УДК 517.96:517.984

О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью

А. П. Хромов

Хромов Август Петрович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, KhromovAP@info.sgu.ru

В статье даются необходимые и достаточные условия классического решения для однородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом, закрепленными концами и нулевой начальной скоростью. Используя метод Фурье с приемом Крылова по улучшению скорости сходимости рядов, удается получить аналог формулы Даламбера, представимого в виде ряда, сходящегося с экспоненциальной скоростью. Результаты статьи являются существенным усилением аналогичных итогов, полученных нами в 2016 г. Предложенный новый метод, базирующийся на применении расходящихся рядов в понимании Эйлера, обладает большой экономичностью в использовании известных математических фактов. Тем самым открывается перспектива существенного продвижения в исследовании и других граничных задач для уравнений в частных производных.

Ключевые слова: метод Фурье, расходящиеся ряды, прием А. Н. Крылова, классическое решение, резольвента.

Поступила в редакцию: 24.04.2019 / Принята: 04.06.2019 / Опубликована: 31.08.2019

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288

Рассмотрим смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0. \tag{3}$$

Считаем, что $q(x)$, $\varphi(x)$ комплекснозначны, причем $q(x) \in L[0,1]$. Будут получены необходимые и достаточные условия для классического решения. Тем самым существенно усилены результаты из [1].

Классическим решением называется функция $u(x,t)$, непрерывная и непрерывно дифференцируемая по x и t, причем $u_x(x,t)$ ($u_t(x,t)$) абсолютно непрерывна по x (по t), удовлетворяющая почти всюду (1) и условиям (2) и (3). Тем самым необходимыми условиями существования такого решения являются следующие условия на $\varphi(x)$: $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны, причем $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. В [1] показано, что при дополнительном условии

$$L\varphi = -\varphi''(x) + q(x)\varphi(x) \in L_p[0,1] \quad (p > 1), \tag{4}$$

эти условия являются достаточными для классического решения. Теперь мы убираем условие (4) и тем самым получаем необходимые и достаточные условия такого решения. Применяем метод Фурье. Традиционное его применение связано с дважды почленно дифференцированием формального решения, приводящим к завышенным требованиям гладкости на $\varphi(x)$, которые не вытекают из самой сущности задачи (1)–(3). Мы, как и в [2], отказываемся от такого традиционного подхода, привлекая рекомендации А. Н. Крылова об ускорении сходимости рядов (см. [3, гл. VI]). В [2] В. А. Чернятин впервые успешно изучил задачу (1)–(3), в случае $q(x)$ вещественной и непрерывной, получил необходимые и достаточные условия существования классического решения задачи (1)–(3), когда уравнение (1) удовлетворяется всюду. Эти условия таковы: $\varphi(x) \in C^2[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$. У нас теперь из-за условия $q(x) \in L[0,1]$ уравнение (1) удовлетворяется почти всюду, что сильно усложняет исследование классического решения задачи (1)–(3). Далее мы, в отличие от [2], применяем резольвентный подход, связанный с методом Коши – Пуанкаре контурного интегрирования резольвенты оператора Штурма – Лиувилля по спектральному параметру, к которому приходим в задаче (1)–(3), когда используем метод Фурье. Он имеет большие преимущества по сравнению с методом из [2], так как теперь не требуются уточненные асимптотики собственных значений и собственных функций, и это сильно упрощает доказательства. Впервые такой подход был применен в [4, 5] и в дальнейшем систематически использовался. Формальное решение по методу Фурье, как и в [4, 5], берем в виде

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\varphi)\cos\rho t\, d\lambda, \tag{5}$$

где $R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L: $Ly = -y''(x) + q(x)y(x)$, $y(0) = y(1) = 0$, λ — спектральный параметр, E — единичный оператор, $\lambda = \rho^2$, $Re\rho \geqslant 0$, γ_n — образ в λ — плоскости окружности $\tilde{\gamma_n}=\{\rho \mid |\rho - n\pi| = \delta\}$, $\delta > 0$ и достаточно мало, $r > 0$ достаточно велико и фиксировано, n_0 — такой номер, что при $n \geqslant n_0$ внутри γ_n находится по одному собственному значению оператора L и все γ_n при $n \geqslant n_0$ находятся вне $|\lambda| = r$.

В статье существенно используются расходящиеся ряды в понимании Эйлера (см. [6, с. 100–101]). Проводя формально обычные действия с такими рядами, как то: почленное умножение на константы, почленное сложение конечного числа рядов, разбиение ряда на сумму конечного числа рядов, замены отдельных рядов их суммами в случае сложения рядов, перестановки рядов и интегралов и т. п., мы в итоге получаем новые ряды или конечные выражения. Затем уже строго устанавливаем нужные нам свойства таких рядов или выражений и получаем ответы на интересующие нас вопросы. В итоге это сулит большие выгоды в выборе необходимых фактов для получения наших результатов и облегчаются сами доказательства, поскольку дело сводится к установлению справедливости отдельных формул, что является зачастую и не таким уж сложным делом. Наша статья подтверждает полезность этих действий. Отметим, что такая схема работы с расходящимися рядами намечена нами в [7].

1. Здесь будем проводить нестрогие преобразования (5), используя рекомендации А. Н. Крылова и расходящиеся ряды, причем при назначении сумм расходящихся рядов ориентируемся и на задачу, получаемую из (1)–(3), при замене уравнения (1)

на неоднородное уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) + f(x,t). \tag{6}$$

В этом случае формальное решение (5) приобретает вид [7]:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\left[(R_\lambda\varphi)\cos\rho t + \int_0^t R_\lambda(f(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\right]d\lambda,$$

где $R_\lambda(f(\cdot,\tau))$ означает, что R_λ применяется к $f(x,\tau)$ по x. В этих нестрогих рассуждениях считаем, что $\varphi(x)$ и $q(x)$ не выходят за рамки $L[0,1]$, а $f(x,t)$ из $L[Q_T]$, где $Q_T = [0,1]\times[0,T]$ при любом $T>0$. Итак, берем ряд (5). Представляем его в виде

$$u(x,t) = u_{01}(x,t) + u_1(x,t), \tag{7}$$

где $u_{01}(x,t)$ есть (5) и R_λ заменено на $R^0_\lambda = (L_0 - \lambda E)^{-1}$, L_0 есть оператор L при $q(x)=0$.

По теореме вычетов имеем

$$u_{01}(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi, \sin n\pi\xi)\sin n\pi x\cos n\pi t, \tag{8}$$

где $(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$. Очевидно ряд (8) легко преобразуется к виду

$$u_{01}(x,t) = \Sigma_+ + \Sigma_-, \tag{9}$$

где $\Sigma_\pm = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\varphi,\sin n\pi\xi)\sin n\pi(x\pm t)$. Ряд $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\varphi,\sin n\pi\xi)\sin n\pi\eta$ есть ряд Фурье функции $\varphi(x)\in L[0,1]$ и в случае его сходимости имеет сумму $\tilde\varphi(\eta)$ при всех $\eta\in(-\infty,\infty)$, где $\tilde\varphi(\eta)$ 2-периодическая, нечетная и $\tilde\varphi(\eta)=\varphi(\eta)$ при $\eta\in[0,1]$. Поэтому в случае расходимости рядов $\sum_\pm$ (а в силу примера А. Н. Колмогорова такие случаи возможны) мы по определению будем считать, что сумма ряда (9) или (8) есть

$$u_{01}(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde\varphi(x+t) + \tilde\varphi(x-t)]. \tag{10}$$

Правая часть (10) имеет смысл при любых $x,t\in(-\infty,\infty)\times[0,\infty)$ и поэтому в данном случае $u_{01}(x,t)$ из (10) будем обозначать $a_0(x,t)$. Так как $a_0(x,t)$ похожа на решение задачи (1)–(3) при $q(x)=0$, то $u_1(x,t)$ похожа на решение задачи:

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u_1(x,t) + f_0(x,t), \tag{11}$$

$$u_1(0,t) = u_1(1,t) = 0, \tag{12}$$

$$u_1(x,0) = u'_{1,t}(x,0) = 0, \tag{13}$$

где $f_0(x,t) = -q(x)a_0(x,t)$. Поэтому от ряда для $u_1(x,t)$ из (7) перейдем в силу (6) к формальному ряду для (11)–(13), т.е. к ряду вида

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\int\limits_0^t R_\lambda(f_0(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\,d\lambda. \tag{14}$$

Представим теперь ряд (14) в виде

$$u_1(x,t) = u_{02}(x,t) + u_2(x,t),$$

где $u_{02}(x,t)$ есть (14) и R_λ заменено на R^0_λ.

По теореме вычетов имеем

$$u_{02}(x,t) = 2\sum_{n=1}^\infty\int\limits_0^t (f_0(\xi,\tau),\sin n\pi\xi)\,\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\sin n\pi(t-\tau),\,d\tau. \tag{15}$$

Используя формулу

$$\int\limits_0^x \sin n\pi\eta\,d\eta = \frac{1}{n\pi}[1-\cos n\pi x],$$

получим, что $u_{02}(x,t)$ из (15) есть

$$u_{02}(x,t) = \sum_{n=1}^\infty\int\limits_0^t (f_0(\xi,\tau),\sin n\pi\xi)\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\sin n\pi\eta\,d\eta =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\sum_1^\infty (f_0(\xi,\tau),\sin n\pi\xi)\sin n\pi\eta\,d\eta = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\tilde f_0(\eta,\tau)\,d\eta,$$

где $\tilde f_0(\eta,\tau)$ нечетна и 2-периодична по η и $\tilde f_0(\eta,\tau) = f_0(\eta,\tau)$, $\eta\in[0,1]$.

Рассуждаем как и выше. Функция $u_{02}(x,t)$ в силу (14) похожа на решение задачи (11)–(13), где вместо $f_0(x,t)$ теперь берется $f_1(x,t) = -q(x)a_1(x,t)$ и

$$a_1(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\tilde f_0(\eta,\tau)\,d\eta,$$

и продолжаем этот процесс до бесконечности.

В итоге от ряда (5) приходим к ряду: $A(x,t) = \sum\limits_{n=0}^\infty a_n(x,t)$, где $a_0(x,t)$ определена выше,

$$a_n(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\tilde f_{n-1}(\eta,\tau)\,d\eta,\quad n\geqslant 1$$

и $f_n(x,t) = -q(x)a_n(x,t)$.

2. Приступаем к строгим рассуждениям. Рассматриваем задачу (1)–(3). Ранее отмечалось, что для классического решения необходимо считать, что $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Теперь считаем, что $\varphi(x)$ удовлетворяет этим требованиям. Привлекаем ряд $A(x,t)$. Леммы 1–5 легко следуют из соответствующих фактов из [8] (см. также [9]).

Лемма 1. *Пусть T — произвольное положительное число, m — наименьшее натуральное число, такое что $T \leqslant m$. Тогда*

$$\| a_n(x,t) \|_{C[Q_T]} \leqslant M_1 \left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1} \frac{T^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n \in N),$$

где $M_1 = \| a_1(x,t) \|_{C[Q_T]}$, $M_2 = (2m+1) \| q \|_1$ ($\| \cdot \|_1$ — норма в $L[0,1]$). Кроме того, $M_1 \leqslant C_T \| \varphi \|_1$ и постоянная $_T$ не зависит от $\varphi(x)$. Здесь $Q_T = [0,1] \times [0,T]$.

Следствие 1. *Ряд $A_1(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T с экспоненциальной скоростью.*

Лемма 2. *Функция $a_0(x,t)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по x и $t \in (-\infty,\infty) \times [0,\infty)$, ее производная $a'_{0x}(x,t)$ ($a'_{0t}(x,t)$) абсолютно непрерывна по x (по t), удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial^2 a_0(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 a_0(x,t)}{\partial x^2}$$

почти всюду и выполняются условия

$$a_0(0,t) = a_0(1,t) = 0, \quad a_0(x,0) = \tilde{\varphi}(x), \quad a'_{0t}(x,0) = 0.$$

Следствие 2. *При $x \in [0,1]$ функция $a_0(x,t)$ является классическим решением задачи (1)–(3) при $q(x) = 0$, причем $\frac{\partial^2 a_0(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$.*

Лемма 3. *Функция $a_1(x,t)$ непрерывно дифференцируема по x и t, причем*

$$\frac{\partial a_1(x,t)}{\partial t} = J_{11}(x,t) + J_{21}(x,t), \qquad \frac{\partial a_2(x,t)}{\partial x} = J_{11}(x,t) - J_{21}(x,t),$$

где $J_{11}(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_x^{x+t} f_0(\xi, x+t-\xi)\, d\xi$, $J_{21}(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x} f_0(\xi, \xi-x+t)\, d\xi$, $f_0(x,t) = -q(x)a_0(x,t)$ (здесь и в дальнейшем $q(x)$ четное, 2-периодическое продолжение на всю ось функции $q(x)$ из задачи (1)–(3), $J_{11}(x,t)$ и $J_{21}(x,t)$ непрерывны по x и t).

Лемма 4. *При фиксированном x функции $J_{11}(x,t)$ и $J_{21}(x,t)$ абсолютно непрерывны по t, и почти при всех $t \in [0,\infty]$ справедливы формулы*

$$2\frac{\partial J_{11}(x,t)}{\partial t} = -\left[q(x+t)a_0(x+t,0) + \int_x^{x+t} q(\xi) a'_{0t}(\xi, x+t-\xi)\, d\xi\right],$$
$$2\frac{\partial J_{21}(x,t)}{\partial t} = -\left[q(x-t)a_0(x-t,0) + \int_{x-t}^{x} q(\xi) a'_{0t}(\xi, \xi-x+t)\, d\xi\right],$$

причем правые части конечны, если конечны

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^\xi q(\tau)\,d\tau, \quad \frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^\xi |q(\tau)|\,d\tau \tag{16}$$

при $\xi = x+t,\ x-t$.

Лемма 5. *При фиксированном* t *функции* $J_{11}(x,t)$ *и* $J_{21}(x,t)$ *абсолютно непрерывны по* x, *и почти при всех* $x \in (-\infty,\infty)$ *справедливы формулы*

$$2\frac{\partial J_{11}(x,t)}{\partial x} = -\left[q(x+t)a_0(x+t,0) - q(x)a_0(x,t) + \int_x^{x+t} q(\xi)a'_{0t}(\xi,x+t-\xi)\,d\xi\right],$$

$$2\frac{\partial J_{21}(x,t)}{\partial x} = -\left[q(x)a_0(x,t) - q(x-t)a_0(x-t,0) - \int_{x-t}^{x} q(\xi)a'_{0t}(\xi,\xi-x+t)\,d\xi\right],$$

причем правые части конечны, если конечны (16) *при* $\xi = x,\ x+t,\ x-t$.

С помощью лемм 3–5 легко получается

Теорема 1. *Функция* $a_1(x,t)$ *непрерывна и непрерывно дифференцируема по* x *и* t, *ее производные* $a'_{1x}(x,t)$ $(a'_{1t}(x,t))$ *абсолютно непрерывны по* x (t), *выполняется уравнение*

$$\frac{\partial^2 a_1(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 a_1(x,t)}{\partial x^2} - q(x)a_0(x,t) \tag{17}$$

и условия (2), (3) *при* $\varphi(x) = 0$, *причем* (17) *имеет место при всех* x *и* t, *для которых конечны* (16) *при* $\xi = x,\ x+t,\ x-t$. *При этом* $\frac{\partial^2 a_1(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$

По индукции аналогично теореме 1 получается

Теорема 2. *Функция* $a_n(x,t)$ *при* $n \geqslant 2$ *непрерывна и непрерывно дифференцируема по* x *и* t, *ее производные* $a'_{nx}(x,t)$ $(a'_{nt}(x,t))$ *абсолютно непрерывны по* x *(по* t*), выполняются* (2), (3) *при* $\varphi(x) = 0$ *и почти при всех* x, t *выполняется* (17), *где* $a_1(x,t)$ *заменяется на* $a_n(x,t)$, $a_0(x,t)$ *на* $a_{n-1}(x,t)$, *причем* (17) *выполняется при тех же* x, t, *что и в теореме 1. При этом* $\frac{\partial^2 a_n(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$.

Далее, на основании леммы 1 и теорем 2 и 3 получается

Лемма 6. *Функция* $A(x,t)$ *непрерывна и непрерывно дифференцируема по* $x,\ t \in (-\infty,\infty)\times[0,\infty)$, *причем имеют место формулы:*

$$\frac{\partial A(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial a_0(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{2}\int_x^{x+t} q(\xi)A(\xi,x+t-\xi)\,d\xi - \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x} q(\xi)A(\xi,\xi-x+t)\,d\xi,$$

$$\frac{\partial A(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial a_0(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{2}\int_x^{x+t} q(\xi)A(\xi,x+t-\xi)\,d\xi + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x} q(\xi)A(\xi,\xi-x+t)\,d\xi.$$

Приступаем к доказательству основного результата.

Теорема 3. *Пусть* $q(x) \in L[0,1]$. *Для того, чтобы существовало единственное классическое решение задачи* (1)–(3), *необходимо и достаточно, чтобы* $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ *были абсолютно непрерывны и* $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. *Это решение дается формулой* $u(x,t) = A(x,t)$.

Доказательство. Достаточно доказать лишь достаточность. Обозначим

$$B_1(x,t) = \int_x^{x+t} q(\xi)A(\xi, x+t-\xi)\,d\xi, \quad B_2(x,t) = \int_{x-t}^{x} q(\xi)A(\xi, \xi-x+t)\,d\xi.$$

Аналогично лемме 4 получаем, что $B_1(x,t)$, $B_2(x,t)$ при фиксированном x абсолютно непрерывны по t и

$$\frac{\partial B_1(x,t)}{\partial t} = q(x+t)A(x+t,0) + \int_x^{x+t} q(\xi)A'_t(\xi, x+t-\xi)\,d\xi, \tag{18}$$

$$\frac{\partial B_2(x,t)}{\partial t} = q(x-t)A(x-t,0) + \int_{x-t}^{x} q(\xi)A'_t(\xi, \xi-x+t)\,d\xi, \tag{19}$$

причем правые части (18) и (19) конечны, если конечны (16) при $\xi = x+t$, $x-t$.

Аналогично лемме 5 получаем, что $B_1(x,t)$ и $B_2(x,t)$ при фиксированном t абсолютно непрерывны по x и

$$\frac{\partial B_1(x,t)}{\partial x} = q(x+t)A(x+t,0) - q(x)A(x,t) + \int_x^{x+t} q(\xi)A'_t(\xi, x+t-\xi)\,d\xi, \tag{20}$$

$$\frac{\partial B_2(x,t)}{\partial x} = q(x)A(x,t) - q(x-t)A(x-t,0) + \int_{x-t}^{x} q(\xi)A'_t(\xi, \xi-x+t)\,d\xi, \tag{21}$$

причем правые части (20) и (21) конечны, если конечны (16) при $\xi = x$, $x-t$, $x+t$.

Так как

$$\frac{\partial A(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial a_0(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{2}B_1(x,t) - \frac{1}{2}B_2(x,t),$$

$$\frac{\partial A(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial a_0(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{2}B_1(x,t) + \frac{1}{2}B_2(x,t),$$

то $\dfrac{\partial A(x,t)}{\partial t}$ при фиксированном x абсолютно непрерывна по t и почти всюду по t справедлива формула

$$\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 a_0(x,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial B_1(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial B_2(x,t)}{\partial t}, \tag{22}$$

причем она имеет место, если конечны (16) при $\xi = x+t$, $x-t$ и конечны $\tilde{\varphi}''(x+t)$, $\tilde{\varphi}''(x-t)$.

Наконец, $\frac{\partial A(x,t)}{\partial x}$ при фиксированном t абсолютно непрерывны по x и имеет место формула

$$\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 a_0(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial B_1(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial B_2(x,t)}{\partial x}. \tag{23}$$

Из (22) и (23) получаем, что $A(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду. Начальные и граничные условия легко проверяются. Так как $\frac{\partial^2 a_0(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$, то получаем классическое решение в классе единственности. □

Отметим еще, что ряд $A(x,t)$ быстросходящийся (экспоненциальная сходимость), в том числе и в крайнем случае $q(x) \in L[0,1]$. Достоинство его в том, что он является явным выражением как классического, так и обобщенного решения задачи (1)–(3). Мы получаем теперь результаты из [1, 7–9] в случае $p = 1$, не используя ни пример А. Н. Колмогорова, ни теоремы Карлесона – Ханта и Хаусдорфа – Юнга. Доказательства являются элементарными, но весьма непростыми и в них используются приемы, схожие с вышеуказанными для расходящихся рядов.

Библиографический список

1. *Хромов А. П.* О сходимости формального решения по методу Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2016. Т. 56, № 10. С. 1795–1805. DOI: https://doi.org/10.7868/S0044466916100112
2. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1991. 112 с.
3. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. 368 с.
4. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. АН. 2014. Т. 458, № 2. С. 138–140. DOI: https://doi.org/10.7868/S0869565214260041
5. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2015. Т. 55, № 2. С. 229–241. DOI: https://doi.org/10.7868/S0044466915020052
6. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949. 280 с.
7. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии // Материалы. междунар. конф. «Понтрягинские чтения – XXX». Воронеж : ИД ВГУ, 2019. С. 291–300.
8. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Классическое и обобщенные решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2019. Т. 59, № 2. С. 286–300. DOI: https://doi.org/10.1134/S0044466919020091
9. *Хромов А. П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 5. С. 717–731. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064119050121

Образец для цитирования:
Хромов А. П. О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 280–288. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288

On Classic Solution of the Problem for a Homogeneous Wave Equation with Fixed End-Points and Zero Initial Velocity

A. P. Khromov

Avgust P. Khromov, https://orcid.org/0000-0002-2454-8009, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru

The paper gives necessary and sufficient conditions of classic solution for a homogeneous wave equation with a summable potential, fixed end-point, and zero initial velocity. With the use of Fourier method and Krylov method of improving series rate convergence an analogue of d'Alembert formula is derived in the form of exponentially convergent series. The paper essentially supports and extends the results of our work carried out in 2016. The suggested new method, based on the use of divergent (in Euler's sense) series, is very economical in using well-known mathematical facts. It opens a perspective of considerable advancement in studying other boundary problems for partial differential equations.

Keywords: Fourier method, divergent series, Krylov method, classic solution, resolvent.

Received: 24.04.2019 / Accepted: 04.06.2019 / Published: 31.08.2019

References

1. Khromov A. P. On the convergence of the formal Fourier solution of the wave equation with a summable potential. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2016, vol. 56, iss. 10, pp. 1778–1792. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542516100110
2. Chernyatin V. A. *Obosnovanie metoda Fur'e v smeshannoi zadache dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Justification of the Fourier Method in a Mixed Problem for Partial Differential Equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1991. 112 p. (in Russian).
3. Krylov A. N. *O nekotorykh differentsial'nykh uravneniyakh matematicheskoj fiziki, imeyushchikh prilozheniya v tekhnicheskikh voprosakh* [On Some Differential Equations of Mathematical Physics Having Applications in Engineering]. Moscow, Leningrad, GIT-TL, 1950. 368 p. (in Russian).
4. Burlutskaya M. S., Khromov A. P. Rezolventny approach in the Fourier method. *Dokl. Math.*, 2014, vol. 90, iss. 2, pp. 545–548. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064562414060076
5. Burlutskaya M. S., Khromov A. P. The resolvent approach for the wave equation. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2015, vol. 55, iss. 2, pp. 227–239. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542515020050
6. Euler L. *Differencial'noe ischislenie* [Differential calculus]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1949. 280 p. (in Russian).
7. Khromov A. P. Divergent series and functional equations related to analogues of a geometric progression. In: *Proc. Intern. Conf. "Pontryaginskie chteniya – XXX"*. Voronezh, Izdatel'skij dom VGU, 2019, pp. 291–300 (in Russian).
8. Kornev V. V., Khromov A. P. Classical and Generalized Solutions of a Mixed Problem for a Nonhomogeneous Wave Equation. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2019, vol. 59, iss. 2, pp. 275–289. DOI: https://doi.org/10.1134/S096554251902009X
9. Khromov A. P. Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of a Classical Solution of the Mixed Problem for the Homogeneous Wave Equation with an Integrable Potential. *Differential Equations*, 2019, vol. 55, iss. 5, pp. 703–717. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266119050112

Cite this article as:

Khromov A. P. On Classic Solution of the Problem for a Homogeneous Wave Equation with Fixed End-Points and Zero Initial Velocity. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 3, pp. 280–288 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288