



УДК 539.3

Осесимметричное поле напряжений вблизи кругового выреза в теле с зависящими от вида напряженного состояния пластическими свойствами

Е. В. Ломакин, Н. Г. Минаев

Ломакин Евгений Викторович, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории пластичности, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1, evlomakin@yandex.ru

Минаев Никита Геннадьевич, аспирант кафедры теории пластичности, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1, nickita3@yandex.ru

В работе проведен анализ свойств определяющих соотношений теории пластичности для сред с зависящими от вида напряженного состояния пластическими свойствами. Использовано условие пластичности, представленное в соответствующем обобщенном виде, в которое введен параметр вида напряженного состояния, представляющий собой отношение гидростатической компоненты напряжений к эквивалентному напряжению Мизеса, названный в литературе трехосностью напряжений. Для частного вида условия пластичности получено аналитическое решение задачи о пространстве с круговым отверстием в условиях плоской деформации. Проведено сравнение распределения напряжений на основе полученного решения с распределением напряжений в аналогичной задаче для тела, пластические свойства которого инвариантны к виду напряженного состояния, с использованием условия пластичности Губера–Мизеса. Исследовано влияние степени чувствительности свойств материалов к виду напряженного состояния на распределение напряжений в пластических областях.

Ключевые слова: теория пластичности, плоская деформация, критерий Кулона–Мора, плоскость с круговым вырезом.

Поступила в редакцию: 19.05.2019 / Принята: 16.06.2019 / Опубликовано: 31.08.2019

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-317-325>

ВВЕДЕНИЕ

Для многих материалов переход из упругого состояния в пластическое определяется не только величиной интенсивности касательных напряжений или эквивалентным напряжением, но и гидростатической компонентой напряжений. Это связано с тем, что механизм необратимого деформирования материалов имеет не только сдвиговую природу, как это принято в классических теориях пластичности для пластически несжимаемых материалов, но также включает зарождение и развитие микротрещин, пор и других элементов неоднородности структуры. Такие процессы характерны для различных конструкционных материалов, таких как чугун, графит, огнеупорные керамики, горные породы, полимерные материалы, некоторые металлические сплавы. Часть из этих материалов обычно относится к хрупким, но при определенных условиях они проявляют заметные пластические свойства.



При решении различных практически важных задач чаще всего используется модель Друкера – Прагера [1], которая является в некотором смысле обобщением теории Кулона – Мора [2], с условием пластичности, включающим первый инвариант тензора напряжений и второй инвариант девиатора напряжений, или гидростатическую компоненту напряжений и эквивалентное напряжение Мизеса. Исследованию свойств уравнений данной модели посвящены работы многих авторов [1, 3–6] и указано, что в материалах, поведение которых описывается моделью Друкера – Прагера, процессы сдвигового и объемного деформирования взаимосвязаны, такие материалы относятся к дилатирующим. Кроме того, на основе экспериментальных исследований установлено, что пластические свойства материалов зависят не только от интенсивности касательных напряжений и гидростатической компоненты напряжений, но и от вида внешних воздействий или вида напряженного состояния, которое формируется в телах под действием нагрузок [4, 6–8]. Наиболее заметно этот эффект проявляется при исследовании пластических свойств пористых материалов и для данных материалов предложены соответствующие теории пластичности [4, 8–11].

С использованием модели Друкера – Прагера исследованы особенности упруго-пластического деформирования материалов в процессе наноиндектирования и продемонстрировано хорошее соответствие между теоретическими зависимостями и результатами экспериментальных исследований свойств каменного угля [12]. Исследованы также параметры этой модели для полимерных материалов [13]. Получено полуаналитическое решение для тонкого кругового диска и исследовано влияние зависимости критерия пластичности от гидростатического напряжения на характер распределения напряжений и формирование пластических областей в диске [14, 15].

В данной работе получено аналитическое решение задачи о пространстве с круговым отверстием под действием внутреннего давления для случая плоской деформации. Исследовано влияние зависимости пластических свойств материала от вида напряженного состояния на характер распределения напряжений и размер пластических областей в зависимости от параметра, характеризующего чувствительность пластических свойств материала к виду внешних воздействий.

1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

В работе [4] условие пластичности для дилатирующей среды представлено в следующем обобщенном виде:

$$F(\sigma_{ij}) = f(\xi)\sigma_0 = k. \quad (1)$$

В этой формуле $\xi = \sigma/\sigma_0$ — параметр, который характеризует соотношение между нормальным и касательным напряжением в точке сплошной среды, $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$ — среднее нормальное напряжение или гидростатическая компонента напряжений, $\sigma_0 = \sqrt{3/2 S_{ij}S_{ij}}$ — интенсивность касательных напряжений, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$. Можно принять, что при чистом сдвиге ($\xi = 0$) значение функции $f(0) = 1$. Тогда $k = \sqrt{3}\tau_s$, где τ_s — предел текучести при сдвиге.

При рассмотрении различных выражений для функции $f(\xi)$ можно получить некоторые из предложенных ранее условий пластичности для поврежденных, пористых и гранулированных сред. Для линейной функции

$$f(\xi) = 1 + C\xi \quad (2)$$



из (1) получается условие Друкера – Прагера $\sigma_0 + \sigma = k$, которое находит широкое применение в механике грунтов.

В случае, когда

$$f(\xi) = \sqrt{1 + \alpha\xi^2} \quad (\alpha > 0),$$

получается условие пластичности Грина $\sigma_0^2 + \alpha\sigma^2 = k^2$, предложенное для пористых сред. Параметры α и k в общем случае представляют собой функции параметра пористости сплошной среды.

При $f(\xi) \equiv 1$ условие (1) совпадает с условием пластичности Губера – Мизеса $\sigma_0 = k$ [9].

Принимая ассоциированный с условием (1) закон течения $\dot{\epsilon}_{ij} = h' \partial F / \partial \sigma_{ij}$, для случая жесткопластического тела связь между скоростями деформаций и напряжениями можно представить в следующем виде:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = h' \left[\frac{1}{3} \Lambda(\xi) \delta_{ij} + \frac{3}{2} \frac{\lambda(\xi) f(\xi) S_{ij}}{k} \right], \quad (3)$$

где $\Lambda(\xi) = f'(\xi)$, $\lambda(\xi) = f(\xi) - \xi f'(\xi)$, $h' = \frac{H}{\chi(\xi)}$, $H = \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}$, $\chi(\xi) = \sqrt{\frac{1}{3} \Lambda^2(\xi) + \frac{3}{2} \lambda^2(\xi)}$.

Функции $\Lambda(\xi)$ и $\lambda(\xi)$ и их производные взаимосвязаны и для них выполняются следующие соотношения: $\lambda(\xi) + \xi \Lambda(\xi) = f(\xi)$, $\lambda'(\xi) + \xi \Lambda'(\xi) = 0$. Из (3) можно получить выражения для интенсивности скоростей пластических деформаций $\Gamma = \sqrt{2/3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = h' \lambda(\xi)$, где $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} - 1/3 \dot{\epsilon} \delta_{ij}$ и скорости объемной деформации $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{ij} \delta_{ij} = h' \Lambda(\xi)$. Из представленных выражений видно, что функция $\lambda(\xi)$ должна быть положительно определена. В этом случае скорость остаточной объемной деформации пропорциональна интенсивности скоростей деформации $\dot{\epsilon} = \Gamma \Lambda(\xi) / \lambda(\xi)$.

В общем случае коэффициент пропорциональности $\Lambda(\xi) / \lambda(\xi)$ зависит от вида напряженного состояния, т.е. от ξ , и принимает разные значения для разных соотношений между нормальным и касательным напряжениями в сплошной среде. Для случая линейной функции (2) коэффициент постоянный.

Рассмотрим случай плоской деформации: $\dot{\epsilon}_{33} = \dot{\epsilon}_{13} = \dot{\epsilon}_{23} = 0$. Далее, используя (3), можно выразить σ_{33} через σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} и исключить σ_{33} из (1). В результате получаем следующие выражения:

$$\sigma_{33} = \sigma - \frac{2}{9} \sigma_0 \frac{\Lambda(\xi)}{\lambda(\xi)}, \quad \sigma_0 = S_0 \left[1 - \frac{\Lambda^2(\xi)}{9\lambda^2(\xi)} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \sigma = S - \sigma_0 \frac{\Lambda(\xi)}{9\lambda(\xi)}, \quad (4)$$

$$S_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2]^{\frac{1}{2}}, \quad S = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

Введем параметр $\zeta = S/S_0$ и, используя (4), выразим ζ через ξ :

$$\zeta = \left[\xi + \frac{1}{9} \frac{\Lambda(\xi)}{\lambda(\xi)} \right] \left[1 - \frac{1}{9} \frac{\Lambda^2(\xi)}{\lambda^2(\xi)} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Используя (5) и (4), можно представить условие пластичности (1) в виде

$$f_1(\zeta) S_0 = k, \quad f_1(\zeta) = f[\xi(\zeta)] \left[1 - \frac{1}{9} \frac{\Lambda_1^2(\zeta)}{\lambda_1^2(\zeta)} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

$$\Lambda_1(\zeta) = \Lambda[\xi(\zeta)], \quad \lambda_1 = \lambda[\xi(\zeta)].$$



Так как $\zeta = S/S_0 = S f_1(\zeta)/k$, то ζ и напряжение S_0 выражаются через S , а зависимость $\zeta = \xi(S)$ является взаимнооднозначной. Также можно отметить, что $S_0 = \sqrt{3}kF(S)$, где $F(S) = 3^{-\frac{1}{2}} f_1^{-1}[\zeta(S)]$. Формулы для напряжений в случае плоской деформации можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{11} = S - kF(S) \sin 2\theta, \sigma_{22} = S + kF(S) \sin 2\theta, \sigma_{12} = kF(S) \cos 2\theta. \quad (7)$$

В (7) угол θ представляет собой угол между осью x_1 и направлением площадки, на которой действует максимальное касательное напряжение. В условиях плоской деформации система уравнений для определения напряженного состояния включает в себя условие пластичности (1) и уравнения равновесия:

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0, \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0. \quad (8)$$

Подставив выражения (7) в уравнения равновесия (8), получим систему для определения S и θ :

$$\begin{aligned} S_{,1} - kF'(S)(S_{,1} \sin 2\theta - S_{,2} \cos 2\theta) - 2kF(S)(\theta_{,1} \cos 2\theta + \theta_{,2} \sin 2\theta) &= 0, \\ S_{,2} + kF'(S)(S_{,1} \cos 2\theta + S_{,2} \sin 2\theta) - 2kF(S)(\theta_{,1} \sin 2\theta - \theta_{,2} \cos 2\theta) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Штрих обозначает дифференцирование по переменной S . Система (9) будет гиперболической при $|kF'| < 1$, что накладывает ограничения на значения функции, характеризующей степень чувствительности пластических свойств среды к изменению вида напряженного состояния.

Выпишем характеристики системы уравнений (9) и обозначим их индексами α и β , а также выпишем соотношения вдоль них:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \operatorname{tg} \phi_{\alpha,\beta} = \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{1 - k^2 F'^2}}{-kF' + \sin 2\theta}, \quad dS \mp \frac{2kF d\theta}{\sqrt{1 - k^2 F'^2}}. \quad (10)$$

Легко заметить, что характеристики (10) будут ортогональны только в случае, если $f(\xi) \equiv \operatorname{const}$, когда условие (1) совпадает с условием пластичности Губера – Мизеса.

2. ЗАДАЧА О ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ВЫРЕЗОМ

Рассмотрим задачу о неограниченном теле с круговым вырезом. По всему контуру выреза приложено нормальное давление, равное p . Перейдем к безразмерным величинам, для этого радиальные координаты отнесем к радиусу отверстия a , а напряжения — к k . Рассмотрим критерий пластичности (1) для случая линейной функции (2). Введем полярную систему координат (r, ψ) . Формулы для напряжений (7) переписутся для полярной системы координат следующим образом:

$$\sigma_{rr} = S - kF(S) \sin 2\theta, \quad \sigma_{\psi\psi} = S + kF(S) \sin 2\theta, \quad \sigma_{r\psi} = kF(S) \cos 2\theta. \quad (11)$$

В условиях осевой симметрии напряжения σ_{rr} и $\sigma_{\psi\psi}$ являются главными и уравнения равновесия (8) в полярной системе координат сведутся к одному уравнению:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\psi\psi}}{r} = 0. \quad (12)$$



Граничное условие в этой задаче будет следующим:

$$\sigma_{rr}|_{\bar{r}=1} = -\frac{p}{k}, \quad \text{где } \bar{r} = \frac{r}{a}.$$

В дальнейших формулах везде подразумевается, что $\bar{r} = r$, т.е. безразмерный радиус. Подставляя (11) в (12) и интегрируя полученное соотношение с использованием граничного условия, получим следующие выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{C} \left(1 - r^{\frac{-2uC}{1+uC}} \left(1 + C\frac{p}{k} \right) \right), \\ \sigma_{\psi\psi} &= \frac{1}{C} \left(1 - r^{\frac{-2uC}{1+uC}} \left(\frac{1 - Cu + C\frac{p}{k} - C^2u\frac{p}{k}}{1 + Cu} \right) \right), \\ u &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9 - C^2}}. \end{aligned}$$

Уравнения характеристик в полярной системе координат будут следующими:

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\psi} = \left(\frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{1 - k^2 F_1^2}}{kF_1 + \sin 2\theta} + \operatorname{ctg} \psi \right) \left(\operatorname{ctg} \psi \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{1 - k^2 F_1^2}}{kF_1 + \sin 2\theta} - 1 \right)^{-1}. \quad (13)$$

В осесимметричном случае уравнения характеристик (13) можно представить в виде

$$\ln r \pm \sqrt{\frac{1+m}{1-m}} \psi = \operatorname{const}, \quad m = \frac{\sqrt{3}C}{\sqrt{9 - C^2}}.$$

Далее необходимо определить радиус пластической области. Максимальный радиус будет при $\psi_0 = \pm\pi/2$. Подставив эти значения в уравнения характеристик, определим неизвестный радиус, в результате получим

$$r = \sqrt{e^{2\sqrt{\frac{1+m}{1-m}} \frac{\pi}{2}}}.$$

Можно построить графики зависимости напряжений от радиуса в пластической области при значениях коэффициента C из условия пластичности (2), $C = \{0.12; 0.5; 0.8; 1\}$ (этим значениям C соответствуют следующие соотношения между пределом текучести при растяжении σ_S^+ и пределом текучести при сжатии σ_S^- : $\sigma_S^-/\sigma_S^+ = \{1.08; 1.41; 1.74; 1.98\}$), и нагрузок, приложенных на внутреннем радиусе выреза, $p/k = \{1.5; 2\}$, и сравнить их с классическим случаем Губера – Мизеса. Радиус пластических деформаций определяется конечной точкой на диаграммах напряжений, которые изображены на графиках.

Приведенные на рис. 1 и 2 графики наглядно демонстрируют зависимость распределения напряжений и величины радиуса пластической области от параметра, характеризующего зависимость пластических свойств материала от вида напряженного состояния и величины приложенного давления.

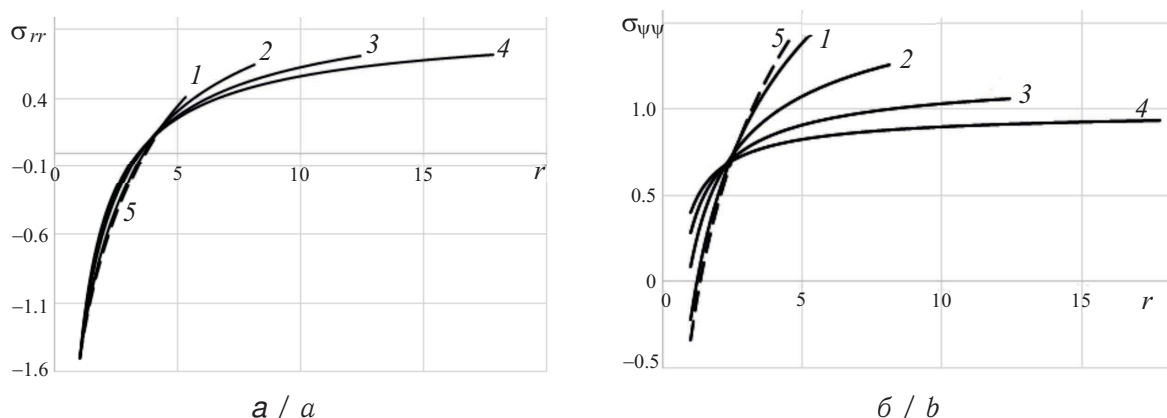


Рис. 1. Распределения радиального напряжения σ_{rr} (а) и окружного напряжения $\sigma_{\psi\psi}$ (б) в окрестности выреза при $\frac{p}{k} = 1.5$ и коэффициентах пластичности C (случай Друкера – Прагера – сплошная линия): 1 – $C = 0.12$; 2 – $C = 0.5$; 3 – $C = 0.8$; 4 – $C = 1$; 5 – случай Губера – Мизеса (пунктирная линия)

Fig. 1. Distributions of radial stress σ_{rr} (a) and circumferential stress $\sigma_{\psi\psi}$ (b) in the vicinity of the cut for $\frac{p}{k} = 1.5$ and plasticity coefficients C (Drucker – Prager case – solid line): 1 – $C = 0.12$; 2 – $C = 0.5$; 3 – $C = 0.8$; 4 – $C = 1$; 5 – Huber – Mises case (dashed line)

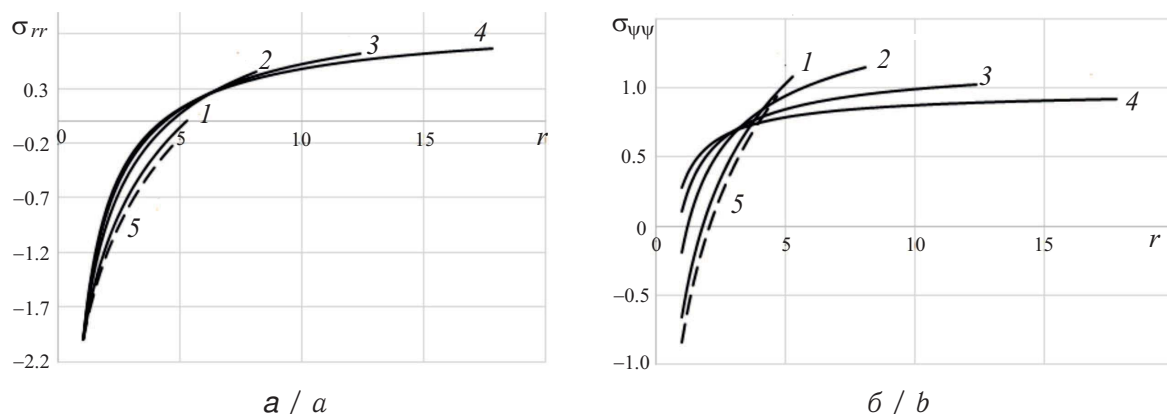


Рис. 2. Распределения радиального напряжения σ_{rr} (а) и окружного напряжения $\sigma_{\psi\psi}$ (б) в окрестности выреза при $\frac{p}{k} = 2$ и $C = \{0.12; 0.5; 0.8; 1\}$ (обозначения те же, что и на рис. 1)

Fig. 2. Distributions of the radial stress σ_{rr} (a) and the circumferential stress $\sigma_{\psi\psi}$ (b) in the vicinity of the cut at $\frac{p}{k} = 2$ and $C = \{0.12; 0.5; 0.8; 1\}$ (the same as in Fig. 1)

ВЫВОДЫ

В работе получено аналитическое решение задачи о действии внутреннего давления на поверхности цилиндрического канала в теле с зависящими от вида напряженного состояния пластическими свойствами. Исследована зависимость распределения напряжений от параметра, характеризующего чувствительность свойств материала к виду напряженного состояния, и установлено, что распределение напряжений существенным образом зависит от значения коэффициента C , определяющего данную чувствительность. Показано, что в случае слабой зависимости свойств от вида напряженного состояния, когда $C = 0.12$ и пределы текучести для условий одноосного растяжения σ_S^+ и одноосного сжатия σ_S^- различаются незначительно, т.е. $\sigma_S^- = 1.08 \sigma_S^+$, распределение напряжений и их уровень существенно отличаются от значений для материала с инвариантными к виду внешних воздействий пластическими свойствами, т.е. для которого может быть использован



критерий Губера – Мизеса. Кроме того, установлено, что размер пластической области в значительной мере зависит от величины давления на поверхности отверстия.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 17-01-00318, 17-51-52001).

Библиографический список

1. *Drucker D. C., Prager W.* Soil mechanics and plastic analysis or limit design // Quarterly of Applied Mathematics. 1952. Vol. 10, № 2. P. 157–165.
2. *Mohr O.* Welche Umstände begingen die Elastizitätsgrenze und den bruch eines Material? // Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. 1900. Vol. 44 (45). P. 1524–1530.
3. *Радаев Ю. Н.* Мгновенно-нерастяжимые директоры в кинематике трехмерных течений сред Кулона – Мора // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 467–483. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-467-483>
4. *Lomakin E. V.* Dependence of the limit state of composite and polymer materials on the type of the stress state. 1. Experimental dependences and determining equations // Mech Compos Mater. 1988. Vol. 24, iss. 1. P. 1–7. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00611327>
5. *Rudnicki J. W., Rice J. R.* Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1975. Vol. 23, iss. 6. P. 371–394. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(75\)90001-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(75)90001-0)
6. *Alexandrov S.* Geometry of plane strain characteristic fields in pressure-dependent plasticity // ZAMM: Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2015. Vol. 95, iss. 11. P. 1296–1301. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201400017>
7. *Ставрогин А. Н., Протосеня А. Г.* Пластичность горных пород. М. : Недра, 1979. 301 с.
8. *Deshpande V. S., Fleck N. A.* Isotropic constitutive models for metallic foams // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2000. Vol. 48, iss. 6–7. P. 1253–1283. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00082-4](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00082-4)
9. *Green R. J.* A plasticity theory for porous solids // International Journal of Mechanical Sciences. 1972. Vol. 14, iss. 4. P. 215–224. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(72\)90063-X](https://doi.org/10.1016/0020-7403(72)90063-X)
10. *Miller R. E.* A continuum plasticity model for the constitutive and indentation behaviour of foamed metals // International Journal of Mechanical Sciences. 2000. Vol. 42, iss. 4. P. 729–754. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(99\)00021-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00021-1)
11. *Onck P. R.* Application of a continuum constitutive model to metallic foam DEN-specimens in compression // International Journal of Mechanical Sciences. 2001. Vol. 43, iss. 12. P. 2947–2959. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(01\)00060-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(01)00060-1)
12. *Vatulyan A. O., Lyapin A. A., Kossovich E. L.* Studying of Elastoplastic Properties of Coal Specimens Using Indentation Technique [Ватульян А. О., Ляпин А. А., Коссович Е. Л. Исследование упругопластических свойств угольных пород на основе метода индентирования] // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 412–420. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-412-420>
13. *Seltzer R., Cisilino A. P., Frontini P. M., Yiu-Wing Mai* Determination of the Drucker – Prager parameters of polymers exhibiting pressure-sensitive plastic behaviour by depth-sensing indentation // International Journal of Mechanical Sciences. 2011. Vol. 53, iss. 6. P. 471–478. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.04.002>
14. *Alexandrov S., Jeng Y-R., Lomakin E.* An exact semi-analytic solution for residual stresses and strains within a thin hollow disc of pressure-sensitive material subject to thermal loading // Meccanica. 2014. Vol. 49, iss. 4. P. 775–794. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-013-9826-4>



15. Alexandrov S., Jeng Y-R., Lomakin E. Effect of Pressure-Dependency of the Yield Criterion on the Development of Plastic Zones and the Distribution of Residual Stresses in Thin Annular Disks // ASME Journal of Applied Mechanics. 2011. Vol. 78, iss. 3. P. 031012–1–031012–5. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4003361>

Образец для цитирования:

Ломакин Е. В., Минаев Н. Г. Осесимметричное поле напряжений вблизи кругового выреза в теле с зависящими от вида напряженного состояния пластическими свойствами // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 317–325. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-317-325>

Axisymmetric Stress Field Near a Circular Cut in a Solid with Stress State Dependent Plastic Properties

E. V. Lomakin, N. G. Minaev

Evgeny V. Lomakin, <https://orcid.org/0000-0002-8716-5363>, Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia, evlomakin@yandex.ru

Nikita G. Minaev, <https://orcid.org/0000-0002-6998-6344>, Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia, nickita3@yandex.ru

The paper analyzes the properties of the constitutive relations of the theory of plasticity for a continuum, which plastic properties depend on the type of stress state. The plasticity condition presented in the corresponding generalized form is used, where the parameter of the type of stress state is introduced, which is the ratio of the hydrostatic stress component to the equivalent von Mises stress, named in the literature the stress triaxiality. For a particular type of plasticity condition, an analytical solution of the problem for a solid with a circular hole under plane strain is obtained. The stress distributions corresponding to the obtained solution are compared with the ones for a solid whose plastic properties are invariant to the stress state using the Huber – Mises plasticity condition. The influence of the degree of sensitivity of materials properties to the type of stress state on the stress distributions in plastic areas are studied.

Keywords: plasticity theory, plane deformation, Coulomb – More criterion, plane with a circular cut.

Received: 19.05.2019 / Accepted: 16.06.2019 / Published: 31.08.2019

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects No. 17-01-00318, 17-51-52001).

References

1. Drucker D. C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1952, vol. 10, no. 2, pp. 157–165.
2. Mohr O. Welche Umstände begingen bei Elastizitätsgrenze und den bruch eines Materials? *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure*, 1900, vol. 44 (45), pp. 1524–1530.



3. Radaev Yu. N. Instantaneously not Elongated Directors in Three-dimensional Kinematics of the Coulomb – Mohr Medium. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 467–483 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-467-483>
4. Lomakin E. V. Dependence of the limit state of composite and polymer materials on the type of the stress state. 1. Experimental dependences and determining equations. *Mech Compos Mater*, 1988, vol. 24, iss. 1, pp. 1–7. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00611327>
5. Rudnicki J. W., Rice J. R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1975, vol. 23, iss. 6, pp. 371–394. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(75\)90001-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(75)90001-0)
6. Alexandrov S. Geometry of plane strain characteristic fields in pressure-dependent plasticity. *ZAMM: Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2015, vol. 95, iss. 11, pp. 1296–1301. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201400017>
7. Stavrogin A. N., Protosenya A. G. *Plastichnost' gornykh porod* [Plasticity of rocks]. Moscow, Nedra, 1979. 301 p. (in Russian).
8. Deshpande V. S., Fleck N. A. Isotropic constitutive models for metallic foams. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2000, vol. 48, iss. 6–7, pp. 1253–1283. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00082-4](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00082-4)
9. Green R. J. A plasticity theory for porous solids. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1972, vol. 14, iss. 4, pp. 215–224. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(72\)90063-X](https://doi.org/10.1016/0020-7403(72)90063-X)
10. Miller R. E. A continuum plasticity model for the constitutive and indentation behaviour of foamed metals. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2000, vol. 42, iss. 4, pp. 729–754. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(99\)00021-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00021-1)
11. Onck P. R. Application of a continuum constitutive model to metallic foam DEN-specimens in compression. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2001, vol. 43, iss. 12, pp. 2947–2959. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(01\)00060-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(01)00060-1)
12. Vatulyan A. O., Lyapin A. A., Kossovich E. L. Studying of Elastoplastic Properties of Coal Specimens Using Indentation Technique. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 412–420. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-412-420>
13. Seltzer R., Cisilino A. P., Frontini P. M., Yiu-Wing Mai Determination of the Drucker – Prager parameters of polymers exhibiting pressure-sensitive plastic behaviour by depth-sensing indentation. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2011, vol. 53, iss. 6, pp. 471–478. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.04.002>
14. Alexandrov S., Jeng Y-R., Lomakin E. An exact semi-analytic solution for residual stresses and strains within a thin hollow disc of pressure-sensitive material subject to thermal loading. *Meccanica*, 2014, vol. 49, iss. 4, pp. 775–794. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-013-9826-4>
15. Alexandrov S., Jeng Y-R., Lomakin E. Effect of Pressure-Dependency of the Yield Criterion on the Development of Plastic Zones and the Distribution of Residual Stresses in Thin Annular Disks. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 2011, vol. 78, iss. 3, pp. 031012–1–031012–5. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4003361>

Cite this article as:

Lomakin E. V., Minaev N. G. Axisymmetric Stress Field Near a Circular Cut in a Solid with Stress State Dependent Plastic Properties. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 3, pp. 317–325 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-317-325>
