УДК 517.968.4

О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на прямой

Х. А. Хачатрян

Хачатрян Хачатур Агавардович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики НАН Армении, Республика Армения, 0019, Ереван, просп. Маршала Баграмяна, д. 24/5, Khach82@rambler.ru

В последние годы возрос интерес к нелинейным интегральным уравнениям типа свертки в связи с их приложением в различных областях математической физики, в частности, в p-адической теории открыто-замкнутой струны, кинетической теории газов, в теории переноса излучения в спектральных линиях. Работа посвящена вопросам построения нетривиальных решений и изучению их асимптотического поведения для одной системы нелинейных интегральных уравнений типа свертки с симметричным ядром на всей числовой оси. Результаты работы базируются на сочетании методов построения инвариантных конусных отрезков для соответствующего нелинейного монотонного оператора с методами теории линейных операторов типа свертки. Сформулирована и доказана конструктивная теорема о существовании двух асимптотически разных однопараметрических семейств положительных и ограниченных решений, что является основным отличием от ранее полученных результатов. Более того, из структуры указанной системы нелинейных уравнений следует, что всевозможные сдвиги построенных решений также удовлетворяют данной системе. Особое внимание уделено изучению асимптотического поведения этих решений на концах прямой. Вычислены пределы построенных решений в $\pm\infty$ и доказана принадлежность построенных решений пространствам $L_1(0,+\infty)$ и $L_1(-\infty,0)$ соответственно. В конце работы приводятся конкретные частные примеры указанных систем уравнений, удовлетворяющих всем условиям основной теоремы.

Ключевые слова: система уравнений, вектор-функция, спектральный радиус, монотонность, последовательные приближения, ядро, теорема Фробениуса – Перрона.

Поступила в редакцию: 29.10.2018 / Принята: 26.03.2019 / Опубликована онлайн: 28.05.2019

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-164-181

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Работа посвящена исследованию следующей системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на всей прямой:

$$f_i(x)=\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}}K_{ij}(x-t)G_j(f_j(t))dt,\quad i=1,2,\dots,n,\quad x\in\mathbb{R} \tag{1}$$

относительно искомой вектор-функции $f(x)=(f_1(x),f_2(x),....,f_n(x))^T$ (T — знак транспонирования). Матричное ядро $K(x)=(K_{ij}(x))_{i,j=1}^{n\times n}$ — определенная на $\mathbb{R}$ непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая следующим условиям:

I) $K_{ij}(x)>0,\quad x\in\mathbb{R},\quad K_{ij}\in L_1(\mathbb{R})\cap M(\mathbb{R}),\quad i,j=1,2,\dots,n,$ где $L_1(\mathbb{R})$ — пространство суммируемых на $\mathbb{R}$ функций, а $M(\mathbb{R})$ — пространство существенно ограниченных функций на $\mathbb{R}$;

II) $r(A) = 1$, где $r(A)$ — спектральный радиус матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n\times n}$:

$$a_{ij} := \int\limits_{\mathbb{R}} K_{ij}(x)dx, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n;$$

III) $K_{ij}(-x) = K_{ij}(x)$, $x \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $K_{ij}(x) \downarrow$ по x на $\mathbb{R}^+$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

IV) $\int\limits_0^\infty xK_{ij}(x)dx < +\infty, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$

Система (1), кроме чисто теоретического интереса, имеет приложения в различных областях естествознания. В частности, такие уравнения возникают в p-адической теории струны, в теории переноса излучения, в кинетической теории газов, в теории марковских процессов, в теории географического распространения эпидемии (см. [1–12]).

В линейном случае система (1) исследовалась при $\nu(K_{ij}) := \int\limits_{\mathbb{R}} xK_{ij}(x)dx \neq 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ в работах [13–15], а в нелинейном случае она исследовалась, когда $n = 1$, нелинейность зависит также от переменной t и $\nu(K_{ij}) := \nu(K) \neq 0$ (см. [16]).

В настоящей работе при достаточно общих условиях на $\{G_j\}_{j=1}^n$ мы будем заниматься построением двух асимптотически разных однопараметрических семейств положительных и ограниченных решений для систем (1) в случае, когда выполняются условия I)–IV). В конце будут приведены частные примеры функций $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ и $\{G_i(u)\}_{i=1}^n$, имеющих и теоретический, и прикладной интерес.

Для формулировки основной теоремы настоящей работы нам понадобятся нижеприведенные обозначения и вспомогательные факты. Из условия II) согласно теореме Фробениуса – Перрона (см. [17]) существует вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)^T$ с положительными координатами $\eta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$, такой, что

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}\eta_j = \eta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Пусть $g_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$ — непрерывные и нечетные функции, удовлетворяющие следующим условиям (рис. 1):

A) $g_j(u) \uparrow$ по u на $[-\eta_j^*, \eta_j^*]$, $j = 1, 2, \ldots, n$, где

$$\eta_j^* = \frac{\eta_j}{\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \eta_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \tag{3}$$

B) функции $\{g_j(u)\}_{j=1}^n$ выпуклы вверх на отрезках $[0, \eta_j^*], \quad j = 1, 2, \ldots, n$ соответственно;

C) $g_j(\eta_j^*) = \eta_j^*$, $j = 1, 2, \ldots, n$, причем η_j^* является первым положительным корнем уравнения $g_j(u) = u$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

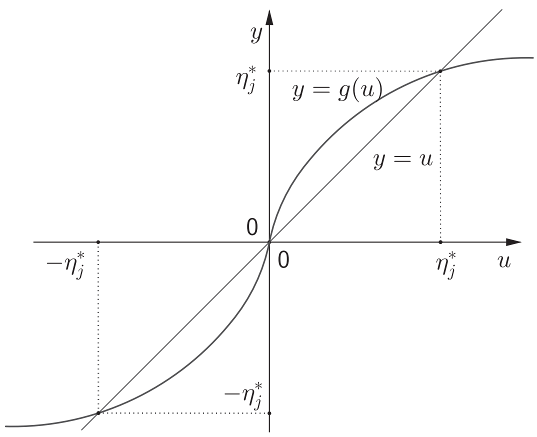

Рис. 1. Эскиз графика функции $y = g_j(u)$ на $[-\eta_j^*, \eta_j^*]$
Fig. 1. Sketch of $y = g_j(u)$ function graph on $[-\eta_j^*, \eta_j^*]$

Предположим, что $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$ допускают следующие представления (рис. 2):

$$G_j(u) = \eta_j^* - g_j(\eta_j^* - u), \quad u \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Справедлива следующая теорема.

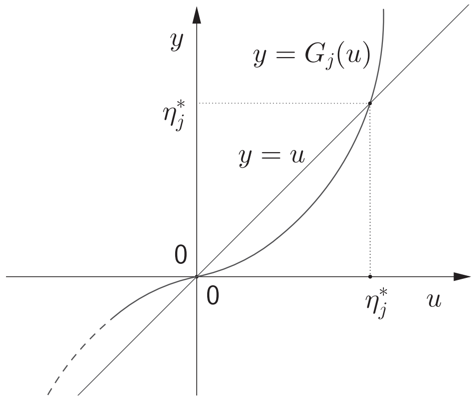

Рис. 2. Эскиз графика функции $y = G_j(u)$ на $[0, \eta_j^*]$

Fig. 2. Sketch of $y = G_j(u)$ function graph on $[0, \eta_j^*]$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия I)–IV), A)–C) и* (4). *Тогда система* (1) *обладает двумя покомпонентно положительными решениями* $f^*(x) = (f_1^*(x), f_2^*(x), ..., f_n^*(x))^T$, $\widetilde{f}(x) = (\widetilde{f}_1(x), \widetilde{f}_2(x), ..., \widetilde{f}_n(x))^T$ *(рис. 3), причем*

$$\lim_{x\to+\infty} f_j^*(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f_j^*(x) = 2\eta_j^*,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \widetilde{f}_j(x) = 2\eta_j^*, \quad \lim_{x\to-\infty} \widetilde{f}_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

$$f_j^* \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad \widetilde{f}_j \in L_1(\mathbb{R}^-), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

$$f_j^*(x) \downarrow \ \textit{по } x \textit{ на } \mathbb{R}, \quad \widetilde{f}_j(x) \uparrow \ \textit{по } x \textit{ на } \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

$$f_j^*, \ \widetilde{f}_j \in C(\mathbb{R}) \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

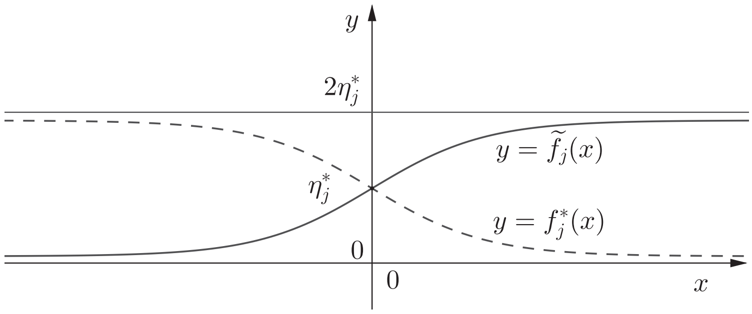

Рис. 3. Эскизы графиков функций $y = f_j^*(x)$ и $y = \widetilde{f}_j(x)$

Fig. 3. Sketches of $y = f_j^*(x)$ and $y = \widetilde{f}_j(x)$ functions graphs

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Шаг 1. В силу непрерывности и монотонности функций $\{g_j(u)\})_{j=1}^n$ на отрезках $[-\eta_j^*, \eta_j^*]$, $\quad j = 1, 2, \ldots, n$ существуют обратные к $\{g_j(u)\})_{j=1}^n$ функции

$$Q_j := g_j^{-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Наряду с системой (1) рассмотрим следующую вспомогательную систему:

$$Q_i(\varphi_i(x)) = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} K_{ij}(x-t)\varphi_j(t)dt, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R} \tag{10}$$

относительно вектор-функции $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x))^T$. Прямой проверкой можно убедиться, что если $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^n$ являются непрерывными и ограниченными решениями системы

$$Q_i(\psi_i(x)) = \sum_{j=1}^n \int\limits_0^\infty (K_{ij}(x-t) - K_{ij}(x+t))\,\psi_j(t)dt, \quad i=1,2,\dots,n, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{11}$$

и

$$0 \leqslant \psi_i(x) \leqslant \eta_i^*, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

то их нечетные продолжения на $\mathbb{R}^- := \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \psi_i(x), & \text{если} \quad x \in \mathbb{R}^+, \\ -\psi_i(-x), & \text{если} \quad x \in \mathbb{R}^-, \end{cases} \quad i=1,2,\dots,n \tag{12}$$

будут удовлетворять системе (10), при этом в силу непрерывности ядерных функций $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ и нелинейности $\{Q_i(u)\})_{i=1}^n$ функции $\{\varphi_i(x)\})_{i=1}^n$ будут непрерывными на множестве $\mathbb{R}$ и

$$-\eta_i^* \leqslant \varphi_i(x) \leqslant \eta_i^* \quad x \in \mathbb{R}, \quad i=1,2,\dots,n. \tag{13}$$

Шаг 2. Пусть $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ — числовые параметры из промежутка $(0,1)$. Рассмотрим следующие характеристические уравнения:

$$\sum_{j=1}^n \eta_j^* \int\limits_0^\infty K_{ij}(t)e^{-pt}dt = \frac{\varepsilon_i \eta_i^*}{2}, \quad i=1,2,\dots,n. \tag{14}$$

Ниже убедимся, что для любого $i \in \{1,2,...,n\}$ характеристическое уравнение (14) обладает единственным положительным решением p_i.

Действительно, рассмотрим функции

$$\chi_i(p) = \sum_{j=1}^n \eta_j^* \int\limits_0^\infty K_{ij}(t)e^{-pt}dt - \frac{\varepsilon_i \eta_i^*}{2}, \quad i=1,2,\dots,n,$$

определенные на множестве $[0,+\infty)$. Заметим, что при любом $i=1,2,\dots,n$

$$\chi_i(p) \quad \downarrow \text{по} \quad p \quad \text{на} \quad [0,+\infty), \tag{15}$$

$$\chi_i(0) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n a_{ij}\eta_j^* - \frac{1}{2}\varepsilon_i\eta_i^* = \frac{1-\varepsilon_i}{2}\eta_i^* > 0, \quad \chi_i(+\infty) = -\frac{\varepsilon_i\eta_i^*}{2} < 0, \tag{16}$$

$$\chi_i \in C[0,+\infty). \tag{17}$$

Из (15)–(17) в силу теоремы Больцано – Коши (см. [18]) следует, что для любого $i \in \{1,2,...,n\}$ уравнение (14) имеет единственное решение $p_i > 0$. Обозначим через

$$p^* = \min\{p_1, p_2, ..., p_n\}. \tag{18}$$

Совершая аналогичные рассуждения, как при доказательстве леммы 2.1 и формулы (2.7) из работы [19], приходим к следующему неравенству:

$$\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*\int_0^\infty (K_{ij}(x-t)-K_{ij}(x+t))\left(1-e^{-p^*t}\right)dt \geqslant \eta_i^*\varepsilon_i\left(1-e^{-p^*x}\right), \qquad i=1,2,\ldots,n, \quad x\geqslant 0. \tag{19}$$

Шаг 3. Для системы (11) рассмотрим следующие итерации:

$$Q_i(\psi_i^{(m+1)}(x))=\sum_{j=1}^{n}\int_0^\infty (K_{ij}(x-t)-K_{ij}(x+t))\,\psi_j^{(m)}(t)dt, \qquad \psi_i^{(0)}(x)=\eta_i^*, \quad x\in\mathbb{R}^+, \quad i=1,2,\ldots,n, \quad m=0,1,2,\ldots. \tag{20}$$

Легко можно убедиться, что

$$\psi_i^{(m)}(x) \quad \downarrow \text{по} \quad m. \tag{21}$$

Ниже индукцией по m убедимся, что

$$\psi_i^{(m)}(x)\geqslant \min_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\xi_j}{\eta_j^*}\right)\eta_i^*\left(1-e^{-p^*x}\right), \quad x\geqslant 0, \quad i=1,2,\ldots,n, \tag{22}$$

где ξ_i — единственный корень уравнения $Q_i(u)=\varepsilon_i u$. При $m=0$ неравенство (22) сразу следует из цепочки неравенств:

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\xi_j}{\eta_j^*}\right)\eta_i^*\left(1-e^{-p^*x}\right)\leqslant \eta_i^*\min_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\xi_j}{\eta_j^*}\right)\leqslant \eta_i^*=\psi_i^{(0)}(x),$$

ибо $\xi_i\leqslant\eta_i^*$, $i=1,2,\ldots,n$ (рис. 4).

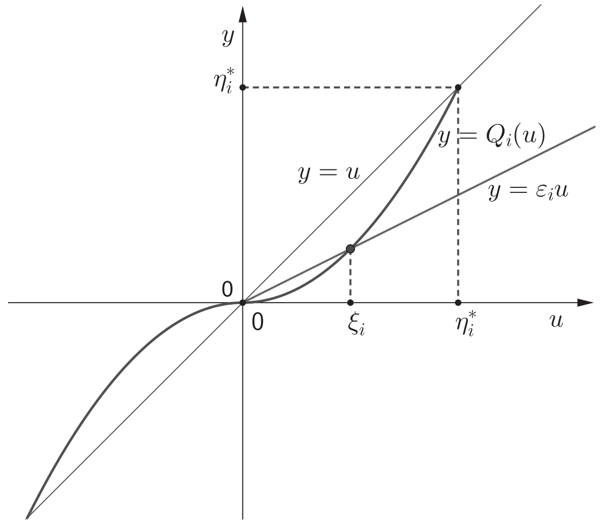

Рис. 4. Эскиз графика функции $y=Q_i(u)$ на $[0,\eta_i^*]$

Fig. 4. Sketch of $y=Q_i(u)$ function graph on $[0,\eta_i^*]$

Пусть (22) имеет место при некотором $m\in\mathbb{N}$. Тогда, учитывая (19) и выпуклость вниз функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ на отрезках $[0,\eta_i^*]$, из (20) будем иметь:

$$Q_i(\psi_i^{(m+1)}(x))\geqslant \geqslant \min_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\xi_j}{\eta_j^*}\right)\varepsilon_i\eta_i^*\left(1-e^{-p^*x}\right), \quad x\geqslant 0. \tag{23}$$

Так как

$$0\leqslant \min_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\xi_j}{\eta_j^*}\right)\eta_i^*\left(1-e^{-p^*x}\right)\leqslant \xi_i, \quad i=1,2,\ldots,n, \tag{24}$$

то с учетом выпуклости вниз функции Q_i на отрезке $[0,\eta_i^*]$ из (23) и (24) получаем

$$Q_i(\psi_i^{(m+1)}(x)) \geqslant Q_i\left(\min_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\xi_j}{\eta_j^*}\right)\eta_i^*\left(1-e^{-p^*x}\right)\right), \tag{25}$$

ибо $Q_i(u) \leqslant \varepsilon_i u, \quad u \in [0,\xi_i], \quad i=1,2,\dots,n.$

В силу монотонности функций Q_i на отрезке $[-\eta_i^*,\eta_i^*]$ из (25) приходим к следующей оценке снизу:

$$\psi_i^{(m+1)}(x) \geqslant \min_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\xi_j}{\eta_j^*}\right)\eta_i^*\left(1-e^{-p^*x}\right), \quad x\geqslant 0, \quad i=1,2,\dots,n. \tag{26}$$

Индукцией по m нетрудно доказать, что

$$\psi_i^{(m)} \in C(\mathbb{R}^+), \quad m=0,1,2,\dots,n, \quad i=1,2,\dots,n. \tag{27}$$

Из (21) и (22) заключаем, что последовательность непрерывных на $\mathbb{R}^+$ вектор-функций $\psi^{(m)}(x) = (\psi_1^{(m)}(x),\psi_2^{(m)}(x),...,\psi_n^{(m)}(x))^T, \quad m=0,1,2,\dots,$ имеет поточечный предел, когда $m\to\infty$:

$$\lim_{m\to\infty}\psi_i^{(m)}(x) = \psi_i(x), \quad x\geqslant 0, \quad i=1,2,\dots,n, \tag{28}$$

причем предельная вектор-функция $\psi(x) = (\psi_1(x),\psi_2(x),...,\psi_n(x))^T$ согласно теореме Б. Леви (см. [20]) и непрерывности функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ удовлетворяет системе (11). Из (21) и (22) для предельной вектор-функции приходим также к следующим оценкам:

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\xi_j}{\eta_j^*}\right)\eta_i^*\left(1-e^{-p^*x}\right) \leqslant \psi_i(x) \leqslant \eta_i^*, \quad x\in\mathbb{R}^+, \quad i=1,2,\dots,n. \tag{29}$$

Из непрерывности функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ на отрезках $\{[-\eta_i^*,\eta_i^*]\}_{i=1}^n$ и ядерных функций $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ на $\mathbb{R}$ с учетом (29) и (11) следует непрерывность функций $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^n$ на $\mathbb{R}^+$.

Шаг 4. Записывая итерации (20) в следующем виде:

$$Q_i(\psi_i^{(m+1)}(x)) = \sum_{j=1}^n\int_{-\infty}^x K_{ij}(\tau)\psi_j^{(m)}(x-\tau)d\tau - \sum_{j=1}^n\int_0^\infty K_{ij}(x+t)\psi_j^{(m)}(t)dt,$$
$$\psi_i^{(0)}(x) = \eta_i^*, \quad i=1,2,\dots,n, \quad m=0,1,2,\dots$$

и учитывая монотонность ядер $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$, индукцией по m легко можно доказать, что

$$\psi_i^{(m)}(x) \ \uparrow \ \text{по } x \text{ на } \mathbb{R}^+, \quad i=1,2,\dots,n, \quad m=0,1,2,\dots. \tag{30}$$

Из (30) сразу следует, что

$$\psi_i(x) \ \uparrow \ \text{по } x \text{ на } \mathbb{R}^+, \quad i=1,2,\dots,n. \tag{31}$$

Таким образом, в силу (31), (29) и непрерывности функций $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^n$ на $\mathbb{R}^+$ можем утверждать, что существует предел

$$\lim_{x\to+\infty}\psi_i(x) = \lambda_i < +\infty, \quad i=1,2,\dots,n, \tag{32}$$

причем

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\xi_j}{\eta_j^*}\right)\eta_i^*\leqslant\lambda_i\leqslant\eta_i^*,\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{33}$$

С другой стороны, используя известное свойство операции свертки о предельном переходе под знаком интеграла, с учетом (32) будем иметь (см. [13, 14])

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^\infty K_{ij}(x-t)\psi_j(t)dt=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\lambda_j,\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{34}$$

Заметим, что

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^\infty K_{ij}(x+t)\psi_j(t)dt=0,\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{35}$$

Действительно, с учетом (29) имеем

$$0\leqslant\left|\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^\infty K_{ij}(x+t)\psi_j(t)dt\right|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^\infty|K_{ij}(x+t)|\,|\psi_j(t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*\int\limits_x^\infty K_{ij}(\tau)d\tau\ \xrightarrow[x\to+\infty]{}\ 0,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Итак, учитывая (34), (35), (30), непрерывность функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ на отрезках $\{[-\eta_i^*,\eta_i^*]\}_{i=1}^n$ и переходя к пределу в (11), когда $x\to+\infty$, приходим к следующей системе нелинейных алгебраических уравнений:

$$Q_i(\lambda_i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\lambda_j,\quad i=1,2,\ldots,n \tag{36}$$

относительно элементов $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$, удовлетворяющих двойным неравенствам (33).

Шаг 5. Во-первых, прямой проверкой можно убедиться, что числа $\lambda_i=\eta_i^*$, $(i=1,2,\ldots,n)$ удовлетворяют системе (36). Ниже докажем, что система (36) в классе векторов

$$\mathfrak{M}:=\left\{c=(c_1,c_2,...,c_n)^T:\quad\min_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\xi_j}{\eta_j^*}\right)\eta_i^*\leqslant c_i\leqslant\eta_i^*\right\}$$

обладает единственным решением $\eta^*=(\eta_1^*,\eta_2^*,...,\eta_n^*)^T$. Предположим обратное. Тогда

$$B:=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\eta_i^*-\lambda_i}{\eta_i^*}=\frac{\eta_{i_0}^*-\lambda_{i_0}}{\eta_{i_0}^*}>0$$

и $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{i_0},\lambda_{i_0+1}...,\lambda_n)^T$ является решением системы (36). Из выпуклости вниз функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ на отрезках $\{[0,\eta_i^*]\}_{i=1}^n$ сразу следует, что (рис. 5)

$$Q_{i_0}(\lambda_{i_0})\leqslant\frac{\eta_{i_0}^*-Q_{i_0}(\delta_{i_0}^*)}{\eta_{i_0}^*-\delta_{i_0}^*}\lambda_{i_0}+\eta_{i_0}^*\frac{Q_{i_0}(\delta_{i_0}^*)-\delta_{i_0}^*}{\eta_{i_0}^*-\delta_{i_0}^*}, \tag{37}$$

где

$$\delta^*_{i_0} := \min_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\xi_j}{\eta^*_j}\right)\eta^*_{i_0} \leqslant \xi_{i_0} < \eta^*_{i_0}. \tag{38}$$

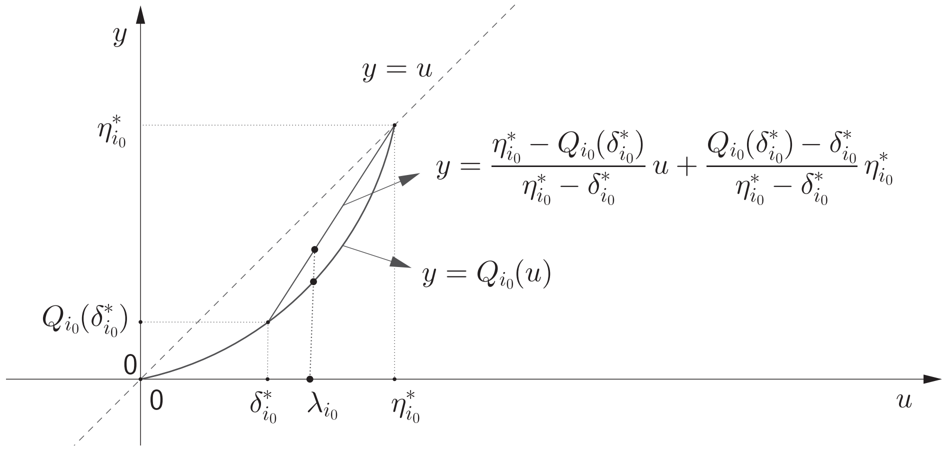

Рис. 5. Эскиз графика функции $y = Q_{i_0}(u)$ на $[0, \eta^*_{i_0}]$
Fig. 5. Sketch of $y = Q_{i_0}(u)$ function graph on $[0, \eta^*_{i_0}]$

С другой стороны, из (36) в силу теоремы Фробениуса – Перрона следует, что

$$0 < \eta^*_{i_0} - Q_{i_0}(\lambda_{i_0}) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}(\eta^*_j - \lambda_j) \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\eta^*_j - \lambda_j}{\eta^*_j}\right)\eta^*_{i_0} = B\cdot\eta^*_{i_0}. \tag{39}$$

Из (37) следует, что

$$\eta^*_{i_0} - Q_{i_0}(\lambda_{i_0}) \geqslant (\eta^*_{i_0} - \lambda_{i_0})\frac{\eta^*_{i_0} - Q_{i_0}(\delta^*_{i_0})}{\eta^*_{i_0} - \delta^*_{i_0}}. \tag{40}$$

Оценки (39) и (40) влекут за собой следующее неравенство:

$$B \geqslant \frac{\eta^*_{i_0} - \lambda_{i_0}}{\eta^*_{i_0}}\cdot\frac{\eta^*_{i_0} - Q_{i_0}(\delta^*_{i_0})}{\eta^*_{i_0} - \delta^*_{i_0}},$$

из которого следует, что

$$B = \frac{\eta^*_{i_0} - \lambda_{i_0}}{\eta^*_{i_0}} \leqslant \frac{\eta^*_{i_0} - \delta^*_{i_0}}{\eta^*_{i_0} - Q_{i_0}(\delta^*_{i_0})}\cdot B \leqslant \rho\cdot B, \tag{41}$$

где

$$\rho := \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{\eta^*_i - \delta^*_i}{\eta^*_i - Q_i(\delta^*_i)}\right) < 1.$$

Из (41) приходим к противоречию. Таким образом, $\lambda_i = \eta^*_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

Шаг 6. На этом шаге докажем, что

$$\eta^*_i - \psi_i \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{42}$$

С этой целью сперва индукцией по m убедимся, что

$$\eta^*_i - \psi_i^{(m)} \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{43}$$

В случае $m = 0$ включение (43) сразу следует из (20). Предположим, что (43) имеет место при некотором $m \in \mathbb{N}$. Тогда, принимая во внимание (29) и простое неравенство $Q_i(u) \leqslant u$, для всех $u \in [0, \eta_i^*]$ на основании теоремы Фробениуса–Перрона из (20) будем иметь

$$0 \leqslant \eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x) \leqslant \eta_i^* - Q_i(\psi_i^{(m+1)}(x)) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j^* -$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\int_0^\infty K_{ij}(x-t)\psi_j^{(m)}(t)dt + \sum_{j=1}^{n}\int_0^\infty K_{ij}(x+t)\psi_j^{(m)}(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n}\int_0^\infty K_{ij}(x-t)\left(\eta_j^* - \psi_i^{(m)}(t)\right)dt + 2\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*\int_x^\infty K_{ij}(t)dt =: J_i + I_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Так как $K_{ij} \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $\eta_j^* - \psi_j^{(m)} \in L_1(\mathbb{R}^+)$, то $J_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$. С другой стороны, поскольку $\int\limits_0^\infty xK_{ij}(x)dx < +\infty$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ (см. условие IV)), то в силу теоремы Фубини $I_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$. Следовательно, $J_i + I_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$. Из полученного неравенства

$$0 \leqslant \eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x) \leqslant J_i + I_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

с учетом вышесказанного получаем, что

$$\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)} \in L_1(\mathbb{R}^+).$$

Теперь докажем следующую априорную оценку снизу:

$$\eta_i^* - Q_i(\psi_i^{(m+1)}(x)) \geqslant \left(\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)\right)\ \frac{\eta_i^* - Q_i(\alpha_i)}{\eta_i^* - \alpha_i}, \quad x \geqslant 1, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{44}$$

где

$$\alpha_i := \min_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\xi_j}{\eta_j^*}\right)\eta_i^*\left(1 - e^{-p^*}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{45}$$

Для простоты дальнейшего изложения обозначим через

$$\gamma_i := \frac{\eta_i^* - Q_i(\alpha_i)}{\eta_i^* - \alpha_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Сперва заметим, что из (29) следует:

$$\eta_i^* \geqslant \psi_i^{(m+1)} \geqslant \alpha_i > 0, \quad x \geqslant 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{46}$$

В силу выпуклости вниз функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ на отрезках $\{[0, \eta_i^*]\}_{i=1}^n$ будем иметь

$$Q_i(\psi_i^{(m+1)}(x)) \leqslant \frac{\eta_i^* - Q_i(\alpha_i)}{\eta_i^* - \alpha_i}\psi_i^{(m+1)}(x) + \eta_i^*\frac{Q_i(\alpha_i) - \alpha_i}{\eta_i^* - \alpha_i},$$
$$x \geqslant 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

откуда приходим к (44).

Теперь проинтегрируем по x в пределах от 0 до $+\infty$ обе части следующего неравенства:

$$\eta_i^* - Q_i(\psi_i^{(m+1)}(x)) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\infty} K_{ij}(x-t)\left(\eta_j^* - \psi_j^{(m)}(t)\right) dt +$$

$$+2\sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_x^{\infty} K_{ij}(t)dt, \quad i=1,2,\ldots,n, \quad x \geqslant 0. \tag{47}$$

Тогда, учитывая четность ядерных функций $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$, (21), (40), следующее простое неравенство:

$$\eta_i^* - Q_i(\psi_i^{(m+1)}(x)) \geqslant \eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x), \quad i=1,2,\ldots,n, \quad x \geqslant 0$$

и теорему Фробениуса – Перрона, будем иметь

$$\int_0^1 \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*} dx + \gamma_i \int_1^{\infty} \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*} dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_0^{\infty} xK_{ij}(x)dx + \frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_0^{\infty} \frac{\eta_j^* - \psi_j^{(m)}(t)}{\eta_j^*} \int_{-t}^{\infty} K_{ij}(\tau)d\tau dt =$$

$$= \frac{2}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_0^{\infty} xK_{ij}(x)dx + \frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_0^{1} \frac{\eta_j^* - \psi_j^{(m)}(t)}{\eta_j^*} \int_{-t}^{\infty} K_{ij}(\tau)d\tau dt +$$

$$+\frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_1^{\infty} \frac{\eta_j^* - \psi_j^{(m)}(t)}{\eta_j^*} \int_{-t}^{\infty} K_{ij}(\tau)d\tau dt \leqslant \frac{2}{\eta_i} \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_0^{\infty} xK_{ij}(x)dx +$$

$$+\frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_{-1}^{\infty} K_{ij}(\tau)d\tau \cdot \max_{1\leqslant j\leqslant n} \left(\int_0^1 \frac{\eta_j^* - \psi_j^{(m)}(t)}{\eta_j^*} dt \right) +$$

$$+\frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j^* \cdot \max_{1\leqslant j\leqslant n} \left(\int_1^{\infty} \frac{\eta_j^* - \psi_j^{(m)}(t)}{\eta_j^*} dt \right) \leqslant \frac{2}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_0^{\infty} xK_{ij}(x)dx +$$

$$+\left(1 - \frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_1^{\infty} K_{ij}(\tau)d\tau \right) \cdot \max_{1\leqslant j\leqslant n} \left(\int_0^1 \frac{\eta_j^* - \psi_j^{(m+1)}(t)}{\eta_j^*} dt \right) +$$

$$+\max_{1\leqslant j\leqslant n} \left(\int_1^{\infty} \frac{\eta_j^* - \psi_j^{(m+1)}(t)}{\eta_j^*} dt \right) \leqslant 2 \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_0^{\infty} xK_{ij}(x)dx \right) +$$

$$+\max_{1\leqslant j\leqslant n} \left(\int_1^{\infty} \frac{\eta_j^* - \psi_j^{(m+1)}(t)}{\eta_j^*} dt \right) + \left(1 - \min_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{1}{\eta_i^*} \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_1^{\infty} K_{ij}(\tau)d\tau \right) \times$$

$$\times \max_{1\leqslant j\leqslant n} \left(\int_0^1 \frac{\eta_j^* - \psi_j^{(m+1)}(t)}{\eta_j^*} dt \right).$$

Из полученной оценки в силу неотрицательности слагаемых в правой части, в свою очередь, следует, что

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\int\limits_0^1 \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*}dx\right) + \min_{1\leqslant i\leqslant n}\gamma_i \cdot \max_{1\leqslant i\leqslant n}\int\limits_1^\infty \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*}dx =$$

$$= \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\int\limits_0^1 \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*}dx + \min_{1\leqslant j\leqslant n}\gamma_j \cdot \int\limits_1^\infty \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*}dx\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{1}{\eta_i^*}\sum_{j=1}^n \eta_j^* \int\limits_0^\infty xK_{ij}(x)dx\right) + \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\int\limits_1^\infty \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*}dx\right) +$$

$$+\left(1 - \min_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{1}{\eta_i^*}\sum_{j=1}^n \eta_j^* \int\limits_1^\infty K_{ij}(\tau)d\tau\right)\right)\cdot \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\int\limits_0^1 \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*}dx\right)$$

или

$$\left(\min_{1\leqslant j\leqslant n}\gamma_j - 1\right)\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\int\limits_1^\infty \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*}dx\right) + \min_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{1}{\eta_i^*}\sum_{j=1}^n \eta_j^* \int\limits_1^\infty K_{ij}(\tau)d\tau\right)\times$$

$$\times \max_{1\leqslant i\leqslant n}\int\limits_0^1 \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*}dx \leqslant 2\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{\eta_i^*}\sum_{j=1}^n \eta_j^* \int\limits_0^\infty xK_{ij}(x)dx. \qquad (48)$$

Заметим, что

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\gamma_j - 1 = \min_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{\eta_j^* - Q_j(\alpha_j)}{\eta_j^* - \alpha_j} - 1 = \frac{\eta_{j_0}^* - Q_{j_0}(\alpha_{j_0})}{\eta_{j_0}^* - \alpha_{j_0}} - 1 =$$

$$= \frac{\alpha_{j_0} - Q_{j_0}(\alpha_{j_0})}{\eta_{j_0}^* - \alpha_{j_0}} > 0, \quad j_0 \in \{1, 2, ..., n\},$$

ибо $\alpha_{j_0} = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{\xi_i}{\eta_i^*}\right)\eta_{j_0}^* < \eta_{j_0}^*$, а функции $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ выпуклы вниз на отрезках $\{[0, \eta_i^*]\}_{i=1}^n$.

Из (48) следует, что

$$\min\left\{\left(\min_{1\leqslant j\leqslant n}\gamma_j - 1\right); \quad \min_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{1}{\eta_i^*}\sum_{j=1}^n \eta_j^* \int\limits_1^\infty K_{ij}(\tau)d\tau\right)\right\}\times$$

$$\times\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\int\limits_1^\infty \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*}dx + \max_{1\leqslant i\leqslant n}\int\limits_0^1 \frac{\eta_i^* - \psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*}dx\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{1}{\eta_i^*}\sum_{j=1}^n \eta_j^* \int\limits_0^\infty xK_{ij}(x)dx\right)$$

или

$$\min\left\{\left(\min_{1\leqslant j\leqslant n}\gamma_j-1\right);\quad \min_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{1}{\eta_i^*}\sum_{j=1}^n\eta_j^*\int_1^\infty K_{ij}(\tau)d\tau\right)\right\}\times$$
$$\times\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\int_0^\infty\frac{\eta_i^*-\psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*}dx\right)\leqslant 2\left(\frac{1}{\eta_i^*}\sum_{j=1}^n\eta_j^*\int_0^\infty xK_{ij}(x)dx\right)$$

в силу неотрицательности подынтегральных функций. Откуда сразу получаем

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\int_0^\infty\frac{\eta_i^*-\psi_i^{(m+1)}(x)}{\eta_i^*}dx\right)\leqslant$$
$$\leqslant 2\Big/\min\left\{\left(\min_{1\leqslant j\leqslant n}\gamma_j-1\right);\quad \min_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{1}{\eta_i^*}\sum_{j=1}^n\eta_j^*\int_1^\infty K_{ij}(\tau)d\tau\right)\right\}\times$$
$$\times\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{1}{\eta_i^*}\sum_{j=1}^n\eta_j^*\int_0^\infty xK_{ij}(x)dx\right).\qquad(49)$$

Следовательно, из (49) в силу теоремы Б. Леви заключаем, что $\eta_i^*-\psi_i\in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i=1,2,\ldots,n$ и

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\int_0^\infty\frac{\eta_i^*-\psi_i(x)}{\eta_i^*}dx\right)\leqslant$$
$$\leqslant 2\Big/\min\left\{\left(\min_{1\leqslant j\leqslant n}\gamma_j-1\right);\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{1}{\eta_i^*}\sum_{j=1}^n\eta_j^*\int_1^\infty K_{ij}(\tau)d\tau\right)\right\}\times$$
$$\times\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{1}{\eta_i^*}\sum_{j=1}^n\eta_j^*\int_0^\infty xK_{ij}(x)dx\right).$$

Шаг 7. Заметим также, что

$$\eta_i^*-Q_i(\psi_i(x))\in L_1(\mathbb{R}^+),\quad i=1,2,\ldots,n.\qquad(50)$$

Действительно, из (11) с учетом (29) и теоремы Фробениуса – Перрона будем иметь

$$0\leqslant\eta_i^*-Q_i(\psi_i(x))\leqslant 2\sum_{j=1}^n\eta_j^*\int_x^\infty K_{ij}(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^n\int_0^\infty K_{ij}(x-t)\left(\eta_j^*-\psi_j(t)\right)dt.\qquad(51)$$

Так как $\eta_j^*-\psi_j\in L_1(\mathbb{R}^+)$, $K_{ij}\in L_1(\mathbb{R})$ и $\int\limits_0^\infty xK_{ij}(x)dx<+\infty$, $i,j=1,2,\ldots,n$, то в силу теоремы Фубини правая часть неравенства (51) принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^+)$. Из (51) приходим к (50). В силу (42) и (50) из (12), (11), (31) и (10) следует, что

- $\eta_i^*\pm\varphi_i\in L_1(\mathbb{R}^\mp),\quad \eta_i^*\pm Q_i(\varphi_i)\in L_1(\mathbb{R}^\mp),\quad i=1,2,\ldots,n,$

- $\varphi_i(x) \quad \uparrow \quad \text{по} \quad x \quad \text{на} \quad \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$
- $\varphi_i \in C(\mathbb{R}), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

Следовательно, функции

$$f_i^*(x) := \eta_i^* - Q_i(\varphi_i(x)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{52}$$

$$\widetilde{f}_i(x) := \eta_i^* + Q_i(\varphi_i(x)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{53}$$

обладают свойствами (5)–(8) соответственно.

Шаг 8. Для завершения доказательства теоремы нам остается проверить, что функции вида (52), (53) удовлетворяют системе (1).

Действительно, учитывая (9), (4), нечетность функций $\{Q_j(u)\}_{j=1}^n$, условие II) и теорему Фробениуса – Перрона, имеем

$$\sum_{j=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}} K_{ij}(x-t) G_j(\widetilde{f}_j(t)) dt = \sum_{j=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}} K_{ij}(x-t) \left(\eta_j^* - g_j(\eta_j^* - \widetilde{f}_j(t)) \right) dt =$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{ij} \eta_j^* - \sum_{j=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}} K_{ij}(x-t) g_j(-Q_j(\varphi_j(t))) dt =$$

$$= \eta_i^* - \sum_{j=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}} K_{ij}(x-t) g_j(Q_j(-\varphi_j(t))) dt = \eta_i^* + \sum_{j=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}} K_{ij}(x-t) \varphi_j(t) dt =$$

$$= \eta_i^* + Q_i(\varphi_j(x)) = \widetilde{f}_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Аналогично можно доказать, что функции вида (52) также удовлетворяют системе (1). Таким образом, теорема полностью доказана. □

Замечание 1. Прямой проверкой можно убедиться, что всевозможные сдвиги построенных решений $f^*(x) = (f_1^*(x), f_2^*(x), ..., f_n^*(x))^T$, $\widetilde{f}(x) = (\widetilde{f}_1(x), \widetilde{f}_2(x), ..., \widetilde{f}_n(x))^T$ также удовлетворяют системе (1). Таким образом, мы получаем два асимптотически разных однопараметрических семейства положительных решений.

3. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим следующую матрицу:

$$A = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} K_{ij}(x) dx \right)_{i,j=1}^{n \times n} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $r(A) = 1$. Следовательно, согласно теореме Фробениуса – Перрона, существует вектор $(\eta_1^*, \eta_2^*)^T$ с положительными координатами, такой что

$$\begin{cases} \frac{7}{8}\eta_1^* + \frac{1}{8}\eta_2^* = \eta_1^*, \\ \frac{3}{8}\eta_1^* + \frac{5}{8}\eta_2^* = \eta_2^*. \end{cases} \tag{54}$$

Из (54) сразу следует, что $\eta_1^* = \eta_2^*$. В качестве $(\eta_1^*, \eta_2^*)^T$ выберем столбец $(1, 1)^T$.

Рассмотрим теперь нелинейность вида

$$Q_i(u) = u^3, \quad i = 1, 2. \tag{55}$$

Очевидно, что $Q_i(\eta_i^*) = \eta_i^*, \quad i = 1, 2$. Убедимся, что система (36) в случае нелинейности (55) в классе векторов с положительными координатами обладает только решением $(1, 1)^T$. В данном случае система принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{7}{8}\eta_1 + \frac{1}{8}\eta_2 = \eta_1^3, \\ \frac{3}{8}\eta_1 + \frac{5}{8}\eta_2 = \eta_2^3. \end{cases} \tag{56}$$

Обозначив через $t := \eta_1/\eta_2 > 0$, приходим к следующему алгебраическому уравнению 4-го порядка относительно t :

$$3t^4 + 5t^3 - 7t - 1 = 0$$

или

$$(t-1)(3t^3 + 8t^2 + 8t + 1) = 0. \tag{57}$$

Из (57) получаем, что $t = 1$, а уравнение $3t^3 + 8t^2 + 8t + 1 = 0$, очевидно, не имеет положительных решений.

Итак, $\eta_1 = \eta_2$. Из (56) получаем, что $\eta_1^3 = \eta_1$, откуда $\eta_1 = 0$ или $\eta_1 = \pm 1$. Так как $\eta_i > 0$, $i = 1, 2$, то $\eta_1 = \eta_2 = 1$.

Замечание 2. В работе [19] система (36) исследовалась в том частном случае, когда $Q_i(u) = c_i u^3 + (1 - c_i)u$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $c_i \in (0, 1]$, а элементы матрицы $A = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} K_{ij}(\tau)d\tau\right)_{i,j=1}^{n\times n}$ удовлетворяют условиям $II)$ и $\dfrac{\min\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}}{\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}} > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Заметим, что для рассматриваемой матрицы A последнее условие не выполняется, так как

$$\frac{\min\limits_{1\leqslant i,j\leqslant 2} a_{ij}}{\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant 2} a_{ij}} = \frac{1/8}{7/8} = \frac{1}{7} < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Однако система (36) в классе $\mathfrak{M}$ обладает единственным решением $(1, 1)^T$.

В качестве примеров ядерных функций $(K_{ij}(x))_{i,j=1}^{n\times n}$ могут служить следующие функции:

1) $K_{ij}(x) = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-x^2}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n;$

2) $K_{ij}(x) = \frac{a_{ij}}{2} \cdot e^{-|x|}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$

Приведем теперь примеры функций $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$. С этой целью сперва рассмотрим примеры функций $\{g_j(u)\}_{j=1}^n$:

1) $g_j(u) = \sqrt[p]{(\eta_j^*)^{p-1}u}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $u \in \mathbb{R}$, где $p > 2$ — любое нечетное число;

2) $g_j(u) = \begin{cases} \frac{1-e^{-u}}{1-e^{-\eta_j^*}}\eta_j^*, & u \geqslant 0, \\ \frac{e^u - 1}{1-e^{-\eta_j^*}}\eta_j^*, & u < 0, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, n;$

3) $g_j(u) = \begin{cases} u + \frac{2\eta_j^*}{\pi}\sin^2\frac{\pi u}{2\eta_j^*}, & u \geqslant 0, \\ u - \frac{2\eta_j^*}{\pi}\sin^2\frac{\pi u}{2\eta_j^*}, & u < 0, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$

Тогда функции $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$ имеют структуру (4).

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета по науке Министерства образования и науки Республики Армения в рамках научного проекта № SCS 18T-1A004.

Библиографический список

1. *Владимиров В. С., Волович Я. И.* О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны // ТМФ. 2004. Т. 138, № 3. С. 355–368. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf36
2. *Владимиров В. С.* Об уравнении p-адической открытой струны для скалярного поля тахионов // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, № 3. С. 55–80. DOI: https://doi.org/10.4213/im640
3. *Владимиров В. С.* О решениях p-адических струнных уравнений // ТМФ. 2011. Т. 167, № 2. С. 163–170. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf6631
4. *Жуковская Л. В.* Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн // ТМФ. 2006. Т. 146, № 3. С. 402–409. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf2043
5. *Хачатрян Х. А.* О разрешимости некоторых классов нелинейных уравнений в теории p-адической струны // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82, № 2. С. 172–193. DOI: https://doi.org/10.4213/im8580
6. *Енгибарян Н. Б.* Об одной задаче нелинейного переноса излучения // Астрофизика. 1966. Т. 2, № 1. С. 31–36. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01014505
7. *Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А.* О разрешимости нелинейного модельного уравнения Больцмана в задаче плоской ударной волны // ТМФ. 2016. Т. 189, № 2. С. 239–255. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9108
8. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения : в 2 т. Т. 2. М. : Мир, 1984. 752 с.
9. *Kendall D. G.* Mathematical models of the spread of infection // Mathematics and Computer Science in Biology and Medicine. L. : H. M. S. O., 1965. P. 213–225.
10. *Diekmann O.* Thresholds and Traveling Waves for the Geographical Spread of infection // Journal of Math. Biology. 1978. Vol. 6. P. 109–130. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02450783
11. *Diekmann O.* Limiting behaviour in an epidemic model // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1977. Vol. 1, № 5. P. 459–470. DOI: https://doi.org/10.1016/0362-546X(77)90011-6
12. *Diekmann O.* Run for your life. A note on the asymptotic speed of propagation of an epidemic // Journal of Differential Equations. 1979. Vol. 33, iss. 1. P. 58–73. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-0396(79)90080-9
13. *Енгибарян Н. Б.* Консервативые системы интегральных уравнений свертки на полупрямой и всей прямой // Матем. сб. 2002. Т. 193, № 6. С. 61–82. DOI: https://doi.org/10.4213/sm660
14. *Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б.* Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. 1984. Т. 22. С. 175–244.
15. *Сгибнев М. С.* Матричный аналог теоремы восстановления Блеквелла на прямой // Матем. сб. 2006. Т. 197, № 3. С. 69–86. DOI: https://doi.org/10.4213/sm1538

16. *Хачатрян Х. А.* О положительной разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на полуоси и на всей прямой // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. Т. 79, вып. 2. С. 205–224. DOI: https://doi.org/10.4213/im8245
17. *Ланкастер П.* Теория матриц. М. : Наука, 1982. 28 с.
18. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и инегрального исчисления : в 3 т. Т. 2. М. : Физматлит, 1966. 600 с.
19. *Хачатрян Х. А., Терджян Ц. Э., Аветисян М. О.* Однопараметрическое семейство ограниченных решений для одной системы нелинейных интегральных уравнений на всей прямой // Изв. НАН Армении : Математика. 2018. Т. 53, № 4. С. 72–86.
20. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* . Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1981. 544 с.

Образец для цитирования:
Хачатрян Х. А. О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на прямой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 2. С. 164–181. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-164-181

The Solvability of a System of Nonlinear Integral Equations of Hammerstein Type on the Whole Line

Kh. A. Khachatryan

Khachatur A. Khachatryan, https://orcid.org/0000-0002-4835-943X, Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Armenia, 24/5 Marshal Baghramian Ave., Yerevan 0019, Republic of Armenia, Khach82@rambler.ru

In recent years, the interest has grown in nonlinear integral equations of convolution type in connection with their application in various fields of mathematical physics, in particular, in the p-adic theory of an open-closed string, kinetic theory of gases, in the theory of radiation transfer in spectral lines. The paper is devoted to the questions of construction of nontrivial solutions and the study of their asymptotic behavior for one system of nonlinear integral equations of convolution type with a symmetric kernel on the whole axis. The results of the work are based on the combination of methods of invariant conical segments construction for the corresponding nonlinear monotone operator with methods of the theory of linear operators of convolution type. A constructive theorem on the existence of two asymptotically different one-parameter families of positive and bounded solutions was formulated and proved, which is the main difference from the previously obtained results. Moreover, from the structure of this system of nonlinear equations follows that all possible shifts of the constructed solutions also satisfy the system. Special attention is paid to the study of the asymptotic behavior of these solutions at the ends of the line. The limits of these solutions in $\pm\infty$ are calculated and it is proved that the constructed solutions belong to the $L_1(0,+\infty)$ and $L_1(-\infty,0)$ spaces respectively.

Keywords: system of equations, vector-function, spectral radius, monotonicity, successive approximations, kernel, Frobenius – Perron theorem.

Received: 29.10.2018 / Accepted: 26.03.2019 / Published online: 28.05.2019

Acknowledgements: This work was supported by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Armenia as part of the scientific project No. SCS 18T-1A004.

References

1. Vladimirov V. S., Volovich Ya. I. Nonlinear dynamics equation in p-adic string theory. *Theoret. and Math. Phys.*, 2004, vol. 138, no. 3, pp. 297–309. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf36
2. Vladimirov V. S. The equation of the p-adic open string for the scalar tachyon field. *Izv. Math.*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 487–512. DOI: https://doi.org/10.4213/im640
3. Vladimirov V. S. Solutions of p-adic string equations. *Theoret. and Math. Phys.*, 2011, vol. 167, no. 2, pp. 539–546. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf6631
4. Joukovskaya L. V. Iterative method for solving nonlinear integral equations describing rolling solutions in string theory. *Theoret. and Math. Phys.*, 2006, vol. 146, no. 3, pp. 335–342. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf2043
5. Khachatryan Kh. A. On the solvability of certain classes of non-linear integral equations in p-adic string theory. *Izv. Math.*, 2018, vol. 82, no. 2, pp. 407–427. DOI: https://doi.org/10.4213/im8580
6. Engibaryan N. B. On a problem of nonlinear radiation transfer. *Astrofizika*, 1966, vol. 2, no. 1, pp. 31—36. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01014505
7. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A. Solvability of a nonlinear model Boltzmann equation in the problem of a plane shock wave. *Theoret. and Math. Phys.*, 2016, vol. 189, no. 2, pp. 1609–1623. DOI: https://doi.org/10.1134/S0040577916110064
8. Feller W. *Introduction to Probability Theory and Its Applications*. John Wiley and Sons, Inc., 1971. 669 p. (Russ. ed.: in 2 vols. Vol. 2. Moscow, Mir, 1984. 752 p.).
9. Kendall D. G. Mathematical models of the spread of infection. *Mathematics and Computer Science in Biology and Medicine*, London, H. M. S. O., 1965, pp. 213–225.
10. Diekmann O. Thresholds and Traveling Waves for the Geographical Spread of infection. *Journal of Math. Biology*, 1978, vol. 6, pp. 109–130. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02450783
11. Diekmann O. Limiting behaviour in an epidemic model. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1977, vol. 1, no. 5, pp. 459–470. DOI: https://doi.org/10.1016/0362-546X(77)90011-6
12. Diekmann O. Run for your life. A note on the asymptotic speed of propagation of an epidemic. *Journal of Differential Equations*, 1979, vol. 33, iss. 1, pp. 58–73. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-0396(79)90080-9
13. Engibaryan N. B. Conservative systems of integral convolution equations on the half-line and the entire line. *Sb. Math.*, 2002, vol. 193, no. 6, pp. 847–867. DOI: https://doi.org/10.1070/SM2002v193n06ABEH000660
14. Arabadzhyan L. G., Engibaryan N. B. Convolution equations and nonlinear functional equations. *J. Soviet Math.*, 1987, vol. 36, iss. 6, pp. 745–791. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01085507
15. Sgibnev M. S. The matrix analogue of the Bleckwell renewal theorem on the real line. *Sb. Math.*, 2006, vol. 197, no. 3, pp. 369–386. DOI: https://doi.org/10.1070/SM2006v197n03ABEH003762
16. Khachatryan Kh. A. Positive solvability of some classes of non-linear integral equations of Hammerstein type on the semi-axis and on the whole line. *Izv. Math.*, 2015, vol. 79, iss. 2, pp. 411–430. DOI: https://doi.org/10.1070/IM2015v079n02ABEH002748
17. Lancaster P. *Theory of Matrices*. New York, Academic Press, 1969. 316 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1982. 28 p.).
18. Fikhtengol'ts G. M. *The Fundamentals of Mathematical Analysis* : International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, vol. 2 (73). Pergamon Press, 1965. 540 p. (Russ. ed.: in 3 vols. Vol. 2. Moscow, Fizmatlit, 1966. 600 p.).

19. Khachatryan Kh. A., Terjyan Ts. E., Avetisyan M. H. A one-parameter family of bounded solutions for a system of nonlinear integral equations on the whole line. *Proceedings of the NAS Armenia: Mathematics*, 2018, vol. 53, iss. 4, pp. 201–211 (in Russian).
20. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elements of the theory of functions and functional analysis*: vol. I, II. Albany, New York, Graylock Press, 1957. 129 p.; 1961. 128 p. (Russ. ed.: Moscow, 1981. 544 p.).

Cite this article as:
Khachatryan Kh. A. The Solvability of a System of Nonlinear Integral Equations of Hammerstein Type on the Whole Line. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 2, pp. 164–181 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-164-181