



УДК 539.3

Теория колебаний углеродных нанотрубок как гибких микрополярных сетчатых цилиндрических оболочек с учетом сдвига

Е. Ю. Крылова, И. В. Папкина, Т. В. Яковлева, В. А. Крысько

Крылова Екатерина Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, kat.kylova@bk.ru

Папкина Ирина Владиславовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математика и моделирование», Саратовский технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77, ikravzova@mail.ru

Яковлева Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математика и моделирование», Саратовский технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77, yan-tan1987@mail.ru

Крысько Вадим Анатольевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математика и моделирование», Саратовский технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77, tak@sun.ru

В работе построена теория нелинейной динамики гибкой однослойной микрополярной цилиндрической оболочки сетчатой структуры. Геометрическая нелинейность учитывается по модели Теодора фон Кармана. Рассматривается неклассическая континуальная модель оболочки на основе среды Коссера со стесненным вращением частиц (псевдоконтинуум). При этом предполагается, что поля перемещений и вращений не являются независимыми. В рассмотрение вводится дополнительный независимый материальный параметр длины, связанный с симметричным тензором градиентом вращения. Уравнения движения элемента оболочки, граничные и начальные условия получены из вариационного принципа Остроградского–Гамильтона на основании кинематических гипотез третьего приближения (Пелеха–Шереметьева–Редди), позволяющих учесть не только поворот, но и искривление нормали после деформации. Предполагается, что цилиндрическая оболочка состоит из n семейств ребер, каждое из которых характеризуется углом наклона относительно положительного направления оси, направленной по длине оболочки, и расстоянием между соседними ребрами. Материал оболочек изотропный, упругий и подчиняется закону Гука. Рассматривается диссипативная механическая система. Как частный случай приведена система уравнений движения для микрополярной сетчатой оболочки Кирхгофа–Лява. Построенная в работе теория может быть в том числе использована для исследований поведения углеродных нанотрубок под действием статических и динамических нагрузок.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, углеродная нанотрубка, микрополярная теория, псевдоконтинуум Коссера, модель Пелеха–Шереметьева–Редди, сетчатая структура, статика и динамика, модель С. П. Тимошенко, модель Кирхгофа–Лява.

Поступила в редакцию: 20.10.2018 / Принята: 20.12.2018 / Опубликовано: 31.08.2019

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-305-316>



ВВЕДЕНИЕ

Колебания пластин и оболочек лежат в плоскости научных интересов многих ученых [1–4]. Развитие микросистемных технологий и внедрение их в стратегически важные области экономики привели к повышению интереса исследователей к наноразмерным механическим системам [5, 6]. Микрополярная теория используется при математическом моделировании поведения сплошных цилиндрических оболочек в работе [7], где построена линейная модель на основании кинематических гипотез Кирхгофа. В статьях [8, 9] приведены и исследованы математические модели микрополярных сплошных линейных цилиндрических оболочек, учитывающие не только поворот [8], но и искривление нормали после деформации [9]. Появление сверхтонкого и прочного материала — графена — привело к необходимости исследований таких систем, как углеродные нанотрубки (УНТ) [10–12]. Пиддиэсон [13] был одним из первых, кто применил нелокальную теорию упругости и предложил простейшую балочную модель Эйлера – Бернулли для изучения изгиба УНТ. В дальнейшем появился ряд работ, в которых УНТ рассматривается как балка модели высших приближений Тимошенко [14] и Пелеха – Шереметьева – Редди [15], где учет наноразмера также был связан с градиентной теорией упругости. Моментная теория упругости применена к анализу поведения УНТ в работе [16], в [17] — для изучения динамики углеродных нанотрубок с одинарными стенками на основе градиентных теорий упругости с учетом деформации сдвига. Как механический объект УНТ представляет собой однослойную или многослойную наноразмерную цилиндрическую оболочку сетчатой структуры. Приведенный выше обзор показывает, что средствами теории упругости в различных модификациях УНТ моделируются как балки или цилиндрические оболочки без учета их сетчатой структуры. В данной работе построена теория колебаний УНТ как геометрически и физически нелинейной гибкой однослойной микрополярной цилиндрической оболочки сетчатой структуры.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИКРОПОЛЯРНОЙ СЕТЧАТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕЛЕХА – ШЕРЕМЕТЬЕВА – РЕДДИ

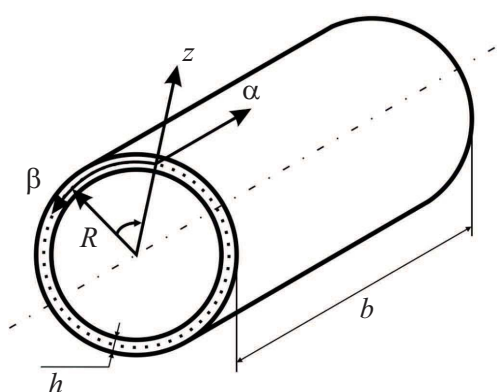


Рис. 1. Схема цилиндрической оболочки

Fig. 1. Scheme of the cylindrical shell

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, занимающую в пространстве \mathbf{R}^3 область $\Omega = \{0 \leq \alpha \leq b; 0 \leq \beta \leq 2\pi; -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}\}$ (рис. 1).

Компоненты вектора перемещений \bar{u} запишем с учетом гипотез Пелеха – Шереметьева – Редди:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u(\alpha, \beta, t) + z\gamma_\alpha - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \gamma_\alpha \right), \\ u_\beta &= v(\alpha, \beta, t) + z\gamma_\beta - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} + \gamma_\beta \right), \\ u_z &= w(\alpha, \beta, t), \end{aligned} \quad (1)$$

u, v, w — осевые смещения срединной поверхности оболочки в направлениях α, β, z , соответственно, $\gamma_\alpha, \gamma_\beta$ — углы поворота поперечных сечений оболочки.



Если в (1) пренебречь членами, подчеркнутыми двумя чертами, то получим соотношение модели С. П. Тимошенко, не учитывающей изгибание нормали, если при этом в членах, подчеркнутых одной чертой, положить $\gamma_\alpha = -\frac{\partial w}{\partial \alpha}$ и $\gamma_\beta = -\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta}$, то получим модель, не учитывающую сдвиг (Кирхгофа – Лява). Компоненты симметричного тензора полных деформаций e с учетом принятых гипотез и геометрической нелинейности в форме Т. фон Кармана примут вид

$$\begin{aligned}
 e_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + z \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\gamma_\alpha}{\partial \alpha} \right), \\
 e_{\beta\beta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{1}{R} w + z \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \beta} - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\gamma_\beta}{\partial \beta} \right), \\
 e_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \left(\frac{z}{2} - \frac{2z^3}{3h^2} \right) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \alpha} \right) - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}, \\
 e_{\beta z} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{2z^2}{3h^2} \right) \left(\gamma_\beta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{v}{4R}, \quad e_{\alpha z} = \left(\frac{1}{2} - \frac{2z^2}{3h^2} \right) \left(\gamma_\alpha + \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right), \quad e_{zz} = 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Классические континуальные модели не учитывают эффекты масштаба на наноразмерном уровне. В работе рассматривается неклассическая континуальная модель оболочки на основе среды Коссера со стесненным вращением частиц (псевдо-континуум). При этом предполагается, что поля перемещений и вращений не являются независимыми [18]. В таком случае компоненты симметричного тензора градиента кривизны χ примут вид

$$\begin{aligned}
 \chi_{\alpha\alpha} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \alpha} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) + \frac{2z^2}{h^2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \alpha} \right), \\
 \chi_{\beta\beta} &= -\frac{1}{2R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \beta} \right) - \frac{2z^2}{h^2 R} \left(\frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right), \\
 \chi_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \beta} \right) - \\
 &\quad - \frac{z^2}{h^2} \left(\frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right), \\
 \chi_{z\alpha} &= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} - \frac{v}{R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{\gamma_\beta}{R} \right) - \frac{z}{4} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \gamma_\alpha}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial^2 \gamma_\beta}{\partial \alpha^2} \right) + \\
 &\quad + \frac{2z}{h^2} \left(\gamma_\beta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{z^3}{3h^2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \gamma_\alpha}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial^2 \gamma_\beta}{\partial \alpha^2} \right), \\
 \chi_{z\beta} &= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\gamma_\alpha}{R} \right) - \frac{z}{4} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \gamma_\alpha}{\partial \beta^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \gamma_\beta}{\partial \alpha \partial \beta} \right) + \\
 &\quad + \frac{2z}{h^2} \left(\gamma_\alpha + \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{z^3}{3h^2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \gamma_\alpha}{\partial \beta^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \gamma_\beta}{\partial \alpha \partial \beta} \right), \\
 \chi_{zz} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \beta} - \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \alpha} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) - \frac{2z^2}{h^2} \left(\frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \alpha} - \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \beta} \right).
 \end{aligned} \tag{3}$$



Для материала оболочки определяющие соотношения примем в виде

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{E}{1-\nu^2} [e_{\alpha\alpha} + \nu e_{\beta\beta}], \quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1+\nu} e_{\alpha\beta}, \quad \sigma_{z\alpha} = \frac{E}{2(1+\nu)} e_{z\alpha}, \quad \alpha \rightleftharpoons \beta,$$

$$m_{ij} = \frac{El^2}{1+\nu} \chi_{ij}, \quad i, j = \alpha, \beta, z,$$

где σ_{ij} — компоненты тензора Коши, m_{ij} — компоненты симметричного тензора момента высшего порядка, для неоднородного материала $E(\alpha, \beta, z)$ — модуль Юнга, $\nu(\alpha, \beta, z)$ — коэффициент Пуассона, l — дополнительный независимый материальный параметр длины, связанный с χ .

Уравнения движения, граничные и начальные условия получим из вариационного принципа Остроградского – Гамильтона [19, 20, с. 513–518]:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta U + \delta W_\epsilon + \delta W_q) dt = 0, \tag{4}$$

здесь K — кинетическая энергия, $K = \frac{1}{2} \rho \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \right] dv$, вариация внешней работы, связанной с распределенными силами

$$\delta W_q = \int_0^{2\pi} \int_0^b q(\alpha, \beta, t) \delta w d\alpha d\beta$$

и с диссипацией энергии

$$\delta W_\epsilon = \int_{\Omega} \rho \left[\epsilon_\alpha \frac{\partial u}{\partial t} \delta u + \epsilon_\beta \frac{\partial v}{\partial t} \delta v + \epsilon_z \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right] dv,$$

ϵ_i — коэффициент диссипации в направлениях α, β, z , ρ — плотность материала оболочки, $q(\alpha, \beta, t)$ — внешняя нормальная нагрузка. Потенциальная энергия U в упругом теле, при бесконечно малых деформациях, с учетом моментной теории [21] примет вид $U = \int_{\Omega} (\sigma_{i,j} e_{i,j} + m_{i,j} \chi_{i,j}) dv$.

С учетом обозначений для классических и неклассических усилий и моментов

$$\{N_{\alpha\alpha}, M_{\alpha\alpha}, S_{\alpha\alpha}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\alpha} z^{\{0,1,3\}} dz, \quad \{Q_{z\alpha}, P_{z\alpha}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{z\alpha} k_s z^{\{0,2\}} dz,$$

$$\{Y_{\alpha\alpha}, R_{\alpha\alpha}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{\alpha\alpha} z^{\{0,2\}} dz, \quad \{Y_{z\alpha}, J_{z\alpha}, I_{z\alpha}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{z\alpha} k_s z^{\{0,1,3\}} dz, \quad \alpha \rightleftharpoons \beta,$$

$$\{T, H, S_{\alpha\beta}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} z^{\{0,1,3\}} dz, \quad \{Y_{\alpha\beta}, R_{\alpha\beta}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{\alpha\beta} z^{\{0,2\}} dz,$$

$$\{Y_{z,z}, R_{z,z}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{z,z} z^{\{0,2\}} dz,$$

из вариационного принципа получим разрешающие уравнения движения (5), граничные и начальные условия.



Функция k_s характеризует закон распределения касательных напряжений по толщине оболочки:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial N_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial\beta} + \frac{1}{2R^2} \left(-\frac{\partial Y_{\beta\beta}}{\partial\beta} + \frac{\partial Y_{zz}}{\partial\beta} + \frac{\partial^2 Y_{z\beta}}{\partial\beta^2} \right) + \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 Y_{z\alpha}}{\partial\alpha\partial\beta} = \rho h \epsilon_\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
 & \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\beta\beta}}{\partial\beta} + \frac{\partial T}{\partial\alpha} + \frac{1}{2R} Q_{z\beta} - \frac{1}{2R} \frac{\partial Y_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha} + \frac{1}{2R} \frac{\partial Y_{\beta\beta}}{\partial\alpha} - \frac{1}{2R^2} \frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial\beta} - \frac{1}{2R^2} Y_{z\alpha} + \\
 & \quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{z\alpha}}{\partial\alpha^2} - \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 Y_{z\beta}}{\partial\alpha\beta} = \rho h \epsilon_\beta \frac{\partial v}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\
 & \frac{\partial M_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial\beta} - Q_{z\alpha} + \frac{1}{2R} \frac{\partial Y_{\beta\beta}}{\partial\beta} + \frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial\alpha} + \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 J_{z\alpha}}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 J_{z\beta}}{\partial\beta^2} - \\
 & - \frac{1}{2R} \frac{\partial Y_{zz}}{\partial\beta} + \frac{1}{2R} Y_{z\beta} - \frac{4}{3h^2} \frac{\partial S_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha} + \frac{4}{h^2} P_{\alpha z} - \frac{4}{3h^2 R} \frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial\beta} - \frac{2}{h^2 R} \frac{\partial R_{\beta\beta}}{\partial\beta} + \frac{2}{h^2 R} \frac{\partial R_{zz}}{\partial\beta} - \\
 & \quad - \frac{2}{h^2} \frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial\alpha} - \frac{2}{3h^2 R} \frac{\partial^2 I_{\alpha z}}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{4}{h^2} J_{\beta z} - \frac{2}{3h^2 R^2} \frac{\partial^2 I_{\beta z}}{\partial\beta^2} = \frac{34\rho h^3}{315} \frac{\partial^2 \gamma_\alpha}{\partial t^2} - \frac{8h^3 \rho}{315} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha t^2}, \\
 & \frac{\partial H}{\partial\alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\beta\beta}}{\partial\beta} - Q_{z\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha} + \frac{\partial J_{\beta\beta}}{\partial\alpha} - \frac{1}{R} \frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial\beta} + \frac{1}{2R} Y_{z\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{zz}}{\partial\alpha} - \\
 & - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J_{zz}}{\partial\alpha^2} - \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 J_{z\beta}}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{4}{3h^2 R} \frac{\partial S_{\beta\beta}}{\partial\beta} + \frac{4}{h^2} P_{\beta z} - \frac{4}{3h^2} \frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial\alpha} + \frac{2}{h^2} \frac{\partial R_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha} + \frac{2}{h^2} \frac{\partial R_{zz}}{\partial\alpha} + \\
 & \quad + \frac{2}{h^2 R} \frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial\beta} - \frac{2}{3h^2} \frac{\partial^2 I_{\alpha z}}{\partial\alpha^2} - \frac{4}{h^2} J_{\alpha z} + \frac{2}{3h^2 R} \frac{\partial^2 I_{\beta z}}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{34\rho h^3}{315} \frac{\partial^2 \gamma_\beta}{\partial t^2} - \frac{8h^3 \rho}{315 R} \frac{\partial^3 w}{\partial \beta t^2}, \tag{5} \\
 & \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(N_{\alpha\alpha} \frac{\partial w}{\partial\alpha} \right) + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(T \frac{\partial w}{\partial\beta} \right) + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial\beta} \left(T \frac{\partial w}{\partial\alpha} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial\beta} \left(N_{\beta\beta} \frac{\partial w}{\partial\beta} \right) - \frac{1}{R} N_{\beta\beta} + \\
 & + \frac{\partial Q_{z\alpha}}{\partial\alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{z\beta}}{\partial\beta} - \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 Y_{\beta\beta}}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\beta}}{\partial\alpha^2} - \frac{1}{2R^2} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\beta}}{\partial\beta^2} - \frac{1}{2R^2} \frac{\partial Y_{z\alpha}}{\partial\beta} + \\
 & \quad + \frac{1}{2R} \frac{\partial Y_{z\beta}}{\partial\alpha} + \frac{4}{3h^2} \frac{\partial^2 S_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha^2} + \frac{4}{3h^2 R} \frac{\partial^2 S_{\beta\beta}}{\partial\beta^2} - \frac{4}{h^2} \frac{\partial P_{\alpha z}}{\partial\alpha} - \frac{4}{h^2 R} \frac{\partial P_{\beta z}}{\partial\beta} + \frac{8}{3h^2 R} \frac{\partial^2 S_{\alpha\beta}}{\partial\alpha\partial\beta} + \\
 & + \frac{2}{h^2 R} \frac{\partial^2 R_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{2}{h^2 R} \frac{\partial^2 R_{\beta\beta}}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{2}{h^2} \frac{\partial^2 R_{\alpha\beta}}{\partial\alpha^2} - \frac{2}{h^2 R} \frac{\partial^2 R_{\alpha\beta}}{\partial\beta^2} + \frac{4}{h^2 R} \frac{\partial J_{\alpha z}}{\partial\beta} + \frac{4}{h^2} \frac{\partial S_{\beta z}}{\partial\alpha} + q = \\
 & = \rho h \epsilon_z \frac{\partial w}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{8h^3 \rho}{315} \frac{\partial^3 \gamma_\alpha}{\partial \alpha t^2} + \frac{8h^3 \rho}{315 R} \frac{\partial^3 \gamma_\beta}{\partial \beta t^2} - \frac{h^3 \rho}{126} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 t^2} - \frac{h^3 \rho}{126 R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^2 t^2}.
 \end{aligned}$$

К системе уравнений (5) следует присоединить граничные и начальные условия в зависимости от условий закрепления и загрузки оболочки, которые также получаются из вариационного принципа. Пренебрегая в (5) членами, подчеркнутыми двумя чертами, получим уравнения колебаний гибкой сплошной цилиндрической оболочки модели С. П. Тимошенко, не учитывающей изгибание нормали.

Допустим, оболочка состоит из n семейств ребер, δ_j , a_j , φ_j — расстояние между ребрами, ширина ребер, угол между осью α и осью ребер j -го семейства. На рис. 2 изображен фрагмент оболочки, состоящей из одного семейства ребер.

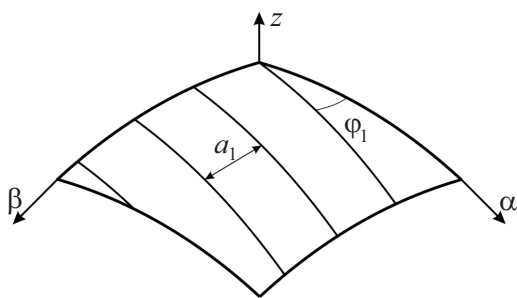


Рис. 2. Фрагмент сетчатой оболочки, состоящей из одного семейства ребер
 Fig. 2. Fragment of the retina consisting of a single family of ribs

Полагаем, что деформация оси какого-либо стержня равна деформации линии, совпадающей с осью этого стержня в расчетной модели. Будем считать, что одна из главных центральных осей поперечных сечений стержней оболочки совпадает с направлением нормали к срединной поверхности оболочки. Выражения для классических напряжений и напряжений высшего порядка в j -м семействе ребер, а также отличные от нуля напряжения и напряжения высшего порядка для сетчатой оболочки, состоящей из n семейств стержней, приведены в работе авторов [22].

Вводя обозначения $A_{sk} = \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j \cos^s \varphi_j \sin^k \varphi_j}{a_j}$, $s, k = \overline{0, 4}$, запишем выражения для классических и неклассических усилий и моментов цилиндрической сетчатой оболочки (6) (верхний индекс s показывает учет сетчатой структуры):

$$\begin{aligned}
 \{N_{\alpha\alpha}^s, M_{\alpha\alpha}^s, S_{\alpha\alpha}^s\} &= A_{40}\{N_{\alpha\alpha}, M_{\alpha\alpha}, S_{\alpha\alpha}\} + A_{22}\{N_{\beta\beta}, M_{\beta\beta}, S_{\beta\beta}\} + A_{31}\{T, H, S_{\alpha,\beta}\}, \\
 \{N_{\beta\beta}^s, M_{\beta\beta}^s, S_{\beta\beta}^s\} &= A_{22}\{N_{\alpha\alpha}, M_{\alpha\alpha}, S_{\alpha\alpha}\} + A_{04}\{N_{\beta\beta}, M_{\beta\beta}, S_{\beta\beta}\} + A_{13}\{T, H, S_{\alpha,\beta}\}, \\
 \{T^s, H^s, S_{\alpha,\beta}^s\} &= A_{31}\{N_{\alpha\alpha}, M_{\alpha\alpha}, S_{\alpha\alpha}\} + A_{13}\{N_{\beta\beta}, M_{\beta\beta}, S_{\beta\beta}\} + A_{22}\{T, H, S_{\alpha,\beta}\}, \\
 \{Q_{z\alpha}^s, P_{z\alpha}^s\} &= A_{20}\{Q_{z\alpha}, P_{z\alpha}\} + A_{11}\{Q_{z\beta}, P_{z\beta}\}, \\
 \{Q_{z\beta}^s, P_{z\beta}^s\} &= A_{11}\{Q_{z\alpha}, P_{z\alpha}\} + A_{02}\{Q_{z\beta}, P_{z\beta}\}, \\
 \{Y_{\alpha\alpha}^s, R_{\alpha\alpha}^s\} &= A_{40}\{Y_{\alpha\alpha}, R_{\alpha\alpha}\} + A_{22}\{Y_{\beta\beta}, R_{\beta\beta}\} + A_{31}\{Y_{\alpha,\beta}, R_{\alpha,\beta}\}, \\
 \{Y_{\beta\beta}^s, R_{\beta\beta}^s\} &= A_{22}\{Y_{\alpha\alpha}, R_{\alpha\alpha}\} + A_{04}\{Y_{\beta\beta}, R_{\beta\beta}\} + A_{13}\{Y_{\alpha,\beta}, R_{\alpha,\beta}\}, \\
 \{Y_{\alpha,\beta}^s, R_{\alpha,\beta}^s\} &= A_{31}\{Y_{\alpha\alpha}, R_{\alpha\alpha}\} + A_{13}\{Y_{\beta\beta}, R_{\beta\beta}\} + A_{22}\{Y_{\alpha,\beta}, R_{\alpha,\beta}\}, \\
 \{Y_{zz}^s, R_{zz}^s\} &= A_{10}\{Y_{z\alpha}, R_{z\alpha}\} + A_{01}\{Y_{z\beta}, R_{z\beta}\} + A_{00}\{Y_{zz}, R_{zz}\}, \\
 \{Y_{z\alpha}^s J_{z\alpha}^s, I_{z\alpha}^s\} &= A_{20}\{Y_{z\alpha}^s J_{z\alpha}^s, I_{z\alpha}^s\} + A_{11}\{Y_{z\beta}^s J_{z\beta}^s, I_{z\beta}^s\} + A_{10}\{Y_{zz}, J_{zz}, I_{zz}\}, \\
 \{Y_{z\beta}^s J_{z\beta}^s, I_{z\beta}^s\} &= A_{11}\{Y_{z\alpha}^s J_{z\alpha}^s, I_{z\alpha}^s\} + A_{02}\{Y_{z\beta}^s J_{z\beta}^s, I_{z\beta}^s\} + A_{01}\{Y_{zz}, J_{zz}, I_{zz}\}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Подставляя в уравнения (5) выражения (6), получим разрешающую систему уравнений движения элемента замкнутой гибкой микрополярной цилиндрической оболочки сетчатой структуры модели Пелеха – Шереметьева – Редди. В данной модели жесткость стержней на изгиб в плоскости, касательной к срединной поверхности оболочки, не учитывается, поэтому порядки систем дифференциальных уравнений, описывающих поведение сетчатых и сплошных оболочек, совпадают. При этом совпадают и формулировки граничных условий соответствующих краевых задач [23].

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИКРОПОЛЯРНОЙ СЕТЧАТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ КИРХГОФА – ЛЯВА

Если в выражениях для компонент вектора перемещений (1) слагаемое при z^3 , подчеркнутое двумя чертами, положить равным нулю, а в слагаемых при z , подчеркнутых одной чертой, выполнить замену γ_α на $-\frac{\partial w}{\partial \alpha}$ и γ_β на $-\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta}$, то, повторяя выкладки предыдущего параграфа, получим математическую модель



колебаний геометрически нелинейной сетчатой микрополярной цилиндрической оболочки Кирхгофа – Лява

$$\begin{aligned}
 & A_{40} \frac{\partial^2 M_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha^2} + A_{22} \frac{\partial^2 M_{\beta\beta}}{\partial \alpha^2} + A_{31} \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2} + \frac{A_{40}}{R^2} \frac{\partial^2 N_{\alpha\alpha}}{\partial \beta^2} + \frac{A_{22}}{R^2} \frac{\partial^2 N_{\beta\beta}}{\partial \beta^2} + \frac{A_{31}}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \beta^2} + \\
 & + \frac{2A_{31}}{R} \frac{\partial^2 M_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{2A_{13}}{R} \frac{\partial^2 M_{\beta\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{2A_{22}}{R} \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha \partial \beta} + A_{40} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(N_{\alpha\alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{A_{22}}{2R^2} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\beta}}{\partial \beta^2} + \\
 & + A_{22} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(N_{\beta\beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + A_{31} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(T \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{2A_{31}}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(N_{\alpha\alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{A_{13}}{2R^2} \frac{\partial^2 Y_{\beta\beta}}{\partial \beta^2} + \\
 & + \frac{2A_{13}}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(N_{\beta\beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{2A_{22}}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(T \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{2A_{31}}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(N_{\alpha\alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{A_{31}}{2R^2} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\alpha}}{\partial \beta^2} + \\
 & + \frac{2A_{13}}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(N_{\beta\beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{2A_{22}}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(T \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{A_{22}}{R^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(N_{\alpha\alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \\
 & + \frac{A_{04}}{R^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(N_{\beta\beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{A_{13}}{R^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(T \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{A_{22}}{R} N_{\alpha\alpha} - \frac{A_{04}}{R} N_{\beta\beta} - \frac{A_{13}}{R} T - \frac{A_{40}}{2R} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha \partial \beta} - \\
 & - \frac{A_{22}}{2R} \frac{\partial^2 Y_{\beta\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{A_{31}}{2R} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{A_{22}}{2R} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{A_{04}}{2R} \frac{\partial^2 Y_{\beta\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{A_{13}}{2R} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{A_{31}}{2} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha^2} + \quad (7) \\
 & + \frac{A_{13}}{2} \frac{\partial^2 Y_{\beta\beta}}{\partial \alpha^2} + \frac{A_{22}}{2} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\beta}}{\partial \alpha^2} + q = \rho h \epsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\
 & A_{40} \frac{\partial N_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + A_{22} \frac{\partial N_{\beta\beta}}{\partial \alpha} + A_{31} \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{A_{31}}{R} \frac{\partial N_{\alpha\alpha}}{\partial \beta} + \frac{A_{13}}{R} \frac{\partial N_{\beta\beta}}{\partial \beta} + \frac{A_{22}}{R} \frac{\partial T}{\partial \beta} - \\
 & - \frac{A_{11}}{2R} \frac{\partial^2 Y_{z\alpha}}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{A_{02}}{2R} \frac{\partial^2 Y_{z\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{A_{20}}{2R^2} \frac{\partial^2 Y_{z\alpha}}{\partial \beta^2} - \frac{A_{11}}{2R^2} \frac{\partial^2 Y_{z\beta}}{\partial \beta^2} = \rho h \epsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\
 & \frac{A_{22}}{R} \frac{\partial N_{\alpha\alpha}}{\partial \beta} + \frac{A_{04}}{R} \frac{\partial N_{\beta\beta}}{\partial \beta} + \frac{A_{13}}{R} \frac{\partial T}{\partial \beta} + A_{31} \frac{\partial N_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + A_{13} \frac{\partial N_{\beta\beta}}{\partial \alpha} + A_{22} \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \\
 & + \frac{A_{20}}{2} \frac{\partial^2 Y_{z\alpha}}{\partial \alpha^2} + \frac{A_{11}}{2} \frac{\partial^2 Y_{z\beta}}{\partial \alpha^2} + \frac{A_{11}}{2R} \frac{\partial^2 Y_{z\alpha}}{\partial \alpha \beta} + \frac{A_{02}}{2R} \frac{\partial^2 Y_{z\beta}}{\partial \alpha \beta} = \rho h \epsilon \frac{\partial v}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.
 \end{aligned}$$

К системе уравнений (7) следует присоединить граничные и начальные условия в зависимости от условий закрепления и загрузки оболочки.

ВЫВОДЫ

В работе впервые построена теория нелинейной динамики гибких микрополярных сетчатых цилиндрических оболочек, основанная на кинематических гипотезах третьего приближения (Пелеха – Шереметьева – Редди), позволяющая учесть не только поворот нормали после деформации, но и ее искривление. Из построенной теории как частные случаи могут быть получены модели второго (С. П. Тимошенко, учитывающие только поворот) и первого (Кирхгофа – Лява) приближения. А также линейные математические модели (не учитывающие теорию Кирхгофа), математические модели динамики сплошных оболочек (не учитывающие теории Пшеничнова), математические модели, полученные на основании классической континуальной теории (без учета масштабных эффектов), математические модели для пологих оболочек. Построенная в работе теория может быть в том числе использована для исследований поведения УНТ под действием статических и динамических нагрузок.



Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00351а).

Библиографический список

1. Белосточный Г. Н., Мыльцина О. А. Геометрически нерегулярные пластинки под действием быстропеременных по временной координате силовых и температурных воздействий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 442–451. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-442-451>
2. Krylova E. Y., Yakovleva T. V., Bazhenov V. G. The influence of the noise field on parametric oscillations of flexible square plates // Russian Aeronautics. 2017. Vol. 60, № 2. P. 177–183. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1068799817020039>
3. Krylova E. Y., Papkova I. V., Erofeev N. P., Zakharov V. M., Krysko V. A. Complex fluctuations of flexible plates under longitudinal loads with account for white noise // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2016. Vol. 57, № 4. P. 714–719. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894416040167>
4. Awrejcewicz J., Krysko A. V., Krysko V. A., Krylova E. Yu. Turbulent phenomena in flexible plates and shells // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2014. № 12. P. 49–76. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-08266-0-5>
5. Krysko A. V., Awrejcewicz J., Zhigalov M. V., Pavlov S. P., Krysko V. A. Nonlinear behaviour of different flexible size-dependent beams models based on the modified couple stress theory. Part 1. Governing equations and static analysis of flexible beams // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2017. № 93. P. 96–105.
6. Krysko A. V., Awrejcewicz J., Zhigalov M. V., Pavlov S. P., Krysko V. A. Nonlinear behaviour of different flexible size-dependent beams models based on the modified couple stress theory. Part 2. Chaotic dynamics of flexible beams // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2017. № 93 P. 106–212.
7. Zhou X., Wang L. Vibration and stability of micro-scale cylindrical shells conveying fluid based on modified couple stress theory // Micro and Nano Letters. 2012. Vol. 7, iss. 7. P. 679–684. DOI: <https://doi.org/10.1049/mnl.2012.0184>
8. Safarpour H., Mohammadi K., Ghadiri M. Temperature-dependent vibration analysis of a FG viscoelastic cylindrical microshell under various thermal distribution via modified length scale parameter: a numerical solution // Journal of the Mechanical Behavior of Materials. 2017. Vol. 26, iss. 1–2. P. 9–24. DOI: <https://doi.org/10.1515/jmbm-2017-0010>
9. Sahmani S., Ansari R., Gholami R., Darvizeh A. Dynamic stability analysis of functionally graded higher-order shear deformable microshells based on the modified couple stress elasticity theory // Composites : Part B. 2013. Vol. 51. P. 44–53. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.02.037>
10. Majeed A., Zeeshan A., Mubbashir S. Vibration analysis of carbon nanotubes based on cylindrical shell by inducting Winkler and Pasternak foundations // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2018. P. 1140–1145. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1430282>
11. Hussain M., Naeem M. N., Shahzad A., He M. Vibrational behavior of single-walled carbon nanotubes based on cylindrical shell model using wave propagation approach // IP Advances. 2017. Vol. 7, iss. 4, 045114. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4979112>
12. Ninh D. G., Bich D. H. Characteristics of nonlinear vibration of nanocomposite cylindrical shells with piezoelectric actuators under thermo-mechanical loads // Aerospace Science and Technology. 2018. Vol. 77. P. 305–312. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.04.008>



13. *Peddiesson J., Buchanan R., McNitt R. P.* Application of nonlocal continuum models to nanotechnology // *Int. J. Eng. Sci.* 2003. Vol. 41. P. 595–609. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(02\)00210-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(02)00210-0)
14. *Bazehhour B. G., Mousavi S. M., Farshidianfar A.* Free vibration of high-speed rotating Timoshenko shaft with various boundary conditions: effect of centrifugally induced axial force // *Archive of Applied Mechanics*. 2014. Vol. 84, № 12. P. 1691–1700. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-013-0762-5>
15. *Karlicic D., Kozic P., Pavlovic R.* Flexural vibration and buckling analysis of single-walled carbon nanotubes using different gradient elasticity theories based on reddy and huu-tai formulations // *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2015. Vol. 51, № 1. P. 217–233. DOI: <https://doi.org/10.15632/jtam-pl.53.1.217>
16. *Иванова Е. А., Морозов Н. Ф., Семенов Б. Н., Фирсова А. Д.* Об определении упругих модулей наноструктур: теоретические расчеты и методика экспериментов // *Изв. РАН. МТТ*. 2005. № 4. С. 75–85.
17. *Daneshmand F., Rafiei M., Mohebpour S. R., Heshmati M.* Stress and strain-inertia gradient elasticity in free vibration analysis of single walled carbon nanotubes with first order shear deformation shell theory // *Appl. Math. Modelling*. 2013. Vol. 37, № 16–17. P. 7983–8003. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.01.052>
18. *Ерофеев В. И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1999. 328 с.
19. *Ostrogradsky M.* Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Petersburg. 1850. Vol. 8, № 3. P. 33–48.
20. *Hamilton W.* Report of the Fourth Meeting of the British Association for the Advancement of Science. L., 1835.
21. *Sun C. T., Zhang Y.* Size-dependent elastic moduli of platelike nanomaterials // *J. Appl. Phys.* 2003. Vol. 3. P. 1212–1218.
22. *Крылова Е. Ю., Папкина И. В., Салтыкова О. А., Синичкина А. О., Крысько В. А.* Математическая модель колебаний размерно-зависимых цилиндрических оболочек сетчатой структуры с учетом гипотез Кирхгофа – Лява // *Нелинейный мир*. 2018. Т. 16, № 4. С. 17–28. DOI: <https://doi.org/10.18127/j20700970-201804-03>
23. *Пшеничников Г. И.* Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок. М. : Наука, 1982. 352 с.

Образец для цитирования:

Крылова Е. Ю., Папкина И. В., Яковлева Т. В., Крысько В. А. Теория колебаний углеродных нанотрубок как гибких микрополярных сетчатых цилиндрических оболочек с учетом сдвига // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 305–316. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-305-316>

Theory of Vibrations of Carbon Nanotubes Like Flexible Micropolar Mesh Cylindrical Shells Taking into Account Shift

E. Yu. Krylova, I. V. Papkova, T. V. Yakovleva, V. A. Krysko

Ekaterina Yu. Krylova, <https://orcid.org/0000-0002-7593-0320>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, kat.krylova@bk.ru

Irina V. Papkova, <https://orcid.org/0000-0003-4062-1437>, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St., Saratov 410054, Russia, ikravzova@mail.ru



Tatyana V. Yakovleva, <https://orcid.org/0000-0001-6345-1480>, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St., Saratov 410054, Russia, yan-tan1987@mail.ru

Vadim A. Krysko, <https://orcid.org/0000-0002-4914-764X>, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St., Saratov 410054, Russia, tak@sun.ru

A theory of nonlinear dynamics of a flexible single-layer micropolar cylindrical shell of a network structure is constructed. The geometric nonlinearity is taken into account by the model of Theodor von Karman. We consider a nonclassical continuum shell model based on the Cosserat medium with constrained particle rotation (pseudocontinuum). It is assumed that the displacement and rotation fields are not independent. An additional independent material length parameter associated with the symmetric tensor of the rotation gradient is introduced into consideration. The equations of motion of the shell element, boundary and initial conditions are obtained from the variational principle of Ostrogradskii–Hamilton on the basis of kinematic hypotheses of the third approximation (Peleha–Sheremetyev–Reddy), allowing to take into account not only the rotation, but also the curvature of the normal after deformation. It is assumed that the cylindrical shell consists of n families of edges, each of which is characterized by an inclination angle with respect to the positive direction of the axis directed along the length of the shell and the distance between neighboring edges. The shell material is isotropic, elastic, and obeys Hooke's law. A dissipative mechanical system is considered. As a special case, the system of equations of motion for Kirchhoff–Love's micro-polar reticulated shell is presented. The theory constructed in this paper can be used, among other things, for studying the behavior of CNTs under the action of static and dynamic loads.

Keywords: cylindrical shell, CNT, micropolar theory, Cosserat pseudocontinuum, Peleha–Sheremetyev–Reddy model, net structure, statics and dynamics, model Tymoshenko, the Kirchhoff–Love model.

Received: 20.10.2018 / Accepted: 20.12.2018 / Published: 31.08.2019

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 18-01-00351a).

References

1. Belostochny G. N., Myltcina O. A. The Geometrical Irregular Plates under the Influence of the Quick Changed on the Time Coordinate Forces and Temperature Effects. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 4, pp. 442–451 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-442-451>
2. Krylova E. Y., Yakovleva T. V., Bazhenov V. G. The influence of the noise field on parametric oscillations of flexible square plates. *Russian Aeronautics*, 2017, vol. 60, no. 2, pp. 177–183. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1068799817020039>
3. Krylova E. Y., Papkova I. V., Erofeev N. P., Zakharov V. M., Krysko V. A. Complex fluctuations of flexible plates under longitudinal loads with account for white noise. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, vol. 57, no. 4, pp. 714–719. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894416040167>
4. Awrejcewicz J., Krysko A. V., Krysko V. A., Krylova E. Yu. Turbulent phenomena in flexible plates and shells. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2014, no. 12, pp. 49–76. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-08266-0-5>



5. Krysko A. V., Awrejcewicz J., Zhigalov M. V., Pavlov S. P, Krysko V. A. Nonlinear behaviour of different flexible size-dependent beams models based on the modified couple stress theory. Part 1. Governing equations and static analysis of flexible beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2017, no. 93, pp. 96–105.
6. Krysko A. V., Awrejcewicz J., Zhigalov M. V., Pavlov S. P, Krysko V. A. Nonlinear behaviour of different flexible size-dependent beams models based on the modified couple stress theory. Part 2. Chaotic dynamics of flexible beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2017, no. 93, pp. 106–212.
7. Zhou X., Wang L. Vibration and stability of micro-scale cylindrical shells conveying fluid based on modified couple stress theory. *Micro and Nano Letters*, 2012, vol. 7, iss. 7, pp. 679–684. DOI: <https://doi.org/10.1049/mnl.2012.0184>
8. Safarpour H., Mohammadi K., Ghadiri M. Temperature-dependent vibration analysis of a FG viscoelastic cylindrical microshell under various thermal distribution via modified length scale parameter: a numerical solution. *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, 2017, vol. 26, iss. 1–2, pp. 9–24. DOI: <https://doi.org/10.1515/jmbm-2017-0010>
9. Sahmani S., Ansari R., Gholami R., Darvizeh A. Dynamic stability analysis of functionally graded higher-order shear deformable microshells based on the modified couple stress elasticity theory. *Composites: Part B*, 2013, vol. 51, pp. 44–53. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.02.037>
10. Majeed A., Zeeshan A., Mubbashir S. Vibration analysis of carbon nanotubes based on cylindrical shell by inducting Winkler and Pasternak foundations. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2018, pp. 1140–1145. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1430282>
11. Hussain M., Naeem M. N., Shahzad A., He M. Vibrational behavior of single-walled carbon nanotubes based on cylindrical shell model using wave propagation approach. *IP Advances*, 2017, vol. 7, iss. 4, 045114. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4979112>
12. Ninh D. G., Bich D. H. Characteristics of nonlinear vibration of nanocomposite cylindrical shells with piezoelectric actuators under thermo-mechanical loads. *Aerospace Science and Technology*, 2018, vol. 77, pp. 305–312. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.04.008>.
13. Peddieson J., Buchanan R., McNitt R. P. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *Int. J. Eng. Sci.*, 2003, vol. 41, pp. 595–609. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(02\)00210-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(02)00210-0)
14. Bazehhour B. G., Mousavi S. M., Farshidianfar A. Free vibration of high-speed rotating Timoshenko shaft with various boundary conditions: effect of centrifugally induced axial force. *Archive of Applied Mechanics*, 2014, vol. 84, no. 12, pp. 1691–1700. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-013-0762-5>
15. Karlicic D., Kozic P., Pavlovic R. Flexural vibration and buckling analysis of single-walled carbon nanotubes using different gradient elasticity theories based on reddy and huutai formulations. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, vol. 51, no. 1, pp. 217–233. DOI: <https://doi.org/10.15632/jtam-pl.53.1.217>
16. Ivanova E. A., Morozov N. F., Semenov B. N., Firsova A. D. Determination of elastic moduli of nanostructures: theoretical estimates and experimental techniques. *Mech. Solids*, 2005, vol. 40, no. 4, pp. 60–68 (in Russian).
17. Daneshmand F., Rafiei M., Mohebpour S. R., Heshmati M. Stress and strain-inertia gradient elasticity in free vibration analysis of single walled carbon nanotubes with first order shear deformation shell theory. *Appl. Math. Modelling*, 2013, vol. 37, no. 16–17, pp. 7983–8003. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.01.052>
18. Erofeev V. I. *Volnovye protsessy v tverdykh telakh s mikrostrukturoj* [Wave processes in solids with a microstructure]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1999. 328 p. (in Russian).



19. Ostrogradsky M. *Memoires de l'Academie imperiale des sciences de St. Petersburg*, 1850, vol. 8, no. 3, pp. 33–48.
20. Hamilton W. *Report of the Fourth Meeting of the British Association for the Advancement of Science*. London, 1835.
21. Sun C. T., Zhang Y. Size-dependent elastic moduli of platelike nanomaterials. *J. Appl. Phys.*, 2003, vol. 3, pp. 1212–1218.
22. Krylova E. Yu., Papkova I. V., Saltykov O. A., Sinichkina A. O., Krysko V. A. Mathematical model of vibrations of the cylindrical shells, which are dimensionally dependent with the net structure, taking into account the Kirchhoff–Love hypotheses. *Nonlineinyi mir* [Nonlinear World], 2018, vol. 16, no. 4. pp. 17–28 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18127/j20700970-201804-03>
23. Pshenichnov G. I. *Teoriya tonkikh uprugikh setchatykh obolochek i plastinok* [Theory of thin elastic mesh shells and plates]. Moscow, Nauka, 1982. 352 p. (in Russian).

Cite this article as:

Krylova E. Yu., Papkova I. V., Yakovleva T. V., Krysko V. A. Theory of Vibrations of Carbon Nanotubes Like Flexible Micropolar Mesh Cylindrical Shells Taking into Account Shift. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 3, pp. 305–316 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-305-316>
