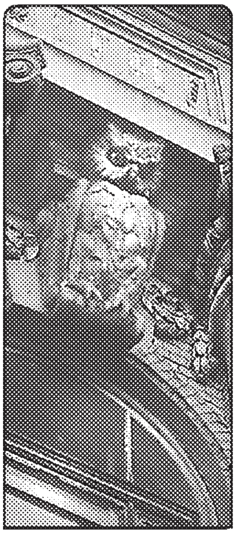

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.977:514.74

Аналитическое вложение геометрий постоянной кривизны на псевдосфере

В. А. Кыров

Кыров Владимир Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, физики и информатики, Горно-Алтайский государственный университет, Россия, Республика Алтай, 649000, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, д. 1, kyrovVA@yandex.ru

В математических исследованиях важны геометрии максимальной подвижности. Примерами таких геометрий являются: евклидова, псевдоевклидова, Лобачевского, симплектическая и т. д. Полной классификации таких геометрий нет. Различаются как геометрии максимальной подвижности в целом, например геометрии из списка Тёрстона, так и геометрии локальной максимальной подвижности. Нами разработан метод классификации геометрий локальной максимальной подвижности, названный методом вложения. Основная цель данной работы состоит в нахождении метрических функций геометрий размерности $n+2$ и допускающих $(n+2)(n+3)/2$-параметрическую группу движений и, как аргумент, содержащих метрическую функцию

$$g(i,j)=\frac{\varepsilon_1(x_i^1-x_j^1)^2+\cdots+\varepsilon_n(x_i^n-x_j^n)^2+\varepsilon((x_i^{n+1})^2+(x_j^{n+1})^2)}{x_i^{n+1}x_j^{n+1}}$$

$(n+1)$-мерной геометрии постоянной кривизны на псевдосфере. При решении поставленной задачи из требования существования группы движений размерности $(n+2)(n+3)/2$, т. е. группы преобразований, сохраняющей метрическую функцию, записывается функциональное уравнение специального вида на эту функцию. Это функциональное уравнение решается аналитически, т. е. все входящие в него функции представляются рядами Тейлора, после чего сравниваются коэффициенты в разложениях. Результатом решения поставленной задачи является геометрия максимальной подвижности с метрической функцией

$$f(i,j)=[\varepsilon_1(x_i^1-x_j^1)^2+\cdots+\varepsilon_n(x_i^n-x_j^n)^2+\varepsilon(x_i^{n+1}-x_j^{n+1})^2]e^{2w_i+2w_j}.$$

Метод вложения применим и для других геометрий локальной максимальной подвижности, что дает надежду построения полной классификации таких геометрий.

Ключевые слова: геометрия максимальной подвижности, функциональное уравнение, дифференциальное уравнение, метрическая функция, группа движений.

Поступила в редакцию: 07.12.2018 / Принята: 09.02.2019 / Опубликована: 31.08.2019

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-246-257

ВВЕДЕНИЕ

$(n+1)$-мерная геометрия локальной максимальной подвижности в работе [1] допускает группу движений размерности $(n+1)(n+2)/2$. Многие из таких геометрий хорошо известны. К их числу относятся: евклидова геометрия, псевдоевклидова, симплектическая геометрия, сферическая, геометрия Лобачевского и др. На псевдосфере в подходящих координатах метрическая функция

$$g(i,j)=\frac{\varepsilon_1(x_i^1-x_j^1)^2+\cdots+\varepsilon_n(x_i^n-x_j^n)^2+\varepsilon((x_i^{n+1})^2+(x_j^{n+1})^2)}{x_i^{n+1}x_j^{n+1}}$$

задает геометрию постоянной кривизны, причем $\varepsilon,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm1$. Замена координат $x^{n+1}\to e^{-2x^{n+1}}$ данную метрическую функцию приводит к следующему виду:

$$g(i,j)=[\varepsilon_1(x_i^1-x_j^1)^2+\cdots+\varepsilon_n(x_i^n-x_j^n)^2]e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}}+\varepsilon e^{2x_i^{n+1}-2x_j^{n+1}}+\varepsilon e^{2x_j^{n+1}-2x_i^{n+1}}. \quad (1)$$

От метрической функции g можно также перейти к следующей:

$$q(i,j)=g(i,j)-2\varepsilon=\frac{\varepsilon_1(x_i^1-x_j^1)^2+\cdots+\varepsilon_n(x_i^n-x_j^n)^2+\varepsilon(x_i^{n+1}-x_j^{n+1})^2}{x_i^{n+1}x_j^{n+1}}.$$

Для бесконечно близких точек последняя метрическая функция превращается в хорошо известную метрику для геометрии постоянной кривизны на псевдосфере:

$$dq=\frac{\varepsilon_1(dx^1)^2+\cdots+\varepsilon_n(dx^n)^2+\varepsilon(dx^{n+1})^2}{(x^{n+1})^2}.$$

Основная цель данной работы — решение задачи вложения для геометрии с метрической функцией (1), т. е. нахождение на $(n+2)$-мерном многообразии метрических функций вида

$$f(i,j)=\chi([\varepsilon_1(x_i^1-x_j^1)^2+\cdots+\varepsilon_n(x_i^n-x_j^n)^2]e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}}+\varepsilon e^{2x_i^{n+1}-2x_j^{n+1}}+\varepsilon e^{2x_j^{n+1}-2x_i^{n+1}},w_i,w_j),$$

где $(x_i^1,\ldots,x_i^{n+1},w_i)$ и $(x_j^1,\ldots,x_j^{n+1},w_j)$ — координаты точек i и j $(n+2)$-мерного пространства, сохраняющих свой вид относительно групп преобразований размерности $(n+2)(n+3)/2$. Решение этой задачи сводится к аналитическому решению функционального уравнения специального вида

$$\begin{gathered}\varepsilon_1(x_i^1-x_j^1)(X_1(i)-X_1(j))+\cdots+\varepsilon_n(x_i^n-x_j^n)(X_n(i)-X_n(j))+\\ +[\varepsilon_1(x_i^1-x_j^1)^2+\cdots+\varepsilon_n(x_i^n-x_j^n)^2](X_{n+1}(i)+X_{n+1}(j))-\\ -\varepsilon(X_{n+1}(i)-X_{n+1}(j))(e^{-4x_i^{n+1}}-e^{-4x_j^{n+1}})+\\ +W(i)F_1e^{-2x_i^{n+1}-2x_j^{n+1}}+W(j)F_2e^{-2x_i^{n+1}-2x_j^{n+1}}=0,\end{gathered}$$

где $X_1,\ldots,X_{n+1},W,F_1,F_2$ — неизвестные. Неизвестные ищутся в виде рядов Тейлора. Данный метод апробирован в работе [2].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим $(n+2)$-мерное аналитическое многообразие M, которое локально диффеоморфно прямому произведению $(n+1)$-мерного аналитического многообразия N и одномерного аналитического многообразия L, $n \geqslant 1$. Локальный диффеоморфизм осуществляет аналитическое отображение $h : M \to N \times L$. Пусть $\pi_1 : N \times L \to N$ и $\pi_2 : N \times L \to L$ — проекции. Рассмотрим функции $g : N \times N \to R$ с открытой и плотной областью определения S_g в N^2, и $\chi : R \times L \times L \to R$. Определим проекции $p_1 : M \times M \to M$ и $p_2 : M \times M \to M$, которые на точках действуют так: $p_1 : \langle i, j\rangle \mapsto i$ и $p_2 : \langle i, j\rangle \mapsto j$, где $\langle i, j\rangle$ — произвольная точка в $M \times M$. Построим функцию $f : M \times M \to R$ по следующей формуле:

$$f = \chi(g(\pi_1(h(p_1)), \pi_1(h(p_2))), \pi_2(h(p_1)), \pi_2((p_2))),$$

область определения S_f которой открыта и плотна в M^2. На точках

$$f(i, j) = \chi(g(\pi_1(h(p_1(\langle i, j\rangle))), \pi_1(h(p_2(\langle i, j\rangle)))), \pi_2(h(p_1(\langle i, j\rangle))), \pi_2(h(p_2(\langle i, j\rangle)))), \quad (2)$$

где i, j — произвольные две точки из M, причем $\langle i, j\rangle \in S_f$.

Для произвольной точки из M рассмотрим координатную окрестность $U \subset M$, в которой h является диффеоморфизмом и для любых точек $i, j \in U$, $\langle i, j\rangle \in S_f$, существуют окрестности $U(i) \subset U$, $U(j) \subset U$ такие, что $\langle i', j'\rangle \in S_f$, $\forall\ i' \in U(i)$, $\forall\ j' \in U(j)$. Из вышесказанного имеем диффеоморфизм окрестностей $h : U \to V \times W$, где V, W — некоторые координатные окрестности в N и L соответственно. Координаты в окрестности V обозначим $(x^1, \dots, x^n, x^{n+1})$, а координату в окрестности W — (w). Тогда в локальных координатах функция (2) принимает следующий вид:

$$f = f(i, j) = \chi(\theta, w_i, w_j), \quad (3)$$

где $g(\pi_1(h(i)), \pi_1(h(j))) = \theta = \theta(x_i^1, \dots, x_i^{n+1}, x_j^1, \dots, x_j^{n+1})$ — метрическая функция $(n+1)$-мерной геометрии постоянной кривизны на псевдосфере:

$$\theta = \vartheta(i, j)e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}} + \varepsilon e^{2x_i^{n+1}-2x_j^{n+1}} + \varepsilon e^{2x_j^{n+1}-2x_i^{n+1}}, \quad (4)$$

где

$$\vartheta(i, j) = \varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2,$$

причем $\varepsilon, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$. $\pi_2(h(i)) = w_i$, $\pi_2(h(j)) = w_j$. Пусть выполняются аксиомы.

Аксиома аналитичности. Функция $\chi : R \times L \times L \to R$ аналитическая во всех точках области определения.

Аксиома невырожденности. Для функции (3) в произвольной точке окрестности $U(i) \times U(j) \subset M^2$ справедливы неравенства

$$\frac{\partial \chi}{\partial \theta} \neq 0,\ \frac{\partial \chi}{\partial w_i} \neq 0,\ \frac{\partial \chi}{\partial w_j} \neq 0. \quad (5)$$

Пусть группа Ли G действует эффективно и аналитично в $U \subset M$. Это означает, что задано аналитическое инъективное отображение (эффективное действие)

$$\lambda : U \times G \to U',$$

где $U' \subset M$ — открытая область, причем выполняются свойства:

1) $\lambda(i, e) = i$, $e \in G$ — единица, $i \in U$;

2) $\lambda(\lambda(i,a),b)=\lambda(i,ab)$, для любых $a,b\in G$ и $i\in U$;

3) для любого $i\in U$ $\lambda(i,a)=i$, только если $a=e$.

Действие λ_a, определяемое произвольным элементом $a\in G$, называется *движением*, если для любых точек $i,j\in U$ таких, что $\langle i,j\rangle\in S_f$, $\langle\lambda_a(i),\lambda_a(j)\rangle\in S_f$, выполняется равенство

$$f(\lambda_a(i),\lambda_a(j))=f(i,j).$$

Действия группы G можно определить в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ точек i и j, причем если эти окрестности пересекаются, то действия в пересечении совпадают [3, § 1]. Множество всех так определенных движений образует аналитическую группу Ли движений.

Аксиома максимальной подвижности. Размерность группы Ли G максимальная и равна $\dim G=(n+2)(n+3)/2$.

Основная задача этой работы — поиск всех функций вида (3), являющихся двухточечными инвариантами $(n+2)(n+3)/2$-мерной группы движений.

Алгебра Ли группы движений состоит из операторов вида [4, § 16]:

$$X=X_1\partial_{x^1}+\dots+X_{n+1}\partial_{x^{n+1}}+W\partial_w, \tag{6}$$

где $X_\alpha=X_\alpha(x^1,\dots,x^{n+1},w)$, $W=W(x^1,\dots,x^{n+1},w)$ — аналитические функции в U, $\alpha=1,\dots,n+1$. Через операторы (6) записывается условие локальной инвариантности метрической функции [4, § 17]:

$$X(i)f(i,j)+X(j)f(i,j)=0, \tag{7}$$

которое выполняется в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ точек i и j, причем метрическая функция $f(i,j)$ определена и аналитична в $U(i)\times U(j)$.

Пусть $k\in U\subset M$ — начало некоторой системы координат в U, в которой эта точка имеет нулевые координаты $(0,\dots,0)$. В такой системе координат справедливы разложения в ряд Тейлора для компонент оператора (6) и метрической функции [5, гл. 11]:

$$\begin{cases} X_1=X_1(w)+D_1(X_1)(w)x^1+\dots+D_{n+1}(X_1)(w)x^{n+1}+\cdots,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ X_{n+1}=X_{n+1}(w)+D_1(X_{n+1})(w)x^1+\dots+D_{n+1}(X_{n+1})(w)x^{n+1}+\cdots,\\ W=W(w)+D_1(W)(w)x^1+\dots+D_{n+1}(W)(w)x^{n+1}+\cdots, \end{cases} \tag{8}$$

$$f(\theta,w_i,w_j)=f(w_i,w_j)+D_1(f)(w_i,w_j)\theta+\frac{1}{2}D_{11}(f)(w_i,w_j)\theta^2+\cdots, \tag{9}$$

где, например, $X_\gamma(w)=X_\gamma(0,\dots,0,w)$, $D_\alpha(X_\gamma)(w)=\dfrac{\partial X_\gamma(x^1,\dots,x^{n+1},w)}{\partial x^\alpha}|_{x=0}$, $D_{\alpha\beta}(X_\gamma)(w)=\dfrac{\partial^2 X_\gamma(x^1,\dots,x^{n+1},w)}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}|_{x=0}$, $x=(x^1,\dots,x^{n+1})$, $\alpha,\beta,\gamma=1,\dots,n+1$, $f(w_i,w_j)=\chi(0,w_i,w_j)$, $D_1(f)(w_i,w_j)=\dfrac{\partial\chi(\theta,w_i,w_j)}{\partial\theta}|_{\theta=0}$. Основные результаты работы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Рассмотрим произвольную точку $k\in M$ и ее координатную окрестность $U(k)$. Возьмем также две точки $i,j\in U(k)$ с окрестностями $U(i)$ и $U(j)$ такие, что $U(i)\cup U(j)\subset U(k)$, причем $\langle i,j\rangle$, $\langle i',j'\rangle\in S_f$ $\forall\ i'\in U(i)$,*

$\forall\ j' \in U(j)$. *Тогда метрическая функция $f(i,j)$, в аналитическом многообразии M задающая $(n+2)$-мерную геометрию локальной максимальной подвижности, в окрестности $U(i)\times U(j)$ в подходящих локальных координатах и маситабном преобразовании $(\varphi(f)\to f)$ имеет вид*

$$f(i,j) = [\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2 + \varepsilon(x_i^{n+1} - x_j^{n+1})^2]e^{2w_i+2w_j}, \qquad (10)$$

где $\varepsilon, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Запишем в явном виде условие локальной инвариантности (7) метрической функции (3) относительно $(n+2)(n+3)/2$-мерной группы движений:

$$2[p(i,j)e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}} + 2\varepsilon(X_{n+1}(i) - X_{n+1}(j))\operatorname{sh} 2(x_i^{n+1} - x_j^{n+1})]\frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta} + \\ + W(i)\frac{\partial f(i,j)}{\partial w_i} + W(j)\frac{\partial f(i,j)}{\partial w_j} = 0, \qquad (11)$$

где

$$p(i,j) = \varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)(X_1(i) - X_1(j)) + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)(X_n(i) - X_n(j)) + \\ + \vartheta(i,j)(X_{n+1}(i) + X_{n+1}(j)). \qquad (12)$$

Заметим, что выражение (11) выполняется тождественно по координатам точек i и j из некоторых окрестностей $U(i)$ и $U(j)$, причем $U(i)\cup U(j)\subset U(k)$, где $U(k)$ — координатная окрестность. Ниже доказываются леммы для тождества (11) из предположения аналитичности в $U(i)\times U(j)$ входящих в него функций. Эти же леммы справедливы также и из предположения принадлежности входящих в тождество (11) функций классу C^3 в $U(i)\times U(j)$. При доказательстве лемм полагаем $m = 1,\dots,n+1$, $k,s,l = 1,\dots,n$.

Лемма 1. *В тождестве* (11) *во всех точках некоторых окрестностей* $U(i)$ *и* $U(j)$

$$p(i,j)e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}} + 2\varepsilon(X_{n+1}(i) - X_{n+1}(j))\operatorname{sh} 2(x_i^{n+1} - x_j^{n+1}) \neq 0.$$

Доказательство. Предположим противное, пусть в некоторых окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ (либо в их открытых подмножествах) выполняется равенство

$$p(i,j)e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}} + 2\varepsilon(X_{n+1}(i) - X_{n+1}(j))\operatorname{sh} 2(x_i^{n+1} - x_j^{n+1}) = 0. \qquad (13)$$

Дифференцируя это равенство по переменной w_i, а результат по переменным $x_j^1,\dots,x_j^{n+1}$, будем иметь $X'_{1w} = 0,\dots,X'_{(n+1)w} = 0$, следовательно, $X_m = X_m(x^1,\dots, x^{n+1})$. В результате выражение (13) превращается в функциональное уравнение на операторы алгебры Ли группы движений $(n+1)$-мерной геометрии локально максимальной подвижности с метрической функцией (4). Размерность этой группы движений $(n+1)(n+2)/2$. Тогда произвольный оператор линейно выражается через $(n+1)(n+2)/2$ базисных операторов.

Запишем теперь тождество (11) с учетом (13):

$$W(i)\frac{\partial f(i,j)}{\partial w_i} + W(j)\frac{\partial f(i,j)}{\partial w_j} = 0. \qquad (14)$$

Пусть сначала $W = 0$. Тогда произвольный оператор алгебры Ли группы движений геометрии с метрической функцией (3) является линейной комбинацией $(n+1)(n+2)/2$ базисных операторов, а должно быть $(n+2)(n+3)/2$. Противоречие.

Пусть теперь $W \neq 0$. Тогда от выражения (14) переходим к тождеству

$$\frac{W(i)}{W(j)} = \varphi(\theta, w_i, w_j), \tag{15}$$

для чего левую и правую части делим на произведение $W(j)\frac{\partial f(i,j)}{\partial w_i}$ и вводим обозначение $\varphi(\theta, w_i, w_j) = -\frac{\partial f(i,j)}{\partial w_j}/\frac{\partial f(i,j)}{\partial w_i}$.

Дифференцируем (15) по x_i^l и по x_j^l:

$$\frac{W'_{x^l}(i)}{W(j)} = 2\varepsilon_l(x_i^l - x_j^l)e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}}\varphi_\theta, \ -\frac{W(i)W'_{x^l}(j)}{W^2(j)} = -2\varepsilon_l(x_i^l - x_j^l)e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}}\varphi_\theta,$$

затем складываем результаты и разделяем переменные:

$$\frac{W'_{x^l}(i)}{W(i)} = \frac{W'_{x^l}(j)}{W(j)} = \alpha_l = \text{const}.$$

Таким образом, получаем $W'_{x^l} = \alpha_l W$. После интегрирования имеем

$$W = c(w, x^{n+1})e^{\alpha_1 x^1 + \dots + \alpha_n x^n} \neq 0.$$

Полученное подставляем в (15):

$$e^{\alpha_1 u^1 + \dots + \alpha_n u^n} = \varphi(\theta, w_i, w_j)c(w_j, x_j^{n+1})/c(w_i, x_i^{n+1}), \ u^l = x_i^l - x_j^l.$$

Нетрудно доказать, что $\alpha_k = 0$. Тогда $W = c(w, x^{n+1})$. Найденное подставляем снова в (15) и дифференцируем по x_i^{n+1} и по x_j^{n+1}, после чего результаты складываем и вычитаем:

$$\frac{W(j)W'_{x^{n+1}}(i) - W(i)W'_{x^{n+1}}(j)}{W^2(j)} = 4\vartheta e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}}\varphi_\theta,$$

$$\frac{W(j)W'_{x^{n+1}}(i) + W(i)W'_{x^{n+1}}(j)}{W^2(j)} = 8\varepsilon \operatorname{sh} 2(x_i^{n+1} - x_j^{n+1})\varphi_\theta.$$

Выражая из первого равенства φ_θ и подставляя во второе, имеем

$$8\varepsilon \operatorname{sh} 2(x_i^{n+1} - x_j^{n+1})\frac{W(j)W'_{x^{n+1}}(i) - W(i)W'_{x^{n+1}}(j)}{W^2(j)} =$$

$$= 4\vartheta e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}}\frac{W(j)W'_{x^{n+1}}(i) + W(i)W'_{x^{n+1}}(j)}{W^2(j)}.$$

Дифференцируя последнее равенство по ϑ, учитывая $W = c(w, x^{n+1})$, получаем

$$4e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}}\frac{W(j)W'_{x^{n+1}}(i) + W(i)W'_{x^{n+1}}(j)}{W^2(j)} = 0,$$

следовательно, приходим к тождественному равенству

$$\frac{W'_{x^{n+1}}(i)}{W(i)} + \frac{W'_{x^{n+1}}(j)}{W(j)} = 0.$$

После разделения переменных имеем $W'_{x^{n+1}} = 0$. Тогда $W = c(w)$. Подставляя найденное в (14), имеем

$$c(w_i)\frac{\partial f(i,j)}{\partial w_i} + c(w_j)\frac{\partial f(i,j)}{\partial w_j} = 0.$$

Вводим замену: $\int dw/c(w) = \overline{w}$. Тогда в новых координатах $W = 1$.

Таким образом, произвольный оператор алгебры Ли группы движений $(n+1)$-мерной геометрии локальной максимальной подвижности с метрической функцией (4) является линейной комбинацией $(n+1)(n+2)/2+1$ базисных операторов, которых должно быть $(n+2)(n+3)/2$. Противоречие. □

Лемма 2. *В тождестве* (11) *во всех точках некоторых окрестностей* $U(i)$ *и* $U(j)$ *справедливо неравенство* $W \neq 0$.

Доказательство. Предположим противное, пусть в некоторых окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ (либо в их открытых подмножествах) в тождестве (11) $W = 0$. Тогда из леммы 1 следует $\dfrac{\partial f(i,j)}{\partial \theta} = 0$, что противоречит условию невырожденности (5) метрической функции (3). □

Лемма 3. *В тождестве* (11) *для функции* $W(x^1, \ldots, x^{n+1}, w)$ *во всех точках некоторых окрестностей* $U(i)$ *и* $U(j)$ *справедливо неравенство*

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial W}{\partial x^{n+1}}\right)^2 \neq 0.$$

Доказательство. Предположим противное, пусть в некоторых окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ (либо в их открытых подмножествах)

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial W}{\partial x^{n+1}}\right)^2 = 0,$$

поэтому $W = W(w) \neq 0$. Тогда в (11) осуществляем замену координат: $\displaystyle\int \frac{dw}{W(w)} = \overline{w}$. Очевидно, в новых координатах $W(\overline{w}) = 1$. В результате (11) примет вид

$$2[p(i,j)e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}} + 2\varepsilon(X_{n+1}(i) - X_{n+1}(j))\operatorname{sh} 2(x_i^{n+1} - x_j^{n+1})]\frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta} +$$
$$+\frac{\partial f(i,j)}{\partial \overline{w}_i} + \frac{\partial f(i,j)}{\partial \overline{w}_j} = 0.$$

Деля последнее тождество на ненулевую производную $\dfrac{\partial f(i,j)}{\partial \theta}e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}}$, получаем функциональное уравнение

$$\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)(X_1(i) - X_1(j)) + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)(X_n(i) - X_n(j)) +$$
$$+\vartheta(i,j)(X_{n+1}(i) + X_{n+1}(j)) +$$
$$+\varepsilon(X_{n+1}(i) - X_{n+1}(j))(e^{-4x_j^{n+1}} - e^{-4x_i^{n+1}}) = \phi(\theta, x_i^{n+1}, x_j^{n+1}, \overline{w}_i, \overline{w}_j), \qquad (16)$$

где
$$\phi(\theta, x_i^{n+1}, x_j^{n+1}, \overline{w}_i, \overline{w}_j) = -\Big(\frac{\partial f(i,j)}{\partial \overline{w}_i} + \frac{\partial f(i,j)}{\partial \overline{w}_j}\Big)/2\frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta}e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}}.$$

Затем решаем уравнение (16) методом, описанным подробно при доказательстве леммы 1. Так, тождество (16) дифференцируем по x_i^l, по x_j^l:

$$\begin{cases}\varepsilon_l(X_l(i)X_l(j)) + \varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)X_{1x^l}(i) + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)X_{nx^l}(i) + 2\varepsilon_l(x_i^l - x_j^l)\times \\ \times(X_{n+1}(i) + X_{n+1}(j)) + \vartheta X_{(n+1)x^l}(i) + \varepsilon X_{(n+1)x^l}(i)(e^{-4x_j^{n+1}} - e^{-4x_i^{n+1}}) = \\ = 2\varepsilon_l(x_i^l - x_j^l)\phi_\theta(\theta, x_i^{n+1}, x_j^{n+1}, \overline{w}_i, \overline{w}_j)e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}}, \\ \varepsilon_l(X_l(i) - X_l(j)) + \varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)X_{1x^l}(j) + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)X_{nx^l}(j) + \\ +2\varepsilon_l(x_i^l - x_j^l)(X_{n+1}(i) + X_{n+1}(j)) - \vartheta X_{(n+1)x^l}(j) + \varepsilon X_{(n+1)x^l}(j)\times \\ \times(e^{-4x_j^{n+1}} - e^{-4x_i^{n+1}}) = 2\varepsilon_l(x_i^l - x_j^l)\phi_\theta(\theta, x_i^{n+1}, x_j^{n+1}, \overline{w}_i, \overline{w}_j)e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}}.\end{cases} \tag{17}$$

Далее, из первого уравнения вычитаем второе:

$$\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)(X_{1x^l}(i) - X_{1x^l}(j)) + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)(X_{nx^l}(i) - X_{nx^l}(j)) +$$
$$+\vartheta(X_{(n+1)x^l}(i) + X_{(n+1)x^l}(j)) + \varepsilon(X_{(n+1)x^l}(i) - X_{(n+1)x^l}(j))(e^{-4x_j^{n+1}} - e^{-4x_i^{n+1}}) = 0.$$

Теперь полученное дифференцируем дважды в следующем порядке: по x_i^k и x_j^s; x_i^k и $\overline{w}_j$; x_i^k и x_j^{n+1}:

$$\begin{cases}-\varepsilon_k X_{kx^lx^s}(j) - \varepsilon_s X_{sx^lx^k}(i) + 2\varepsilon_k(x_i^k - x_j^k)X_{(n+1)x^lx^s}(j) - \\ -2\varepsilon_s(x_i^s - x_j^s)X_{(n+1)x^lx^k}(i) = 0, \quad k \neq s, \\ X_{kx^lx^k}(j) + X_{kx^lx^k}(i) + 2(x_i^k - x_j^k)(X_{(n+1)x^lx^k}(i) - X_{(n+1)x^lx^k}(j)) + \\ +2(X_{(n+1)x^l}(i) + X_{(n+1)x^l}(j)) = 0, \\ X_{kx^l\overline{w}}(j) + 2(x_i^k - x_j^k)X_{(n+1)x^l\overline{w}}(j) = 0,\end{cases} \tag{18}$$

$$\varepsilon_k X_{kx^lx^{n+1}}(j) + 2\varepsilon_k(x_i^k - x_j^k)X_{(n+1)x^lx^{n+1}}(j) - 4\varepsilon X_{(n+1)x^lx^k}(i)e^{-4x_j^{n+1}} = 0.$$

Дифференцируя третье уравнение системы (18) по x_i^k, получаем $X_{kx^l\overline{w}} = 0$, $X_{(n+1)x^l\overline{w}} = 0$. Дифференцируя первое уравнение системы (18) по x_i^k и по x_j^m, а второе уравнение по x_i^k и по x_j^k, затем разделяем переменные: $X_{(n+1)x^lx^sx^m} = 0$. Четвертое уравнение системы (18) дифференцируем по x_i^k и учитываем предыдущее: $X_{(n+1)x^lx^{n+1}} = 0$, $X_{(n+1)x^lx^k} = a_{lk} = a_{kl} = \mathrm{const}$, $X_{kx^lx^{n+1}} = 4\varepsilon\varepsilon_k a_{lk}e^{-4x^{n+1}}$. Из предыдущего следует $X_{(n+1)x^l} = a_{l1}x^1 + \dots + a_{ln}x^n + p_l$, $a_{lk}, p_l = \mathrm{const}$. С учетом найденного первое и второе уравнения системы (18) принимают вид

$$-\varepsilon_k X_{kx^lx^s}(j) - \varepsilon_s X_{sx^lx^k}(i) - 2\varepsilon_s x_i^s a_{lk} + 2\varepsilon_k x_i^k a_{ls} - 2\varepsilon_k x_j^k a_{ls} + 2\varepsilon_s x_j^s a_{lk} = 0, \quad k \neq s;$$
$$X_{kx^lx^k}(j) + X_{kx^lx^k}(i) + 2(a_{l1}x_i^1 + \dots + a_{ln}x_i^n + a_{l1}x_j^1 + \dots a_{ln}x_j^n + 2p_l) = 0.$$

Разделяя переменные, имеем

$$X_{kx^lx^s} = -2x^k a_{ls} + 2\varepsilon_s\varepsilon_k x^s a_{lk} + \varepsilon_k c_{kls}, \quad c_{kls} = c_{ksl} = -c_{slk} = \mathrm{const}, \quad k \neq s;$$
$$X_{kx^lx^k} = -2(a_{l1}x^1 + \dots + a_{ln}x^n + p_l).$$

Легко проверить $c_{kls} = -c_{slk} = -c_{skl} = c_{lks} = c_{lsk} = -c_{ksl}$, с другой стороны, $c_{kls} = c_{ksl}$, поэтому $c_{kls} = 0$. Тогда имеем

$$X_{kx^lx^s} = -2x^k a_{ls} + 2\varepsilon_k\varepsilon_s x^s a_{lk}, \quad k \neq s, \quad X_{kx^lx^k} = -2(a_{l1}x^1 + \dots + a_{ln}x^n + p_l),$$

$$X_{kx^l\overline{w}} = 0,\ X_{kx^lx^{n+1}} = 4\varepsilon\varepsilon_k a_{lk} e^{-4x^{n+1}}, \quad a_{lk} = a_{kl}.$$

Интегрируем полученное:

$$X_k = X_k(x) - \varepsilon\varepsilon_k(a_{k1}x^1 + \cdots + a_{kn}x^n)e^{-4x^{n+1}} + A_k(x^{n+1}, \overline{w}),$$
$$X_{n+1} = X_{n+1}(x) + p_1x^1 + \cdots + p_nx^n + B(x^{n+1}, \overline{w}), \quad x = (x^1, \ldots, x^n).$$

Найденное подставляем в (17) и умножаем на $\varepsilon_k(x_i^k - x_j^k)$ и из него вычитаем равенство, полученное из (17) переобозначением индекса $l \to k$ и умноженное на $\varepsilon_l(x_i^l - x_j^l)$, причем $k \neq l$, после чего сравниваем коэффициенты перед степенями x^k. Тогда будем иметь $A_k, B = \text{const}$. В итоге получаем произвольный оператор алгебры Ли группы движений, зависящий от $n(n+5)/2+1$ постоянных a_{kl}, p_l, A_k, B, среди которых независимых $\omega \leqslant n(n+5)/2+1$. Придавая этим постоянным значения 0 и 1, получаем базис, состоящий из $\omega + 1 < (n+2)(n+3)/2$ операторов. Противоречие. □

Функциональное уравнение (11) удобно переписать в виде

$$\begin{gathered}\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)(X_1(i) - X_1(j)) + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)(X_n(i) - X_n(j)) + \\ +[\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2](X_{n+1}(i) + X_{n+1}(j)) - \\ -\varepsilon(X_{n+1}(i) - X_{n+1}(j))(e^{-4x_i^{n+1}} - e^{-4x_j^{n+1}}) + \\ +W(i)F_1e^{-2x_i^{n+1}-2x_j^{n+1}} + W(j)F_2e^{-2x_i^{n+1}-2x_j^{n+1}} = 0,\end{gathered} \tag{19}$$

где введены обозначения

$$F_1(\theta, w_i, w_j) = \frac{\partial f(i,j)}{\partial w_i} / 2\frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta}, \quad F_2(\theta, w_i, w_j) = \frac{\partial f(i,j)}{\partial w_j} / 2\frac{\partial f(i,j)}{\partial \theta}. \tag{20}$$

Из аналитичности и отличия от нуля функции (3) в $U(i) \times U(j)$, очевидно, следуют аналитичность функций (20) и справедливость неравенств $F_1 \neq 0$, $F_2 \neq 0$. Тогда имеем разложение в ряд Тейлора [5, гл. 11]:

$$\begin{cases} F_1(\theta, w_i, w_j) = f_1(w_i, w_j) + D_1(f_1)(w_i, w_j)\theta + \frac{1}{2}D_{1,1}(f_1)(w_i, w_j)\theta^2 + \cdots, \\ F_2(\theta, w_i, w_j) = f_2(w_i, w_j) + D_1(f_2)(w_i, w_j)\theta + \frac{1}{2}D_{1,1}(f_2)(w_i, w_j)\theta^2 + \cdots, \end{cases} \tag{21}$$

где, например, $f_1(w_i, w_j) = F_1(0, w_i, w_j)$, $D_1(f_1)(w_i, w_j) = \left.\dfrac{\partial F_1(\theta, w_i, w_j)}{\partial \theta}\right|_{\theta=0}$, $f_2(w_i, w_j) = F_2(0, w_i, w_j)$, $D_1(f_2)(w_i, w_j) = \left.\dfrac{\partial F_2(\theta, w_i, w_j)}{\partial \theta}\right|_{\theta=0}$.

Разложения (8) и (21) подставляем в тождество (19) и сравниваем коэффициенты слева и справа перед одинаковыми степенями произведений переменных $x_i^1, \ldots, x_i^{n+1}$, $x_j^1, \ldots, x_j^{n+1}$. Эта задача существенно упрощается с применением математического пакета программ MAPLE 17 [6, гл. 8].

Из леммы 2 вытекает, что в последовательности $D_1(W)(w)$, $D_2(W)(w), \ldots$, $D_{n+1}(W)(w)$, $D_{11}(W)(w)$, $D_{12}(W)(w), \ldots$ есть хотя бы один ненулевой член. Сравнивая ряды, имеем

$$D_{\alpha_1\alpha_2\cdots}(W)(w_i)D_{\gamma_1\gamma_2\cdots}(f_1)(w_i, w_j) = 0, \quad D_{\alpha_1\alpha_2\cdots}(W)(w_j)D_{\gamma_1\gamma_2\cdots}(f_2)(w_i, w_j) = 0,$$
$$D_{\alpha_1\alpha_2\cdots}(W)(w_i)(f_1(w_i, w_j) + 2\varepsilon D_1(f_1)(w_i, w_j)) = 0,$$
$$D_{\alpha_1\alpha_2\cdots}(W)(w_j)(f_2(w_i, w_j) + 2\varepsilon D_1(f_2)(w_i, w_j)) = 0,$$

где $\alpha_k = 1, \ldots, n+1$, $k = 1, 2, \ldots$, $\gamma_l = 1$, $l = 2, 3, \ldots$ Тогда

$$D_{\gamma_1\gamma_2\cdots}(f_1)(w_i, w_j) = D_{\gamma_1\gamma_2\cdots}(f_2)(w_i, w_j) = 0,$$
$$f_1(w_i, w_j) = -2\varepsilon D_1(f_1)(w_i, w_j), \quad f_2(w_i, w_j) = -2\varepsilon D_1(f_2)(w_i, w_j).$$

Из разложения в ряд Тейлора равенства (19) выделяем еще следующие выражения:

$$D_{\alpha_1\alpha_2\cdots}(W)(w_i) D_1(f_1)(w_i, w_j) = p_{\alpha_1\alpha_2\cdots}(w_i),$$
$$D_{\alpha_1\alpha_2\cdots}(W)(w_j) D_1(f_2)(w_i, w_j) = p_{\alpha_1\alpha_2\cdots}(w_j),$$

где $\alpha_l = 1, \ldots, n+1$, $l = 1, 2, \ldots$ Дифференцируя первую группу выражений по w_j, а вторую по w_i, имеем

$$D_{\alpha_1\alpha_2\cdots}(w_i)\frac{\partial D_1(f_1)(w_i, w_j)}{\partial w_j} = 0, \quad D_{\alpha_1\alpha_2\cdots}(w_j)\frac{\partial D_1(f_2)(w_i, w_j)}{\partial w_i} = 0.$$

Следовательно, $\dfrac{\partial D_1(f_1)(w_i, w_j)}{\partial w_j} = 0$, $\dfrac{\partial D_1(f_2)(w_i, w_j)}{\partial w_i} = 0$. Интегрируя найденное и возвращаясь в предыдущее, получаем $D_1(f_1)(w_i, w_j) = D_1(f_1)(w_i)$, $D_1(f_2)(w_i, w_j) = D_1(f_2)(w_j)$, $D_1(f_1)(w) = D_1(f_2)(w) \neq 0$.

С учетом полученного из (20) и (21) будем иметь

$$F_1(\theta, w_i, w_j) = D_1(f_1)(w_i)(\theta - 2\varepsilon), \quad F_2(\theta, w_i, w_j) = D_1(f_1)(w_j)(\theta - 2\varepsilon),$$

откуда следует

$$\frac{1}{D_1(f_1)(w_i)}\frac{\partial f}{\partial w_i} = 2(\theta - 2\varepsilon)\frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{D_1(f_1)(w_j)}\frac{\partial f}{\partial w_j} = 2(\theta - 2\varepsilon)\frac{\partial f}{\partial \theta}. \qquad (22)$$

Интегрируя систему (22), получаем $f(i, j) = \varphi((\theta - 2\varepsilon)e^{K(w_i)+K(w_j)})$, где $K(w) = 2\int D_1(f_1)(w)dw$, или

$$f(i, j) = \varphi([\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2 +$$
$$+ \varepsilon e^{-4x_i^{n+1}} + \varepsilon e^{-4x_j^{n+1}} - 2\varepsilon e^{-2x_i^{n+1}} e^{-2x_j^{n+1}}] e^{K(w_i)+K(w_j)+2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}}).$$

Переходя к новым координатам $e^{-2x^{n+1}} \to x^{n+1}$, $K(w) + 2x^{n+1} \to w$ и используя преобразование $\varphi^{-1}(f) \to f$, получаем метрическую функцию (10).

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вышепоставленная задача об аналитическом вложении геометрии с метрической функцией (4) полностью решена. Аналогично поставленная задача об аналитическом вложении геометрии с метрической функцией (10) также решена [7]. Актуальна постановка задачи и ее решение об аналитическом вложении $(n+1)$-мерной геометрии с метрической функцией

$$g(i, j) = x_i^1 x_j^1 + \cdots + x_i^n x_j^n + x_i^{n+1} x_j^{n+1}.$$

В таком случае ищутся все $(n+2)$-мерные геометрии локальной максимальной подвижности с метрическими функциями вида

$$f(i,j) = \chi(x_i^1 x_j^1 + \cdots + x_i^n x_j^n + x_i^{n+1} x_j^{n+1}, w_i, w_j).$$

Очевидно, одной из таких геометрий является геометрия, задаваемая функцией

$$f(i,j) = x_i^1 x_j^1 + \cdots + x_i^n x_j^n + x_i^{n+1} x_j^{n+1} + w_i w_j.$$

Благодарности. Выражаю искреннюю благодарность профессору Михайличенко Геннадию Григорьевичу за обсуждение полученных результатов.

Библиографический список

1. *Михайличенко Г. Г.* О групповой и феноменологической симметриях в геометрии // Сиб. матем. журн. 1984. Т. 25, № 5. С. 99–113.
2. *Кыров В. А., Михайличенко Г. Г.* Аналитический метод вложения евклидовой и псевдоевклидовой геометрий // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23, № 2. С. 167–181. DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-2-167-181
3. *Михайличенко Г. Г.* Математические основы и результаты теории физических структур. Горно-Алтайск : Изд-во ГАГУ, 2016. 296 с.
4. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1978. 400 с.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 2. М. : Физматлит, 2001. 810 с.
6. *Дьяконов В.* Maple 10/11/12/13/14 в математических вычислениях. М. : ДМС, 2014. 640 с.
7. *Кыров В. А.* Аналитический метод вложения многомерных псевдоевклидовых геометрий // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. Т. 15. С. 741–758. DOI: https://doi.org/10.17377/ semi.2018.15.060

Образец для цитирования:
Кыров В. А. Аналитическое вложение геометрий постоянной кривизны на псевдосфере // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 246–257. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-246-257

Analytic Embedding of Geometries of Constant Curvature on a Pseudosphere

V. A. Kyrov

Vladimir A. Kyrov, https://orcid.org/0000-0001-5925-7706, Gorno-Altaisk State University, 1 Lenkin St., Gorno-Altaisk 649000, Altai Republic, Russia, kyrovVA@yandex.ru

In mathematical studies, the geometries of maximum mobility are important. Examples of such geometries are Euclidean, pseudo-Euclidean, Lobachevsky, symplectic and so on. There is no complete classification of such geometries. They are distinguished as the geometries of the maximum mobility in general, for example, the geometries from the Thurston list, and the geometries of the local maximum mobility. V. A. Kyrov developed a method for classifying the geometries of local maximum mobility, called the method of embedding. The primary purpose of this paper is to find the metric functions of geometries of dimension $n+2$ that admit $(n+2)(n+3)/2$ -parametric group of motions, and as an argument contain the metric function

$$g(i,j) = \frac{\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2 + \varepsilon((x_i^{n+1})^2 + (x_j^{n+1})^2)}{x_i^{n+1}x_j^{n+1}}$$

of $(n+1)$-dimensional geometry of constant curvature on a pseudosphere. In solving this problem, a functional equation of a special form is written due to the requirement for the existence of a group of motions of dimension $(n+2)(n+3)/2$, that is, of a group of transformations that preserve the metric function. When solving this problem with the requirement that a group of motions of dimension $(n+2)(n+3)/2$ exists, a functional equation of a special form can be written for this function. This functional equation is solved analytically, that is, all the functions are represented as Taylor series, then the coefficients in the expansions are compared. The result of solving this problem is the geometry of maximum mobility with the metric function

$$f(i,j) = [\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2 + \varepsilon(x_i^{n+1} - x_j^{n+1})^2]e^{2w_i+2w_j}.$$

The embedding method is also applicable to other geometries of local maximum mobility, which gives us the hope of constructing a complete classification of such geometries.

Keywords: geometry of maximum mobility, functional equation, differential equation, metric function, group of motions.

Received: 07.12.2018 / Accepted: 09.02.2019 / Published: 31.08.2019

Acknowledgements: I express my sincere gratitude to Professor Gennady G. Mikhailichenko for the discussion of the results obtained.

References

1. Mikhailichenko G. G. Group and phenomenological symmetries in geometry. *Sib Math J*, 1984, vol. 25, iss. 5, pp. 764–774. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00968690
2. Kyrov V. A., Mikhailichenko G. G. An analytic method for the embedding of the Euclidean and pseudo-Euclidean geometries. *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 167–181 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-2-167-181
3. Mikhailichenko G. G. *The mathematical basics and results of the theory of physical structures*. Gorno-Altaisk, Publishing house of Gorno-Altaisk State University, 2016. 297 p. (in Russian). *https://arxiv.org/pdf/1602.02795*
4. Ovsyannikov L. *Group Analysis of Differential Equation*. New York, Academic Press, 1982. 400 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1978. 400 p.).
5. Fichtengolz G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [A course of differential and integral calculus]. Vol. 2. Moscow, Fizmatlit, 2001. 810 p. (in Russian).
6. Dyakonov V. *Maple 10/11/12/13/14 v matematicheskikh raschetakh* [Maple 10/11/12 /13/14 in mathematical calculations]. Moscow, DMS, 2014. 640 p. (in Russian).
7. Kyrov V. A. The analytical method for embedding multidimensional pseudo-Euclidean geometries. *Sib. Èlektron. Mat. Izv.* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2018, vol. 15, pp. 741–758 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.060

Cite this article as:

Kyrov V. A. Analytic Embedding of Geometries of Constant Curvature on a Pseudosphere. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 3, pp. 246–257 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-246-257