1, & b_{43} = 1, & b_{44} = 1, & b_{45} = 1; \\
b_{51} = 1, & b_{52} = 2, & b_{53} = 4, & b_{54} = i, & b_{55} = 3i.
\end{array}$$

Проверим отличие от нуля определителей, которые фигурируют в условиях теоремы 2, а именно определителей (5) и (7):

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,k+l-n};\overline{k+1,n}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{34} & a_{35} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & 3i \\ 1 & -1 & -9 \end{vmatrix} = 8 - 4i \neq 0,$$

$$\det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{k+l-n+1,k}} = \begin{vmatrix} b_{42} & b_{43} \\ b_{52} & b_{53} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,l}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

$$\det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{l+1,n}} = \begin{vmatrix} b_{44} & b_{45} \\ b_{54} & b_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ i & 3i \end{vmatrix} = 2i \neq 0.$$

Следовательно, для рассматриваемого пучка (47)–(48) все условия теоремы 1 выполнены. Так как в данном случае $m = 2(n-l) = 2(5-3) = 4$ и

$$d_1 = [m - 1 - \varkappa_4]_+ + [m - 1 - \varkappa_5]_+ = [3-0]_+ + [3-1]_+ = 3 + 2 = 5,$$

то по теореме 1 получим, что система к.ф. пучка (47)–(48) 4-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом не больше 5.

Исследуем теперь кратную полноту системы к.ф. пучка, порожденного тем же д.в. (47), но другими краевыми условиями

$$y(0) = y(1) = y'(1) = y''(1) = y'''(1) = 0. \qquad (50)$$

Для рассматриваемого пучка $n = 5$, $l = 1$ и характеристики те же, что и для уже рассмотренного примера, а именно (49), т. е. характеристики лежат на двух лучах, исходящих из начала, в количествах $k = 3$ и $n - k = 2$.

Так как $[k, n-k]_+ = \min\{3, 2\} = 2 \geqslant l = 1$, то для исследования кратной полноты можно воспользоваться теоремой 2. Для это нужно проверить выполнение условий (6) и (8).

Подсчитаем параметры a_{ij} и b_{ij}. Из вида краевых условий (50) и (2)–(3) следует, что для рассматриваемого пучка

$$\varkappa_1 = 0, \quad \varkappa_2 = 0, \quad \varkappa_3 = 1, \quad \varkappa_4 = 2, \quad \varkappa_5 = 3;$$
$$\alpha_{100} = 1, \quad \beta_{200} = \beta_{310} = 1, \quad \beta_{301} = 0, \quad \beta_{420} = 1, \quad \beta_{411} = \beta_{402} = 0,$$
$$\beta_{530} = 1, \quad \beta_{521} = \beta_{512} = \beta_{503} = 0.$$

Таким образом,

$$a_{1j} = 1, \quad b_{2j} = 1, \quad b_{3j} = \omega_j, \quad b_{4j} = \omega_j^2, \quad b_{5j} = \omega_j^3, \quad j = \overline{1,5},$$

т. е.

$$\begin{array}{lllll} a_{11} = 1, & a_{12} = 1, & a_{13} = 1, & a_{14} = 1, & a_{15} = 1; \\ b_{21} = 1, & b_{22} = 1, & b_{23} = 1, & b_{24} = 1, & b_{25} = 1; \\ b_{31} = 1, & b_{32} = 2, & b_{33} = 4, & b_{34} = i, & b_{35} = 3i; \\ b_{41} = 1, & b_{42} = 4, & b_{43} = 16, & b_{44} = -1, & b_{45} = -9; \\ b_{51} = 1, & b_{52} = 8, & b_{53} = 64, & b_{54} = -i, & b_{55} = -27i. \end{array}$$

Проверим отличие от нуля определителей, которые фигурируют в условиях теоремы 2, а именно определителей (6) и (8):

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{n-l+1,n}} = \det(a_{15}) = \det(1) = 1 \neq 0,$$

$$\det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,n-l}} = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & i \\ 1 & 4 & 16 & -1 \\ 1 & 8 & 64 & -i \end{vmatrix} = -6 + 78i \neq 0,$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{k-l+1,k}} = \det(a_{13}) = \det(1) = 1 \neq 0,$$

$$\det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,k-l};\overline{k+1,n}} = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{54} & b_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & i & 3i \\ 1 & 4 & -1 & -9 \\ 1 & 8 & -i & -27i \end{vmatrix} = -24 - 68i \neq 0.$$

Следовательно, для рассматриваемого пучка (47), (50) все условия теоремы 2 выполнены. Так как в данном случае $m = 2l = 2\cdot 1 = 2$ и $d_2 = [m-1-\varkappa_1]_+ = [1-0]_+ = 1$, то по теореме 2 получим, что система к.ф. пучка (47), (50) 2-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом не больше 1.

Библиографический список

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 526 с.
2. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН. 1971. Т. 26, вып. 4(160). С. 15–41.
3. *Рыхлов В. С.* О полноте корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Таврический вестник информатики и математики. 2015. № 1(26). С. 69–86.
4. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 1. С. 11–14.
5. *Хромов А. П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1973. 242 с.
6. *Шкаликов А. А.* О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями // Функц. анализ и его прилож. 1976. Т. 10, вып. 4. С. 69–80.
7. *Freiling G.* Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator-büschel // Math. Z. 1984. Vol. 188. P. 55–68.
8. *Тихомиров С. А.* Конечномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов в пространстве вектор-функций : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1987. 126 с.
9. *Вагабов А. И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д : Изд-во Рост. ун-та, 1994. 160 с.
10. *Рыхлов В. С.* О кратной полноте корневых функций обыкновенного дифференциального полиномиального пучка с постоянными коэффициентами // СМФН. 2017. Т. 63, вып. 2. С. 340–361. DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-340-361.
11. *Rykhlov V. S.* Multiple Completeness of the Root Functions for a Certain Class of Pencils of Ordinary Differential Operators // Results in Mathematics. 2017. Vol. 72, iss. 1–2. P. 281–301. DOI 10.1007/s00025-016-0599-7

Образец для цитирования:
Рыхлов В. С. О кратной полноте корневых функций пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и распадающимися краевыми условиями // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 2. С. 134–151. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-134-151

Multiple Completeness of the Root Functions of the Pencils of Differential Operators with Constant Coefficients and Splitting Boundary Conditions

V. S. Rykhlov

Victor S. Rykhlov, https://orcid.org/0000-0003-1556-7707, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, RykhlovVS@yandex.ru

In the space of square summable functions on the main segment [0,1], the class of polynomial pencils of ordinary differential operators of the n-th order is considered. The coefficients of the differential expression are assumed to be constants. The boundary conditions are assumed to be splitting and two-point at the ends 0 and 1 (l of boundary conditions is taken only at the point 0, and the remaining $n-l$ is taken at the point 1). The differential expression and the boundary forms are assumed to be homogeneous, that is, they contain only main parts. It is supposed that roots of the characteristic equation of the pencils of this class are simple, non-zero and lie on two rays emanating from the origin in quantities k and $n-k$. Sufficient conditions of m-fold system completeness of root functions of the pencils of this class in the space of square integrable functions on the main segment (with a possible finite defect) are formulated. The multiplicity m completeness depends on the relations of the parameters n, l and k. In this case, it is assumed that some completely concrete determinants differ from zero. These determinants are constructed from the coefficients of the boundary forms of the pencil and the roots of the characteristic equation. An upper bound on a possible finite defect is given.

Keywords: pencil of ordinary differential operators, polynomial pencil of differential operators, homogeneous differential expression, homogeneous boundary forms, multiple completeness, root functions, eigen- and associated functions, derived chains, splitting boundary conditions.

Received: 07.04.2018 / Accepted: 05.04.2019 / Published online: 28.05.2019

References

1. Naymark M. A. *Linear Differential Operators*. Moscow, Nauka, 1969. 526 p. (in Russian).
2. Keldysh M. V. On the completeness of the eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operators. *Russian Math. Surveys*, 1971, vol. 26, iss. 4, pp. 15–44. DOI: https://doi.org/10.1070/RM1971v026n04ABEH003985
3. Rykhlov V. S. On completeness of the root functions of polynomial pencils of ordinary differential operators with constant coefficients. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, 2015, no. 1(26), pp. 69–86 (in Russian).
4. Keldysh M. V. On eigenvalues and eigenfunctions of certain classes of non-selfadjoint equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1951, vol. 77, no. 1, pp. 11–14 (in Russian).
5. Khromov A. P. *Finite-dimensional perturbations of Volterra operators*. Diss. Dr. Sci. (Phys. and Math.). Novosibirsk, 1973. 242 p. (in Russian).
6. Shkalikov A. A. The completeness of eigenfunctions and associated functions of an ordinary differential operator with irregular-separated boundary conditions. *Funct. Anal. Its Appl.*, 1976, vol. 10, iss. 4, pp. 305–316. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01076030

7. Freiling G. Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator-büschel. *Math. Z.*, 1984, vol. 188, pp. 55–68.
8. Tikhomirov S. A. *Finite-dimensional perturbations of Volterra integral operators in the space of vectorfunctions*. Diss. Cand. Sci. (Phys. and Math.). Saratov, 1987. 126 p. (in Russian).
9. Vagabov A. I. *Vvedenie v spektral'nuiu teoriyu differentsial'nykh operatorov* [Introduction to spectral theory of differential operators]. Rostov-on-Don, Izd-vo Rost. un-ta, 1994. 160 p. (in Russian).
10. Rykhlov V. S. On multiple completeness of the root functions of ordinary differential polynomial pencil with constant coefficients. *Proceedings of the Crimean autumn mathematical school-symposium*, CMFD, 2017, vol. 63, no. 2, pp. 340–361 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.22363/2413-3639-2017-63-2-340-361
11. Rykhlov V. S. Multiple Completeness of the Root Functions for a Certain Class of Pencils of Ordinary Differential Operators. *Results in Mathematics*, 2017, vol. 72, iss. 1–2, pp. 281–301. DOI: https://doi.org/10.1007/s00025-016-0599-7

Cite this article as:

Rykhlov V. S. Multiple Completeness of the Root Functions of the Pencils of Differential Operators with Constant Coefficients and Splitting Boundary Conditions. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 2, pp. 134–151 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-134-151