УДК 517.9

Гармонический анализ медленно меняющихся на бесконечности полугрупп операторов

В. Е. Струков, И. И. Струкова

Струков Виктор Евгеньевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник кафедры системного анализа и управления, Воронежский государственный университет, Россия, 394036, Воронеж, Университетская пл., д. 1, sv.post.of.chaos@gmail.com

Струкова Ирина Игоревна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник кафедры системного анализа и управления, Воронежский государственный университет, Россия, 394036, Воронеж, Университетская пл., д. 1, irina.k.post@yandex.ru

Статья посвящена изучению сильно непрерывных ограниченных полугрупп операторов. В пространстве равномерно непрерывных функций со значениями в комплексном банаховом пространстве рассматривается подпространство интегрально исчезающих на бесконечности функций, включающее в себя подпространство исчезающих на бесконечности функций. Изучаются свойства данного подпространства. Вводится понятие медленно меняющейся на бесконечности относительно этого подпространства функции, получены условия, при которых равномерно непрерывная функция будет являться таковой. Вводится понятие медленно меняющейся на бесконечности (относительно подпространства интегрально исчезающих на бесконечности функций) полугруппы операторов и изучаются их свойства. Получены условия, при которых сильно непрерывная ограниченная полугруппа операторов является медленно меняющейся на бесконечности относительно данного подпространства. Полученные результаты будут полезны при исследовании вопросов стабилизации решений параболических уравнений при неограниченном возрастании времени.

Ключевые слова: полугруппа операторов, медленно меняющаяся на бесконечности функция, медленно меняющаяся на бесконечности полугруппа операторов, спектр Бёрлинга, банахов модуль.

Поступила в редакцию: 05.05.2018 / Принята: 03.02.2019 / Опубликована онлайн: 28.05.2019

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-152-163

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть X — комплексное банахово пространство, $End\,X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X. Пусть $\mathbb{J}$ — один из промежутков $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Символом $C_b = C_b(\mathbb{J}, X)$ обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{J}$ функций с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{J}} \|x(t)\|_X$, $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ — замкнутое подпространство равномерно непрерывных функций из C_b, $C_0 = C_0(\mathbb{J}, X)$ – замкнутое подпространство исчезающих на бесконечности функций, т.е. функций, для которых выполняется условие $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t)\|_X = 0$.

В банаховом пространстве $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ рассмотрим (полу-)группу операторов сдвига $S : \mathbb{J} \to End\, C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, действующих по правилу $(S(t)x)(\tau) = x(t + \tau)$, $t, \tau \in \mathbb{J}$.

Наряду с подпространством $C_0(\mathbb{J}, X)$ рассмотрим более широкое подпространство $\mathscr{C}_0(\mathbb{J}, X) = \{x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X) : \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \| \int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon t - i\lambda_0 t} S(t)x\,dt\| = 0$ для любого $\lambda_0 \in \mathbb{R}\}$ интегрально исчезающих на бесконечности функций из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$.

© Струков В. Е., Струкова И. И., 2019

Лемма 1. *Подпространство $\mathscr{C}_0(\mathbb{J}, X)$ обладает следующими свойствами:*

1) подпространство $\mathscr{C}_0(\mathbb{J}, X)$ образует замкнутое подпространство из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, инвариантное относительно операторов $S(t)$, $t \in \mathbb{J}$;

2) подпространство $\mathscr{C}_0(\mathbb{J}, X)$ является банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем;

3) функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ принадлежит подпространству $\mathscr{C}_0(\mathbb{J}, X)$ тогда и только тогда, когда для любой почти периодической функции $f \in AP(\mathbb{J}, X)$ выполняется условие

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \| \int\limits_0^\alpha x(s+t) f(s) ds \| = 0;$$

4) если функция $x \in \mathscr{C}_0(\mathbb{J}, X)$, то $fx \in \mathscr{C}_0(\mathbb{J}, X)$ для любой почти периодической функции $f \in AP(\mathbb{J}, X)$;

5) функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ принадлежит пространству $\mathscr{C}_0(\mathbb{J}, X)$ тогда и только тогда, когда для любого $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ для любой λ_0-направленности (f_α) выполняется условие $\lim\limits_\alpha f_\alpha * x = 0$.

Утверждения леммы 1 следуют из определения пространства $\mathscr{C}_0(\mathbb{J}, X)$, свойств направленностей (f_α) и того факта, что почти периодическая функция является равномерным пределом линейных комбинаций экспонент.

Определение 1. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства $\mathscr{C}_0(\mathbb{J}, X)$*, если для любого $t \in \mathbb{J}$ выполняется условие

$$(S(t)x - x) \in \mathscr{C}_0(\mathbb{J}, X).$$

Если в данном определении заменить подпространство $\mathscr{C}_0(\mathbb{J}, X)$ подпространством $C_0(\mathbb{J}, X)$, то получим определение медленно меняющейся на бесконечности функции в обычном смысле (см. [1–6]).

Множество медленно меняющихся относительно подпространства $\mathscr{C}_0(\mathbb{J}, X)$ функций обозначим символом $\mathscr{C}_{sl,\infty} = \mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$. Оно образует замкнутое подпространство из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, инвариантное относительно операторов $S(t)$, $t \in \mathbb{J}$, и является банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем. Кроме того, любое продолжение $y \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ функции $x \in \mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, X)$ на $\mathbb{R}$ со свойством $\lim\limits_{t\to-\infty} \|y(t)\|_X = 0$ принадлежит $\mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

В данной статье рассматривается сильно непрерывная ограниченная полугруппа операторов (полугруппа класса C_0) $T : \mathbb{R}_+ \to End\ X$ с генератором (инфинитезимальным оператором) $A : D(A) \subset X \to X$. Из условия ограниченности полугруппы T следует, что спектр $\sigma(A)$ ее генератора расположен в полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leqslant 0\}$.

Определение 2. Полугруппа операторов $T : \mathbb{R}_+ \to End\ X$ называется *медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}_+, X)$*, если

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \| \int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon t - i\lambda_0 t} T(t)(T(\tau)x - x) dt \| = 0$$

для любого $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ и для любого вектора $x \in X$ (т.е. $\varphi_x(t) = T(t)x$, $t \geqslant 0$, принадлежит пространству $\mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, X)$).

Медленно меняющиеся на бесконечности (в обычном смысле) полугруппы операторов рассматривались в [7].

Основными результатами статьи являются следующие теоремы

Теорема 1. *Пусть непрерывный спектр $\sigma_c(A)$ генератора A сильно непрерывной ограниченной полугруппы T обладает свойством*

$$\sigma_c(A) \cap (i\mathbb{R}) \subset \sigma_c(A)\backslash\{0\}. \tag{1}$$

Тогда полугруппа T является медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Теорема 2. *Пусть сильно непрерывная ограниченная полугруппа T является медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}_+, X)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует медленно меняющаяся на бесконечности относительно подпространства $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}_+, X)$ функция $B : \mathbb{R}_+ \to End\ X$, допускающая голоморфное расширение на $\mathbb{C}$ до целой функции экспоненциального типа ε и такая, что $T(t) = B(t) + B_0(t)$, $t \geqslant 0$, где $B_0(t)x$, $t \geqslant 0$, принадлежит пространству $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}_+, X)$ для каждого $x \in X$.*

2. БАНАХОВЫ $L^1(\mathbb{R})$-МОДУЛИ И МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИЕСЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ

Пусть $L^1(\mathbb{R})$ — банахова алгебра определенных на $\mathbb{R}$ измеримых по Лебегу и суммируемых комплекснозначных функций со сверткой функций $(f * g)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$, $t \in \mathbb{R}$, $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, в качестве умножения. Пусть $\mathscr{X}$ — комплексное банахово пространство и $End\ \mathscr{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathscr{X}$. Будем считать, что $\mathscr{X}$ является невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем (см. [8, 9]). Невырожденность банахова модуля $\mathscr{X}$ означает, что из равенства $fx = 0$, справедливого для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, следует, что вектор $x \in \mathscr{X}$ — нулевой.

Далее через $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье $\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}dt$, $\lambda \in \mathbb{R}$, функции $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Определение 3. *Спектром Бёрлинга* вектора $x \in \mathscr{X}$ называется множество чисел $\Lambda(x)$ из $\mathbb{R}$ вида $\Lambda(x) = \{\lambda_0 \in \mathbb{R} : fx \neq 0$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ с $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0\}$.

Из определения следует, что $\Lambda(x) = \mathbb{R}\backslash\{\mu_0 \in \mathbb{R} :$ существует функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ такая, что $\widehat{f}(\mu_0) \neq 0$ и $fx = 0\}$.

Справедливы следующие свойства спектра Бёрлинга векторов из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathscr{X}$ (см. [8–12]):

Лемма 2. *Для любых $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in \mathscr{X}$ справедливы свойства:*

1) из условия $fx = 0$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ следует, что $x = 0$ (т.е. $L^1(\mathbb{R})$-модуль $\mathscr{X}$ невырожден);

2) $\Lambda(x)$ — замкнутое подмножество из $\mathbb{R}$, причем $\Lambda(x) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

3) $\Lambda(fx) \subset (supp\widehat{f}) \cap \Lambda(x)$;

4) $fx = 0$, *если* $(supp\widehat{f}) \cap \Lambda(x) = \varnothing$, *и* $fx = x$, *если множество* $\Lambda(x)$ *компактно и* $\widehat{f} = 1$ *в некоторой его окрестности;*

5) $\Lambda(x) = \{\lambda_0\}$ *— одноточечное множество тогда и только тогда, когда вектор* $x \neq 0$ *удовлетворяет равенствам* $U(t)x = \exp(i\lambda_0 t)x$, $t \in \mathbb{R}$, *при условии, что структура банахова* $L^1(\mathbb{R})$*-модуля на* $\mathscr{X}$ *задается равенством*

$$f * x = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)U(-\tau)x d\tau,\ x \in \mathscr{X},\ f \in L^1(\mathbb{R}), \tag{2}$$

т.е. структура $L^1(\mathbb{R})$*-модуля на* $\mathscr{X}$ *ассоциирована с сильно непрерывным изометрическим представлением (группой изометрий)* $U : \mathbb{R} \to End\ \mathscr{X}$ *(для того чтобы это подчеркнуть, иногда будет использоваться обозначение* $(\mathscr{X}, U)$*);*

6) функция $t \mapsto U(t)x : \mathbb{R} \to \mathscr{X}$ *для* $\mathscr{X}$ *с компактным спектром Бёрлинга допускает расширение до целой функции.*

Банахово пространство $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ является банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем с модульной структурой, определяемой равенствами

$$(f * x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)(S(-\tau)x)(t)d\tau,\ t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

и эта структура ассоциирована с представлением (группой сдвигов функций) $S : \mathbb{R} \to End\, C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$.

Подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$, $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$ и $\mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ банахова пространства $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ являются замкнутыми подмодулями $L^1(\mathbb{R})$-модуля $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ с модульной структурой, задаваемой формулой (3).

Рассмотрим фактор-пространство $\mathscr{F}(\mathbb{J}, X) = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/\mathscr{C}_0(\mathbb{J}, X)$, которое является банаховым пространством с нормой $\|\widetilde{x}\| = \inf\limits_{y \in x + \mathscr{C}_0(\mathbb{J}, X)} \|y\|$, где $\widetilde{x} = x + \mathscr{C}_0(\mathbb{J}, X)$ — класс эквивалентности, содержащий функцию $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$. Банахово пространство $\mathscr{F}(\mathbb{J}, X)$ становится банаховой алгеброй, если умножение вводится следующим образом $\widetilde{x}\widetilde{y} = \widetilde{xy}$, $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathscr{F}(\mathbb{J}, X)$.

В фактор-пространстве $\mathscr{F}(\mathbb{J}, X)$ структура банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля задается формулой (2), где в качестве представления U берется сильно непрерывная группа изометрических операторов $\widetilde{S} : \mathbb{R} \to End\ \mathscr{F}(\mathbb{J}, X)$, описанная ниже. Для $t \geqslant 0$ под $\widetilde{S}(t)$ будем понимать фактор-оператор, построенный по оператору $S(t)$, т.е. $\widetilde{S}(t)\widetilde{x} = \widetilde{S(t)x}$ для любой функции $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$. Если $t < 0$, то $\widetilde{S}(t) = \widetilde{S}(-t)$, если $\mathbb{J} = \mathbb{R}$. Для $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$ оператор $\widetilde{S}(t)$, $t < 0$, определим формулой $\widetilde{S}(t)\widetilde{x} = \widetilde{S(t)y}$, $\widetilde{x} \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+, X)$, а $\widetilde{y}$ — класс эквивалентности, построенный по функции $y \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$. Здесь $y \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ — произвольное равномерно непрерывное продолжение функции $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}_+, X)$ на $\mathbb{R}$, удовлетворяющее условию $\lim\limits_{t \to -\infty} \|y(t)\|_X = 0$. Отметим, что данное определение корректно, т.е. не зависит от выбора продолжения y функции x на $\mathbb{R}$.

Замечание 1. Непосредственно из определения следует, что фактор-пространство $C_{b,u}(\mathbb{R}_+, X)/\mathscr{C}_0(\mathbb{R}_+, X)$ вкладывается в фактор-пространство $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)/\mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$, являясь в нем замкнутым подпространством. Поэтому в дальнейшем при доказательстве утверждений будем рассматривать банахов $L^1(\mathbb{R})$-модуль

$\mathscr{F}(\mathbb{R},X) = C_{b,u}(\mathbb{R},X)/\mathscr{C}_0(\mathbb{R},X)$, в котором действует изометрическая группа операторов $\widetilde{S}:\mathbb{R}\to End\,\mathscr{F}(\mathbb{R},X)$.

Лемма 3. *Для того чтобы функция $x\in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ была медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства $\mathscr{C}_0(\mathbb{R},X)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих трех эквивалентных условий:*

1) $\Lambda(\widetilde{x})\subset\{0\}$ для класса $\widetilde{x}=x+\mathscr{C}_0(\mathbb{R},X)$;

2) $f*x\in\mathscr{C}_0(\mathbb{R},X)$ для любой функции $f\in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\widehat{f}(0)=0$;

3) $f*x-x\in\mathscr{C}_0(\mathbb{R},X)$ для любой функции $f\in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\widehat{f}(0)=1$.

Для того чтобы функция $x_0\in C_{b,u}(\mathbb{R}_+,X)$ была медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}_+,X)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из трех перечисленных условий для некоторого продолжения $x\in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ функции x_0 на $\mathbb{R}$, удовлетворяющего условию $\lim\limits_{t\to-\infty}\|x(t)\|_X=0$.

Утверждения леммы 3 следуют из теоремы 3 и лемм 5 и 6.

Лемма 4. *Пусть $\Phi:\mathbb{R}_+\to End\,X$ — сильно непрерывная ограниченная функция, для которой все функции $\varphi_x(t)=\Phi(t)x$, $t\geqslant 0$, принадлежат $\mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+,X)$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ функция Φ представима в виде $\Phi=\Phi_1+\Phi_0$, где каждая функция $t\mapsto\Phi_0(t)x$, $x\in X$, принадлежит $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}_+,X)$ и $\Phi_1:\mathbb{R}_+\to End\,X$ допускает голоморфное расширение (обозначаемое тем же символом) на $\mathbb{C}$ до целой функции экспоненциального типа ε, причем $\Phi_1\in\mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R},End\,X)$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f\in L^1(\mathbb{R})$, обладающую свойствами $\widehat{f}(0)=1$, $\operatorname{supp}\widehat{f}\subset[-\varepsilon,\varepsilon]$ и функция $\widehat{f}$ бесконечно дифференцируема. Тогда из формулы $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda$, $t\in\mathbb{R}$, следует, что функция f допускает расширение (обозначаемое тем же символом)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda z}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda t}e^{-\alpha\lambda}d\lambda,\quad z=t+i\alpha\in\mathbb{C},\tag{4}$$

которое является целой функцией экспоненциального типа ε.

Из формулы (4) следует, что семейство функций f_z, $z\in\mathbb{C}$, вида $f_z(t)=f(z-t)$, $t\in\mathbb{R}$, $z\in\mathbb{C}$, принадлежит алгебре $L^1(\mathbb{R})$, а функция $F:\mathbb{C}\to L^1(\mathbb{R})$ вида $F(z)=f_z$, $z\in\mathbb{C}$, является целой функцией экспоненциального типа не выше ε. При этом для любого $b>0$ конечна величина

$$\sup_{|Imz|\leqslant b}\|F(z)\|_{L^1}=\sup_{|Imz|\leqslant b}\|f_z\|_{L^1}.$$

Положим $\Phi_1=f*\widetilde{\Phi}$, где $\widetilde{\Phi}:\mathbb{R}\to End\,X$ — продолжение Φ на $\mathbb{R}$ со свойством сильной непрерывности и $\lim\limits_{t\to-\infty}\widetilde{\Phi}(t)x=0$ для $x\in X$. Ее голоморфным продолжением на $\mathbb{C}$ является функция $\Phi_1(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-t)\widetilde{\Phi}(t)dt$, $z\in\mathbb{C}$. Отметим, что $\Phi_1(t+z)=(f_z*\widetilde{\Phi})(t)$, $t\in\mathbb{R}$, $z\in\mathbb{C}$. Следовательно, функция Φ_1 является целой функцией экспоненциального типа не выше ε. Непосредственно из определения следует, что $\Phi_1:\mathbb{R}\to End\,X$ непрерывна в равномерной операторной топологии (ввиду непрерывности функции $t \mapsto f_t : \mathbb{R} \to L^1(\mathbb{R})$) и каждая из функций $\varphi_x : \mathbb{R} \to X$, $x \in X$, вида $\varphi_x(t) = \Phi_1(t)x : \mathbb{R} \to X$ является медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$ функцией.

Из свойства 3) леммы 3 следует, что функция Φ_0 вида $\Phi_0(t) = \Phi(t) - \Phi_1(t)$, $t \geqslant 0$, принадлежит пространству $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$. $\square$

Определение 4. Вектор x из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathscr{X}, T)$ называется *почти периодическим,* если $x \in \mathscr{X}_c$ и множество $\{T(t)x, t \in \mathbb{R}\}$ (орбита вектора x) предкомпактно в $\mathscr{X}$.

Отметим, что множество $AP(\mathscr{X})$ почти периодических векторов из $\mathscr{X}$ образует замкнутый подмодуль из $\mathscr{X}$.

Для доказательства основных результатов статьи нам понадобится ряд определений (см. [8, 9]).

Определение 5. Пусть M — некоторое направленное множество и $\lambda \in \mathbb{R}$. Ограниченная направленность (f_α), $\alpha \in M$, функций из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ называется λ-*направленностью*, если выполнены условия:

1) $\widehat{f}_\alpha(\lambda) = 1$ для всех $\alpha \in M$;

2) $\lim\limits_{\alpha} f_\alpha * f = 0$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ со свойством $\widehat{f}(\lambda) = 0$.

Примерами 0-направленностей в алгебре $L^1(\mathbb{R})$ являются направленности

$$\varphi_\alpha(t) = \begin{cases} (2\alpha)^{-1}, & t \in [-\alpha, \alpha], \\ 0, & t \notin [-\alpha, \alpha], \qquad \alpha > 0, \end{cases}$$

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon e^{-\varepsilon t}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0, \qquad \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Первая из них направлена по возрастанию α, а вторая — по убыванию ε.

Определение 6. Число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ отнесем к *существенному спектру* $\Lambda_{ess}(x)$ вектора x из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathscr{X}, T)$, если существует λ_0-направленность (f_α) из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, для которой выполнено условие

$$\varlimsup_{\alpha} \|f_\alpha x\| > 0. \tag{5}$$

Отметим, что $\Lambda_{ess}(x) \subseteq \Lambda(x)$, $x \in (\mathscr{X}, T)$.

Определение 7. Пусть x — ненулевой вектор из $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathscr{X}, T)$. Число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ из $\Lambda(x)$ назовем *эргодической точкой* вектора x, если для некоторой λ_0-направленности из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ существует

$$\lim_{\alpha} f_\alpha x = x_0 \in \mathscr{X}.$$

Множество эргодических точек вектора будем обозначать символом $\Lambda_{erg}(x)$. Если при этом $x_0 \neq 0$, то число λ_0 отнесем к *дискретному спектру* $\Lambda_d(x)$ вектора x. Отметим, что для x_0 выполняется свойство $T(t)x_0 = \lambda_0 x_0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Если же $x_0 = 0$, то число λ_0 отнесем к *непрерывному спектру* $\Lambda_c(x)$ вектора x.

Замечание 2. Из [8, теорема 2.2.7] следует, что предел в формуле (5) не зависит от выбора λ_0-направленности (f_α), причем если он существует для некоторой λ_0-направленности, то он существует и для любых других λ_0-направленностей. Следовательно, определения дискретного и непрерывного спектров корректны, а знак неравенства (5) не зависит от выбора λ_0-направленности (f_α).

Замечание 3. Также из определения 7 следует, что для λ-направленности (f_α) свойство $\lambda \in \Lambda_{erg}(x) \cup (\mathbb{R}\backslash\Lambda(x))$ имеет место тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\alpha} f_\alpha x$ существует хотя бы для одной, а значит, для всех λ-направленностей.

3. СВОЙСТВА МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

Пусть M — некоторое направленное множество, на котором определена ограниченная направленность (e_α) из алгебры $L^1(\mathbb{R})$.

Определение 8. Ограниченная направленность (e_α) из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ называется *ограниченной аппроксимативной единицей* (о.а.е.) в алгебре $L^1(\mathbb{R})$, если выполняются следующие условия:

1) $\widehat{e}_\alpha(0) = 1$ для всех $\alpha \in M$;
2) $\lim\limits_{\alpha} e_\alpha * f = f$ для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Из леммы 4.3 в [9] следует, что $\lim\limits_{\alpha} e_\alpha * x = x$ для всех $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$. Этот результат будет существенно использоваться при доказательстве следующих двух лемм.

Лемма 5. *Для того чтобы функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ принадлежала пространству $\mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, необходимо и достаточно, чтобы $f * x \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\widehat{f}(0) = 0$.*

Доказательство. *Необходимость.* Рассмотрим функцию $f \in L^1(\mathbb{R})$ вида $f = S(\alpha)g - g$, $g \in L^1(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Данная функция обладает свойством $\widehat{f}(0) = 0$. Согласно тауберовой теореме Винера [13], множество таких функций плотно в максимальном идеале $M = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : \widehat{f}(0) = 0\}$. Поэтому утверждение леммы достаточно доказать для функции f рассматриваемого вида.

Возьмем произвольную функцию $x \in \mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$. Из определения медленно меняющейся относительно подпространства $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$ функции следует, что $S(\alpha)x - x \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$, откуда $f * x = (S(\alpha)g - g) * x = g * (S(\alpha)x - x) \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$.

Достаточность. Пусть $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ и $f * x \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ с $\widehat{f}(0) = 0$. Пусть (e_α) — о.а.е. из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ и $t \in \mathbb{R}$. Из равенств $e_\alpha * (S(t)x - x) = (S(t)e_\alpha - e_\alpha) * x = f_\alpha * x$ и $\widehat{f}_\alpha(0) = 0$ следует, что $e_\alpha * (S(t)x - x) \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$. Но в силу того, что $S(t)x - x = \lim\limits_{\alpha} e_\alpha * (S(t)x - x) \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$, получаем, что $x \in \mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$. □

Лемма 6. *Для того чтобы функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ принадлежала пространству $\mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, необходимо и достаточно, чтобы $f * x - x \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\widehat{f}(0) = 1$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $x \in \mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$. Пусть f — произвольная функция из $L^1(\mathbb{R})$ со свойством $\widehat{f}(0) = 1$, а (e_α) — о.а.е. из алгебры $L^1(\mathbb{R})$. Справедливо равенство $\lim\limits_{\alpha} e_\alpha * (x - f * x) = x - f * x$. Кроме того,

$e_\alpha * (x - f * x) = (e_\alpha * f - e_\alpha) * x = f_\alpha * x$, где $f_\alpha = e_\alpha * f - e_\alpha$. Учитывая, что $\widehat{f_\alpha}(0) = \widehat{e_\alpha}(0)\widehat{f}(0) - \widehat{e_\alpha}(0) = 0$, из леммы 5 следует, что $f_\alpha * x \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$, а значит, и $f * x - x \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$.

Достаточность. Пусть $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ и $x - f * x \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\widehat{f}(0) = 1$. Тогда с учетом того, что $(\widehat{S(t)f})(0) = 1$, имеем $f * (S(t)x - x) = (S(t)f - f) * x = ((S(t)f) * x - x) + (x - f * x) \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Поскольку $\widehat{e_\alpha}(0) = 1$, то $\lim\limits_\alpha e_\alpha * (S(t)x - x) = S(t)x - x \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для любого $t \in \mathbb{R}$, откуда следует, что $x \in \mathscr{C}_{sl\infty}(\mathbb{R}, X)$. □

Лемма 7. *Если $x \in \mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, то множество $\Lambda(x)\backslash\{0\}$ содержится в непрерывном спектре $\Lambda_c(x)$ функции x и $\Lambda_{ess}(x) \subset \{0\}$.*

Доказательство. Пусть $0 \neq \gamma_0 \in \Lambda(x)$. Рассмотрим функцию $f \in L^1(\mathbb{R})$, обладающую свойствами $\gamma_0 \notin \operatorname{supp} \widehat{f}$ и $\widehat{f}(0) = 1$. Из леммы 6 следует, что функция $x_0 = x - f * x$ принадлежит пространству $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$. Следовательно, для любой γ_0-направленности (f_α) из $L^1(\mathbb{R})$ справедлива цепочка равенств $0 = \lim\limits_\alpha f_\alpha * x_0 = \lim\limits_\alpha (f_\alpha * x - f_\alpha * f * x) = \lim\limits_\alpha f_\alpha * x$. В соответствии с определением 7 это означает, что $\gamma_0 \in \Lambda_c(x)$. □

Теорема 3. *Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ принадлежит подпространству $\mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ тогда и только тогда, когда $\Lambda(\widetilde{x}) = \Lambda(\widetilde{x}, \widetilde{S}) \subset \{0\}$.*

Доказательство. Из леммы 5 следует, что функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ принадлежит подпространству $\mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ тогда и только тогда, когда $f * x \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ с $\widehat{f}(0) = 0$. Значит, $x \in \mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ тогда и только тогда, когда $f * \widetilde{x} = \widetilde{0}$, $\widetilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)/\mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$, для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ с $\widehat{f}(0) = 0$. Непосредственно из определения 3 следует, что $x \in \mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ тогда и только тогда, когда $\Lambda(\widetilde{x}) \subset \{0\}$. □

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = y(t), \quad t \in \mathbb{J}, \tag{6}$$

где $y \in \mathscr{C}_0(\mathbb{J}, X)$ и $A : D(A) \subset X \to X$ — генератор (инфинитезимальный оператор) сильно непрерывной ограниченной полугруппы операторов $T : \mathbb{R}_+ \to End\ X$

Определение 9. Непрерывная функция $x : \mathbb{J} \to X$ называется *слабым решением* (mild solution) уравнения (6) (см. [14]), если для всех $s \leqslant t$ из $\mathbb{J}$ имеет место равенство

$$x(t) = T(t - s)x(s) + \int_s^t T(t - \tau)y(\tau)d\tau, \quad s \leqslant t, \quad s, t \in \mathbb{J}. \tag{7}$$

При $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$ равенство должно быть выполнено при $s = 0$ и $t \geqslant 0$. Ясно, что функция x равномерно непрерывна.

Уравнение (6) запишем в виде $\mathscr{L}x = y$, где оператор $\mathscr{L} : D(\mathscr{L}) \subset C_b(\mathbb{J}, X) \to \to C_b(\mathbb{J}, X)$ имеет вид $\mathscr{L} = \frac{d}{dt} - A$ (см. [15–19]). Функция $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$ принадлежит области определения $D(\mathscr{L})$ оператора $\mathscr{L}$, если существует функция $y \in C_b(\mathbb{J}, X)$ такая, что для всех $s \leqslant t$ из $\mathbb{J}$ верны равенства (7).

Лемма 8. *Пусть спектр генератора A полугруппы T удовлетворяет условию* (1). *Тогда каждое ограниченное на $\mathbb{J}$ слабое решение x_0 уравнения* (6) *является медленно меняющейся на бесконечности функцией относительно подпространства $\mathscr{C}_0(\mathbb{J}, X)$.*

Доказательство. Пусть сначала $\mathbb{J} = \mathbb{R}$. Число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ выберем таким образом, чтобы $\lambda_0 > \alpha$, где число α удовлетворяет условию $\|T(t)\| \leqslant Me^{\alpha t}$, $t \geqslant 0$, для некоторой постоянной $M > 0$. Тогда согласно [15] оператор $\mathscr{L} - \lambda_0 I$ непрерывно обратим и обратный оператор $B = (\mathscr{L} - \lambda_0 I)^{-1} \in End\, C_b(\mathbb{R}, X)$ представим в виде $Bx = G_0 * x$, $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$, где $G_0(\tau) = T(\tau)e^{-\lambda_0 \tau}$, $\tau \geqslant 0$, и $G_0(\tau) = 0$ для $\tau < 0$. Следовательно, оператор B перестановочен с оператором свертки, т.е. $B(f * x) = f * Bx$, для любых $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$. Таким же свойством обладает и оператор $\mathscr{L}$. В частности, $f * x_0 \in D(\mathscr{L})$ и для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ имеет место равенство

$$\mathscr{L}(f * x_0) = f * y \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X). \tag{8}$$

Рассмотрим произвольное ненулевое число $\mu_0 \in \mathbb{R}$. В силу условия (1) существует $\delta > 0$ такое, что отрезок $[\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta]$ не содержит точки 0. Рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию $\widehat{f_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, для которой $\widehat{f_0}(\mu_0) \neq 0$ и $\mathrm{supp} \widehat{f_0} \subset [\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta]$. Тогда она является преобразованием Фурье некоторой функции $f_0 \in L^1(\mathbb{R})$, а функция

$$\widehat{F}(\lambda) = \begin{cases} \widehat{f_0}(\lambda)(i\lambda I - A)^{-1}, & \lambda \in [\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta], \\ 0, & \lambda \notin [\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta] \end{cases}$$

является преобразованием Фурье некоторой суммируемой функции $F : \mathbb{R} \to End\, X$. Тогда из (8) получаем, что $F * \mathscr{L}(f_0 * x_0) = F * f_0 * y \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$.

Отметим, что $f_0 * x_0$ (ввиду ее бесконечной дифференцируемости) есть классическое решение уравнения (6) с правой частью $f_0 * y$. Из последнего равенства следует, что $f_0 \widetilde{x}_0 = 0$ для $\widetilde{x}_0 = x_0 + \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$. Следовательно, $\mu_0 \notin \Lambda(\widetilde{x}_0)$. Ввиду произвольности выбора числа $\mu_0 \neq 0$ из $\mathbb{R}$ получаем, что $\Lambda(\widetilde{x}_0) \subset \{0\}$. Тогда из условия 1) леммы 3 следует, что $x_0 \in \mathscr{C}_{sl\infty}(\mathbb{R}, X)$.

Пусть теперь $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$. Рассмотрим непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, обладающую свойствами $\mathrm{supp}\varphi \subset [1, \infty)$ и $\varphi(t) = 1$ для всех $t \in [2, \infty)$. Далее символом φx_0 обозначена функция, равная нулю на промежутке $(-\infty, 0]$ и являющаяся произведением функций φ и x_0 на $\mathbb{R}_+$. Но тогда из определения оператора $\mathscr{L}$ следует, что $\varphi x_0 \in D(\mathscr{L})$ и $\mathscr{L}(\varphi x_0) = \dot{\varphi} x_0 + \varphi y \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$, где функция φy считается равной нулю на промежутке $(-\infty, 0]$. При этом оператор $\mathscr{L}$ считается действующим в пространстве $C_b(\mathbb{R}, X)$. Таким образом, случай $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$ сводится к случаю $\mathbb{J} = \mathbb{R}$. □

Доказательство теоремы 1. Поскольку каждая из функций $\varphi_x(t) = T(t)x$, $t \geqslant 0$, $x \in X$, принадлежащая пространству $C_{b,u}(\mathbb{R}_+, X)$, является слабым решением уравнения (6), где $y = 0$, то из леммы 8 следует, что все эти функции являются медленно меняющимися на бесконечности относительно подпространства $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}_+, X)$. Значит, согласно определению 2, полугруппа $T : \mathbb{R}_+ \to End\ X$ является медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Доказательство теоремы 2 следует из леммы 4.

Благодарности. Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00097), работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732А).

Библиографический список

1. *Баскаков А. Г., Калужина Н. С.* Теорема Бёрлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 5. С. 643–661. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm8963
2. *Струкова И. И.* Спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций и банаховы пределы // Вестн. ВГУ. Сер. Физика. Математика. 2015. № 3. С. 161–165.
3. *Baskakov A., Strukova I.* Harmonic analysis of functions periodic at infinity // Eurasian Math. J. 2016. Vol. 7, № 4. P. 9–29.
4. *Струкова И. И.* О теореме Винера для периодических на бесконечности функций // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 186–198. DOI: https://doi.org/10.17377/smzh.2016.57.114
5. *Струкова И. И.* О гармоническом анализе периодических на бесконечности функций // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 28–38.
6. *Струкова И. И.* Гармонический анализ периодических на бесконечности функций в пространствах Степанова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 172–182. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-172-182
7. *Баскаков А. Г., Калужина Н. С., Поляков Д. М.* Медленно меняющиеся на бесконечности полугруппы операторов // Изв. вузов. Матем. 2014. № 7. С. 3–14. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X14070019
8. *Баскаков А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // СМФН. 2004. Т. 9. С. 3–151. DOI: https://doi.org/10.1007%2Fs10958-006-0286-4
9. *Баскаков А. Г., Криштал И. А.* Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, № 3. С. 3–54. DOI: https://doi.org/10.4213/im639
10. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж : Изд-во Воронеж. ун-та, 1987. 165 с.
11. *Баскаков А. Г.* Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений // Матем. заметки. 1978. Т. 24, № 2. С. 195–206.
12. *Баскаков А. Г.* Неравенства бернштейновского типа в абстрактном гармоническом анализе // Сиб. матем. журн. 1979. Т. 20, № 5. С. 942–952.
13. *Винер Н.* Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М. : Физматлит, 1963. 256 с.
14. *Chicone C., Latushkin Y.* Evolution Semigroups in Dynamical Systems and Differential Equations // Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 70. 361 p.
15. *Баскаков А. Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прил. 1996. Т. 30, вып. 3. С. 1–11.
16. *Баскаков А. Г.* Линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и полугруппы разностных операторов // Матем. заметки. 1996. Т. 59, № 6. С. 811–820.

17. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений // Изв. РАН. Сер. матем. 2009. Т. 73, № 2. С. 3–68. DOI: https://doi.org/10.4213/im2643
18. *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // УМН. 2013. Т. 68, № 1. С. 77–128. DOI: https://doi.org/10.4213/rm9505
19. *Баскаков А. Г.* Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве // Матем. заметки. 2015. Т. 97, № 2. С. 174–190. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm10285

Образец для цитирования:
Струков В. Е., Струкова И. И. Гармонический анализ медленно меняющихся на бесконечности полугрупп операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 2. С. 152–163. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-152-163

Harmonic Analysis of Operator Semigroups Slowly Varying at Infinity

V. E. Strukov, I. I. Strukova

Victor E. Strukov, https://orcid.org/0000-0002-5113-2375, Voronezh State University, 1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394036, Russia, sv.post.of.chaos@gmail.com

Irina I. Strukova, https://orcid.org/0000-0003-2355-0091, Voronezh State University, 1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394036, Russia, irina.k.post@yandex.ru

The article focuses on studying of strongly continuous bounded operator semigroups. In the space of uniformly continuous functions with values in a complex Banach space we consider the subspace of integrally vanishing at infinity functions. This subspace includes the subspace of vanishing at infinity functions, but it is wider. We study the properties of the subspace under consideration. We introduce the definition of slowly varying at infinity (with regard to the subspace of integrally vanishing at infinity functions) function and study the conditions under which a uniformly continuous function belongs to this type. We also introduce the definition of slowly varying at infinity (with regard to the subspace of integrally vanishing at infinity functions) operator semigroup, study its properties and derive the conditions under which a strongly continuous bounded operator semigroup belongs to this type. The results derived in the article might be useful for research of stabilization of parabolic equations solutions with unlimited increase of time.

Keywords: operator semigroup, slowly varying at infinity function, slowly varying at infinity operator semigroup, Beurling spectrum, Banach module.

Received: 05.05.2018 / Accepted: 03.02.2019 / Published online: 28.05.2019

Acknowledgements: The first author was supported by Russian Foundation for Basic Research (project No. 18-31-00097) and the second author was supported by Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-01-00732A).

References

1. Baskakov A.G., Kaluzhina N.S. Beurling's theorem for functions with essential spectrum from homogeneous spaces and stabilization of solutions of parabolic equations. *Math. Notes*, 2012, vol. 92, no. 5, pp. 587–605. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434612110016

2. Strukova I. I. Spectra of algebras of slowly varying and periodic at infinity functions and Banach limits. *Proceedings of Voronezh State University. Ser. Physics. Mathematics*, 2015, no. 3, pp. 161–165 (in Russian).
3. Baskakov A., Strukova I. Harmonic analysis of functions periodic at infinity. *Eurasian Math. J.*, 2016, vol. 7, no. 4, pp. 9–29.
4. Strukova I. I. About Wiener theorem for periodic at infinity functions. *Siberian Math. J.*, 2016, vol. 57, iss. 1, pp. 145–154. DOI: https://doi.org/10.1134/S0037446616010146
5. Strukova I. I. About harmonic analysis of periodic at infinity functions. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 1, pp. 28–38 (in Russian).
6. Strukova I. I. Harmonic analysis of periodic at infinity functions from Stepanov spaces. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 172–182 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-172-182
7. Baskakov A. G., Kaluzhina N. S., Polyakov D. M. Slowly varying at infinity operator semigroups. *Russian Math. (Iz. VUZ),* 2014, vol. 58, no. 7, pp. 1–10. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X14070019
8. Baskakov A. G. Theory of representations of Banach algebras, and abelian groups and semigroups in the spectral analysis of linear operators. *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2006, vol. 137, no. 4. pp. 4885–5036. DOI: https://doi.org/10.1007%2Fs10958-006-0286-4
9. Baskakov A. G., Krishtal I. A. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. *Izv. Math.*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 439–486. DOI: https://doi.org/10.1070/IM2005v069n03ABEH000535
10. Baskakov A. G. *Garmonicheskij analiz linejnykh operatorov* [Harmonic analysis of linear operators]. Voronezh, VSU Publ., 1987. 165 p. (in Russian).
11. Baskakov A. G. Spectral tests for the almost periodicity of the solutions of functional equations. *Math. Notes*, 1978, vol. 24, no. 1–2, pp. 606–612. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01105312
12. Baskakov A. G. Bernšteĭn-type inequalities in abstract harmonic analysis. *Siberian Math. J.,* 1979, vol. 20, no. 5, pp. 665–672.
13. Wiener N. *The Fourier Integral and Certain of its Applications*. Cambridge Univ. Press, reprint by Dover, CUP Archive, 1988, 201 p. (Russ. ed.: Moscow, Fizmatlit, 1963. 256 p.).
14. Chicone C., Latushkin Y. Evolution Semigroups in Dynamical Systems and Differential Equations. *Amer. Math. Soc.*, 1999, vol. 70, 361 p.
15. Baskakov A. G. Semigroups of difference operators in spectral analysis of linear differential operators. *Funct. Anal. Its Appl.*, 1996, vol. 30, iss. 3. pp. 149–157. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02509501
16. Baskakov A. G. Linear differential operators with unbounded operator coefficients and semigroups of bounded operators. *Math. Notes*, 1996, vol. 59, no. 6, pp. 586–593. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02307207
17. Baskakov A. G. Spectral analysis of differential operators with unbounded operator-valued coefficients, difference relations and semigroups of difference relations. *Izv. Math.*, 2009, vol. 73, no. 2, pp. 215–278. DOI: https://doi.org/10.1070/IM2009v073n02ABEH002445
18. Baskakov A. G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. *Russian Math. Surveys*, 2013, vol. 68, no. 1, pp. 69–116. DOI: https://doi.org/10.1070/RM2013v068n01ABEH004822
19. Baskakov A. G. Harmonic and spectral analysis of power bounded operators and bounded semigroups of operators on Banach spaces. *Math. Notes*, 2015, vol. 97, no. 2, pp. 164–178. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434615010198

Cite this article as:

Strukov V. E., Strukova I. I. Harmonic Analysis of Operator Semigroups Slowly Varying at Infinity. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 2, pp. 152–163 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-152-163