



УДК 681.5.037

## Оценка качества нестационарных систем на плоскости обратной частотной характеристики

В. М. Иванов

Иванов Владимир Михайлович, кандидат технических наук, доцент кафедры электропривода и автоматизации промышленных установок, Ульяновский государственный технический университет, Россия, 432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32, v.ivanov@ulstu.ru

При оценке качества линейных систем широко используются прямые показатели качества, к которым относятся: время регулирования, перерегулирование, декремент затухания. Наряду с прямыми показателями используются косвенные оценки качества. Для нелинейных систем одним из таких показателей качества является степень устойчивости или, иначе, мера быстродействия. Как показано в ряде работ, исследование свойств нелинейных систем в этом случае сводится к анализу абсолютной устойчивости процессов. В данной работе рассматривается структурное представление нестационарной линеаризованной системы, которое позволяет более наглядно показать постановочную часть задачи и обосновать переход к системе с обобщенной нелинейностью. Нестационарная параметрическая характеристика, обусловленная множительным звеном, может находиться в четырех квадрантах. Однако для большинства практических задач характеристика множительного звена может быть представлена как двухквадрантная, поскольку одна из переменных, характеризующая текущее значение параметра, выступает как положительная величина. Основные особенности структурной схемы связаны с тем, что изменение коэффициента  $\Delta k$  эквивалентно возмущающему воздействию  $\Delta k x_0$ , вызванному начальными условиями. Нестационарные свойства сопряженного контура являются основной причиной свободного процесса, который характеризует переход от некоторого начального состояния к устойчивому состоянию равновесия. Начальные условия определены исходным контуром и эквивалентны входному воздействию. Таким образом, система с множительным звеном в общем случае может быть представлена как система с обобщенной нелинейностью. Исследование производится в плоскости обратной частотной характеристики, что позволяет упростить задачу анализа систем с двумерной нелинейностью множительных звеньев. В качестве практического приложения рассмотрен алгоритм расчета и анализа частотных характеристик с целью графического их представления и определения областей устойчивости.

*Ключевые слова:* двумерная нелинейность множительных звеньев, степень устойчивости, круговой критерий, обратная частотная характеристика.

Поступила в редакцию: 05.09.2018 / Принята: 09.02.2019 / Опубликовано онлайн: 28.05.2019

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-207-216>

### ВВЕДЕНИЕ

При оценке качества линейных систем широко используются прямые показатели качества, к которым относятся: время регулирования, перерегулирование, декремент затухания. Наряду с прямыми показателями используются косвенные оценки качества. Для нелинейных систем одним из таких показателей качества является степень устойчивости или, иначе, мера быстродействия.

Как показано в работах [1, 2], исследование свойств нелинейных систем в этом случае сводится к анализу абсолютной устойчивости процессов. Основопологающей



работой в этом направлении была статья А. И. Лурье и В. Н. Постникова [3], в которой с помощью функций Ляпунова отыскивались условия устойчивости равновесия. В дальнейшем решение данной задачи получило развитие в работах [4–9].

В начале 1960-х гг. румынским ученым В. М. Поповым было получено аналитическое условие абсолютной устойчивости для нелинейных систем и дана его геометрическая интерпретация [10, 11]. На основании этого критерия можно судить об абсолютной устойчивости по модифицированной частотной характеристике линейной части. Работы В. М. Попова значительно упростили исследование абсолютной устойчивости нелинейных систем и сделали его наглядным [12]. Частотные характеристики в инженерной практике широко используются как для анализа, так и синтеза динамических систем. Однако процесс построения частотных характеристик является трудоемким и, несмотря на существование современных программных пакетов, используемых для научных и инженерных вычислений [13, 14], требует разработки дополнительных алгоритмов применительно к нелинейным системам.

В данной работе рассматривается структурное представление нестационарной линеаризованной системы, которое позволяет более наглядно представить постановочную часть задачи и обосновать переход к системе с обобщенной нелинейностью. Исследование производится в плоскости обратной частотной характеристики [15], что позволяет упростить задачу анализа систем, нелинейность которых обусловлена двухмерной нелинейностью множительных звеньев. В качестве практического приложения рассмотрен алгоритм расчета и анализа частотных характеристик с целью графического их представления и определения областей устойчивости.

## 1. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

В наиболее общем случае нестационарная параметрическая характеристика, обусловленная множительным звеном (МЗ), может находиться в четырех квадрантах, однако для большинства практических задач характеристика МЗ может быть представлена как двухквадрантная, поскольку одна из величин, характеризующая текущее значение параметра, представляет собой положительную величину. Это позволяет свести задачу анализа к исследованию систем с нестационарной нелинейностью  $y = \Phi(x, t)$ , характеристика которой не выходит из заданного сектора  $[0, k]$  или  $[k_1, k_2]$ , образованного прямолинейными лучами  $y = k_1x$  и  $y = k_2x$ , т. е. удовлетворяющая условиям

$$0 \leq \frac{\Phi(x, t)}{x} \leq k \quad \text{или} \quad k_1 \leq \frac{\Phi(x, t)}{x} \leq k_2.$$

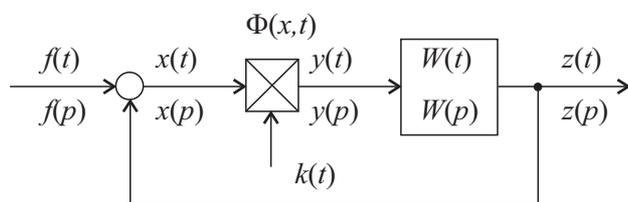


Рис. 1. Структурная схема системы управления с множительным звеном

Fig. 1. Structural diagram of a control system with a multiplier link

Рассмотрим систему, где объект управления обозначен передаточной функцией  $W(p)$ , а нелинейность определена нестационарной характеристикой множительного звена (рис. 1).

Один из методов, используемых при исследовании нелинейных систем, основан на их линеаризации. Линеаризацию можно производить по звеньям. При этом функцию двух



переменных  $F(x, y)$  в некоторой окрестности точки  $M(x_0, y_0)$  можно разложить в ряд Тейлора

$$F(x, y) = F_0(x, y) + F_1(x, y) + F_2(x, y) + F_3(x, y) + \dots,$$

где  $F_0(x, y) = F(x_0, y_0)$ ;

$$F_1(x, y) = F'_x(x, y)\Delta x + \frac{1}{2!}F''_{xx}(x, y)\Delta x^2 + \frac{1}{3!}F'''_{xxx}(x, y)\Delta x^3 + \dots;$$

$$F_2(x, y) = F'_y(x, y)\Delta y + \frac{1}{2!}F''_{yy}(x, y)\Delta y^2 + \frac{1}{3!}F'''_{yyy}(x, y)\Delta y^3 + \dots;$$

$$F_3(x, y) = F''_{xy}(x, y)\Delta x\Delta y + \frac{1}{2!}F'''_{xxy}(x, y)\Delta x^2\Delta y + \frac{1}{2!}F'''_{xyy}(x, y)\Delta x\Delta y^2 + \dots$$

Для множительного звена  $\Phi(x, t) = y = kx$  обозначим отклонения входных и выходных величин:  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta k = k - k_0$ ,  $\Delta y = y - y_0$ .

Тогда, полагая равными нулю частные производные выше первого порядка и смешанные производные выше второго порядка, получим

$$y_0 + \Delta y = k_0x_0 + \Delta kx_0 + \Delta xk_0 + \Delta x\Delta k.$$

Структурная схема в виде двух взаимосвязанных подсистем показана на рис. 2. Здесь в качестве исходного принят контур, характеризующий начальные условия  $x_0, y_0, z_0$ . Сопряженный контур, характеризующий приращение выходной координаты  $\Delta z$ , сформирован из условия изменения  $\Delta k$  в момент времени  $t = t_0 > 0$ . Изменение входного сигнала  $f(t)$  к этому моменту закончено, и можно считать приращение  $\Delta x = -\Delta z$ .

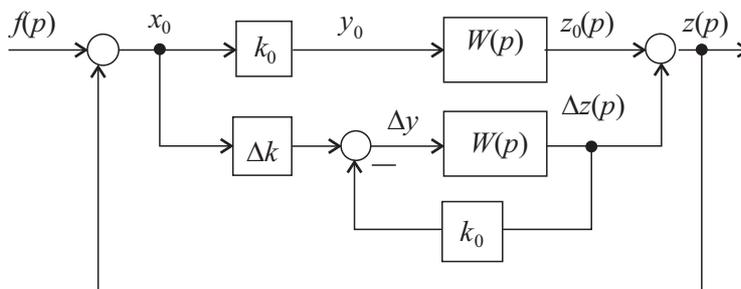


Рис. 2. Структурная схема линейризованной системы  
Fig. 2. Structural diagram of a linearized system

Основные особенности структурной схемы связаны с тем, что изменение коэффициента  $\Delta k$  эквивалентно возмущающему воздействию  $\Delta kx_0$ , вызванному начальными условиями. Нестационарные свойства сопряженного контура являются основной причиной свободного процесса, который характеризует переход от некоторого начального состояния к устойчивому состоянию равновесия. Начальные условия определены исходным контуром и эквивалентны входному воздействию

$$f_n(p) = \frac{f(p)}{1 + k_0W(p)}.$$

С учетом этого, структурную схему (см. рис. 2) можно представить в виде преобразованной нелинейной системы (рис. 3), где коэффициен-

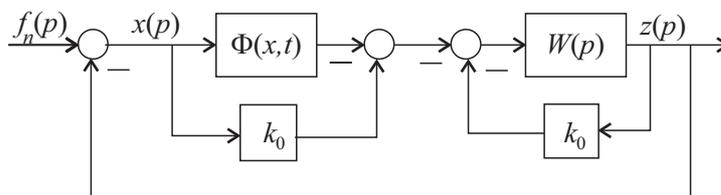


Рис. 3. Структурная схема преобразованной нелинейной системы  
Fig. 3. Structural diagram of the transformed nonlinear system



ты  $k_0$  не оказывают влияния на основную обратную связь. Таким образом, система с множительным звеном в общем случае может быть представлена как система с обобщенной нелинейностью.

Передаточная функция преобразованной линейной части будет равна

$$W_{\Pi}(p) = \frac{W(p)}{1 + k_0 W(p)}.$$

Приращение  $\Delta k(t)$  соответствует характеристике преобразованного нелинейного элемента

$$\Phi_{\Pi}(x, t) = k_0 - \Phi(x, t).$$

Так как эквивалентные преобразования не изменяют свойств системы, то преобразованная и исходная система (см. рис. 1) имеют одни и те же свойства и, следовательно, тождественны друг другу. В случае абсолютно устойчивой исходной системы преобразованная система также будет устойчива.

## 2. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ПО МЕРЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Одной из оценок свободного процесса в нелинейных системах является степень устойчивости или, иначе, мера быстродействия. Под степенью устойчивости понимается абсолютное значение вещественной части ближайшего к мнимой оси корня [16]

$$\xi_0 = \min_v |\operatorname{Re} p_v|.$$

Величина  $\xi_0$  определяет наибольшую постоянную времени системы и косвенно характеризует наибольшее быстродействие.

При рассмотрении свободных процессов [17], вызываемых убывающими воздействиями, временная характеристика линейной части преобразованной системы равна

$$w_1(t) = w(t)e^{\xi_0 t}.$$

С учетом этого частотная характеристика линейной части преобразованной нелинейной системы может быть представлена в виде смещенной частотной характеристики

$$W_1(j\omega) = \int_0^{\infty} w_1(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} w(t)e^{-(j\omega - \xi_0)t} dt = W(j\omega - \xi_0).$$

Для систем с неустойчивой или нейтральной линейной частью достаточные условия [17, 18], при выполнении которых процессы в нелинейной системе абсолютно устойчивы и все отклонения будут иметь степень устойчивости  $\xi = \xi_0$  не меньше заданной, имеют следующий вид:

$$\operatorname{Re}(1 + qj\omega) \frac{W(j\omega - \xi_0)}{1 + rW(j\omega - \xi_0)} + \frac{1}{k - r} > 0;$$

$$r < \Phi(x) < k - r.$$

Критерий Попова обобщается также на системы с нестационарной нелинейностью, где для абсолютной устойчивости процесса, вызванного ограниченным воздействием, достаточно, чтобы смещенная частотная характеристика удовлетворяла условиям

$$\operatorname{Re} \frac{W(j\omega - \xi_0)}{1 + rW(j\omega - \xi_0)} + \frac{1}{k - r} \geq 0 \tag{1}$$



для всех  $0 \leq \omega \leq \infty$  при соответствующих ограничениях  $r < d\Phi(x, t)/dx < k$ , наложенных на нелинейный элемент.

Как следует из формулировки критерия, никаких ограничений на характер изменения коэффициента во времени не накладывается, кроме ограничений на его максимальное и минимальное значения.

В случае использования обратной смещенной частотной характеристики условие (1) можно записать в виде

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\frac{1}{W(j\omega - \xi_0)} + r} + \frac{1}{k - r} \geq 0. \quad (2)$$

Представим обратную частотную характеристику линейной части в виде

$$\frac{1}{W(j\omega - \xi_0)} = P(\omega, \xi_0) + jQ(\omega, \xi_0),$$

где  $P(\omega, \xi_0) = \operatorname{Re}[1/W(j\omega - \xi_0)]$ ,  $Q(\omega, \xi_0) = \operatorname{Im}[1/W(j\omega - \xi_0)]$ .

Тогда после подстановки  $1/W(j\omega)$  в неравенство (2) получим

$$\operatorname{Re} \frac{1}{P(\omega, \xi_0) + r + jQ(\omega, \xi_0)} + \frac{1}{k - r} > 0$$

или

$$\operatorname{Re} \frac{P(\omega, \xi_0) + r - jQ(\omega, \xi_0)}{(P(\omega, \xi_0) + r)^2 + Q^2(\omega, \xi_0)} + \frac{1}{k - r} > 0.$$

Выделяя действительную часть и производя тождественные преобразования, получим

$$P^2(\omega, \xi_0) + (k + r)P(\omega, \xi_0) + Q^2(\omega, \xi_0) + kr \geq 0.$$

Прибавим в правую и левую части равенства члены  $\frac{(k+r)^2}{4}$ , тогда уравнение

$$\left(P(\omega, \xi_0) + \frac{k+r}{2}\right)^2 + Q^2(\omega, \xi_0) = \frac{(k+r)^2}{4}$$

на плоскости обычной обратной частотной характеристики  $1/W(j\omega)$  определит окружность с центром на действительной оси и пересекающую последнюю в точках  $-r$ ,  $-k$ . Координата центра окружности определяется точкой  $-\frac{k+r}{2}$ , а ее радиус величиной  $R = \frac{k-r}{2}$ . При этом для выполнения условий абсолютной устойчивости процессов достаточно, чтобы смещенная частотная характеристика  $1/W(j\omega - \xi_0)$  не пересекала  $(k, r)$  — окружность.

Следует отметить, что аналитические методы исследования абсолютной устойчивости процессов в нелинейных системах имеют определенные ограничения, так как распространяются на системы с невозрастающей амплитудно-частотной характеристикой. При этом данные условия выполняются в системах с передаточной функцией линейной части

$$W(p) = \frac{K_{lp}}{p \prod_{i=2}^n (1 + T_i p)},$$

где  $n$  — порядок системы,  $K_{lp}$  — коэффициент передачи линейной части системы.



**Пример.** Оценим быстродействие (степень устойчивости) системы как системы с переменным коэффициентом усиления  $k(t)$ , передаточная функция линейной части которой равна

$$W(p) = \frac{k}{T_1 p [T_2 p (T_3 p + 1) + 1]},$$

где  $T_1 = 2T_2$ ,  $T_2 = 2T_3$ ,  $T_3 = 0,04$ ,  $K = 1$ .

Смещенная частотная характеристика линейной части, полученная заменой  $p$  на  $(j\omega - \xi_0)$ , запишется так:

$$W(j\omega - \delta) = \frac{K}{T_1(j\omega - \xi_0) \{T_2(j\omega - \xi_0) [T_3(j\omega - \xi_0) + 1] + 1\}}.$$

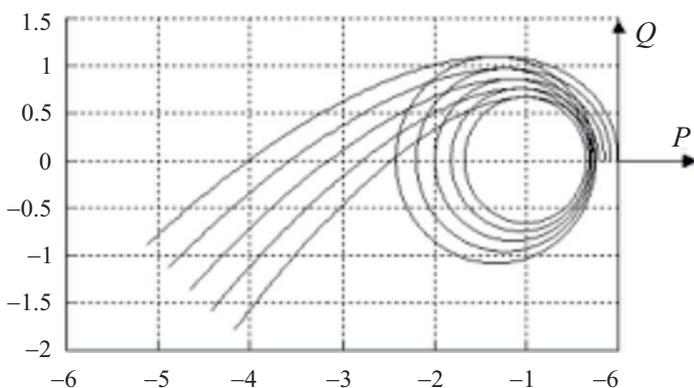
Обратные смещенные частотные характеристики

$$\begin{aligned} \frac{1}{W(j\omega - \xi_0)} &= T_1 T_2 T_3 (3\omega^2 - \xi_0^2) \xi_0 + T_1 T_2 (\xi_0^2 - \omega^2) - T_1 \xi_0 + \\ &+ j [T_1 T_2 T_3 (3\xi_0^2 - \omega^2) + 2T_1 T_2 \omega \xi_0 + T_1 \omega] = \\ &= 0,000512(3\omega^2 - \xi_0^2)\delta_0 + 0,0128(\xi_0^2 - \omega^2) - 0,16\xi_0 + \\ &+ j[0,000512(3\xi_0^2 - \omega^2)\omega - 0,0256\omega\xi_0 + 0,16\omega]. \end{aligned}$$

Графические и программные возможности системы MATLAB позволяют производить промежуточный анализ матричных данных и находить взаимосвязанные решения при их построении. Алгоритм расчета и вывода графической информации включает в себя следующие основные шаги:

- для заданного интервала изменения частоты  $\omega$  от 0 до 20 с шагом 0.1 производят расчет векторов ( $\mathbf{p}$  — действительной и  $\mathbf{q}$  — мнимой части) смещенной на  $\mathbf{e}$  частотной характеристики;
- по ряду точек строят график параметрической функции ( $\mathbf{q}$  от  $\mathbf{p}$ );
- для области графика, соответствующего выпуклому множеству, определяют вектор  $\mathbf{r}$  радиусов из условий определения вписанной окружности;
- анализируют вектор радиусов на максимум, определяют центр окружности и производят вывод окружности на график.

Ниже представлена программа и графики функции (рис. 4) с областями устойчивости.



```
function graphic
w=[0:0.1:20]; % угловая частота
for e=0:0.5:2 % степень устойчивости
p1=0.000512*(3*e.*w.^2-e.^3)
p2=0.0128*(e.^2-w.^2)
p3=-0.16*e
p=p1+p2+p3 % действительная часть
q1=0.000512*(3*e.*w.^2-w.^3)
q2=-0.0256*e.*w q3=0.16*w
q=q1+q2+q3 % мнимая часть
hold on
plot(p,q) % вывод графика кривой
% D-разбиения
```

Рис. 4. Смещенные частотные характеристики и их области абсолютной устойчивости  
 Fig. 4. Displaced frequency characteristics and their areas of absolute stability



```

grid on % определение максимального радиуса вписанной окружности
k=1
while (q(k)>=0) % для внутренней области D-разбиения
ds(k)=q(k)+p(k)
if (ds(k)<=0) % если окружность вписывается,
r(k)=q(k) % то загружаем радиус
d(k)=p(k) % и его центр
else
r(k)=0
d(k)=-1
end
k=k+1;
end
[rm,m]=max(r) % выборка максимального радиуса
dm=d(m) % и его центра
t=[0:0.01:2*pi]; % круговая интерполяция
x1=-rm.*(1-sin(t))
x1=x1+(dm+rm) % смещение по действительной оси
y1=rm.*cos(t)
hold on
plot(x1,y1,'R') % вывод вписанной окружности
r=0
d=0
end
end

```

Окружности, касательные к частотным характеристикам, определяют критические значения  $k_g$  и  $r_g$  коэффициентов передачи, соответствующие областям абсолютной устойчивости состояния равновесия, внутри которых система имеет степень устойчивости, не менее заданной  $\xi_0$ . Откуда следует, что при увеличении меры быстродействия  $\xi_0$  соответствующие области абсолютной устойчивости сужаются. Кривая  $D$  — разбиения по коэффициенту усиления — представляет собой отрицательную обратную частотную характеристику, что позволяет довольно легко сопоставить области устойчивости по линейному частотному критерию.

Представленный метод анализа применим и для системы с передаточной функцией  $W(p) = \frac{K_{TP}}{p}$ , т. е. для случая  $n = 1$ .

Данный вариант, связанный с построением смещенных частотных характеристик для интегрирующего звена (рис. 5), можно интерпретировать следующим образом:

1) области абсолютной устойчивости исходной системы (см. рис. 1) соответствуют окружностям бесконечного радиуса;

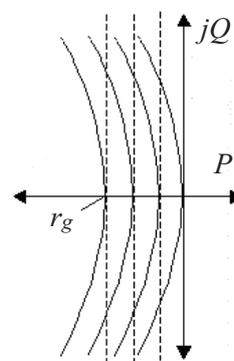


Рис. 5. Смещенные частотные характеристики и области устойчивости для объекта управления, представленного интегрирующим звеном

Fig. 5. Offset frequency characteristics and areas of stability for the control object represented by the integrating element



2) для обеспечения быстродействия не меньше заданного минимальный коэффициент множительного звена  $k_{0\min}$  должен выбираться из условия  $r_g = \xi_0 = |\operatorname{Re} p_1|$ , что соответствует значению  $k_{0\min} = \xi_0/K_{lp}$  для всех  $\xi_0 > 0$ .

Таким образом, использование кругового критерия в данном случае с учетом секторальных ограничений на характеристики множительного звена не противоречит условиям абсолютной устойчивости интегрирующего звена, охваченного отрицательной обратной связью.

### Библиографический список

1. Наумов Б. Н., Цыпкин Я. З. Частотный критерий абсолютной устойчивости процессов в нелинейных системах автоматического управления // Автомат. и телемех. 1964. Т. 25, вып. 6. С. 852–867.
2. Наумов Б. Н. Исследование абсолютной устойчивости положения равновесия в нелинейных системах автоматического управления при помощи логарифмических частотных характеристик // Автомат. и телемех. 1965. Т. 26, вып. 4. С. 591–600.
3. Лурье А. И., Постников В. Н. К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. 1944. Т. 8, № 3. С. 246–248.
4. Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М. : Госэнергоиздат, 1955. 312 с.
5. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М. : Изд-во АН СССР, 1963. 140 с.
6. Megretski A., Rantzer A. System analysis via integral quadratic constraints // IEEE Trans. Automat. Contr. 1997. Vol. 42, № 6. P. 819–830. DOI: <https://doi.org/10.1109/9.587335>
7. Liu Z., Lü S., Zhong S., Ye M. Improved Robust Stability Criteria of Uncertain Neutral Systems with Mixed Delays // Abstr. Appl. Anal. 2009. Vol. 2009. P. 1–18. DOI: <https://doi.org/10.1155/2009/294845>
8. Wu M., He Y., She J.-H. Stability Analysis, Robust Control of Time-Delay Systems. Beijing : Science Press ; L. : Springer, 2010. 335 p.
9. Shatyrko A., Khusainov D. On the Interval Stability of Weak-Nonlinear Control Systems with Aftereffect // Sci. World J. 2016. Vol. 2016. P. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.1155/2016/6490826>
10. Попов В. М. Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования // Автомат. и телемех. 1961. Т. 22, № 8. С. 961–979.
11. Попов В. М. Гиперустойчивость автоматических систем. М. : Наука, 1970. 454 с.
12. Haddad W. M., Kapila V. Absolute stability criteria for multiple slope-restricted monotonic nonlinearities // Proceedings of American Control Conference. 1994. Vol. 1. P. 1020–1021. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACC.1994.751901>.
13. Дьяконов В. MATLAB 6 : учебный курс СПб. : Питер, 2001. 592 с.
14. Дьяконов В. П. Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления. М. : ДМК Пресс, 2008. 576 с.
15. Следящие приводы : в 2 т. Т. 1. Теория и проектирование следящих приводов / под ред. В. К. Чемоданова. М. : Энергия, 1976. 480 с.
16. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. М. : Наука, 1979. 768 с.
17. Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем. М. : Наука, 1977. 560 с.
18. Воронов А. А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М. : Наука, 1979. 336 с.

---

### Образец для цитирования:

Иванов В. М. Оценка качества нестационарных систем на плоскости обратной частотной характеристики // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 2. С. 207–216. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-207-216>

---



## Estimation of Quality of Non-Stationary Systems on the Return Frequency Characteristic Plane

V. M. Ivanov

Vladimir M. Ivanov, <https://orcid/0000-0002-0332-5738>, Ulyanovsk State Technical University, 32 Severny Venetz St., Ulyanovsk 432027, Russia, v.ivanov@ulstu.ru

Direct quality parameters, such as time of regulation, overshoot, damping decrement are widely used for estimation of linear systems quality. Alongside with direct parameters indirect estimations of quality are used. One of such quality parameters for nonlinear systems is the degree of stability or response speed. A number of research studies show that properties of nonlinear systems investigation is reduced to the analysis of absolute stability of processes. The study considers structural representation of non-stationary linearized system, which allows to present additional evidence the statement of problem and to prove transition to the system with the generalized non-linearity. In general, the non-stationary parametrical characteristic caused by a multiplying part, can be present in four quadrants. However, in most practical problems the characteristic of the multiplying part can be presented as two quadrants, because one of the variables, describing the current value of the parameter is represented by a positive value. The basic features of the block diagram are defined by the fact that a change of  $\Delta k$  factor is equivalent to  $\Delta k x_0$  revolting influence caused by entry conditions. Non-stationary properties of the interfaced contour define the free process characterized by transition from the initial state to a steady status of the balance. Entry conditions are defined by an initial contour and are equivalent to the input impact. Thus, the system with a multiplying part can be generally presented as a system with the generalized non-linearity. We studied return the frequency characteristic plane that allows to simplify analytical problems of the systems with two-dimensional non-linearity of multiplying parts. Practical applications demonstrate the algorithm of calculation and analysis of the frequency characteristics for the purpose of their graphic representation and definition of stability.

*Keywords:* two-dimensional nonlinearity of multipliers, degree of stability, circular criterion, return frequency characteristic.

Received: 05.09.2018 / Accepted: 09.02.2019 / Published online: 28.05.2019

### References

1. Naumov B. N., Tsypkin Ya. Z. Frequency criterion for process absolute stability in non-linear automatic control system. *Avtomat. i Telemekh.* [Automation and Remote Control], 1964, vol. 25, iss. 6, pp. 852–867 (in Russian).
2. Naumov B. N. An investigation of absolute stability of the equilibrium state in nonlinear automatic control systems by means of logarithmic frequency characteristics. *Autom. Remote Control*, 1965, vol. 26, iss. 4, pp. 593–601.
3. Lur'e A. I., Postnikov V. N. K teorii ustoychivosti reguliruemykh sistem [To the theory of stability of adjustable systems]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 1944, vol. 8, no. 3, pp. 246–248 (in Russian).
4. Letov A. M. *Ustoychivost' nelineynykh reguliruemykh system* [Stability of nonlinear adjustable systems]. Moscow, Gosenergoizdat, 1955. 312 p. (in Russian).
5. Ajzerman M. A., Gantmaher F. R. *Absolyutnaya ustoychivost' reguliruemykh system* [Absolute stability of adjustable systems]. Moscow, Izd-vo AN SSSR, 1963. 140 p. (in Russian).
6. Megretski A., Rantzer A. System analysis via integral quadratic constraints. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1997, vol. 42, no. 6, pp. 819–830. DOI: <https://doi.org/10.1109/9.587335>



7. Liu Z., Lü S., Zhong S., Ye M. Improved Robust Stability Criteria of Uncertain Neutral Systems with Mixed Delays. *Abstr. Appl. Anal.*, 2009, vol. 2009, pp. 1–18. DOI: <https://doi.org/10.1155/2009/294845>
8. Wu M., He Y., She J.-H. *Stability Analysis, Robust Control of Time-Delay Systems*. Beijing, Science Press; London, Springer, 2010. 335 p.
9. Shatyrko A., Khusainov D. On the Interval Stability of Weak-Nonlinear Control Systems with Aftereffect. *Sci. World J.*, 2016, vol. 2016, pp. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.1155/2016/6490826>
10. Popov V. M. On absolute stability of non-linear automatic control systems. *Automat. i Telemekh.* [Automation and Remote Control], 1961, vol. 22, iss. 8, pp. 961–979 (in Russian).
11. Popov V. M. *Giperustoichivost' avtomaticheskikh system* [Hyperstability of Automatic Systems]. Moscow, Nauka, 1970. 454 p. (in Russian).
12. Haddad W. M., Kapila V. Absolute stability criteria for multiple slope-restricted monotonic nonlinearities. *Proceedings of American Control Conference*, 1994, vol. 1, pp. 1020–1021. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACC.1994.751901>.
13. D'yakonov V. *MATLAB 6: uchebnyj kurs* [MATLAB 6: training course]. St. Petersburg, Piter, 2001. 592 p. (in Russian).
14. D'yakonov V. P. *Mathematica 5.1/5.2/6. Programmirovaniye i matematicheskie vychisleniya* [Mathematica 5.1/5.2/6. Programming and mathematical calculations]. Moscow, DMK Press, 2008. 576 p. (in Russian).
15. *Sledyaschie privody : v 2 t.* [The watching drives : in 2 vols.]. Vol. 1 / ed. by V. K. Chemođanov. Moscow, Energiya, 1976. 480 p. (in Russian).
16. Besekerskiy V. A., Popov E. P. *Teoriya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya* [Theory of systems of automatic control]. Moscow, Nauka, 1979. 768 p. (in Russian).
17. Tsypkin Ya. Z. *Osnovy teorii avtomaticheskikh system* [Fundamentals of the theory of automatic systems]. Moscow, Nauka, 1977. 560 p. (in Russian).
18. Voronov A. A. *Ustoichivost', upravlyaemost', nablyudaemost'* [Stability, controllability, observability]. Moscow, Nauka, 1979. 336 p. (in Russian).

---

**Cite this article as:**

Ivanov V. M. Estimation of Quality of Non-Stationary Systems on the Return Frequency Characteristic Plane. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 2, pp. 207–216 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-207-216>

---