

ISSN 1816-9791 (Print)  
ISSN 2541-9005 (Online)

# ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия



Серия Математика. Механика. Информатика

2019

Том 19

Выпуск 3



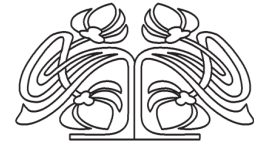
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

# ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 3

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,  
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал  
2019 Том 19  
ISSN 1816-9791 (Print)  
ISSN 2541-9005 (Online)  
Издается с 2005 года

## СОДЕРЖАНИЕ

### Научный отдел

#### Математика

##### Кыров В. А.

Аналитическое вложение геометрий постоянной кривизны на псевдосфере

246

##### Prokhorov D. V.

Value Regions in Classes of Conformal Mappings

##### [Прохоров Д. В.

Области значений в классах конформных отображений]

258

##### Хромов А. П.

О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью

280

#### Механика

##### Doi A. V., Fomkina O. A., Ivanov D. V.

Threshold Values of Morphological Parameters Associated with Cerebral Aneurysm Rupture Risk

##### [Доль А. В., Фомкина О. А., Иванов Д. В.

Пороговые значения морфологических параметров, связанных с риском разрыва аневризм сосудов головного мозга]

289

##### Крылова Е. Ю., Папкина И. В., Яковлева Т. В., Крысько В. А.

Теория колебаний углеродных нанотрубок как гибких микрополярных сетчатых цилиндрических оболочек с учетом сдвига

305

##### Ломакин Е. В., Минаев Н. Г.

Осесимметричное поле напряжений вблизи кругового выреза в теле с зависящими от вида напряженного состояния пластическими свойствами

317

#### Информатика

##### Kosolapov Yu. V., Pevnev F. S.

A Method of Protected Distribution of Data Among Unreliable and Untrusted Nodes

##### [Косолапов Ю. В., Певнев Ф. С.

Метод защищенного распределения данных среди ненадежных и недоверенных узлов]

326

##### Твердохлебов В. А., Карякин Д. А.

Классификация и распознавание структур генетических последовательностей

338

##### Firsova A. A., Chernyshova G. Yu.

Mathematical Models for Evaluation of the Higher Education System Functions with DEA Approach

##### [Фирсова А. А., Чернышова Г. Ю.

Математические модели для оценки функций систем высшего образования средствами DEA]

351

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (специальности: 01.01.01; 01.01.02; 01.01.06; 01.01.07; 01.01.09; 01.02.04; 01.02.05; 01.02.06; 01.02.08; 05.13.01; 05.13.18).

Журнал входит в международные базы данных Emerging Sources Citation Index, MathSciNet, zbMATH

Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-56162 от 15 ноября 2013 года

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год.

#### Директор издательства

Бучко Ирина Юрьевна

#### Редактор

Садыкова Марина Владимировна

#### Художник

Соколов Дмитрий Валерьевич

#### Редактор-стилист

Кочкаева Инна Анатольевна

#### Верстка

Степанова Наталия Ивановна

#### Технический редактор

Каргин Игорь Анатольевич

#### Корректор

Кочкаева Инна Анатольевна

#### Адрес учредителя, издателя и издательства (редакции):

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83  
Тел.: +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89  
E-mail: izvestiya@info.sgu.ru

Подписано в печать 28.08.19.

Подписано в свет 31.08.19.

Формат 60x84 1/8.

Усл. печ. л. 13,95(15,0).

Тираж 500 экз. Заказ 100-Т.

Цена свободная

Отпечатано в типографии Саратовского университета.

#### Адрес типографии:

410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2019



## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <http://mmi.sgu.ru/> или <http://dlya-avtorov.sgu.ru/>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования в журнале. В случае положительного решения об опубликовании статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <http://mmi.sgu.ru>.

---

### Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,  
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,  
механико-математический факультет

**Тел./факс:** +7(845-2) 26-15-54

**E-mail:** [mmi@info.sgu.ru](mailto:mmi@info.sgu.ru)

**Website:** <http://mmi.sgu.ru/>

### Ответственный секретарь серии:

Шевцова Юлия Владиславовна

## CONTENTS

### Scientific Part

#### Mathematics

##### Kyrov V. A.

Analytic Embedding of Geometries of Constant Curvature on a Pseudosphere 246

##### Prokhorov D. V.

Value Regions in Classes of Conformal Mappings 258

##### Khromov A. P.

On Classic Solution of the Problem for a Homogeneous Wave Equation with Fixed End-Points and Zero Initial Velocity 280

#### Mechanics

##### Doi A. V., Fomkina O. A., Ivanov D. V.

Threshold Values of Morphological Parameters Associated with Cerebral Aneurysm Rupture Risk 289

##### Krylova E. Yu., Papkova I. V., Yakovleva T. V., Krysko V. A.

Theory of Vibrations of Carbon Nanotubes Like Flexible Micropolar Mesh Cylindrical Shells Taking into Account Shift 305

##### Lomakin E. V., Minaev N. G.

Axisymmetric Stress Field Near a Circular Cut in a Solid with Stress State Dependent Plastic Properties 317

#### Computer Sciences

##### Kosolapov Yu. V., Pevnev F. S.

A Method of Protected Distribution of Data Among Unreliable and Untrusted Nodes 326

##### Tverdokhlebov V. A., Kariakin D. A.

Classification and Recognition of Structures of Genetic Sequences 338

##### Firsova A. A., Chernyshova G. Yu.

Mathematical Models for Evaluation of the Higher Education System Functions with DEA Approach 351



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА  
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.  
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

**Главный редактор**

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Заместитель главного редактора**

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Ответственный секретарь**

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

**Члены редакционной коллегии:**

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Омск, Россия)

Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)

Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)

Индейцев Дмитрий Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Республика Беларусь)

Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, доктор физ.-мат. наук, акад. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Пархоменко Павел Павлович, доктор техн. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук (Долгопрудный, Московская обл., Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Рацеев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ульяновск, Россия)

Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D., профессор (Киль, Великобритания)

Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Республика Беларусь)

Субботин Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Екатеринбург, Россия)

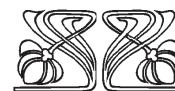
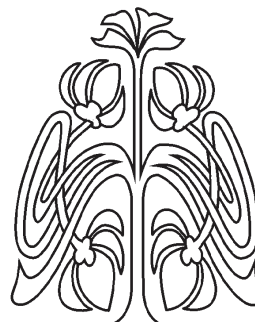
Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шалыто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Янг Чунь-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)



**РЕДАКЦИОННАЯ  
КОЛЛЕГИЯ**

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL**

**«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES.  
SERIES: MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»**

**Editor-in-Chief** – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

**Deputy Editor-in-Chief** – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

**Executive Secretary** – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

**Members of the Editorial Board:**

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)

Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)

Dmitry A. Indeitsev (St. Petersburg, Russia)

Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)

Avzug P. Khromov (Saratov, Russia)

Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)

Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)

Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)

Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)

Nikita F. Morozov (St. Petersburg, Russia)

Semen R. Nasyrov (Kazan', Russia)

Pavel P. Parkhomenko (Moscow, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)

Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)

Alexander F. Rezchikov (Saratov, Russia)

Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)

Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)

Shoji IMATANI (Kyoto, Japan)

Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny, Moscow region, Russia)

Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)

Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)

Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)

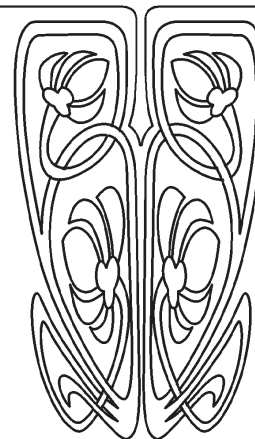
Yurii N. Subbotin (Ekaterinburg, Russia)

Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)

Vjacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)

Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)

Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)





# МАТЕМАТИКА

УДК 517.977:514.74

## Аналитическое вложение геометрий постоянной кривизны на псевдосфере

В. А. Кыров

Кыров Владимир Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, физики и информатики, Горно-Алтайский государственный университет, Россия, Республика Алтай, 649000, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, д. 1, kyrovVA@yandex.ru

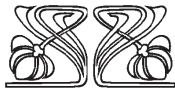
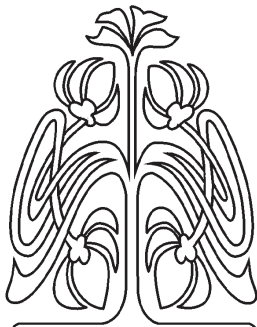
В математических исследованиях важны геометрии максимальной подвижности. Примерами таких геометрий являются: евклидова, псевдоевклидова, Лобачевского, симплектическая и т.д. Полной классификации таких геометрий нет. Различаются как геометрии максимальной подвижности в целом, например геометрии из списка Тёрстона, так и геометрии локальной максимальной подвижности. Нами разработан метод классификации геометрий локальной максимальной подвижности, названный методом вложения. Основная цель данной работы состоит в нахождении метрических функций геометрий размерности  $n + 2$  и допускающих  $(n + 2)(n + 3)/2$ -параметрическую группу движений и, как аргумент, содержащих метрическую функцию

$$g(i, j) = \frac{\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2 + \varepsilon((x_i^{n+1})^2 + (x_j^{n+1})^2)}{x_i^{n+1}x_j^{n+1}}$$

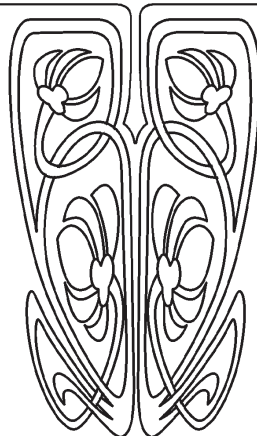
$(n + 1)$ -мерной геометрии постоянной кривизны на псевдосфере. При решении поставленной задачи из требования существования группы движений размерности  $(n + 2)(n + 3)/2$ , т.е. группы преобразований, сохраняющей метрическую функцию, записывается функциональное уравнение специального вида на эту функцию. Это функциональное уравнение решается аналитически, т.е. все входящие в него функции представляются рядами Тейлора, после чего сравниваются коэффициенты в разложениях. Результатом решения поставленной задачи является геометрия максимальной подвижности с метрической функцией

$$f(i, j) = [\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2 + \varepsilon(x_i^{n+1} - x_j^{n+1})^2]e^{2w_i + 2w_j}.$$

Метод вложения применим и для других геометрий локальной максимальной подвижности, что дает надежду построения полной классификации таких геометрий.



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





**Ключевые слова:** геометрия максимальной подвижности, функциональное уравнение, дифференциальное уравнение, метрическая функция, группа движений.

Поступила в редакцию: 07.12.2018 / Принята: 09.02.2019 / Опубликовано: 31.08.2019

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-246-257>

## ВВЕДЕНИЕ

$(n + 1)$ -мерная геометрия локальной максимальной подвижности в работе [1] допускает группу движений размерности  $(n + 1)(n + 2)/2$ . Многие из таких геометрий хорошо известны. К их числу относятся: евклидова геометрия, псевдоевклидова, симплектическая геометрия, сферическая, геометрия Лобачевского и др. На псевдосфере в подходящих координатах метрическая функция

$$g(i, j) = \frac{\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2 + \varepsilon((x_i^{n+1})^2 + (x_j^{n+1})^2)}{x_i^{n+1}x_j^{n+1}}$$

задает геометрию постоянной кривизны, причем  $\varepsilon, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$ . Замена координат  $x^{n+1} \rightarrow e^{-2x^{n+1}}$  данную метрическую функцию приводит к следующему виду:

$$g(i, j) = [\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2]e^{2x_i^{n+1} + 2x_j^{n+1}} + \varepsilon e^{2x_i^{n+1} - 2x_j^{n+1}} + \varepsilon e^{2x_j^{n+1} - 2x_i^{n+1}}. \quad (1)$$

От метрической функции  $g$  можно также перейти к следующей:

$$q(i, j) = g(i, j) - 2\varepsilon = \frac{\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2 + \varepsilon(x_i^{n+1} - x_j^{n+1})^2}{x_i^{n+1}x_j^{n+1}}.$$

Для бесконечно близких точек последняя метрическая функция превращается в хорошо известную метрику для геометрии постоянной кривизны на псевдосфере:

$$dq = \frac{\varepsilon_1(dx^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(dx^n)^2 + \varepsilon(dx^{n+1})^2}{(x^{n+1})^2}.$$

Основная цель данной работы — решение задачи вложения для геометрии с метрической функцией (1), т. е. нахождение на  $(n + 2)$ -мерном многообразии метрических функций вида

$$f(i, j) = \chi([\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2]e^{2x_i^{n+1} + 2x_j^{n+1}} + \varepsilon e^{2x_i^{n+1} - 2x_j^{n+1}} + \varepsilon e^{2x_j^{n+1} - 2x_i^{n+1}}, w_i, w_j),$$

где  $(x_i^1, \dots, x_i^{n+1}, w_i)$  и  $(x_j^1, \dots, x_j^{n+1}, w_j)$  — координаты точек  $i$  и  $j$   $(n + 2)$ -мерного пространства, сохраняющих свой вид относительно групп преобразований размерности  $(n + 2)(n + 3)/2$ . Решение этой задачи сводится к аналитическому решению функционального уравнения специального вида

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)(X_1(i) - X_1(j)) + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)(X_n(i) - X_n(j)) + \\ &+ [\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2](X_{n+1}(i) + X_{n+1}(j)) - \\ &- \varepsilon(X_{n+1}(i) - X_{n+1}(j))(e^{-4x_i^{n+1}} - e^{-4x_j^{n+1}}) + \\ &+ W(i)F_1e^{-2x_i^{n+1} - 2x_j^{n+1}} + W(j)F_2e^{-2x_i^{n+1} - 2x_j^{n+1}} = 0, \end{aligned}$$

где  $X_1, \dots, X_{n+1}, W, F_1, F_2$  — неизвестные. Неизвестные ищутся в виде рядов Тейлора. Данный метод апробирован в работе [2].



## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим  $(n + 2)$ -мерное аналитическое многообразие  $M$ , которое локально диффеоморфно прямому произведению  $(n + 1)$ -мерного аналитического многообразия  $N$  и одномерного аналитического многообразия  $L$ ,  $n \geq 1$ . Локальный диффеоморфизм осуществляет аналитическое отображение  $h : M \rightarrow N \times L$ . Пусть  $\pi_1 : N \times L \rightarrow N$  и  $\pi_2 : N \times L \rightarrow L$  — проекции. Рассмотрим функции  $g : N \times N \rightarrow R$  с открытой и плотной областью определения  $S_g$  в  $N^2$ , и  $\chi : R \times L \times L \rightarrow R$ . Определим проекции  $p_1 : M \times M \rightarrow M$  и  $p_2 : M \times M \rightarrow M$ , которые на точках действуют так:  $p_1 : \langle i, j \rangle \mapsto i$  и  $p_2 : \langle i, j \rangle \mapsto j$ , где  $\langle i, j \rangle$  — произвольная точка в  $M \times M$ . Построим функцию  $f : M \times M \rightarrow R$  по следующей формуле:

$$f = \chi(g(\pi_1(h(p_1)), \pi_1(h(p_2))), \pi_2(h(p_1)), \pi_2(h(p_2))),$$

область определения  $S_f$  которой открыта и плотна в  $M^2$ . На точках

$$f(i, j) = \chi(g(\pi_1(h(p_1(\langle i, j \rangle))), \pi_1(h(p_2(\langle i, j \rangle))), \pi_2(h(p_1(\langle i, j \rangle))), \pi_2(h(p_2(\langle i, j \rangle)))), \quad (2)$$

где  $i, j$  — произвольные две точки из  $M$ , причем  $\langle i, j \rangle \in S_f$ .

Для произвольной точки из  $M$  рассмотрим координатную окрестность  $U \subset M$ , в которой  $h$  является диффеоморфизмом и для любых точек  $i, j \in U$ ,  $\langle i, j \rangle \in S_f$ , существуют окрестности  $U(i) \subset U$ ,  $U(j) \subset U$  такие, что  $\langle i', j' \rangle \in S_f$ ,  $\forall i' \in U(i)$ ,  $\forall j' \in U(j)$ . Из вышесказанного имеем диффеоморфизм окрестностей  $h : U \rightarrow V \times W$ , где  $V, W$  — некоторые координатные окрестности в  $N$  и  $L$  соответственно. Координаты в окрестности  $V$  обозначим  $(x^1, \dots, x^n, x^{n+1})$ , а координату в окрестности  $W$  —  $(w)$ . Тогда в локальных координатах функция (2) принимает следующий вид:

$$f = f(i, j) = \chi(\theta, w_i, w_j), \quad (3)$$

где  $g(\pi_1(h(i)), \pi_1(h(j))) = \theta = \theta(x_i^1, \dots, x_i^{n+1}, x_j^1, \dots, x_j^{n+1})$  — метрическая функция  $(n + 1)$ -мерной геометрии постоянной кривизны на псевдосфере:

$$\theta = \vartheta(i, j) e^{2x_i^{n+1} + 2x_j^{n+1}} + \varepsilon e^{2x_i^{n+1} - 2x_j^{n+1}} + \varepsilon e^{2x_j^{n+1} - 2x_i^{n+1}}, \quad (4)$$

где

$$\vartheta(i, j) = \varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2,$$

причем  $\varepsilon, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$ .  $\pi_2(h(i)) = w_i$ ,  $\pi_2(h(j)) = w_j$ . Пусть выполняются аксиомы.

**Аксиома аналитичности.** Функция  $\chi : R \times L \times L \rightarrow R$  аналитическая во всех точках области определения.

**Аксиома невырожденности.** Для функции (3) в произвольной точке окрестности  $U(i) \times U(j) \subset M^2$  справедливы неравенства

$$\frac{\partial \chi}{\partial \theta} \neq 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial w_i} \neq 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial w_j} \neq 0. \quad (5)$$

Пусть группа Ли  $G$  действует эффективно и аналитично в  $U \subset M$ . Это означает, что задано аналитическое инъективное отображение (эффективное действие)

$$\lambda : U \times G \rightarrow U',$$

где  $U' \subset M$  — открытая область, причем выполняются свойства:

1)  $\lambda(i, e) = i$ ,  $e \in G$  — единица,  $i \in U$ ;







$\forall j' \in U(j)$ . Тогда метрическая функция  $f(i, j)$ , в аналитическом многообразии  $M$  задающая  $(n + 2)$ -мерную геометрию локальной максимальной подвижности, в окрестности  $U(i) \times U(j)$  в подходящих локальных координатах и масштабном преобразовании  $(\varphi(f) \rightarrow f)$  имеет вид

$$f(i, j) = [\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2 + \varepsilon(x_i^{n+1} - x_j^{n+1})^2]e^{2w_i+2w_j}, \quad (10)$$

где  $\varepsilon, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$ .

## ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Запишем в явном виде условие локальной инвариантности (7) метрической функции (3) относительно  $(n + 2)(n + 3)/2$ -мерной группы движений:

$$2[p(i, j)e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}} + 2\varepsilon(X_{n+1}(i) - X_{n+1}(j)) \operatorname{sh} 2(x_i^{n+1} - x_j^{n+1})] \frac{\partial f(i, j)}{\partial \theta} + \\ + W(i) \frac{\partial f(i, j)}{\partial w_i} + W(j) \frac{\partial f(i, j)}{\partial w_j} = 0, \quad (11)$$

где

$$p(i, j) = \varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)(X_1(i) - X_1(j)) + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)(X_n(i) - X_n(j)) + \\ + \vartheta(i, j)(X_{n+1}(i) + X_{n+1}(j)). \quad (12)$$

Заметим, что выражение (11) выполняется тождественно по координатам точек  $i$  и  $j$  из некоторых окрестностей  $U(i)$  и  $U(j)$ , причем  $U(i) \cup U(j) \subset U(k)$ , где  $U(k)$  — координатная окрестность. Ниже доказываются леммы для тождества (11) из предположения аналитичности в  $U(i) \times U(j)$  входящих в него функций. Эти же леммы справедливы также и из предположения принадлежности входящих в тождество (11) функций классу  $C^3$  в  $U(i) \times U(j)$ . При доказательстве лемм полагаем  $m = 1, \dots, n+1$ ,  $k, s, l = 1, \dots, n$ .

**Лемма 1.** В тождестве (11) во всех точках некоторых окрестностей  $U(i)$  и  $U(j)$

$$p(i, j)e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}} + 2\varepsilon(X_{n+1}(i) - X_{n+1}(j)) \operatorname{sh} 2(x_i^{n+1} - x_j^{n+1}) \neq 0.$$

**Доказательство.** Предположим противное, пусть в некоторых окрестностях  $U(i)$  и  $U(j)$  (либо в их открытых подмножествах) выполняется равенство

$$p(i, j)e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}} + 2\varepsilon(X_{n+1}(i) - X_{n+1}(j)) \operatorname{sh} 2(x_i^{n+1} - x_j^{n+1}) = 0. \quad (13)$$

Дифференцируя это равенство по переменной  $w_i$ , а результат по переменным  $x_j^1, \dots, x_j^{n+1}$ , будем иметь  $X'_{1w} = 0, \dots, X'_{(n+1)w} = 0$ , следовательно,  $X_m = X_m(x^1, \dots, x^{n+1})$ . В результате выражение (13) превращается в функциональное уравнение на операторы алгебры Ли группы движений  $(n + 1)$ -мерной геометрии локально максимальной подвижности с метрической функцией (4). Размерность этой группы движений  $(n + 1)(n + 2)/2$ . Тогда произвольный оператор линейно выражается через  $(n + 1)(n + 2)/2$  базисных операторов.

Запишем теперь тождество (11) с учетом (13):

$$W(i) \frac{\partial f(i, j)}{\partial w_i} + W(j) \frac{\partial f(i, j)}{\partial w_j} = 0. \quad (14)$$



Пусть сначала  $W = 0$ . Тогда произвольный оператор алгебры Ли группы движений геометрии с метрической функцией (3) является линейной комбинацией  $(n + 1)(n + 2)/2$  базисных операторов, а должно быть  $(n + 2)(n + 3)/2$ . Противоречие.

Пусть теперь  $W \neq 0$ . Тогда от выражения (14) переходим к тождеству

$$\frac{W(i)}{W(j)} = \varphi(\theta, w_i, w_j), \quad (15)$$

для чего левую и правую части делим на произведение  $W(j) \frac{\partial f(i,j)}{\partial w_i}$  и вводим обозначение  $\varphi(\theta, w_i, w_j) = -\frac{\partial f(i,j)}{\partial w_j} / \frac{\partial f(i,j)}{\partial w_i}$ .

Дифференцируем (15) по  $x_i^l$  и по  $x_j^l$ :

$$\frac{W'_{x^l}(i)}{W(j)} = 2\varepsilon_l(x_i^l - x_j^l)e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}} \varphi_\theta, \quad -\frac{W(i)W'_{x^l}(j)}{W^2(j)} = -2\varepsilon_l(x_i^l - x_j^l)e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}} \varphi_\theta,$$

затем складываем результаты и разделяем переменные:

$$\frac{W'_{x^l}(i)}{W(i)} = \frac{W'_{x^l}(j)}{W(j)} = \alpha_l = \text{const.}$$

Таким образом, получаем  $W'_{x^l} = \alpha_l W$ . После интегрирования имеем

$$W = c(w, x^{n+1})e^{\alpha_1 x^1 + \dots + \alpha_n x^n} \neq 0.$$

Полученное подставляем в (15):

$$e^{\alpha_1 u^1 + \dots + \alpha_n u^n} = \varphi(\theta, w_i, w_j)c(w_j, x_j^{n+1})/c(w_i, x_i^{n+1}), \quad u^l = x_i^l - x_j^l.$$

Нетрудно доказать, что  $\alpha_k = 0$ . Тогда  $W = c(w, x^{n+1})$ . Найденное подставляем снова в (15) и дифференцируем по  $x_i^{n+1}$  и по  $x_j^{n+1}$ , после чего результаты складываем и вычитаем:

$$\begin{aligned} \frac{W(j)W'_{x^{n+1}}(i) - W(i)W'_{x^{n+1}}(j)}{W^2(j)} &= 4\vartheta e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}} \varphi_\theta, \\ \frac{W(j)W'_{x^{n+1}}(i) + W(i)W'_{x^{n+1}}(j)}{W^2(j)} &= 8\varepsilon \text{sh } 2(x_i^{n+1} - x_j^{n+1})\varphi_\theta. \end{aligned}$$

Выражая из первого равенства  $\varphi_\theta$  и подставляя во второе, имеем

$$\begin{aligned} 8\varepsilon \text{sh } 2(x_i^{n+1} - x_j^{n+1}) \frac{W(j)W'_{x^{n+1}}(i) - W(i)W'_{x^{n+1}}(j)}{W^2(j)} &= \\ = 4\vartheta e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}} \frac{W(j)W'_{x^{n+1}}(i) + W(i)W'_{x^{n+1}}(j)}{W^2(j)}. \end{aligned}$$

Дифференцируя последнее равенство по  $\vartheta$ , учитывая  $W = c(w, x^{n+1})$ , получаем

$$4e^{2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}} \frac{W(j)W'_{x^{n+1}}(i) + W(i)W'_{x^{n+1}}(j)}{W^2(j)} = 0,$$

следовательно, приходим к тождественному равенству

$$\frac{W'_{x^{n+1}}(i)}{W(i)} + \frac{W'_{x^{n+1}}(j)}{W(j)} = 0.$$



После разделения переменных имеем  $W'_{x^{n+1}} = 0$ . Тогда  $W = c(w)$ . Подставляя найденное в (14), имеем

$$c(w_i) \frac{\partial f(i, j)}{\partial w_i} + c(w_j) \frac{\partial f(i, j)}{\partial w_j} = 0.$$

Вводим замену:  $\int dw/c(w) = \bar{w}$ . Тогда в новых координатах  $W = 1$ .

Таким образом, произвольный оператор алгебры Ли группы движений  $(n + 1)$ -мерной геометрии локальной максимальной подвижности с метрической функцией (4) является линейной комбинацией  $(n + 1)(n + 2)/2 + 1$  базисных операторов, которых должно быть  $(n + 2)(n + 3)/2$ . Противоречие.  $\square$

**Лемма 2.** В тождестве (11) во всех точках некоторых окрестностей  $U(i)$  и  $U(j)$  справедливо неравенство  $W \neq 0$ .

**Доказательство.** Предположим противное, пусть в некоторых окрестностях  $U(i)$  и  $U(j)$  (либо в их открытых подмножествах) в тождестве (11)  $W = 0$ . Тогда из леммы 1 следует  $\frac{\partial f(i, j)}{\partial \theta} = 0$ , что противоречит условию невырожденности (5) метрической функции (3).  $\square$

**Лемма 3.** В тождестве (11) для функции  $W(x^1, \dots, x^{n+1}, w)$  во всех точках некоторых окрестностей  $U(i)$  и  $U(j)$  справедливо неравенство

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial W}{\partial x^{n+1}}\right)^2 \neq 0.$$

**Доказательство.** Предположим противное, пусть в некоторых окрестностях  $U(i)$  и  $U(j)$  (либо в их открытых подмножествах)

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial W}{\partial x^{n+1}}\right)^2 = 0,$$

поэтому  $W = W(w) \neq 0$ . Тогда в (11) осуществляем замену координат:  $\int \frac{dw}{W(w)} = \bar{w}$ . Очевидно, в новых координатах  $W(\bar{w}) = 1$ . В результате (11) примет вид

$$2[p(i, j)e^{2x_i^{n+1} + 2x_j^{n+1}} + 2\varepsilon(X_{n+1}(i) - X_{n+1}(j)) \operatorname{sh} 2(x_i^{n+1} - x_j^{n+1})] \frac{\partial f(i, j)}{\partial \theta} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial \bar{w}_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial \bar{w}_j} = 0.$$

Деля последнее тождество на ненулевую производную  $\frac{\partial f(i, j)}{\partial \theta} e^{2x_i^{n+1} + 2x_j^{n+1}}$ , получаем функциональное уравнение

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)(X_1(i) - X_1(j)) + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)(X_n(i) - X_n(j)) + \\ &\quad + \vartheta(i, j)(X_{n+1}(i) + X_{n+1}(j)) + \\ &\quad + \varepsilon(X_{n+1}(i) - X_{n+1}(j))(e^{-4x_j^{n+1}} - e^{-4x_i^{n+1}}) = \phi(\theta, x_i^{n+1}, x_j^{n+1}, \bar{w}_i, \bar{w}_j), \end{aligned} \quad (16)$$



где

$$\phi(\theta, x_i^{n+1}, x_j^{n+1}, \bar{w}_i, \bar{w}_j) = -\left(\frac{\partial f(i, j)}{\partial \bar{w}_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial \bar{w}_j}\right) / 2 \frac{\partial f(i, j)}{\partial \theta} e^{2x_i^{n+1} + 2x_j^{n+1}}.$$

Затем решаем уравнение (16) методом, описанным подробно при доказательстве леммы 1. Так, тождество (16) дифференцируем по  $x_i^l$ , по  $x_j^l$ :

$$\begin{cases} \varepsilon_l(X_l(i)X_l(j)) + \varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)X_{1x^l}(i) + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)X_{nx^l}(i) + 2\varepsilon_l(x_i^l - x_j^l) \times \\ \times (X_{n+1}(i) + X_{n+1}(j)) + \vartheta X_{(n+1)x^l}(i) + \varepsilon X_{(n+1)x^l}(i)(e^{-4x_j^{n+1}} - e^{-4x_i^{n+1}}) = \\ = 2\varepsilon_l(x_i^l - x_j^l)\phi_\theta(\theta, x_i^{n+1}, x_j^{n+1}, \bar{w}_i, \bar{w}_j)e^{2x_i^{n+1} + 2x_j^{n+1}}, \\ \varepsilon_l(X_l(i) - X_l(j)) + \varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)X_{1x^l}(j) + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)X_{nx^l}(j) + \\ + 2\varepsilon_l(x_i^l - x_j^l)(X_{n+1}(i) + X_{n+1}(j)) - \vartheta X_{(n+1)x^l}(j) + \varepsilon X_{(n+1)x^l}(j) \times \\ \times (e^{-4x_j^{n+1}} - e^{-4x_i^{n+1}}) = 2\varepsilon_l(x_i^l - x_j^l)\phi_\theta(\theta, x_i^{n+1}, x_j^{n+1}, \bar{w}_i, \bar{w}_j)e^{2x_i^{n+1} + 2x_j^{n+1}}. \end{cases} \quad (17)$$

Далее, из первого уравнения вычитаем второе:

$$\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)(X_{1x^l}(i) - X_{1x^l}(j)) + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)(X_{nx^l}(i) - X_{nx^l}(j)) + \\ + \vartheta(X_{(n+1)x^l}(i) + X_{(n+1)x^l}(j)) + \varepsilon(X_{(n+1)x^l}(i) - X_{(n+1)x^l}(j))(e^{-4x_j^{n+1}} - e^{-4x_i^{n+1}}) = 0.$$

Теперь полученное дифференцируем дважды в следующем порядке: по  $x_i^k$  и  $x_j^s$ ;  $x_i^k$  и  $\bar{w}_j$ ;  $x_i^k$  и  $x_j^{n+1}$ :

$$\begin{cases} -\varepsilon_k X_{kx^l x^s}(j) - \varepsilon_s X_{sx^l x^k}(i) + 2\varepsilon_k(x_i^k - x_j^k)X_{(n+1)x^l x^s}(j) - \\ - 2\varepsilon_s(x_i^s - x_j^s)X_{(n+1)x^l x^k}(i) = 0, \quad k \neq s, \\ X_{kx^l x^k}(j) + X_{kx^l x^k}(i) + 2(x_i^k - x_j^k)(X_{(n+1)x^l x^k}(i) - X_{(n+1)x^l x^k}(j)) + \\ + 2(X_{(n+1)x^l}(i) + X_{(n+1)x^l}(j)) = 0, \\ X_{kx^l \bar{w}}(j) + 2(x_i^k - x_j^k)X_{(n+1)x^l \bar{w}}(j) = 0, \end{cases} \quad (18)$$

$$\varepsilon_k X_{kx^l x^{n+1}}(j) + 2\varepsilon_k(x_i^k - x_j^k)X_{(n+1)x^l x^{n+1}}(j) - 4\varepsilon X_{(n+1)x^l x^k}(i)e^{-4x_j^{n+1}} = 0.$$

Дифференцируя третье уравнение системы (18) по  $x_i^k$ , получаем  $X_{kx^l \bar{w}} = 0$ ,  $X_{(n+1)x^l \bar{w}} = 0$ . Дифференцируя первое уравнение системы (18) по  $x_i^k$  и по  $x_j^m$ , а второе уравнение по  $x_i^k$  и по  $x_j^k$ , затем разделяем переменные:  $X_{(n+1)x^l x^s x^m} = 0$ . Четвертое уравнение системы (18) дифференцируем по  $x_i^k$  и учитываем предыдущее:  $X_{(n+1)x^l x^{n+1}} = 0$ ,  $X_{(n+1)x^l x^k} = a_{lk} = a_{kl} = \text{const}$ ,  $X_{kx^l x^{n+1}} = 4\varepsilon \varepsilon_k a_{lk} e^{-4x_j^{n+1}}$ . Из предыдущего следует  $X_{(n+1)x^l} = a_{l1}x^1 + \dots + a_{ln}x^n + p_l$ ,  $a_{lk}, p_l = \text{const}$ . С учетом найденного первое и второе уравнения системы (18) принимают вид

$$\begin{aligned} -\varepsilon_k X_{kx^l x^s}(j) - \varepsilon_s X_{sx^l x^k}(i) - 2\varepsilon_s x_i^s a_{lk} + 2\varepsilon_k x_j^k a_{ls} - 2\varepsilon_k x_j^k a_{ls} + 2\varepsilon_s x_j^s a_{lk} &= 0, \quad k \neq s; \\ X_{kx^l x^k}(j) + X_{kx^l x^k}(i) + 2(a_{l1}x_i^1 + \dots + a_{ln}x_i^n + a_{l1}x_j^1 + \dots + a_{ln}x_j^n + 2p_l) &= 0. \end{aligned}$$

Разделяя переменные, имеем

$$\begin{aligned} X_{kx^l x^s} &= -2x^k a_{ls} + 2\varepsilon_s \varepsilon_k x^s a_{lk} + \varepsilon_k c_{kls}, \quad c_{kls} = c_{ksl} = -c_{slk} = \text{const}, \quad k \neq s; \\ X_{kx^l x^k} &= -2(a_{l1}x^1 + \dots + a_{ln}x^n + p_l). \end{aligned}$$

Легко проверить  $c_{kls} = -c_{slk} = -c_{skl} = c_{lks} = c_{lsk} = -c_{ksl}$ , с другой стороны,  $c_{kls} = c_{ksl}$ , поэтому  $c_{kls} = 0$ . Тогда имеем

$$X_{kx^l x^s} = -2x^k a_{ls} + 2\varepsilon_k \varepsilon_s x^s a_{lk}, \quad k \neq s, \quad X_{kx^l x^k} = -2(a_{l1}x^1 + \dots + a_{ln}x^n + p_l),$$



$$X_{kx^l\bar{w}} = 0, X_{kx^l x^{n+1}} = 4\varepsilon\varepsilon_k a_{lk} e^{-4x^{n+1}}, \quad a_{lk} = a_{kl}.$$

Интегрируем полученное:

$$\begin{aligned} X_k &= X_k(x) - \varepsilon\varepsilon_k(a_{k1}x^1 + \dots + a_{kn}x^n)e^{-4x^{n+1}} + A_k(x^{n+1}, \bar{w}), \\ X_{n+1} &= X_{n+1}(x) + p_1x^1 + \dots + p_nx^n + B(x^{n+1}, \bar{w}), \quad x = (x^1, \dots, x^n). \end{aligned}$$

Найденное подставляем в (17) и умножаем на  $\varepsilon_k(x_i^k - x_j^k)$  и из него вычитаем равенство, полученное из (17) переобозначением индекса  $l \rightarrow k$  и умноженное на  $\varepsilon_l(x_i^l - x_j^l)$ , причем  $k \neq l$ , после чего сравниваем коэффициенты перед степенями  $x^k$ . Тогда будем иметь  $A_k, B = \text{const}$ . В итоге получаем произвольный оператор алгебры Ли группы движений, зависящий от  $n(n+5)/2 + 1$  постоянных  $a_{kl}, p_l, A_k, B$ , среди которых независимых  $\omega \leq n(n+5)/2 + 1$ . Придавая этим постоянным значения 0 и 1, получаем базис, состоящий из  $\omega + 1 < (n+2)(n+3)/2$  операторов. Противоречие.  $\square$

Функциональное уравнение (11) удобно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)(X_1(i) - X_1(j)) + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)(X_n(i) - X_n(j)) + \\ &+ [\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2](X_{n+1}(i) + X_{n+1}(j)) - \\ &- \varepsilon(X_{n+1}(i) - X_{n+1}(j))(e^{-4x_i^{n+1}} - e^{-4x_j^{n+1}}) + \\ &+ W(i)F_1 e^{-2x_i^{n+1} - 2x_j^{n+1}} + W(j)F_2 e^{-2x_i^{n+1} - 2x_j^{n+1}} = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где введены обозначения

$$F_1(\theta, w_i, w_j) = \frac{\partial f(i, j)}{\partial w_i} / 2 \frac{\partial f(i, j)}{\partial \theta}, \quad F_2(\theta, w_i, w_j) = \frac{\partial f(i, j)}{\partial w_j} / 2 \frac{\partial f(i, j)}{\partial \theta}. \quad (20)$$

Из аналитичности и отличия от нуля функции (3) в  $U(i) \times U(j)$ , очевидно, следуют аналитичность функций (20) и справедливость неравенств  $F_1 \neq 0, F_2 \neq 0$ . Тогда имеем разложение в ряд Тейлора [5, гл. 11]:

$$\begin{cases} F_1(\theta, w_i, w_j) = f_1(w_i, w_j) + D_1(f_1)(w_i, w_j)\theta + \frac{1}{2}D_{1,1}(f_1)(w_i, w_j)\theta^2 + \dots, \\ F_2(\theta, w_i, w_j) = f_2(w_i, w_j) + D_1(f_2)(w_i, w_j)\theta + \frac{1}{2}D_{1,1}(f_2)(w_i, w_j)\theta^2 + \dots, \end{cases} \quad (21)$$

где, например,  $f_1(w_i, w_j) = F_1(0, w_i, w_j), D_1(f_1)(w_i, w_j) = \left. \frac{\partial F_1(\theta, w_i, w_j)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0},$   
 $f_2(w_i, w_j) = F_2(0, w_i, w_j), D_1(f_2)(w_i, w_j) = \left. \frac{\partial F_2(\theta, w_i, w_j)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0}.$

Разложения (8) и (21) подставляем в тождество (19) и сравниваем коэффициенты слева и справа перед одинаковыми степенями произведений переменных  $x_i^1, \dots, x_i^{n+1}, x_j^1, \dots, x_j^{n+1}$ . Эта задача существенно упрощается с применением математического пакета программ MAPLE 17 [6, гл. 8].

Из леммы 2 вытекает, что в последовательности  $D_1(W)(w), D_2(W)(w), \dots, D_{n+1}(W)(w), D_{11}(W)(w), D_{12}(W)(w), \dots$  есть хотя бы один ненулевой член. Сравнивая ряды, имеем

$$\begin{aligned} D_{\alpha_1\alpha_2\dots}(W)(w_i)D_{\gamma_1\gamma_2\dots}(f_1)(w_i, w_j) &= 0, \quad D_{\alpha_1\alpha_2\dots}(W)(w_j)D_{\gamma_1\gamma_2\dots}(f_2)(w_i, w_j) = 0, \\ D_{\alpha_1\alpha_2\dots}(W)(w_i)(f_1(w_i, w_j) + 2\varepsilon D_1(f_1)(w_i, w_j)) &= 0, \\ D_{\alpha_1\alpha_2\dots}(W)(w_j)(f_2(w_i, w_j) + 2\varepsilon D_1(f_2)(w_i, w_j)) &= 0, \end{aligned}$$



где  $\alpha_k = 1, \dots, n + 1, k = 1, 2, \dots, \gamma_l = 1, l = 2, 3, \dots$  Тогда

$$D_{\gamma_1 \gamma_2 \dots}(f_1)(w_i, w_j) = D_{\gamma_1 \gamma_2 \dots}(f_2)(w_i, w_j) = 0, \\ f_1(w_i, w_j) = -2\varepsilon D_1(f_1)(w_i, w_j), \quad f_2(w_i, w_j) = -2\varepsilon D_1(f_2)(w_i, w_j).$$

Из разложения в ряд Тейлора равенства (19) выделяем еще следующие выражения:

$$D_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}(W)(w_i) D_1(f_1)(w_i, w_j) = p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}(w_i), \\ D_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}(W)(w_j) D_1(f_2)(w_i, w_j) = p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}(w_j),$$

где  $\alpha_l = 1, \dots, n + 1, l = 1, 2, \dots$  Дифференцируя первую группу выражений по  $w_j$ , а вторую по  $w_i$ , имеем

$$D_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}(w_i) \frac{\partial D_1(f_1)(w_i, w_j)}{\partial w_j} = 0, \quad D_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}(w_j) \frac{\partial D_1(f_2)(w_i, w_j)}{\partial w_i} = 0.$$

Следовательно,  $\frac{\partial D_1(f_1)(w_i, w_j)}{\partial w_j} = 0, \frac{\partial D_1(f_2)(w_i, w_j)}{\partial w_i} = 0$ . Интегрируя найденное и возвращаясь в предыдущее, получаем  $D_1(f_1)(w_i, w_j) = D_1(f_1)(w_i), D_1(f_2)(w_i, w_j) = D_1(f_2)(w_j), D_1(f_1)(w) = D_1(f_2)(w) \neq 0$ .

С учетом полученного из (20) и (21) будем иметь

$$F_1(\theta, w_i, w_j) = D_1(f_1)(w_i)(\theta - 2\varepsilon), \quad F_2(\theta, w_i, w_j) = D_1(f_1)(w_j)(\theta - 2\varepsilon),$$

откуда следует

$$\frac{1}{D_1(f_1)(w_i)} \frac{\partial f}{\partial w_i} = 2(\theta - 2\varepsilon) \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{D_1(f_1)(w_j)} \frac{\partial f}{\partial w_j} = 2(\theta - 2\varepsilon) \frac{\partial f}{\partial \theta}. \quad (22)$$

Интегрируя систему (22), получаем  $f(i, j) = \varphi((\theta - 2\varepsilon)e^{K(w_i)+K(w_j)})$ , где  $K(w) = 2 \int D_1(f_1)(w)dw$ , или

$$f(i, j) = \varphi([\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2 + \\ + \varepsilon e^{-4x_i^{n+1}} + \varepsilon e^{-4x_j^{n+1}} - 2\varepsilon e^{-2x_i^{n+1}} e^{-2x_j^{n+1}}] e^{K(w_i)+K(w_j)+2x_i^{n+1}+2x_j^{n+1}}).$$

Переходя к новым координатам  $e^{-2x^{n+1}} \rightarrow x^{n+1}, K(w) + 2x^{n+1} \rightarrow w$  и используя преобразование  $\varphi^{-1}(f) \rightarrow f$ , получаем метрическую функцию (10).

Теорема доказана.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вышеставленная задача об аналитическом вложении геометрии с метрической функцией (4) полностью решена. Аналогично поставленная задача об аналитическом вложении геометрии с метрической функцией (10) также решена [7]. Актуальна постановка задачи и ее решение об аналитическом вложении  $(n + 1)$ -мерной геометрии с метрической функцией

$$g(i, j) = x_i^1 x_j^1 + \dots + x_i^n x_j^n + x_i^{n+1} x_j^{n+1}.$$



В таком случае ищутся все  $(n + 2)$ -мерные геометрии локальной максимальной подвижности с метрическими функциями вида

$$f(i, j) = \chi(x_i^1 x_j^1 + \dots + x_i^n x_j^n + x_i^{n+1} x_j^{n+1}, w_i, w_j).$$

Очевидно, одной из таких геометрий является геометрия, задаваемая функцией

$$f(i, j) = x_i^1 x_j^1 + \dots + x_i^n x_j^n + x_i^{n+1} x_j^{n+1} + w_i w_j.$$

**Благодарности.** Выражаю искреннюю благодарность профессору Михайличенко Геннадию Григорьевичу за обсуждение полученных результатов.

### Библиографический список

1. Михайличенко Г. Г. О групповой и феноменологической симметрии в геометрии // Сиб. матем. журн. 1984. Т. 25, № 5. С. 99–113.
2. Кыров В. А., Михайличенко Г. Г. Аналитический метод вложения евклидовой и псевдоевклидовой геометрий // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23, № 2. С. 167–181. DOI: <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-2-167-181>
3. Михайличенко Г. Г. Математические основы и результаты теории физических структур. Горно-Алтайск : Изд-во ГАГУ, 2016. 296 с.
4. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1978. 400 с.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 2. М. : Физматлит, 2001. 810 с.
6. Дьяконов В. Maple 10/11/12/13/14 в математических вычислениях. М. : ДМС, 2014. 640 с.
7. Кыров В. А. Аналитический метод вложения многомерных псевдоевклидовых геометрий // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. Т. 15. С. 741–758. DOI: <https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.060>

---

### Образец для цитирования:

Кыров В. А. Аналитическое вложение геометрий постоянной кривизны на псевдосфере // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 246–257. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-246-257>

---

## Analytic Embedding of Geometries of Constant Curvature on a Pseudosphere

V. A. Kyrov

Vladimir A. Kyrov, <https://orcid.org/0000-0001-5925-7706>, Gorno-Altai State University, 1 Lenkin St., Gorno-Altai 649000, Altai Republic, Russia, [kyrovVA@yandex.ru](mailto:kyrovVA@yandex.ru)

In mathematical studies, the geometries of maximum mobility are important. Examples of such geometries are Euclidean, pseudo-Euclidean, Lobachevsky, symplectic and so on. There is no complete classification of such geometries. They are distinguished as the geometries of the maximum mobility in general, for example, the geometries from the Thurston list, and the geometries of the local maximum mobility. V. A. Kyrov developed a method for classifying the geometries of local maximum mobility, called the method of embedding. The primary purpose of this paper is to



find the metric functions of geometries of dimension  $n + 2$  that admit  $(n + 2)(n + 3)/2$ -parametric group of motions, and as an argument contain the metric function

$$g(i, j) = \frac{\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2 + \varepsilon((x_i^{n+1})^2 + (x_j^{n+1})^2)}{x_i^{n+1}x_j^{n+1}}$$

of  $(n + 1)$ -dimensional geometry of constant curvature on a pseudosphere. In solving this problem, a functional equation of a special form is written due to the requirement for the existence of a group of motions of dimension  $(n + 2)(n + 3)/2$ , that is, of a group of transformations that preserve the metric function. When solving this problem with the requirement that a group of motions of dimension  $(n + 2)(n + 3)/2$  exists, a functional equation of a special form can be written for this function. This functional equation is solved analytically, that is, all the functions are represented as Taylor series, then the coefficients in the expansions are compared. The result of solving this problem is the geometry of maximum mobility with the metric function

$$f(i, j) = [\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \dots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2 + \varepsilon(x_i^{n+1} - x_j^{n+1})^2]e^{2w_i + 2w_j}.$$

The embedding method is also applicable to other geometries of local maximum mobility, which gives us the hope of constructing a complete classification of such geometries.

**Keywords:** geometry of maximum mobility, functional equation, differential equation, metric function, group of motions.

Received: 07.12.2018 / Accepted: 09.02.2019 / Published: 31.08.2019

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

**Acknowledgements:** I express my sincere gratitude to Professor Gennady G. Mikhailichenko for the discussion of the results obtained.

## References

1. Mikhailichenko G. G. Group and phenomenological symmetries in geometry. *Sib Math J*, 1984, vol. 25, iss. 5, pp. 764–774. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00968690>
2. Kyrov V. A., Mikhailichenko G. G. An analytic method for the embedding of the Euclidean and pseudo-Euclidean geometries. *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 167–181 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-2-167-181>
3. Mikhailichenko G. G. *The mathematical basics and results of the theory of physical structures*. Gorno-Altai, Publishing house of Gorno-Altai State University, 2016. 297 p. (in Russian). <https://arxiv.org/pdf/1602.02795>
4. Ovsyannikov L. *Group Analysis of Differential Equation*. New York, Academic Press, 1982. 400 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1978. 400 p.).
5. Fichtengolts G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [A course of differential and integral calculus]. Vol. 2. Moscow, Fizmatlit, 2001. 810 p. (in Russian).
6. Dyakonov V. *Maple 10/11/12/13/14 v matematicheskikh raschetakh* [Maple 10/11/12/13/14 in mathematical calculations]. Moscow, DMS, 2014. 640 p. (in Russian).
7. Kyrov V. A. The analytical method for embedding multidimensional pseudo-Euclidean geometries. *Sib. Èlektron. Mat. Izv.* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2018, vol. 15, pp. 741–758 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.060>

## Cite this article as:

Kyrov V. A. Analytic Embedding of Geometries of Constant Curvature on a Pseudosphere. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 3, pp. 246–257 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-246-257>





# Value Regions in Classes of Conformal Mappings

D. V. Prokhorov

Dmitri V. Prokhorov, <https://orcid.org/0000-0002-0490-941X>, Saratov State University, 83 As-trakhanskaya St., Saratov 410012, Russia; Petrozavodsk State University, 33 Lenin St., Petroza-vodsk 185910, Republic of Karelia, Russia, ProkhorovDV@info.sgu.ru

The survey is devoted to most recent results in the value region problem over different classes of holomorphic univalent functions represented by solutions to the Loewner differential equations both in the radial and chordal versions. It is important also to present classical and modern solution methods and to compare their efficiency. More details are concerned with optimization methods and the Pontryagin maximum principle, in particular. A value region is the set  $\{f(z_0)\}$  of all possible values for the functional  $f \mapsto f(z_0)$  where  $z_0$  is a fixed point either in the upper half-plane for the chordal case or in the unit disk for the radial case, and  $f$  runs through a class of conformal mappings. Solutions to the Loewner differential equations form dense subclasses of function families under consideration. The coefficient value regions  $\{(a_2, \dots, a_n) : f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n\}$ ,  $|z| < 1$ , are the part of the field closely linked with extremal problems and the Bombieri conjecture about the structure of the coefficient region for the class  $S$  in a neighborhood of the point  $(2, \dots, n)$  corresponding to the Koebe function.

**Keywords:** value region, Loewner equation, reachable set, boundary curve.

Received: 07.04.2018 / Accepted: 12.05.2019 / Published: 31.08.2019

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-258-279>

## INTRODUCTION

Geometric function theory of a complex variable studies metric and geometric properties of conformal mappings  $w = f(z)$  from domains in the complex plane  $\mathbb{C}$ . Due to the seminal Riemann theorem, all simply connected domains with at least two boundary points are conformally equivalent, which means that there is a conformal mapping  $f : D \rightarrow B$  from any such domain  $D$  onto another domain  $B$ . Moreover, the function  $f$  is unique if it satisfies the normalization conditions  $f(z_0) = w_0$  and  $f'(z_0) > 0$  at an inner point  $z_0 \in D$  and any  $w_0 \in B$ . Therefore, it is convenient to consider Riemann mappings only from (or onto) canonical domains, for example, disks and half-planes.

Extremal problems are the central objects of attention in the geometric function theory of complex variables. The main class under consideration consists of all analytic and univalent functions  $f$  in the unit disk  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  normalized by  $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ . This class denoted by  $S$  can be thought of as a factor set of all conformal mappings from  $\mathbb{D}$  with respect to linear maps  $w(z) = az + b$ ,  $a \neq 0$ . The first results in estimating functionals in the class  $S$  and its subclasses demonstrated bounds for  $|f(z)|$ ,  $\arg\{f(z)/z\}$ ,  $|f'(z)|$  depending on  $|z|$ , coefficients  $|a_n|$  for initial values  $n$  and others. A wide list of various results is given in the basic monographs [1–4].

Functional estimating is a partial case of the more general and complicated problem to describe a value region for a functional or a system of functionals over different classes of holomorphic mappings. Remind a far-reaching sharpening of the Schwarz lemma due to Rogosinski [5] where the value region  $\{f(z_0)\}$  for a fixed  $z_0 \in \mathbb{D}$  is



precisely described over the class of holomorphic functions  $f(z)$  in  $\mathbb{D}$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) \geq 0$  and  $|f(z)| < 1$  for  $|z| < 1$ . The complex-valued functional  $L(f) = f(z_0)$  can be regarded as a system of two real-valued functionals  $\operatorname{Re} L(f)$  and  $\operatorname{Im} L(f)$ . Grunsky [6] established the set  $\mathcal{W}(z_0) := \{\log(f(z_0)/z_0)\}$ ,  $z_0 \in \mathbb{D}$ , within the class  $S$ .

The most complicated problem concerns with the four-dimensional system of functionals

$$\left\{ \log \left| \frac{f(z_0)}{z_0} \right|, \arg \frac{f(z_0)}{z_0}, \log |f'(z_0)|, \arg f'(z_0) \right\}, \quad 0 < |z_0| < 1,$$

on the class  $S$ . Its complete solution was obtained by Popov [7]. Another approach to solve this problem was proposed by Gutlyanskii [8].

Also, mention the impressive description of the real four-dimensional value region

$$\{(a_2, a_3) : f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S\}$$

given by Schaeffer and Spencer in [9].

Among numerous methods to estimate functionals in the class  $S$  we point out at the parametric method created mostly by Loewner [10], Kufarev [11] and Pommerenke [12]. In particular, it allows us to represent a dense subclass of  $S$  by integrals of the Loewner ordinary differential equation. Gutlyanskii [8] applied the parametric method to solve the value region problem.

Namely, to every function  $f$  from a dense subclass of  $S$  there corresponds a continuous function  $u = u(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , such that  $f(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t w(z, t)$ , where  $w(z, t)$  is a solution to the Cauchy problem for the Loewner ordinary differential equation

$$\frac{dw}{dt} = -w \frac{e^{iu(t)} + w}{e^{iu(t)} - w}, \quad w(z, 0) = z, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{1}$$

$$w(z, t) = e^{-t} \left( z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(t) z^n \right).$$

Note that if  $w(\mathbb{D}, t) = \mathbb{D} \setminus \gamma[0, t]$  with a Jordan curve  $\gamma$ , then there is a continuous  $u$  generating  $f$ . The converse statement is false, see the Kufarev counterexample in [13].

During last decades, many mathematicians take a growing interest in the class of all conformal self-maps of the upper half-plane  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ . Present the Loewner evolution for  $f(\cdot, t) : \mathbb{H} \setminus \gamma_t \rightarrow \mathbb{H}$ .

Consider a growing slit  $\gamma[0, t]$ ,  $0 \leq t \leq T$ , along a Jordan curve. The mapping functions  $f(z, t)$ , with the hydrodynamic normalization near infinity as

$$f(z, t) = z + \frac{2t}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \quad z \rightarrow \infty,$$

which map  $\mathbb{H} \setminus \gamma[0, t]$  onto  $\mathbb{H}$ , solve the Loewner ordinary differential equation

$$\frac{df(z, t)}{dt} = \frac{2}{f(z, t) - \lambda(t)}, \quad f(z, 0) = z, \tag{2}$$

with a certain function  $\lambda(t)$  that is a real-valued continuous driving term. The number  $t$  is called the half-plane capacity of  $\gamma[0, t]$ .



Without loss of generality, it is assumed that  $\gamma[0, t]$  is emanating from the origin. Then  $f^-$  and  $f^+$  map the left and right sides of  $\gamma[0, t]$  onto the two adjoining segments  $[f^-(0, t), \lambda(t)]$  and  $[\lambda(t), f^+(0, t)]$  in  $\mathbb{R} = \partial\mathbb{H}$ , respectively,

$$\lambda(0) = 0, \quad f^-(0, 0) = f^+(0, 0) = 0.$$

To distinguish the two versions of the Loewner evolution, and following modern denotations, call (1) the radial differential equation while (2) is the chordal differential equation.

This survey is aimed to present recent results on value regions over classes of conformal mappings from  $\mathbb{D}$  or  $\mathbb{H}$ . Almost all of them are based on the parametric method and especially on the optimality approach and the Pontryagin maximum principle developed in the frames of the Loewner theory. In this setting, a value region is identified as a reachable set for a system of ordinary differential equations generated by Loewner equations (1) or (2).

### 1. REACHABLE SETS FOR THE CHORDAL LOEWNER EQUATION

We are focused at the problem to find value ranges for the complex-valued functional  $\{f(z_0)\}$ ,  $z_0 \in \mathbb{H}$ , in classes of conformal mappings from  $\mathbb{H}$  or subsets of  $\mathbb{H}$ . Along with Gogosinski's [5] and Grunsky's [6] similar results for  $z_0 \in \mathbb{D}$ , add the extension by Goryainov and Gutlyanskii [14] who gave a description of the same set  $\{f(z_0)\}$ ,  $z_0 \in \mathbb{D}$ , over the subclass  $S(M)$  of bounded functions  $f \in S$ ,  $|f(z)| < M$  in  $\mathbb{D}$ ,  $M > 1$ .

An analogue of Rogosinski's result for univalent functions was obtained by Roth and Schleissinger [15] in terms of hyperbolic geometry. They gave an analogous description of the value regions  $\{f(z_0)\}$ ,  $z_0 \in \mathbb{D}$ , over the class of univalent holomorphic functions  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) > 0$ , and  $\{g(z_0)\}$ ,  $z_0 \in \mathbb{H}$ , over the class of functions  $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  with the hydrodynamic normalization. Their proofs are based on the radial and chordal Loewner equations. In particular, they proved the following theorem for the reachable set

$$\mathcal{R}(z_0) = \{g(z_0, t), t \geq 0\}, \quad z_0 \in \mathbb{H},$$

over the class of functions  $g(z, t)$  having the hydrodynamic normalization at infinity and such that  $g(z, \cdot)$  solve equation

$$\frac{dg(z, t)}{dt} = \frac{-2}{g(z, t) - \lambda(t)}, \quad g(z, 0) = z, \tag{3}$$

with some continuous driving function  $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Theorem 1 ([15]).** *Let  $z_0 \in \mathbb{H}$ . Then*

$$\mathcal{R}(z_0) = \{z \in \mathbb{H} : \text{Im } z > \text{Im } z_0\} \cup \{z_0\}.$$

We will extend these results to functions with a fixed time  $T$ . Let  $K \subset \mathbb{H}$  be bounded and  $\bar{K}$  be the closure of  $K$ . The set  $K$  is a hull if  $K = \mathbb{H} \cap \bar{K}$  and  $\mathbb{H} \setminus K$  are connected and simply connected. Denote  $\mathcal{H}(T)$  the set of conformal maps from  $\mathbb{H} \setminus K(T)$  having the hydrodynamic normalization, with arbitrary hulls  $K = K(T)$  of half-plane capacity  $T$ , onto  $\mathbb{H}$ . The problem is to find a value region

$$\{f(z_0) : f \in \mathcal{H}(T), z_0 \notin K(T)\}, \quad z_0 \in \mathbb{H}.$$



As far as  $\mathcal{H}(T)$  possesses the translation and scaling properties, it is possible to reduce the value region problem to the case  $z_0 = i$ . So let us describe the value region

$$D(T) := \{f(i) : f \in \mathcal{H}(T), i \notin K(T)\}.$$

Interpret the result by Roth and Schleissinger as a description of the complementary set  $\mathbb{H} \setminus \cup_{T>0} D(T)$ .

For  $0 \leq T \leq \frac{1}{4}$ , denote by  $C = C_0(\varphi, T) > 0$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ , the unique root of the equation

$$2 \cos^2 \varphi \log(1 - \sin \varphi) + (1 - \sin \varphi)^2 = 2 \cos^2 \varphi \log C + C^2(1 - 4T). \tag{4}$$

The following theorems 2–4 are proved in [16].

**Theorem 2.** *The domain  $D(T)$ ,  $0 < T \leq \frac{1}{4}$ , is bounded by two curves  $l_1$  and  $l_2$  connecting the points  $i$  and  $i\sqrt{1 - 4T}$ . The curve  $l_1$  in the complex  $(u, v)$ -plane is parameterized by the equations*

$$u(T) = \frac{C_0^2(\varphi, T)(4T - 1) + (1 - \sin \varphi)^2}{2C_0(\varphi, T) \cos \varphi}, \quad v(T) = \frac{1 - \sin \varphi}{C_0(\varphi, T)},$$

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

The curve  $l_2$  is symmetric to  $l_1$  with respect to the imaginary axis. Every point  $w = u + iv \in \partial D(T) \setminus \{i\}$  corresponds to a unique function from  $\mathcal{H}(T)$ .

Generalize the problem posed in Theorem 2 and consider a value region  $D(T)$  with  $T > \frac{1}{4}$  with possible singular solutions to the chordal Loewner equation, i.e., the point  $w = i$  may belong to  $K(T)$ . In this case, the closure of  $D(T)$  contains a segment  $I(T) \subset \mathbb{R}$ . Among boundary functions corresponding to a point  $w \in I(T)$  there is a function  $f_{K(T)}$  which admits a continuous extension on the union of  $\mathbb{H} \setminus K(T)$  and the both sides of a curvilinear slit  $K(T)$ , so that the extended function  $f_{K(T)}$  maps  $z = i$  in  $I(T)$ . We will see in the next theorem that  $I(T)$  coincides with the whole axis  $\mathbb{R}$ . Preserve the denotation  $D(T)$  for value regions over this generalized class of functions.

Introduce new denotations. Denote by  $\varphi_0(T) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $T > \frac{1}{4}$ , the unique solution of the equation

$$\log \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} + \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} + 1 = \log \frac{1}{4T - 1}.$$

For  $T > \frac{1}{4}$ , this equation has a unique solution  $\varphi = \varphi_0(T)$  depending on  $T$ . For  $T > \frac{1}{4}$  and  $\varphi \in [\varphi_0(T), \frac{\pi}{2}]$ , denote by  $C_0(\varphi, T) > 0$  the minimal root of equation (4) and by  $C_{00}(\varphi, T) > 0$  the maximal root of equation (4).

Note that, for  $T > \frac{1}{4}$  and  $\varphi \in (\varphi_0(T), \frac{\pi}{2})$ , equation (4) has exactly two roots.

**Theorem 3.** *The domain  $D(T)$ ,  $T > \frac{1}{4}$ , is bounded by two curves  $l_1 = l_{11} \cup l_{12}$  and  $l_2 = l_{21} \cup l_{22}$  having a mutual point  $i \in l_{11} \cap l_{21}$ . The curve  $l_{11}$  in the complex  $(u, v)$ -plane, for  $\varphi \in [\varphi_0(T), \frac{\pi}{2}]$ , is parameterized by the equations*

$$u(T) = \frac{C_0^2(\varphi, T)(4T - 1) + (1 - \sin \varphi)^2}{2C_0(\varphi, T) \cos \varphi}, \quad v(T) = \frac{1 - \sin \varphi}{C_0(\varphi, T)}.$$



The curve  $l_{12}$ , for  $\varphi \in [\varphi_0(T), \frac{\pi}{2}]$ , is parameterized by the equation

$$u(T) = \frac{C_{00}^2(\varphi, T)(4T - 1) + (1 - \sin \varphi)^2}{2C_{00}(\varphi, T) \cos \varphi}, \quad v(T) = \frac{1 - \sin \varphi}{C_{00}(\varphi, T)}.$$

The curve  $l_2$  is symmetric to  $l_1$  with respect to the imaginary axis.

Following Roth and Schleissinger, develop the results towards inverse functions. Denote by  $\mathcal{H}^*(T)$ ,  $T > 0$ , the class of functions  $g(w) = f^{-1}(w)$  for  $f \in \mathcal{H}(T)$ . Denote

$$D^*(T) = \{g(i) : g \in \mathcal{H}^*(T)\}, \quad T > 0.$$

It follows from the results by Roth and Schleissinger that

$$\cup_{T>0} D^*(T) = \{w \in \mathbb{C} : \text{Im } w > 1\} \cup \{i\}.$$

Denote by  $C^0(\varphi, T) > 0$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ,  $T \geq 0$ , a unique root of the equation

$$2 \cos^2 \varphi \log(1 + \sin \varphi) + (1 + \sin \varphi)^2 = 2 \cos^2 \varphi \log C + C^2(1 + 4T).$$

**Theorem 4.** The domain  $D^*(T)$ ,  $T > 0$ , is bounded by two curves  $L_1$  and  $L_2$  connecting the points  $i$  and  $i\sqrt{1 + 4T}$ . The curve  $L_1$  in the complex  $(u, v)$ -plane is parameterized by the equations

$$u(T) = \frac{(C^0(\varphi, T))^2(4T + 1) - (1 + \sin \varphi)^2}{2C^0(\varphi, T) \cos \varphi}, \quad v(T) = \frac{1 + \sin \varphi}{C^0(\varphi, T)},$$

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

The curve  $L_2$  is symmetric to  $L_1$  with respect to the imaginary axis.

Remark that Zherdev [17] developed the results and methods in [16] and described the value region for solutions to the chordal Loewner ODE (2) with  $T \leq \frac{1}{4}$  under the restriction  $|\lambda(t)| \leq c$ ,  $c \geq 0$ , for the driving function  $\lambda$  in (2). Besides, he managed to write down explicitly the parametric representation of the boundary of the domain  $D(T)$  in the  $W$ -plane,  $W = X + iY$ , as follows:

$$2X^2 = (1 - 4T - Y^2) \log Y, \quad \sqrt{1 - 4T} \leq Y \leq 1.$$

It is important to mention that the value region  $\{f(z_0)\}$  in  $\mathcal{H}(T)$  is the reachable set of the chordal Loewner ODE, i.e., this is a set of values  $f(z_0, T)$  for all possible trajectories  $f(z_0, t)$  of the Loewner ODE emanating from  $f(z_0, 0) = z_0$ .

Recently, several other authors widely applied optimization methods to describe value regions in subclasses of univalent functions. In particular, indicate the Ph.D. thesis of Koch [18] submitted in 2016. Mainly her results relate to mappings from the unit disk  $\mathbb{D}$ . In this section, we will be acquainted with two Koch's results for symmetric maps in the upper half-plane  $\mathbb{H}$ .

In analogy to typically real functions in the radial setting, Koch considered functions which possess certain symmetric properties. Namely, let

$$\mathcal{I} = \{f : f^{-1} \in \cup_{T>0} \mathcal{H}^*(T), f(-\bar{z}) = -\overline{f(z)}, z \in \mathbb{H}\}.$$

Define

$$V_{\mathcal{I}}(z_0) = \{f(z_0) : f \in \mathcal{I}\}.$$

The two following theorems belong to Koch [18].



**Theorem 5.** Let  $z_0 \in \mathbb{H}$ . If  $\operatorname{Re} z_0 = 0$ , then

$$V_{\mathcal{J}}(z_0) = \{z_0 + it : t \geq 0\}.$$

Next, assume that  $\operatorname{Re} z_0 > 0$  and define the two curves  $C(z_0)$  and  $D(z_0)$  by

$$C(z_0) = \left\{ \sqrt{z_0^2 - 4t} : t \geq 0 \right\} = \{x + iy \in \mathbb{H} : xy = \operatorname{Re} z_0, \operatorname{Im} z_0, x \in (0, \operatorname{Re} z_0]\},$$

$$D(z_0) = \{z_0 + e^{i \arg z_0} t : t \geq 0\}.$$

Then the closure  $\overline{V_{\mathcal{J}}(z_0)}$  of the set  $V_{\mathcal{J}}(z_0)$  is the closed subset of  $\mathbb{H}$  bounded by  $C(z_0)$  and  $D(z_0)$ , and

$$V_{\mathcal{J}}(z_0) = \{z_0\} \cup \overline{V_{\mathcal{J}}(z_0)} \setminus D(z_0).$$

The case  $\operatorname{Re} z_0 < 0$  follows from the case  $\operatorname{Re} z_0 > 0$  by reflection with respect to the imaginary axis.

The value set  $\{f^{-1}(z_0)\}$  for the inverse functions is given similarly.

**Theorem 6.** Let  $z_0 \in \mathbb{H}$ . Define

$$V_{\mathcal{J}}^*(z_0) = \{f^{-1}(z_0) : f \in \mathcal{J}, z_0 \in f(\mathbb{H})\}.$$

If  $\operatorname{Re} z_0 = 0$ , then

$$V_{\mathcal{J}}^*(z_0) = \{z_0 - it, t \in [0, \operatorname{Im} z_0]\}.$$

Next, assume that  $\operatorname{Re} z_0 > 0$  and define the two curves  $C^*(z_0)$  and  $D^*(z_0)$  by

$$C^*(z_0) = \left\{ \sqrt{z_0^2 + 4t} : t \geq 0 \right\} = \{x + iy \in \mathbb{H} : xy = \operatorname{Re} z_0 \operatorname{Im} z_0, x \geq \operatorname{Re} z_0\},$$

$$D^*(z_0) = \{z_0 - e^{i \arg z_0} t : t \in [0, |z_0|]\}.$$

Then the closure  $\overline{V_{\mathcal{J}}^*(z_0)}$  of the set  $V_{\mathcal{J}}^*(z_0)$  is the closed subset of  $\mathbb{H}$  bounded by the curves  $C^*(z_0)$ ,  $D^*(z_0)$  and the positive real half-axis. The set  $V_{\mathcal{J}}^*(z_0)$  is given by

$$V_{\mathcal{J}}^*(z_0) = \{z_0\} \cup \overline{V_{\mathcal{J}}^*(z_0)} \setminus (D^*(z_0) \cup [0, \infty)).$$

The case  $\operatorname{Re} z_0 < 0$  is symmetric.

## 2. REACHABLE SETS AND OPTIMIZATION METHODS

Optimization methods applied in the previous Section are rather effective in the reachable set problem for controllable systems of ordinary differential equations, such as the Loewner ODE. A reachable set of a system of ODE is a set of endpoints of all its trajectories starting from a given point and spread during a fixed time  $T$ . In other words, this is the set of points which can be reached by solutions to the system of ODE from the initial point up to the moment  $T$ . Mainly, the value region problems over function classes represented by the Loewner ODE are reduced to the reachable set problems for systems of ODE generated by the Loewner ODE.

To solve the problem, we consider a set of target functionals corresponding to the boundary points of the reachable set and construct a Hamiltonian system with a driving function satisfying the Pontryagin maximum principle. This allows us to obtain a set of



boundary problems for phase and adjoint systems of ODE and reformulate it for a set of the Cauchy problems for these systems.

Shortly, this is a universal optimization scheme giving necessary local optimum criteria. It remains to show that, in concrete cases, these criteria are global and sufficient.

Usually, we arrive at a final result when a set of all boundary points satisfying the necessary optimum conditions is a closed Jordan curve (or a closed simple surface in higher dimensions).

First, the optimization ideas in geometric function theory have been announced by Goodman, the last Loewner's Ph.D. student, at the International Congress of Mathematicians, 1966, in Moscow. Later, Goodman exposed the approach in his Ph.D. thesis [19] where he combined Loewner's theory with the then new Pontryagin maximum principle. More details appeared in papers by Friedland and Schiffer [20, 21].

Saratov mathematicians applied the optimization method to solve a lot of extremal problems in different classes of univalent functions represented by the Loewner parametrization. Their contribution has been mentioned, e.g., in Roth's Ph.D. thesis [22], which is devoted to reachable sets of certain control systems in the class  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$  that is the set of all analytic functions in  $\mathbb{D}$ .

In particular, Roth wrote [22, p. i–ii]: "...we consider coefficient problems for univalent functions as optimal control problems for certain finite-dimensional control systems. This point of view was initiated and successfully employed by G. S. Goodman, S. Friedland and M. M. Schiffer and more recently by D. V. Prokhorov in a series of papers". And more [22, p. 6]: "Whenever a class of analytic functions is representable as a reachable set, Pontryagin's maximum principle applies and gives immediately some necessary conditions for the solutions of extremal problems in this class". In his thesis, Roth turned to the formulation of the so-called principle of optimality for control systems in  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ . He discussed two control systems in  $\mathbb{C}^n$  due to Friedland and Schiffer [21] and Prokhorov [23, 24], respectively, whose reachable sets coincide with the so-called coefficient region of functions univalent in  $\mathbb{D}$ . Roth concludes that the two methods are essentially equivalent and compares their interrelation with Schiffer's differential equation [25].

Give a sketch of the Hamiltonian formalism. A dynamical system in  $\mathbb{C}^{2n}$  is Hamiltonian if it is of the form

$$\dot{x} = \nabla_s H(x),$$

where  $\nabla_s$  denotes the symplectic gradient given by

$$\nabla_s = \left( \frac{\partial}{\partial \bar{x}_{n+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{x}_{2n}}, -\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

The function  $H$  is the Hamiltonian function of the system. It is convenient to redefine the coordinates  $(x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = (\psi_1, \dots, \psi_n)$  and rewrite the system as

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial \bar{\psi}_k}, \quad \dot{\bar{\psi}}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

The two-form  $\omega = \sum_{k=1}^n dx \wedge d\bar{\psi}$  admits the Poisson bracket  $\{\cdot, \cdot\}$ ,

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}_k} - \frac{\partial f}{\partial \bar{\psi}_k} \frac{\partial g}{\partial x_k} \right),$$

associated with  $\omega$ .



The first integrals  $\Phi$  of the system are characterized by  $\{\Phi, H\} = 0$ . If the Hamiltonian system admits  $1 \leq k < n$  independent involutory integrals, then it is called partially integrable in the sense of Liouville.

In [26], for a system generated by the Loewner equation, the authors evaluated explicitly the first integrals  $(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$  so that  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  first integrals  $(\Phi_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}, \dots, \Phi_n)$  are pairwise involutory and the integrals  $(\Phi_1, \dots, \Phi_{\lfloor n/2 \rfloor})$  are not pairwise involutory but their Poisson brackets give all the rest of the integrals.

Roth [27] revisited the control-theoretic interpretation of the Loewner equation. He writes that [26, p. 94]: "...this approach has been used by many others, see e.g. [2, 20, 21, 28] and in particular the important contributions by Prokhorov [23, 24, 29, 30]". Also [26, p. 96]: "The idea of viewing the value region as reachable sets of the Loewner equation has been pioneered by Prokhorov [23, 24, 30]". Roth poses the problem to prove Teichmüller's coefficient theorem using only the Loewner differential equation. He notes that the standard method in control theory for obtaining sufficient conditions for optimal functions makes use of Bellman functions and refers to [24] for some applications of Bellman functions to the Loewner equation.

### 3. REACHABLE SETS FOR THE RADIAL LOEWNER EQUATION

Going back to results by Roth and Schleissinger [15] introduce the class of univalent self-maps  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ . Let

$$\mathcal{S}_T = \{f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \text{ univalent, } f'(0) = e^{-T}\}, \quad T > 0.$$

Note that if  $f \in \mathcal{S}_T$  then  $e^T f$  belongs to the class  $S(M)$  of bounded functions from  $S$  with  $M = e^T$ . For  $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ , denote

$$V_T(z_0) = \{f(z_0) : f \in \mathcal{S}_T\}.$$

Roth and Schleissinger [15] described the set  $\cup_{T>0} V_T(z_0)$ . To formulate their result, endow  $\mathbb{D}$  with the standard hyperbolic metric

$$\lambda_{\mathbb{D}}(z)dz = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}.$$

The induced hyperbolic distance  $d_{\mathbb{D}}(z, w)$  between  $z \in \mathbb{D}$  and  $w \in \mathbb{D}$  is then given by

$$d_{\mathbb{D}}(z, w) = \log \frac{1 + |(z - w)/(1 - \bar{w}z)|}{1 - |(z - w)/(1 - \bar{w}z)|}.$$

**Theorem 7 ([15]).** *Let  $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ . Then*

$$\cup_{T>0} V_T(z_0) \cup \{0\} = \{z = |z|e^{i\varphi} \in \mathbb{D} : d_{\mathbb{D}}(0, z) - d_{\mathbb{D}}(0, z_0) \leq -|\varphi - \arg z_0|, \varphi \in \mathbb{R}\}.$$

This theorem is known as Grunsky's result [6]. For fixed  $T$ , it was proved earlier by Goryainov and Gutlyanski [14] in another setting. Roth and Schleissinger comment their theorem as [15, p. 1102]: "The results in [6, 14] are much more difficult to prove. The purpose is to give a simple and direct proof".

The three following theorems belong to Koch and Schleissinger [31]. Due to rotations in  $\mathcal{S}_T$ , a choice of  $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$  in the value region problem for  $V_T(z_0)$  is reduced to  $z_0 \in (0, 1)$ .





**Theorem 8.** Let  $z_0 \in (0, 1)$ . For  $x_0 \in [-1, 1]$  and  $T > 0$ , let  $r = r(T, x_0)$  be the unique solution to the equation

$$(1 + x_0)(1 - z_0)^2 \log(1 - r) + (1 - x_0)(1 + z_0)^2 \log(1 + r) - (1 - 2x_0z_0 + z_0^2) \log r = (1 + x_0)(1 - z_0)^2 \log(1 - z_0) + (1 - x_0)(1 + z_0)^2 \log(1 + z_0) - (1 - 2x_0z_0 + z_0^2) \log e^{-T} z_0$$

and let

$$\sigma(T, x_0) = \frac{2(1 - z_0)^2 \sqrt{1 - x_0^2}}{1 - 2x_0z_0 + z_0^2} (\operatorname{arctanh} z_0 - \operatorname{arctanh} r(T, x_0)).$$

Furthermore, for fixed  $T \geq 0$ , define the two curves  $C_+(z_0)$  and  $C_-(z_0)$  by

$$C_{\pm}(z_0) = \{w_{\pm}(x_0) := r(T, x_0)e^{\pm\sigma(T, x_0)} : x_0 \in [-1, 1]\}.$$

Then, if  $\operatorname{arctanh} z_0 < \frac{\pi}{2}$ ,  $V_T(z_0)$  is the closed region whose boundary consists of the two curves  $C_{\pm}(z_0)$ , which intersect at  $x_0$ . For  $\operatorname{arctanh} z_0 \geq \frac{\pi}{2}$ , there are two different cases. First assume that  $T$  is large enough that the equation  $\sigma(t, x) = \pi$  admits a solution  $x \in [-1, 1]$ . Then the curves  $C_{\pm}(z_0)$  intersect more than twice. There is a  $\chi \in (-1, 1)$  such that  $\tilde{C}_+(z_0) \cup \tilde{C}_-(z_0)$  is a closed Jordan curve, where  $\tilde{C}_{\pm}(z_0) = \{w_{\pm}(x_0) : x_0 \in [\chi, 1]\}$ , and an  $\mathcal{N} \in (-1, 1)$  such that  $\hat{C}_+(z_0) \cup \hat{C}_-(z_0)$  is a closed Jordan curve, where  $\hat{C}_{\pm}(z_0) = \{w_{\pm}(x_0) : x_0 \in [-1, \mathcal{N}]\}$ . Then  $V_T(z_0)$  is the closed region whose boundary is the union of  $\tilde{C}_{\pm}(z_0)$  and  $\hat{C}_{\pm}(z_0)$ . For smaller  $T$ ,  $V_T(z_0)$  can be described as in the first case.

Again, we refer to the result due to Goryainov and Gutlyanski [14] in another setting. Koch and Schleissinger explain the proof of their theorem as [31, p. 1773]: “We use a different and more straightforward approach to directly determine the set  $V_T(z_0)$  by applying Pontryagin’s maximum principle to the radial Loewner equation”.

Let

$$\mathcal{W}(z_0) = \{f^{-1}(z_0) : f \in \cup_{T>0} \mathcal{S}_T \text{ with } z_0 \in f(\mathbb{D})\}.$$

**Theorem 9.** We have

$$\mathcal{W}(z_0) = \{re^{i\sigma} : d_{\mathbb{D}}(0, r) \geq |\sigma| + d_{\mathbb{D}}(0, z_0), \sigma \in [-\pi, \pi]\}.$$

Furthermore, determine the value set

$$\mathcal{W}_T(z_0) = \{f^{-1}(z_0) : f \in \mathcal{S}_T \text{ with } z_0 \in f(\mathbb{D})\},$$

and  $\overline{W_T(z_0)}$  is the closure of  $W_T(z_0)$ . Evidently,  $\mathcal{W}(z_0) = \cup_{T>0} \mathcal{W}_T(z_0)$ .

**Theorem 10.** Let  $z_0 \in (0, 1)$ . For  $x_0 \in [-1, 1]$  and  $T > 0$ , let  $r = r(T, x_0)$  be the unique positive solution to the equation

$$(1 - x_0)(1 - z_0)^2 \log(1 - r) + (1 + x_0)(1 + z_0)^2 \log(1 + r) - (1 + 2x_0z_0 + z_0^2) \log r = (1 - x_0)(1 - z_0)^2 \log(1 - z_0) + (1 + x_0)(1 + z_0)^2 \log(1 + z_0) - (1 + 2x_0z_0 + z_0^2) \log e^T z_0$$



and let

$$\sigma(T, x_0) = \frac{2(1 - z_0)^2 \sqrt{1 - x_0^2}}{1 + 2x_0 z_0 + z_0^2} (\operatorname{arctanh} r(t, X_0) - \operatorname{arctanh} z_0).$$

If

$$T < T^* := \log \frac{(1 + z_0)^2}{4z_0},$$

then  $r(T, x_0)$  can be extended continuously to  $x_0 = 1$ ,  $\mathcal{W}_T(z_0) = \overline{\mathcal{W}_T(z_0)}$ , and  $\mathcal{W}_T(z_0)$  is the closed region bounded by the two curves  $D_{\pm}(z_0) = \{r(T, x_0)e^{\pm i\sigma(T, x_0)} : x_0 \in [-1, 1]\}$ . For  $T \geq T^*$ , define the two curves  $\tilde{D}_{\pm}(z_0) = \{r(T, x_0)e^{\pm i\sigma(T, x_0)} : x_0 \in [-1, 1]\}$ . We have two cases: if  $T$  is small enough that  $\tilde{D}_{\pm}(z_0)$  intersect only at  $x_0 = -1$ , then  $\overline{\mathcal{W}_T(z_0)}$  intersects  $\partial\mathbb{D}$  and is bounded by two curves  $\tilde{D}_{\pm}(z_0)$  and by the part of  $\partial\mathbb{D}$  between the intersection points with the curves which includes the point 1. Otherwise, the two curves intersect on  $(-1, 1)$  for the first time for some  $x_0 = \chi \in (-1, 1)$  and  $\overline{\mathcal{W}_T(z_0)}$  is the closed region bounded by  $\partial\mathbb{D}$  and the two curves  $\hat{D}_{\pm}(z_0) = \{r(T, x_0)e^{\pm i\sigma(T, x_0)} : x_0 \in [-1, \chi]\}$ . In the last two cases  $\mathcal{W}_T(z_0) = \overline{\mathcal{W}_T(z_0)} \cap \mathbb{D}$ .

The two following theorems on value regions belong to Koch and Schleissinger [32]. Denote by  $\mathcal{F}$  the class of analytic typically real self-mappings of  $\mathbb{D}$  normalized as  $f(0) = 0$  and  $f'(0) > 0$ . For  $\tau \in (0, 1]$ , denote similarly  $\mathcal{F}(\tau)$  the class of functions  $f \in \mathcal{F}$  with the restriction  $f'(0) = \tau$ . Remind that typically real functions  $f$  in  $\mathbb{D}$  are characterized by the condition  $\operatorname{Im} z \operatorname{Im} f(z) \geq 0$  in  $\mathbb{D}$ . Let

$$V_{\mathcal{F}(\tau)}(z_0) = \{f(z_0) : f \in \mathcal{F}(\tau)\}.$$

**Theorem 11.** Let  $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$  and  $\tau \in (0, 1]$ . The set  $V_{\mathcal{F}(\tau)}(z_0)$  is the image of the closed region bounded by the two circular arc

$$\left\{ 1 + \frac{4\tau z_0}{1 - 2yz_0 + z_0^2} : y \in [2\tau - 1, 1] \right\}$$

and

$$\left\{ \frac{(z_0 + 1)^2(1 + z_0(-4 + 4\tau - 2x + z_0))}{(z_0 - 1)^2(1 - 2xz_0 + z_0^2)} : x \in [-1, 2\tau - 1] \right\}$$

under the map  $w \mapsto \frac{\sqrt{w}-1}{\sqrt{w}+1}$ .

Note that the value regions  $V_{\mathcal{F}(\tau)}(z_0)$  for all analytic functions and for univalent functions with real Taylor coefficients coincide.

Denote by  $\mathcal{R}^{\geq}$  the class of all analytic self-mappings  $f$  of  $\mathbb{D}$  normalized as  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) \geq 0$ , and having only real Taylor coefficients around the origin. Let

$$V_{\mathcal{R}^{\geq}}(z_0) = \{f(z_0) : f \in \mathcal{R}^{\geq}\}.$$

**Theorem 12.** Let  $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ . Then  $V_{\mathcal{R}^{\geq}}(z_0)$  is the closed convex region bounded by the following three curves:

$$A = \left\{ \frac{z_0(z_0 - x)}{z_0 x - 1} : x \in [0, 1] \right\}, \quad B = \left\{ \frac{z_0(z_0 + x)}{z_0 x + 1} : x \in [0, 1] \right\},$$

$$C = \left\{ \frac{z_0^2(z_0 + 2x - 1)}{1 + 2xz_0 - z_0} : x \in [0, 1] \right\}.$$



#### 4. REACHABLE SETS FOR UNIVALENT FUNCTIONS WITH REAL TAYLOR COEFFICIENTS

Among other works in the value region problem, select Fedorov's paper [33] concerning with the set  $\{f(z_0)\}$ ,  $z_0 \in \mathbb{D}$ , over the class  $S_R \subset S$  of functions  $f \in S$  with real Taylor coefficients  $a_n$ ,  $n \geq 1$ , around 0.

For real  $z_0$ , the problem is trivial since  $\{f(z_0)\}$  is described by one of the following sharp inequalities,

$$\frac{-|z_0|}{(1 - |z_0|)^2} \leq f(-|z_0|) \leq \frac{-|z_0|}{(1 + |z_0|)^2}, \quad \frac{|z_0|}{(1 + |z_0|)^2} \leq f(|z_0|) \leq \frac{|z_0|}{(1 - |z_0|)^2}.$$

On the contrary, the problem appeared to be far from triviality in the case of non-real  $z_0$ . Fedorov completely solved the problem by simultaneously considering two moduli problems for pairs of homotopic classes of curves. Partial results in this problem were obtained earlier by Jenkins [34].

Define the class of bounded univalent functions

$$S_R(M) = \{f \in S_R : |f(z)| < M, z \in \mathbb{D}\}, \quad M > 1,$$

with real Taylor coefficients around 0. Usually, extremum problems in subclasses of bounded functions are more difficult than in the whole classes. In the parametric method, theoretically, solutions of extremum problems for bounded functions are of comparative difficulty with unbounded maps. The main difference between the two versions is in constructing an optimal behavior of driving functions either on the maximal set  $[0, \infty)$  of time-parameter or on its subset  $[0, \log M]$ .

Reduce the value region problem to the optimal control problem in the frames of the Loewner theory. Every function  $f$  corresponding to a boundary point of the value region  $\{f(z_0)\}$  over  $S_R(M)$  is given by

$$f(z) = Mw(z, \log M),$$

where  $w(z, t) = e^{-t}(z + a_2(t)z^2 + \dots)$  solves the Loewner differential equation

$$\frac{dw}{dt} = -w \frac{1 - w^2}{1 - uw + w^2}, \quad t \geq 0, \quad w(z, 0) = z, \quad z \in \mathbb{D},$$

with a piecewise continuous driving term  $u = u(t)$ ,  $-2 \leq u \leq 2$ , having at most one discontinuity point. The set  $\{f(z_0)\}$  in  $S_R(M)$  is a reachable set for this Loewner ODE at  $t = \log M$  with the initial point  $z_0$ .

In [35], the authors described the value region  $\{f(z_0)\}$  in  $S_R(M)$  in an extremely implicit form. They proved that the set  $\{f(z_0)\}$  in  $S_R(M)$  is bounded by the two simple curves  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$ . The boundary curve  $\gamma_1$  is given by

$$\gamma_1(\lambda) = \left\{ MK_\lambda^{-1} \left( \frac{K_\lambda(z_0)}{M} \right) : -1 \leq \lambda \leq 1 \right\},$$

where

$$K_\lambda(z) = \frac{z}{1 - 2\lambda z + z^2}, \quad -1 \leq \lambda \leq 1.$$

As for  $\gamma_2$ , it is parameterized as follows. Rewrite the Loewner ODE as a system of ODE for the two real phase coordinates of  $x = (x_1, x_2)$ ,  $x_1(t) = |w(z_0, t)|$



and  $x_2(t) = \arg w(z_0, t)$  with the main branch of the argument,  $x_1(0) = |z_0|$  and  $x_2(0) = \arg z_0$ . Construct a Hamilton function  $H(x, \Psi, u)$ , where the vector  $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$  obeys the adjoint system of differential equations

$$\frac{d\Psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \quad \frac{d\Psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2},$$

and  $u = u^*(x, \Psi)$  is a maximum point of  $H(x, \Psi, u)$  in  $u$  for  $u \in [-2, 2]$ . Next, solve the Cauchy problem for the system of four ODE for the phase and adjoint variables with the initial data for  $\Psi$  such that  $\Psi_1(0)$  is equal either (-1) or 1, and  $\Psi_2(0)$  is a free parameter  $\lambda$  parameterizing  $\gamma_2(\lambda)$ ,  $\lambda \in E$ . The set  $E$  is determined by the condition that, for  $\lambda \in E$ , a unique maximum point  $u_0 = u^*(x(0), \Psi(0))$  of  $H(x(0), \Psi(0), u)$  in  $u$  belongs to  $(-2, 2)$ . Then,

$$\gamma_2(\lambda) = w(z_0, \log M, \lambda)$$

and  $w(z_0, t, \lambda)$  solves the Loewner ODE with  $u(t) = u^*(x(t), \Psi(t))$  and  $\lambda \in E$ .

It is interesting to add that the adjoining vectors  $\Psi(\log M)$  corresponding to the parameter  $\lambda$  are normal vectors for  $\gamma_2$  at inner points  $\gamma_2(\lambda)$ ,  $\lambda \in E$ .

### 5. VALUE REGIONS FOR FUNCTIONS WITH FIXED BOUNDARY POINTS

Since the seminal paper by Cowen and Pommerenke [36], the study of holomorphic functions with finite angular derivatives at prescribed points has been an active field of research in complex analysis.

Given a holomorphic function  $f$  in  $\mathbb{D}$  and a point  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  such that there exists a finite angular limit  $f(\sigma) = \angle \lim_{z \rightarrow \sigma} f(z)$ , the angular derivative at  $\sigma$  is

$$f'(\sigma) = \angle \lim_{z \rightarrow \sigma} \frac{f(z) - f(\sigma)}{z - \sigma}.$$

On the one hand, for univalent functions  $f$ , existence of the angular derivative  $f'(\sigma)$  different from 0 and  $\infty$  is closely related to the geometry of  $f(\mathbb{D})$  near  $f(\sigma)$ . Moreover, if there exists  $f'(\sigma) \neq 0, \infty$ , then the behavior of  $f$  at the boundary point  $\sigma$  resembles conformality.

On the other hand, for the dynamics of a holomorphic self-map  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , a crucial role is played by the points  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  for which  $f(\sigma) = \sigma$  and the angular derivative  $f'(\sigma)$  is finite, see e.g. [37].

Such points  $\sigma$  are called *boundary regular fixed points*. In particular, a classical result due to Wolff and Denjoy asserts that if  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  has no fixed points in  $\mathbb{D}$ , then it possesses the so-called boundary Denjoy – Wolff point, i.e., a unique boundary regular fixed point  $\tau$  such that  $f'(\tau) \leq 1$ .

Consider univalent self-maps  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  with a given boundary regular fixed point  $\sigma \in \partial\mathbb{D}$  and the Denjoy – Wolff point  $\tau \in \partial\mathbb{D} \setminus \{\sigma\}$ . Using automorphisms of  $\mathbb{D}$ , we may suppose that  $\tau = 1$  and  $\sigma = -1$  and look for a sharp value region of  $f \mapsto f(z_0)$  for all such self-maps of  $\mathbb{D}$  with  $f'(-1)$  fixed. Define the strip

$$\mathbb{S} = \left\{ \zeta : -\frac{\pi}{2} < \text{Im} \zeta < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Let

$$\zeta_0 = x_1^0 + ix_2^0 := \ell(z_0),$$



where

$$\ell : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{S}, \quad z \mapsto \log \frac{1+z}{1-z},$$

is a conformal map of  $\mathbb{D}$  onto  $\mathbb{S}$ . For  $T > 0$ , define

$$a_{\pm}(T) := e^{-T/2} \sin x_2^0 \pm (1 - e^{-T/2}), \quad R(a, T) := \log \frac{1-a}{1-a_+(T)} \log \frac{1+a}{1+a_-(T)},$$

$$V(\zeta_0, T) := \{x_1 + ix_2 \in \mathbb{S} : a_-(T) \leq \sin x_2 \leq a_+(T), \\ |x_1 - x_1^0 - T/2| \leq \sqrt{R(\sin x_2, T)}\}.$$

The following theorem gives a description of the value region  $\{f(z_0)\}$  over the class of univalent self-maps  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  with two fixed boundary points  $\pm 1$ .

**Theorem 13** ([38]). *Let  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \{id_{\mathbb{D}}\}$  and  $T > 0$ . Suppose that*

(i)  *$f$  is univalent in  $\mathbb{D}$ ;*

(ii) *the Denjoy – Wolff point of  $f$  is  $\tau = 1$ ;*

(iii)  *$\sigma = -1$  is a boundary regular fixed point of  $f$  and  $f'(-1) = e^T$ .*

*Then*

$$f(z_0) \in \mathcal{V}(z_0, T) := \ell^{-1}(V(\ell(z_0), T)) \setminus \{z_0\} \text{ for any } z_0 \in \mathbb{D}.$$

*This result is sharp, i.e., for any  $w_0 \in \mathcal{V}(z_0, T)$  there exists  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \{id_{\mathbb{D}}\}$  satisfying (i)–(iii) and such that  $f(z_0) = w_0$ .*

In the same paper, the authors also characterize functions  $f$  corresponding to boundary points of  $\mathcal{V}(z_0, T)$  in the last theorem. Let  $K$  be the Koebe function

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Define the functions  $p_{\alpha}$  as

$$p_{\alpha}(z) = K^{-1}(\alpha K(z)), \quad \alpha \in (0, 1),$$

which map  $\mathbb{D}$  onto  $\mathbb{D} \setminus [-1, -r]$ ,  $r = r(\alpha) \in (0, 1)$ .

Since the Koebe function  $K$  and its rotations are known to be extremal in many extremal problems and  $p_{\alpha}$  plays the role of the Koebe function in the class of univalent functions  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , it is natural to expect that functions of the form  $f = h_1 \circ p_{\alpha} \circ h_2$ ,  $h_1, h_2 \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ , would be extremal in the value region problem. The following theorem confirms these expectations.

**Theorem 14** ([38]). *For any  $w_0 \in \partial \mathcal{V}(z_0, T) \setminus \{z_0\}$ , there exists a unique  $f = f_{w_0}$  satisfying the conditions (i)–(iii) in the value region problem for univalent self-maps  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  with two boundary fixed points  $\pm 1$  and such that  $f_{w_0}(z_0) = w_0$ . If  $w_0 = \ell^{-1}(\zeta_0 + T)$ , then  $f_{w_0}$  is a hyperbolic automorphism of  $\mathbb{D}$ , namely,  $f_{w_0}(z) = \ell^{-1}(\ell(z) + T)$ . Otherwise,  $f_{w_0}$  is a conformal mapping of  $\mathbb{D}$  onto  $\mathbb{D}$  minus a slit along an analytic Jordan arc  $\gamma$  orthogonal to  $\partial \mathbb{D}$ , with  $f'_{w_0}(1) = 1$ . Moreover,  $f_{w_0} = h_1 \circ p_{\alpha} \circ h_2$  for some  $h_1, h_2 \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  and  $\alpha \in (0, 1)$  if and only if*

$$w_0 = \ell^{-1}\left(x_1^0 + \frac{T}{2} + i \arcsin a_{\pm}(T)\right).$$



Note that  $z_0$  is a boundary point of the value region  $\mathcal{V}(z_0, T)$ , but does not belong to  $\mathcal{V}(z_0, T)$ . However,  $z_0$  would be included, and this would be the only modification of  $\mathcal{V}(z_0, T)$ , if the equality  $f'(-1) = e^T$  in the value region problem is replaced by the inequality  $f'(-1) \leq e^T$  and the requirement  $f \neq \text{id}_{\mathbb{D}}$  is removed and we assume as a convention that  $\text{id}_{\mathbb{D}}$  satisfies (ii). Under the theorem conditions modified in this way,  $f(z_0) = z_0$  if and only if  $f = \text{id}_{\mathbb{D}}$ .

If  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  has boundary regular fixed points at  $\pm 1$ , then replacing  $f$  by  $h \circ f$ , where  $h$  is a suitable hyperbolic automorphism with the same boundary fixed points, we may suppose that  $\tau = 1$  is the Denjoy – Wolff point. Hence, we deduce a sharp estimate for  $f'(-1)f'(1)$ , which was obtained earlier in [39] with the help of the extremal length method.

**Corollary 1** ([38]). *Let  $z_0 \in \mathbb{D}$  and let  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$  be a univalent function with boundary regular fixed points at 1 and (-1). Then*

$$\sqrt{f'(-1)f'(1)} \geq \max \left\{ \frac{1 + \sin \text{Im } \ell(z_0)}{1 + \sin \text{Im } \ell(f(z_0))}, \frac{1 - \sin \text{Im } \ell(z_0)}{1 - \sin \text{Im } \ell(f(z_0))} \right\}.$$

*This inequality is sharp. The equality can occur only for hyperbolic automorphisms and functions  $f$  of the form  $f = h_1 \circ p_\alpha \circ h_2$ ,  $h_1, h_2 \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ .*

Value region problems over classes  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}(T)$ ,  $S$ ,  $S(M)$ ,  $S_R$ ,  $S_R(M)$  and others required the classic Loewner parametric representations by the chordal and radial differential equations and their modifications and generalizations. However, a parametric theory for classes of univalent self-maps with fixed boundary points was created in the last decades, mainly in papers due to Goryainov and his colleagues. Solutions to the value region problems for mappings with boundary fixed points are based on a new version of Loewner’s parametric method, which was discovered recently by Goryainov and Kudryavtseva [40].

**Theorem 15** ([40]). *Let  $\mathfrak{B}[q; a]$  denote the class of holomorphic univalent self-maps  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  with a Denjoy – Wolff point  $q$  and a boundary regular fixed point  $a$  and let  $\{f^t\}_{t \geq 0}$  be a one-parametric semigroup  $t \mapsto f^t$  which is a solution to the differential equation*

$$\frac{\partial f^t(z)}{\partial t} = v(f^t(z)), \quad f^t(z)|_{t=0} = z.$$

*Then  $\{f^t(z)\}_{t \geq 0} \subset \mathfrak{B}[q; a]$  if and only if*

$$v(z) = \alpha(q - z)(1 - \bar{q}z)(1 - \bar{a}z)h(\bar{a}z),$$

*where  $\alpha \geq 0$  and*

$$h(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1 - \varkappa}{1 - \varkappa z} d\mu(\varkappa)$$

*with a probability measure  $\mu$  on  $\partial\mathbb{D}$ .*

Goryainov [41] obtained also the sharp value region  $\{f'(0)\}$  in the class of all univalent  $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ ,  $f(0) = 0$ , having a boundary regular fixed point  $\sigma = 1$  with a given value of  $f'(1)$ .

In [42], Goryainov proved that the value region  $\mathcal{D}(0, T)$  of  $f \mapsto f(0)$  over all self-maps  $f$  satisfying the conditions of the value region problem over self-maps  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$



having two fixed boundary points without the univalence requirement is the closed disk whose diameter is the segment  $[0, \ell^{-1}(T)]$ , with the boundary point  $z_0 = 0$  excluded. Analyzing the functions bringing the boundary points of  $\mathcal{D}(0, T)$ , one can conclude that  $\partial\mathcal{D}(0, T) \cap \partial\mathcal{V}(0, T) = \{0, \ell^{-1}(T)\}$ .

### 6. COEFFICIENT VALUE REGIONS

For  $z_0 = 0$ , a value region  $\{f(z_0), f'(z_0), \dots, f^{(n)}(z_0)\}$  over a class of functions  $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, z \in \mathbb{D}$ , is reduced to the coefficient value region

$$\{a_2, \dots, a_n\} = \left\{ \frac{f''(0)}{2!}, \dots, \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right\}, \quad n \geq 2.$$

Denote

$$V_n = \{(a_2, \dots, a_n) : f \in S\}, \quad V_{mn} = \{(a_n, a_m) : f \in S\} \quad n, m \geq 2,$$

and

$$\mathcal{M}_n = \{(a_2, \dots, a_n) : f \in \tilde{S}\}, \quad n \geq 2,$$

where  $\tilde{S}$  stands for the class of functions  $f \in S$  which are  $C^\infty$ -smooth on  $\partial\mathbb{D}$ . A good collection of qualitative results is contained in [9, 43]. Namely:

- (i)  $V_n$  is homeomorphic to a  $(2n - 2)$ -dimensional closed ball, and its boundary  $\partial V_n$  is homeomorphic to a  $(2n - 3)$ -dimensional sphere;
- (ii) every point  $x \in \partial V_n$  corresponds to exactly one function  $f \in S$ ;
- (iii) with the exception for a set of smaller dimension, at every point  $x \in \partial V_n$  there exists a normal vector satisfying the Lipschitz condition;
- (iv) there exists a connected open set  $X_1 \subset \partial V_n$ , such that  $\partial V_n$  is an analytic hypersurface at every point of  $X_1$ . The points of  $\partial V_n$  corresponding to the functions that give the extremum to a linear functional belong to the closure of  $X_1$ .

On an  $n$ -dimensional manifold  $\mathcal{M}_n$ , a sub-Riemannian structure is a smoothly varying distribution  $\mathcal{D}$  of  $k$  planes together with a scalar product. The distribution  $\mathcal{D}$  is a linear sub-bundle of a tangent bundle  $T\mathcal{M}_n$  of  $\mathcal{M}_n$ . If  $k < n$ , then the Hausdorff dimension of  $\mathcal{M}_n$  is larger than  $n$ . Suppose that a system of vector fields  $X_1, \dots, X_k$  form an orthonormal basis of  $\mathcal{D}$  with respect to scalar product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . The pair  $(\mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  is a sub-Riemannian metric on  $\mathcal{M}_n$ . Let all vector fields  $X_1, \dots, X_k$  together with their commutators form the total tangent space  $T\mathcal{M}_n$ . If the number of these commutators is independent of the point of  $\mathcal{M}_n$ , then it is said that  $X_1, \dots, X_k$  satisfy the bracket generating condition.

**Theorem 16** ([44]). *Let  $\mathcal{M}_n$  be the coefficient value region for  $\tilde{S}$  and let  $L_1, \dots, L_n$  be the vector fields defined by*

$$L_j = \partial_j + \sum_{k=1}^{n-j} (k+1)a_k \partial_{j+k}, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial a_j}.$$

*Then the system  $(L_1, L_2)$  satisfies the bracket generating condition and the distribution is  $\mathcal{D} = \text{span}(L_1, L_2)$ .*

*The Hausdorff complex dimension of the sub-Riemannian manifold  $\mathcal{M}_n$  is equal to  $(\frac{n}{2} + 1)^2 - \frac{9}{2}$  for odd  $n$  and is equal to  $(\frac{n}{2} + 1)^2 - 2$  for even  $n$ .*



Call attention to the theory of integrable systems in connection with the Loewner equation. Let  $\lambda(z, \mathbf{t})$  be a meromorphic function in  $z$  that depends on an infinite family of generated times  $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_n, \dots)$ ,  $t_0 = x$ , with the expansion

$$\lambda(z, \mathbf{t}) = z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(\mathbf{t})}{z^{n+1}}$$

about infinity. The dispersionless Kadomtsev – Petviashvili (dKP) hierarchy is an infinite set

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t_n} = \{\mathcal{L}_{n+1}, \lambda\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

where  $\{\cdot, \cdot\}$  is the Poisson bracket

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial z},$$

$$\mathcal{L}_n = \frac{1}{n} (\lambda^n)_{\geq 0}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

denotes the polynomial part of  $\lambda^n$ .

A finite-dimensional reduction suggests that  $\lambda$  depends on  $\mathbf{t}$  via a finite number of functions,  $\lambda(z, \mathbf{t}) = \lambda(z, u_1(\mathbf{t}), \dots, u_N(z, \mathbf{t}))$ . Takebe, Teo and Zabrodin [45] showed that the chordal Loewner PDE serves as the consistency condition for the one-variable reduction of the dKP. A function  $\lambda$  depends on  $\mathbf{t}$  via one function  $s(\mathbf{t})$  and

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s} = -\frac{\kappa}{z - \xi} \frac{\partial \lambda}{\partial z},$$

which is the Loewner PDE, where  $\kappa$  is the derivative in  $s$  of the coefficient at  $1/z$  in the Laurent expansion of  $\lambda$ .

In [46], the authors showed that the chordal Loewner evolution has an infinite number of conservation laws, i.e., moments, and that the Loewner PDE is exactly the Vlasov equation under an appropriate change of variables, that the Loewner ODE implies the hydrodynamic-type conservation equation. Starting with the Loewner evolution, the authors obtain integrable chains by splitting time. This approach demonstrates the universality of the Loewner equation as an attraction point for several integrable chains.

Mention that, for the function  $f(z, t(x, s)) = f(z, x, s)$ , the Vlasov equation

$$z \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial A^0}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

describes the time evolution of the distribution function of a plasma consisting of charged particles with long-range interaction.

Going back to the coefficient value region  $V_n$ , recall the exclusive role of the Koebe function  $K(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ , especially in the connection with the famous Bieberbach conjecture stating that the inequality  $|a_n| \leq n$  holds for all  $f \in S$  with the equality sign only for  $K(z)$  and its rotations.

Studying the local version of the Bieberbach conjecture, Bombieri, the Fields medalist, was interested in metric and geometric properties of  $V_n$  in a neighborhood the point





$(a_2, \dots, a_n) = (2, \dots, n) \in \partial V_n$  corresponding to  $K(z)$ . Bombieri [47] conjectured that the numbers

$$\sigma_{mn} := \liminf_{S \ni f \rightarrow K} \frac{n - \operatorname{Re} a_n}{m - \operatorname{Re} a_m}, \quad m, n \geq 2,$$

where  $f \rightarrow K$  locally uniformly in  $\mathbb{D}$ , are equal to the numbers

$$B_{mn} := \min_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{n \sin \theta - \sin(n\theta)}{m \sin \theta - \sin(m\theta)}$$

for all  $m, n \geq 2$ .

Bombieri's number  $\sigma_{mn}$  determines a locally support hyperplane given by

$$\operatorname{Re}(a_n - \sigma_{mn} a_m) = n - \sigma_{mn} m$$

in a neighborhood of the point  $(n, m) \in V_{mn}$  corresponding to  $K$ . It is proved in [48] that  $\sigma_{mn}$  is a maximal number for which  $K$  locally maximizes the linear functional,

$$\sigma_{mn} = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \operatorname{Re}(a_n - \lambda a_m) \text{ is locally maximized on } S \text{ by } K(z)\}.$$

For  $(m, n) = (3, 2)$ , this property has been proved by Greiner and Roth in [49]. Such interpretation can serve to define a number  $\sigma_{mn}(M)$ ,  $M > 1$ , as a maximal number for which  $\operatorname{Re}(a_n - \lambda a_m)$  is locally maximized on  $S(M)$  by the Pick function  $P_M(z) = MK^{-1}(K(z)/M)$ . Values  $\sigma_{23}(M)$  and  $\sigma_{32}(M)$ ,  $M > 1$ , are evaluated in [50] and [51], respectively.

**Theorem 17** ([50, 51]). *For  $1 < M \leq \infty$ , we have*

$$\sigma_{23}(M) = -\frac{4}{M},$$

and

$$\sigma_{32}(M) = \begin{cases} \frac{M(e-1)}{4(Me-2e+1)}, & e \leq M \leq \infty, \\ \frac{M}{4(M-1)}, & 1 < M \leq e. \end{cases}$$

Bombieri's conjecture is true for the class  $S_R$ , see the proof due to Bshouty and Hengartner in [52]. The inequality  $\sigma_{mn} \leq B_{mn}$  was proved in [48] for all  $m, n \geq 2$ . Hence,  $\sigma_{mn} = 0$  when  $B_{mn} = 0$ .

Greiner and Roth [49] answered negatively to partial Bombieri's conjecture. They evaluated  $\sigma_{32}$  showing that  $\sigma_{32} < B_{32}$ . Later,  $\sigma_{42}$ ,  $\sigma_{24}$  and  $\sigma_{34}$  were evaluated in [53], each time disproving Bombieri's conjecture for these pairs of indices. Related versions of Bombieri's conjecture are discussed by Aharonov and Bshouty in [54]. Using the linear Loewner PDE, Leung [55] derived a variational formula in  $S$  near the Koebe function  $K$  and disproved Bombieri's conjecture for index pairs  $(m, 2)$  with  $m > 2$  and for  $(m, 3)$  with odd  $m > 3$ . In particular, Leung's variation leads to a statement that Bombieri's conjecture fails for  $(m, n)$  when

$$B_{mn} = \frac{n^3 - n}{m^3 - m}. \tag{5}$$



Efraimidis [56] and Efraimidis and Pastor [57] selected a lot of pairs  $(m, n)$  for which  $B_{mn}$  are given by the latter expression. Namely, they showed that  $B_{mn}$  satisfies (5), i.e., Bombieri's conjecture fails, for the following integers  $m$  and  $n$ ,  $m > n \geq 2$ ,

- (a) both  $m$  and  $n$  are odd, or
- (b) both  $m$  and  $n$  are even, or
- (c)  $m$  is even,  $n$  is odd,  $0.5 \leq n/m \leq 0.8194$  and  $m \geq 81$ .

Necessary criteria for the Bombieri conjecture are derived in [58] in terms of inequalities for solutions to systems of differential equations in variations for the Loewner ODE.

We see that Bombieri's conjecture is attacked by different methods: Schiffer's differential equation for support points of  $S$  [48, 49], variational method in the class  $S$  [52, 55–57], Lebedev–Milin inequalities based on the Grunsky approach [54], the Loewner theory and optimal control methods and the Pontryagin maximum principle on solutions to the Loewner ODE [47, 50, 51, 53, 58]. Roth [27] gave a statement of Teichmüller's coefficient theorem entirely in terms of the Loewner equation. This allowed him to compare Schiffer's differential equation and Pontryagin's maximum principle. Roth concluded that two necessary conditions for  $f \in S$  being extremal for a coefficient functional over  $S$  provided by Schiffer's theorem and by Pontryagin's maximum principle are in fact equivalent. Roth claims that the Schiffer differential equation is analogous to the Euler equation in the classical calculus of variations and notices that the implication from Schiffer's equation to Pontryagin's maximum principle traces back to early periods in the geometric function theory.

In author's papers cited in this survey, we are focused on the optimal control theory methods applied to Bombieri's problem. We introduce the Loewner ODE and generate a control system for the coefficients of functions  $f(z, t) \in S$  from a Loewner chain,  $z \in \mathbb{D}$ ,  $t \geq 0$ . Following an optimization scheme, we deduce an adjoint control system of ODE and build a pseudo Hamilton function  $H$  depending on a phase coefficient vector  $a(t)$  and an adjoint vector  $\bar{\Psi}(t)$ , on a driving function  $u$  and also on time  $t$ . The Pontryagin maximum principle is a necessary condition for the reachable set in a neighborhood of the extremal control  $u = \pi$  corresponding to the Koebe function  $K$ . As far as  $K$  is extremal in the Bombieri problem, the control  $u = \pi$  has to satisfy the Pontryagin maximum principle, i.e., it maximizes  $H$  on a whole trajectory  $(a(t), \bar{\Psi}(t))$ .

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 17-11-01229).

## References

1. Goluzin G. M. *Geometric theory of functions of a complex variable*. New York, Amer. Math. Soc., 1969. 684 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1966. 628 p.).
2. Aleksandrov I. A. *Parametrichskie prodolzheniya v teorii odnolistnykh funktsij* [Parametric continuations in the theory of univalent functions]. Moscow, Nauka, 1976. 344 p. (in Russian).
3. Duren P. L. *Univalent functions*. New York, Springer Verlag, 1983. 382 p.
4. Pommerenke Ch. *Univalent functions*. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1975. 376 p.
5. Rogosinski W. Zum Schwarzen Lemma. *Jahresber. Deutsche Math.-Verein.*, 1934, vol. 44, pp. 258–261.
6. Grunsky H. Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche. *Schr. Math. Inst. u Inst. Angew. Math. Univ. Berlin*, 1932, vol. 1, pp. 95–140.



7. Popov V. I. Value domain of a system of functionals on the class  $S$ . *Trudy Tomskogo universiteta. Voprosy geometricheskoj teorii funktsij* [Proceedings of Tomsk University. Issues of the geometric function theory], 1965, vol. 182, iss. 3, pp. 106–132 (in Russian).
8. Gutlyanskii V. Ya. Parametric representation of univalent functions. *Soviet Math. Dokl.*, 1970, vol. 11, no. 5, pp. 1273–1276.
9. Schaeffer A. C., Spencer D. C. *Coefficient regions for schlicht functions*. Coll. Publ., vol. 35. New York, Amer. Math. Soc., 1950. 325 p.
10. Loewner K. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I. *Math. Ann.*, 1923, vol. 89, no. 1–2, pp. 103–121.
11. Kufarev P. P. On one-parameter families of analytic functions. *Rec. Math.* [Mat. Sbornik] N. S., 1943, vol. 13 (55), no. 1, pp. 87–118 (in Russian).
12. Pommerenke Ch. Über die Subordination analytischer Funktionen. *J. Reine Angew. Math.*, 1965, vol. 218, pp. 159–173.
13. Kufarev P. P. A remark on integrals of the Loewner equation. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 1947, vol. 57, no. 7, pp. 655–656 (in Russian).
14. Goryainov V. V., Gutlyanskii V. Ya. On extremal problems in the class  $S_M$ . In: *Matematicheskii sbornik*. Kiev, Naukova dumka, 1976, pp. 242–246 (in Russian).
15. Roth O., Schleissinger S. Rogosinski's lemma for univalent functions, hyperbolic Archimedean spirals and the Loewner equation. *Bull. London Math. Soc.*, 2014, vol. 46, no. 5, pp. 1099–1109. DOI: <https://doi.org/10.1112/blms/bdu054>
16. Prokhorov D., Samsonova K. Value range of solutions to the chordal Loewner equation. *J. Math. Anal Appl.*, 2015, vol. 428, no. 2, pp. 910–919. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.03.065>
17. Zherdev A. Value range of solutions to the chordal Loewner equation with restriction on the driving function. *Probl. Anal. Issues Anal*, 2019, vol. 8(26), no. 2, pp. 92–104. DOI: <https://doi.org/10.15393/j3.art.2019.6270>
18. Koch J. D. *Value regions for schlicht functions*. Dissertationsschrift zur Erlangung des naturwissenschaftlichen Doktorgrades der Julius-Maximilians-Universität Würzburg. Würzburg, 2016. 93 p.
19. Goodman G. S. *Univalent functions and optimal control*. Ph.D. Thesis, Stanford University, 1967. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI.
20. Friedland S., Schiffer M. Global results in control theory with applications to univalent functions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1976, vol. 82, no. 6, pp. 913–915.
21. Friedland S., Schiffer M. On coefficient regions of univalent functions. *J. Anal. Math.*, 1977, vol. 31, pp. 125–168.
22. Roth O. *Control Theory in  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$* . Dissertation zur Erlangung des naturwissenschaftlichen Doktorgrades der Bayerischen Julius-Maximilians-Universität Würzburg. Würzburg, 1998. 178 p.
23. Prokhorov D. Sets of values of systems of functionals in classes of univalent functions. *Mat. Sb.*, 1990, vol. 181, no. 12, pp. 1659–1677; *Math. USSR-Sb.*, 1992, vol. 71, no. 2, pp. 499–516.
24. Prokhorov D. *Reachable set methods in extremal problems for univalent functions*. Saratov, Saratov Univ. Press, 1993. 228 p.
25. Schiffer M. Sur l'équation différentielle de M. Löwner. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1945, vol. 221, pp. 369–371.
26. Prokhorov D., Vasil'ev A. Univalent functions and integrable systems. *Commun. Math. Phys.*, 2006, vol. 262, no. 2, pp. 393–410. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00220-005-1499-y>
27. Roth O. Is there a Teichmüller principle in higher dimension? *Geometric function theory in higher dimension. F. Bracci (ed.)*. Cham, Springer INdAM Series 26, 2017, pp. 87–105. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-73126-1\\_7](https://doi.org/10.1007/978-3-319-73126-1_7)



28. Popov V. I. L. S. Pontryagin's maximum principle in the theory of univalent functions. *Soviet Math. Dokl.*, 1969, vol. 10, pp. 1161–1164.
29. Prokhorov D. The method of optimal control in an extremal problem on a class of univalent functions. *Soviet Math. Dokl.*, 1984, vol. 29, pp. 301–303.
30. Prokhorov D. Bounded univalent functions. *Handbook of complex analysis: Geometric function theory, vol. 1*. Amsterdam, North Holland, 2002, pp. 207–228.
31. Koch J., Schleissinger S. Value ranges of univalent self-mappings of the unit disc. *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, vol. 433, no. 2, pp. 1772–1789. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.08.068>
32. Koch J., Schleissinger S. Three value ranges for symmetric self-mappings of the unit disk. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2017, vol. 145, no. 4, pp. 1747–1761. DOI: <https://doi.org/10.1090/proc/13350>
33. Fedorov S. I. The moduli of certain families of curves and the range of  $\{f(\zeta_0)\}$  in the class of univalent functions with real coefficients. *J. Soviet Math.*, 1987, vol. 36, pp. 282–291.
34. Jenkins J.A. On univalent functions with real coefficients. *Ann. Math.*, 1960, vol. 71, pp. 1–15.
35. Prokhorov D., Samsonova K. A description method in the value region problem. *Complex Anal. Oper. Theory*, 2017, vol. 11, no. 7, pp. 1613–1622. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11785-016-0551-6>
36. Cowen C. C., Pommerenke Ch., Inequalities for the angular derivative of an analytic function in the unit disk. *J. London Math. Soc.*, 1982, vol. 26, no. 2, pp. 271–289. DOI: <https://doi.org/10.1112/jlms/s2-26.2.271>
37. Goryainov V. V. Fractional iterates of functions that are analytic in the unit disk with given fixed points. *Math. USSR-Sb.*, 1993, vol. 74, no. 1, pp. 29–46. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM1993v074n01ABEH003332>
38. Gumenyuk P., Prokhorov D. Value regions of univalent self-maps with two boundary fixed points. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2018, vol. 43, no. 1, pp. 451–462. DOI: <https://doi.org/10.5186/aasfm.2018.4321>
39. Frolova A., Levenshtein M., Shoikhet D., Vasil'ev A. Boundary distortion estimates for holomorphic maps. *Complex Anal. Oper. Theory*, 2014, vol. 8, no. 5, pp. 1129–1149. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11785-013-0345-z>
40. Goryainov V. V., Kudryavtseva O. S. One-parameter semigroups of analytic functions, fixed points and the Koenigs function. *Sb. Math.*, 2011, vol. 202, no. 7–8, pp. 971–1000. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM2011v202n07ABEH004173>
41. Goryainov V. V. Evolution families of conformal mappings with fixed points and the Loewner–Kufarev equation. *Sb. Math.*, 2015, vol. 206, no. 1–2, pp. 33–60. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM2015v206n01ABEH004445>
42. Goryainov V. V. Holomorphic mappings of the unit disc into itself with two fixed points. *Sb. Math.*, 2017, vol. 208, no. 3, pp. 360–376. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM8802>
43. Babenko K. I. *The theory of extremal problems for univalent functions of class S*. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1975. 320 p.
44. Markina I., Prokhorov D., Vasil'ev A. Sub-Riemannian geometry of the coefficients of univalent functions. *J. Funct. Anal.*, 2007, vol. 245, no. 2, pp. 475–492. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2006.09.013>
45. Takebe T., Teo L.-P., Zabrodin A. Löwner equation and dispersionless hierarchies. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2006, vol. 39, no. 37, pp. 11479–11501. DOI:10.1088/0305-4470/39/37/010
46. Pavlov M. V., Prokhorov D. V., Vasil'ev A. Yu., Zakharov A. M. Löwner evolution and finite dimensional reductions of integrable systems. *Theor. Math. Phys.*, 2014, vol. 181, no. 1, pp. 1263–1278. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11232-014-0211-9>



47. Bombieri E. On the local maximum property of the Koebe function. *Invent. Math.*, 1967, vol. 4, pp. 26–67.
48. Prokhorov D., Roth O. On the local extremum property of the Koebe function. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 2004, vol. 136, no. 2, pp. 301–312. DOI: <https://doi.org/10.1017/S030500410300714X>
49. Greiner R., Roth O. On support points of univalent functions and a disproof of a conjecture of Bombieri. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2001, vol. 129, no. 12, pp. 3657–3664. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-01-05994-9>
50. Gordienko V., Prokhorov D. Analogy of Bombieri's number for bounded univalent functions. *Lobachevskii J. Math.*, 2017, vol. 38, no. 3, pp. 429–434. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080217030118>
51. Gordienko V., Prokhorov D. The Bombieri Problem for Bounded Univalent Functions. *Math. Notes*, 2019, vol. 105, no. 3–4, pp. 442–450. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434619030040>
52. Bshouty D., Hengartner W. A variation of the Koebe mapping in a dense subclass of  $S$ . *Canad J. Math.*, 1987, vol. 39, no. 1, pp. 54–73. DOI: <https://doi.org/10.4153/CJM-1987-004-8>
53. Prokhorov D., Vasil'ev A. Optimal control in Bombieri's and Tammi's conjectures. *Georgian Math. J.*, 2005, vol. 12, no. 4, pp. 743–761. DOI: <https://doi.org/10.1515/GMJ.2005.743>
54. Aharonov D., Bshouty D. A problem of Bombieri on univalent functions. *Comput. Methods Funct. Theory*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 677–688. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40315-016-0165-z>
55. Leung Y.-J. On the Bombieri numbers for the class  $S$ . *J. Anal.*, 2016, vol. 24, no. 2, pp. 229–250. DOI: <https://doi.org/10.1007/s41478-016-0017-2>
56. Efraimidis I. On the failure of Bombieri's conjecture for univalent functions. *Comput. Methods Funct. Theory*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 427–438. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40315-017-0222-2>
57. Efraimidis I., Pastor C. Some more counterexamples for Bombieri's conjecture on univalent functions. [https://arxiv.org:1710.10426v1\[math.CV\]](https://arxiv.org:1710.10426v1[math.CV]) (28 Oct. 2017).
58. Prokhorov D. Necessary criteria for the Bombieri conjecture. *Anal. Math. Phys.*, 2018, vol. 18, no. 4, pp. 679–690. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13324-018-0248-2>

---

**Cite this article as:**

Prokhorov D. V. Value Regions in Classes of Conformal Mappings. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 3, pp. 258–279. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-258-279>

---

УДК 517.54

## Области значений в классах конформных отображений

**Д. В. Прохоров**

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83; научный сотрудник, Петрозаводский государственный университет, Россия, Республика Карелия, 185910, г. Петрозаводск, просп. Ленина, д. 33, [ProkhorovDV@info.sgu.ru](mailto:ProkhorovDV@info.sgu.ru)



Обзор преимущественно посвящен недавним результатам в решении задачи об областях значений в различных классах голоморфных однолистных функций, представимых решениями дифференциальных уравнений Левнера как в радиальной, так и в хордовой версиях. Важно также представить классические и современные методы решения и сравнить их эффективность. Наиболее подробно затронуты методы оптимизации и, в частности, принцип максимума Понтрягина. Областью значений является множество  $\{f(z_0)\}$  всех возможных значений функционала  $f \mapsto f(z_0)$ , где  $z_0$  — это фиксированная точка из верхней полуплоскости в хордовом случае или в единичном круге в радиальном случае, а  $f$  пробегает класс конформных отображений. Решения дифференциальных уравнений Левнера образуют плотные подклассы рассматриваемых семейств функций. Области значений коэффициентов  $\{(a_2, \dots, a_n) : f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n\}$ ,  $|z| < 1$ , составляют часть поля исследований, тесно связанного с экстремальными задачами и с гипотезой Бомбиери о структуре области значений коэффициентов на классе  $S$  в окрестности точки  $(2, \dots, n)$ , соответствующей функции Кебе.

*Ключевые слова:* область значений, уравнение Левнера, достижимое множество, граничная кривая.

Поступила в редакцию: 07.04.2018 / Принята: 12.05.2019 / Опубликовано: 31.08.2019

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

**Благодарности.** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01229).

---

**Образец для цитирования:**

*Prokhorov D. V.* Value Regions in Classes of Conformal Mappings [Прохоров Д. В. Области значений в классах конформных отображений] // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 258–279. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-258-279>

---



УДК 517.96:517.984

## О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью

А. П. Хромов

Хромов Август Петрович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, KhromovAP@info.sgu.ru

В статье даются необходимые и достаточные условия классического решения для однородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом, закрепленными концами и нулевой начальной скоростью. Используя метод Фурье с приемом Крылова по улучшению скорости сходимости рядов, удается получить аналог формулы Даламбера, представимого в виде ряда, сходящегося с экспоненциальной скоростью. Результаты статьи являются существенным усилением аналогичных итогов, полученных нами в 2016 г. Предложенный новый метод, базирующийся на применении расходящихся рядов в понимании Эйлера, обладает большой экономичностью в использовании известных математических фактов. Тем самым открывается перспектива существенного продвижения в исследовании и других граничных задач для уравнений в частных производных.

*Ключевые слова:* метод Фурье, расходящиеся ряды, прием А. Н. Крылова, классическое решение, резольвента.

Поступила в редакцию: 24.04.2019 / Принята: 04.06.2019 / Опубликовано: 31.08.2019

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288>

Рассмотрим смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, \infty), \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t'(x, 0) = 0. \quad (3)$$

Считаем, что  $q(x)$ ,  $\varphi(x)$  комплекснозначны, причем  $q(x) \in L[0, 1]$ . Будут получены необходимые и достаточные условия для классического решения. Тем самым существенно усилены результаты из [1].

Классическим решением называется функция  $u(x, t)$ , непрерывная и непрерывно дифференцируемая по  $x$  и  $t$ , причем  $u_x(x, t)$  ( $u_t(x, t)$ ) абсолютно непрерывна по  $x$  (по  $t$ ), удовлетворяющая почти всюду (1) и условиям (2) и (3). Тем самым необходимыми условиями существования такого решения являются следующие условия на  $\varphi(x)$ :  $\varphi(x)$ ,  $\varphi'(x)$  абсолютно непрерывны, причем  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ . В [1] показано, что при дополнительном условии

$$L\varphi = -\varphi''(x) + q(x)\varphi(x) \in L_p[0, 1] \quad (p > 1), \quad (4)$$



эти условия являются достаточными для классического решения. Теперь мы убираем условие (4) и тем самым получаем необходимые и достаточные условия такого решения. Применяем метод Фурье. Традиционное его применение связано с дважды почленно дифференцированием формального решения, приводящим к завышенным требованиям гладкости на  $\varphi(x)$ , которые не вытекают из самой сущности задачи (1)–(3). Мы, как и в [2], отказываемся от такого традиционного подхода, привлекая рекомендации А. Н. Крылова об ускорении сходимости рядов (см. [3, гл. VI]). В [2] В. А. Чернятин впервые успешно изучил задачу (1)–(3), в случае  $q(x)$  вещественной и непрерывной, получил необходимые и достаточные условия существования классического решения задачи (1)–(3), когда уравнение (1) удовлетворяется всюду. Эти условия таковы:  $\varphi(x) \in C^2[0, 1]$ ,  $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$ . У нас теперь из-за условия  $q(x) \in L[0, 1]$  уравнение (1) удовлетворяется почти всюду, что сильно усложняет исследование классического решения задачи (1)–(3). Далее мы, в отличие от [2], применяем резольвентный подход, связанный с методом Коши – Пуанкаре контурного интегрирования резольвенты оператора Штурма – Лиувилля по спектральному параметру, к которому приходим в задаче (1)–(3), когда используем метод Фурье. Он имеет большие преимущества по сравнению с методом из [2], так как теперь не требуются уточненные асимптотики собственных значений и собственных функций, и это сильно упрощает доказательства. Впервые такой подход был применен в [4, 5] и в дальнейшем систематически использовался. Формальное решение по методу Фурье, как и в [4, 5], берем в виде

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \varphi) \cos pt \, d\lambda, \quad (5)$$

где  $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$  – резольвента оператора  $L$ :  $Ly = -y''(x) + q(x)y(x)$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ ,  $\lambda$  – спектральный параметр,  $E$  – единичный оператор,  $\lambda = \rho^2$ ,  $\operatorname{Re} \rho \geq 0$ ,  $\gamma_n$  – образ в  $\lambda$  – плоскости окружности  $\tilde{\gamma}_n = \{\rho \mid |\rho - n\pi| = \delta\}$ ,  $\delta > 0$  и достаточно мало,  $r > 0$  достаточно велико и фиксировано,  $n_0$  – такой номер, что при  $n \geq n_0$  внутри  $\gamma_n$  находится по одному собственному значению оператора  $L$  и все  $\gamma_n$  при  $n \geq n_0$  находятся вне  $|\lambda| = r$ .

В статье существенно используются расходящиеся ряды в понимании Эйлера (см. [6, с. 100–101]). Проводя формально обычные действия с такими рядами, как то: почленное умножение на константы, почленное сложение конечного числа рядов, разбиение ряда на сумму конечного числа рядов, замены отдельных рядов их суммами в случае сложения рядов, перестановки рядов и интегралов и т. п., мы в итоге получаем новые ряды или конечные выражения. Затем уже строго устанавливаем нужные нам свойства таких рядов или выражений и получаем ответы на интересующие нас вопросы. В итоге это сулит большие выгоды в выборе необходимых фактов для получения наших результатов и облегчаются сами доказательства, поскольку дело сводится к установлению справедливости отдельных формул, что является зачастую и не таким уж сложным делом. Наша статья подтверждает полезность этих действий. Отметим, что такая схема работы с расходящимися рядами намечена нами в [7].

1. Здесь будем проводить нестрогие преобразования (5), используя рекомендации А. Н. Крылова и расходящиеся ряды, причем при назначении сумм расходящихся рядов ориентируемся и на задачу, получаемую из (1)–(3), при замене уравнения (1)





на неоднородное уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t) + f(x, t). \quad (6)$$

В этом случае формальное решение (5) приобретает вид [7]:

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left[ (R_\lambda \varphi) \cos \rho t + \int_0^t R_\lambda(f(\cdot, \tau)) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau \right] d\lambda,$$

где  $R_\lambda(f(\cdot, \tau))$  означает, что  $R_\lambda$  применяется к  $f(x, \tau)$  по  $x$ . В этих нестрогих рассуждениях считаем, что  $\varphi(x)$  и  $q(x)$  не выходят за рамки  $L[0, 1]$ , а  $f(x, t)$  из  $L[Q_T]$ , где  $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$  при любом  $T > 0$ . Итак, берем ряд (5). Представляем его в виде

$$u(x, t) = u_{01}(x, t) + u_1(x, t), \quad (7)$$

где  $u_{01}(x, t)$  есть (5) и  $R_\lambda$  заменено на  $R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ ,  $L_0$  есть оператор  $L$  при  $q(x) = 0$ .

По теореме вычетов имеем

$$u_{01}(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \sin n\pi\xi) \sin n\pi x \cos n\pi t, \quad (8)$$

где  $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$ . Очевидно ряд (8) легко преобразуется к виду

$$u_{01}(x, t) = \Sigma_+ + \Sigma_-, \quad (9)$$

где  $\Sigma_\pm = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \sin n\pi\xi) \sin n\pi(x \pm t)$ . Ряд  $2 \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \sin n\pi\xi) \sin n\pi\eta$  есть ряд Фурье функции  $\varphi(x) \in L[0, 1]$  и в случае его сходимости имеет сумму  $\tilde{\varphi}(\eta)$  при всех  $\eta \in (-\infty, \infty)$ , где  $\tilde{\varphi}(\eta)$  2-периодическая, нечетная и  $\tilde{\varphi}(\eta) = \varphi(\eta)$  при  $\eta \in [0, 1]$ . Поэтому в случае расходимости рядов  $\Sigma_\pm$  (а в силу примера А. Н. Колмогорова такие случаи возможны) мы по определению будем считать, что сумма ряда (9) или (8) есть

$$u_{01}(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)]. \quad (10)$$

Правая часть (10) имеет смысл при любых  $x, t \in (-\infty, \infty) \times [0, \infty)$  и поэтому в данном случае  $u_{01}(x, t)$  из (10) будем обозначать  $a_0(x, t)$ . Так как  $a_0(x, t)$  похожа на решение задачи (1)–(3) при  $q(x) = 0$ , то  $u_1(x, t)$  похожа на решение задачи:

$$\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u_1(x, t) + f_0(x, t), \quad (11)$$

$$u_1(0, t) = u_1(1, t) = 0, \quad (12)$$

$$u_1(x, 0) = u'_{1,t}(x, 0) = 0, \quad (13)$$



где  $f_0(x, t) = -q(x)a_0(x, t)$ . Поэтому от ряда для  $u_1(x, t)$  из (7) перейдем в силу (6) к формальному ряду для (11)–(13), т.е. к ряду вида

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \int_0^t R_\lambda(f_0(\cdot, \tau)) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau d\lambda. \quad (14)$$

Представим теперь ряд (14) в виде

$$u_1(x, t) = u_{02}(x, t) + u_2(x, t),$$

где  $u_{02}(x, t)$  есть (14) и  $R_\lambda$  заменено на  $R_\lambda^0$ .

По теореме вычетов имеем

$$u_{02}(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (f_0(\xi, \tau), \sin n\pi\xi) \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \sin n\pi(t - \tau), d\tau. \quad (15)$$

Используя формулу

$$\int_0^x \sin n\pi\eta d\eta = \frac{1}{n\pi} [1 - \cos n\pi x],$$

получим, что  $u_{02}(x, t)$  из (15) есть

$$\begin{aligned} u_{02}(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (f_0(\xi, \tau), \sin n\pi\xi) \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sin n\pi\eta d\eta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sum_1^{\infty} (f_0(\xi, \tau), \sin n\pi\xi) \sin n\pi\eta d\eta = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_0(\eta, \tau) d\eta, \end{aligned}$$

где  $\tilde{f}_0(\eta, \tau)$  нечетна и 2-периодична по  $\eta$  и  $\tilde{f}_0(\eta, \tau) = f_0(\eta, \tau)$ ,  $\eta \in [0, 1]$ .

Рассуждаем как и выше. Функция  $u_{02}(x, t)$  в силу (14) похожа на решение задачи (11)–(13), где вместо  $f_0(x, t)$  теперь берется  $f_1(x, t) = -q(x)a_1(x, t)$  и

$$a_1(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_0(\eta, \tau) d\eta,$$

и продолжаем этот процесс до бесконечности.

В итоге от ряда (5) приходим к ряду:  $A(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, t)$ , где  $a_0(x, t)$  определена выше,

$$a_n(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_{n-1}(\eta, \tau) d\eta, \quad n \geq 1$$

и  $f_n(x, t) = -q(x)a_n(x, t)$ .



2. Приступаем к строгим рассуждениям. Рассматриваем задачу (1)–(3). Ранее отмечалось, что для классического решения необходимо считать, что  $\varphi(x)$ ,  $\varphi'(x)$  абсолютно непрерывны и  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ . Теперь считаем, что  $\varphi(x)$  удовлетворяет этим требованиям. Привлекаем ряд  $A(x, t)$ . Леммы 1–5 легко следуют из соответствующих фактов из [8] (см. также [9]).

**Лемма 1.** Пусть  $T$  — произвольное положительное число,  $m$  — наименьшее натуральное число, такое что  $T \leq m$ . Тогда

$$\| a_n(x, t) \|_{C[Q_T]} \leq M_1 \left( \frac{M_2}{2} \right)^{n-1} \frac{T^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n \in N),$$

где  $M_1 = \| a_1(x, t) \|_{C[Q_T]}$ ,  $M_2 = (2m+1) \| q \|_1$  ( $\| \cdot \|_1$  — норма в  $L[0, 1]$ ). Кроме того,  $M_1 \leq C_T \| \varphi \|_1$  и постоянная  $T$  не зависит от  $\varphi(x)$ . Здесь  $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$ .

**Следствие 1.** Ряд  $A_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x, t)$  сходится абсолютно и равномерно в  $Q_T$  с экспоненциальной скоростью.

**Лемма 2.** Функция  $a_0(x, t)$  непрерывна и непрерывно дифференцируема по  $x$  и  $t \in (-\infty, \infty) \times [0, \infty)$ , ее производная  $a'_{0x}(x, t)$  ( $a'_{0t}(x, t)$ ) абсолютно непрерывна по  $x$  (по  $t$ ), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 a_0(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 a_0(x, t)}{\partial x^2}$$

почти всюду и выполняются условия

$$a_0(0, t) = a_0(1, t) = 0, \quad a_0(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), \quad a'_{0t}(x, 0) = 0.$$

**Следствие 2.** При  $x \in [0, 1]$  функция  $a_0(x, t)$  является классическим решением задачи (1)–(3) при  $q(x) = 0$ , причем  $\frac{\partial^2 a_0(x, t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$  при любом  $T > 0$ .

**Лемма 3.** Функция  $a_1(x, t)$  непрерывно дифференцируема по  $x$  и  $t$ , причем

$$\frac{\partial a_1(x, t)}{\partial t} = J_{11}(x, t) + J_{21}(x, t), \quad \frac{\partial a_2(x, t)}{\partial x} = J_{11}(x, t) - J_{21}(x, t),$$

где  $J_{11}(x, t) = \frac{1}{2} \int_x^{x+t} f_0(\xi, x+t-\xi) d\xi$ ,  $J_{21}(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^x f_0(\xi, \xi-x+t) d\xi$ ,  $f_0(x, t) = -q(x)a_0(x, t)$  (здесь и в дальнейшем  $q(x)$  четное, 2-периодическое продолжение на всю ось функции  $q(x)$  из задачи (1)–(3),  $J_{11}(x, t)$  и  $J_{21}(x, t)$  непрерывны по  $x$  и  $t$ ).

**Лемма 4.** При фиксированном  $x$  функции  $J_{11}(x, t)$  и  $J_{21}(x, t)$  абсолютно непрерывны по  $t$ , и почти при всех  $t \in [0, \infty]$  справедливы формулы

$$2 \frac{\partial J_{11}(x, t)}{\partial t} = - \left[ q(x+t)a_0(x+t, 0) + \int_x^{x+t} q(\xi)a'_{0t}(\xi, x+t-\xi) d\xi \right],$$

$$2 \frac{\partial J_{21}(x, t)}{\partial t} = - \left[ q(x-t)a_0(x-t, 0) + \int_{x-t}^x q(\xi)a'_{0t}(\xi, \xi-x+t) d\xi \right],$$



причем правые части конечны, если конечны

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\xi q(\tau) d\tau, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\xi |q(\tau)| d\tau \tag{16}$$

при  $\xi = x + t, x - t$ .

**Лемма 5.** При фиксированном  $t$  функции  $J_{11}(x, t)$  и  $J_{21}(x, t)$  абсолютно непрерывны по  $x$ , и почти при всех  $x \in (-\infty, \infty)$  справедливы формулы

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial J_{11}(x, t)}{\partial x} &= - \left[ q(x+t)a_0(x+t, 0) - q(x)a_0(x, t) + \int_x^{x+t} q(\xi)a'_{0t}(\xi, x+t-\xi) d\xi \right], \\ 2 \frac{\partial J_{21}(x, t)}{\partial x} &= - \left[ q(x)a_0(x, t) - q(x-t)a_0(x-t, 0) - \int_{x-t}^x q(\xi)a'_{0t}(\xi, \xi-x+t) d\xi \right], \end{aligned}$$

причем правые части конечны, если конечны (16) при  $\xi = x, x + t, x - t$ .

С помощью лемм 3–5 легко получается

**Теорема 1.** Функция  $a_1(x, t)$  непрерывна и непрерывно дифференцируема по  $x$  и  $t$ , ее производные  $a'_{1x}(x, t)$  ( $a'_{1t}(x, t)$ ) абсолютно непрерывны по  $x$  ( $t$ ), выполняется уравнение

$$\frac{\partial^2 a_1(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 a_1(x, t)}{\partial x^2} - q(x)a_0(x, t) \tag{17}$$

и условия (2), (3) при  $\varphi(x) = 0$ , причем (17) имеет место при всех  $x$  и  $t$ , для которых конечны (16) при  $\xi = x, x + t, x - t$ . При этом  $\frac{\partial^2 a_1(x, t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$

По индукции аналогично теореме 1 получается

**Теорема 2.** Функция  $a_n(x, t)$  при  $n \geq 2$  непрерывна и непрерывно дифференцируема по  $x$  и  $t$ , ее производные  $a'_{nx}(x, t)$  ( $a'_{nt}(x, t)$ ) абсолютно непрерывны по  $x$  (по  $t$ ), выполняются (2), (3) при  $\varphi(x) = 0$  и почти при всех  $x, t$  выполняется (17), где  $a_1(x, t)$  заменяется на  $a_n(x, t)$ ,  $a_0(x, t)$  на  $a_{n-1}(x, t)$ , причем (17) выполняется при тех же  $x, t$ , что и в теореме 1. При этом  $\frac{\partial^2 a_n(x, t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$ .

Далее, на основании леммы 1 и теорем 2 и 3 получается

**Лемма 6.** Функция  $A(x, t)$  непрерывна и непрерывно дифференцируема по  $x, t \in (-\infty, \infty) \times [0, \infty)$ , причем имеют место формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial a_0(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \int_x^{x+t} q(\xi)A(\xi, x+t-\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_{x-t}^x q(\xi)A(\xi, \xi-x+t) d\xi, \\ \frac{\partial A(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial a_0(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{2} \int_x^{x+t} q(\xi)A(\xi, x+t-\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_{x-t}^x q(\xi)A(\xi, \xi-x+t) d\xi. \end{aligned}$$

Приступаем к доказательству основного результата.

**Теорема 3.** Пусть  $q(x) \in L[0, 1]$ . Для того, чтобы существовало единственное классическое решение задачи (1)–(3), необходимо и достаточно, чтобы  $\varphi(x), \varphi'(x)$  были абсолютно непрерывны и  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ . Это решение дается формулой  $u(x, t) = A(x, t)$ .



**Доказательство.** Достаточно доказать лишь достаточность. Обозначим

$$B_1(x, t) = \int_x^{x+t} q(\xi)A(\xi, x+t-\xi) d\xi, \quad B_2(x, t) = \int_{x-t}^x q(\xi)A(\xi, \xi-x+t) d\xi.$$

Аналогично лемме 4 получаем, что  $B_1(x, t)$ ,  $B_2(x, t)$  при фиксированном  $x$  абсолютно непрерывны по  $t$  и

$$\frac{\partial B_1(x, t)}{\partial t} = q(x+t)A(x+t, 0) + \int_x^{x+t} q(\xi)A'_t(\xi, x+t-\xi) d\xi, \quad (18)$$

$$\frac{\partial B_2(x, t)}{\partial t} = q(x-t)A(x-t, 0) + \int_{x-t}^x q(\xi)A'_t(\xi, \xi-x+t) d\xi, \quad (19)$$

причем правые части (18) и (19) конечны, если конечны (16) при  $\xi = x+t$ ,  $x-t$ .

Аналогично лемме 5 получаем, что  $B_1(x, t)$  и  $B_2(x, t)$  при фиксированном  $t$  абсолютно непрерывны по  $x$  и

$$\frac{\partial B_1(x, t)}{\partial x} = q(x+t)A(x+t, 0) - q(x)A(x, t) + \int_x^{x+t} q(\xi)A'_t(\xi, x+t-\xi) d\xi, \quad (20)$$

$$\frac{\partial B_2(x, t)}{\partial x} = q(x)A(x, t) - q(x-t)A(x-t, 0) + \int_{x-t}^x q(\xi)A'_t(\xi, \xi-x+t) d\xi, \quad (21)$$

причем правые части (20) и (21) конечны, если конечны (16) при  $\xi = x$ ,  $x-t$ ,  $x+t$ .

Так как

$$\frac{\partial A(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial a_0(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{2}B_1(x, t) - \frac{1}{2}B_2(x, t),$$

$$\frac{\partial A(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial a_0(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{2}B_1(x, t) + \frac{1}{2}B_2(x, t),$$

то  $\frac{\partial A(x, t)}{\partial t}$  при фиксированном  $x$  абсолютно непрерывна по  $t$  и почти всюду по  $t$  справедлива формула

$$\frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 a_0(x, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial B_1(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial B_2(x, t)}{\partial t}, \quad (22)$$

причем она имеет место, если конечны (16) при  $\xi = x+t$ ,  $x-t$  и конечны  $\tilde{\varphi}''(x+t)$ ,  $\tilde{\varphi}''(x-t)$ .

Наконец,  $\frac{\partial A(x, t)}{\partial x}$  при фиксированном  $t$  абсолютно непрерывны по  $x$  и имеет место формула

$$\frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 a_0(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial B_1(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial B_2(x, t)}{\partial x}. \quad (23)$$

Из (22) и (23) получаем, что  $A(x, t)$  удовлетворяет уравнению (1) почти всюду. Начальные и граничные условия легко проверяются. Так как  $\frac{\partial^2 a_0(x, t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$ , то получаем классическое решение в классе единственности.  $\square$

Отметим еще, что ряд  $A(x, t)$  быстроходящийся (экспоненциальная сходимость), в том числе и в крайнем случае  $q(x) \in L[0, 1]$ . Достоинство его в том, что он является явным выражением как классического, так и обобщенного решения задачи (1)–(3). Мы получаем теперь результаты из [1, 7–9] в случае  $p = 1$ , не используя ни пример А. Н. Колмогорова, ни теоремы Карлесона – Ханта и Хаусдорфа – Юнга. Доказательства являются элементарными, но весьма непростыми и в них используются приемы, схожие с вышеуказанными для расходящихся рядов.



## Библиографический список

1. Хромов А. П. О сходимости формального решения по методу Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2016. Т. 56, № 10. С. 1795–1805. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044466916100112>
2. Чернятин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1991. 112 с.
3. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. 368 с.
4. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. АН. 2014. Т. 458, № 2. С. 138–140. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0869565214260041>
5. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2015. Т. 55, № 2. С. 229–241. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044466915020052>
6. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949. 280 с.
7. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии // Материалы. междунар. конф. «Понрягинские чтения – ХХХ». Воронеж : ИД ВГУ, 2019. С. 291–300.
8. Корнев В. В., Хромов А. П. Классическое и обобщенные решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2019. Т. 59, № 2. С. 286–300. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0044466919020091>
9. Хромов А. П. Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 5. С. 717–731. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064119050121>

---

### Образец для цитирования:

Хромов А. П. О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 280–288. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288>

---

## On Classic Solution of the Problem for a Homogeneous Wave Equation with Fixed End-Points and Zero Initial Velocity

A. P. Khromov

Avгust P. Khromov, <https://orcid.org/0000-0002-2454-8009>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, [KhromovAP@info.sgu.ru](mailto:KhromovAP@info.sgu.ru)

The paper gives necessary and sufficient conditions of classic solution for a homogeneous wave equation with a summable potential, fixed end-point, and zero initial velocity. With the use of Fourier method and Krylov method of improving series rate convergence an analogue of d'Alembert formula is derived in the form of exponentially convergent series. The paper essentially supports and extends the results of our work carried out in 2016. The suggested new method, based on the use of divergent (in Euler's sense) series, is very economical in using well-known mathematical facts. It opens a perspective of considerable advancement in studying other boundary problems for partial differential equations.



**Keywords:** Fourier method, divergent series, Krylov method, classic solution, resolvent.

Received: 24.04.2019 / Accepted: 04.06.2019 / Published: 31.08.2019

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## References

1. Khromov A. P. On the convergence of the formal Fourier solution of the wave equation with a summable potential. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2016, vol. 56, iss. 10, pp. 1778–1792. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542516100110>
2. Chernyatin V. A. *Obosnovanie metoda Fur'e v smeshannoi zadache dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Justification of the Fourier Method in a Mixed Problem for Partial Differential Equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1991. 112 p. (in Russian).
3. Krylov A. N. *O nekotorykh differentsial'nykh uravneniyakh matematicheskoy fiziki, imeyushchikh prilozheniya v tekhnicheskikh voprosakh* [On Some Differential Equations of Mathematical Physics Having Applications in Engineering]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1950. 368 p. (in Russian).
4. Burlutskaya M. S., Khromov A. P. Rezolventny approach in the Fourier method. *Dokl. Math.*, 2014, vol. 90, iss. 2, pp. 545–548. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064562414060076>
5. Burlutskaya M. S., Khromov A. P. The resolvent approach for the wave equation. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2015, vol. 55, iss. 2, pp. 227–239. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542515020050>
6. Euler L. *Differentsial'noe ischislenie* [Differential calculus]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1949. 280 p. (in Russian).
7. Khromov A. P. Divergent series and functional equations related to analogues of a geometric progression. In: *Proc. Intern. Conf. "Pontryaginskije chteniya – XXX"*. Voronezh, Izdatel'skij dom VGU, 2019, pp. 291–300 (in Russian).
8. Kornev V. V., Khromov A. P. Classical and Generalized Solutions of a Mixed Problem for a Nonhomogeneous Wave Equation. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2019, vol. 59, iss. 2, pp. 275–289. DOI: <https://doi.org/10.1134/S096554251902009X>
9. Khromov A. P. Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of a Classical Solution of the Mixed Problem for the Homogeneous Wave Equation with an Integrable Potential. *Differential Equations*, 2019, vol. 55, iss. 5, pp. 703–717. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266119050112>

---

### Cite this article as:

Khromov A. P. On Classic Solution of the Problem for a Homogeneous Wave Equation with Fixed End-Points and Zero Initial Velocity. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 3, pp. 280–288 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288>

---



# МЕХАНИКА

## Threshold Values of Morphological Parameters Associated with Cerebral Aneurysm Rupture Risk

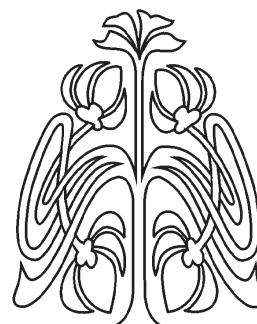
A. V. Dol, O. A. Fomkina, D. V. Ivanov

Aleksandr V. Dol, <https://orcid.org/0000-0001-5842-1615>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, nerevishl@gmail.com

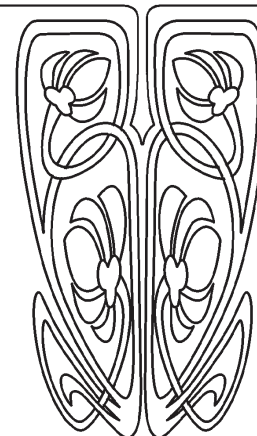
Olga A. Fomkina, <https://orcid.org/0000-0002-1516-0504>, Saratov State Medical University name after V. I. Razumovsky, 112 Bolshaya Kazachia St., Saratov 410012, Russia, oafomkina@mail.ru

Dmitriy V. Ivanov, <https://orcid.org/0000-0003-1640-6091>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, ivanovdv@gmail.com

Numerous studies have shown that morphological parameters of aneurysms are associated with their rupture. However, literature data on the values of these parameters vary significantly. The objective of this study is to identify image-based morphological parameter values which correlate with cerebral aneurysm rupture and can be used during preoperative planning to detect aneurysms prone to rupture. Mean values of the morphological factors such as aspect ratio and size ratio were chosen from the literature. These factors were sampled for ruptured and unruptured aneurysms. Statistical analysis of these factors was performed. Statistically significant differences were obtained between mean values in samples of size ratio and aspect ratio for ruptured and unruptured aneurysms. There were no statistically confirmed differences between size ratios for ruptured and unruptured anterior communicating artery aneurysms. In contrast, such differences were revealed for both of examined parameters for posterior communicating artery and middle cerebral artery. ROC analysis revealed critical values of aspect ratio and size ratio which distinguish ruptured aneurysms from unruptured ones. High correlation was obtained between size ratio and aspect ratio. Mean values of aspect ratio and size ratio published in recent articles are smaller than the values published 10–15 years ago. Diagram size ratio – aspect ratio showed threshold value of aspect ratio. It was shown that among considered morphological factors, aspect ratio was meaningful. Moreover, aspect ratio correlates with size ratio, and therefore we assume that size ratio is redundant. The obtained criterion value of  $AR = 1.2$  in our opinion is logical. It was also confirmed by ROC analysis.



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ







**Keywords:** cerebral aneurysm, aspect ratio, size ratio, preoperative planning, statistical analysis, ROC analysis.

Received: 18.10.2018 / Accepted: 26.06.2019 / Published: 31.08.2019

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-289-304>

## INTRODUCTION

Intracranial aneurysm (IA) is a vascular disorder affecting 2–5% of population [1,2]. Rupture of IA frequently leads to subarachnoid hemorrhage (SAH). The worldwide incidence of SAH is about 9/100000 [3]. Despite the advances in SAH management, the mortality rate still remains very high. According to the authors [4], up to 33% of patients with SAH die before they are hospitalized and approximately 25% die within 24 hours. Moreover, studies report that half of the survivors remain disabled [5].

Today more and more IAs are detected with the help of modern imaging methods such as computed tomography (CT) and magnetic-resonance imaging (MRI). In spite of this fact there is still a dilemma to decide which IA to treat. So the identification of IA prone to rupture is a challenge for a surgeon. Moreover, surgeon must determine which aneurysms need to be treated and which may not be treated because of the high treatment-related risks [6,7].

Modern researches show that IA morphologies such as aspect ratio (AR) [8,9] and size ratio (SR) [10,11] are related to IA rupture status. These parameters can be calculated on the basis of CT and MRI data and are convenient for preoperative diagnosis. However, different authors obtain different threshold values of these parameters, as a result, their applicability is complicated.

This article analyzes published AR and SR values for ruptured and unruptured IAs in order to determine their critical values, by means of which it is possible to identify aneurysms prone to rupture.

## 1. MATERIALS AND METHODS

A total of 117 articles were found devoted to the study of morphological factors of cerebral artery aneurysm rupture. Articles that did not contain mean values of SR and AR parameters were discarded. Articles in English were considered. Thus, 29 articles devoted to the study of the SR of IAs and 40 articles on the AR of IAs were selected. Search for articles was carried out on Scopus, Pubmed, Elibrary and Google Scholar databases. The review includes articles published from 1999 to 2018. We used the following keywords for article search:

- 1) cerebral aneurysm aspect ratio;
- 2) cerebral aneurysm size ratio;
- 3) cerebral aneurysm morphological rupture factor;
- 4) factors of cerebral aneurysm rupture.

Articles devoted only to numerical modeling were excluded. Only clinical research articles on the search for aneurysm rupture factors mean values were included. Aneurysm morphologies which were published in reviewed articles were measured using computed tomography angiography images. Since the question of the demographic data of patients is not put in the papers on the factors of aneurysm rupture, it is also not covered in this work. Mean values of SR and AR parameters for ruptured and unruptured aneurysms of the cerebral arteries were chosen from the selected articles.



AR is the maximum perpendicular height of aneurysm divided by the average aneurysm neck diameter. SR is the maximum aneurysm height divided by the mean diameter of branch associated with the aneurysm (Fig. 1). In the third column of Tables 1 and 2 arteries are indicated, for which AR and SR parameters are given: MCA is middle cerebral artery, ICA is internal carotid artery, AcomA is anterior communicating artery, PcomA is posterior communicating artery, All is all cerebral arteries.

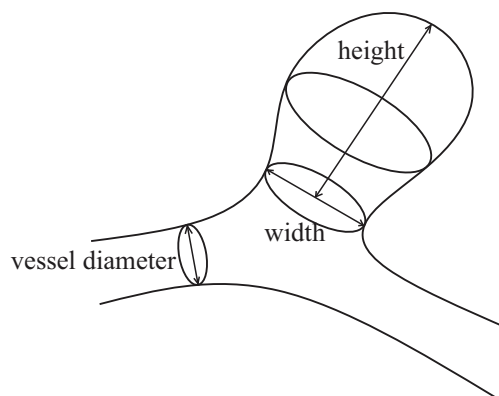


Fig. 1. Schematic image of a brain vessel with an aneurysm

Table 1

Mean values of AR

No.	AR for ruptured	AR for unruptured	Artery	Reference	No.	AR for ruptured	AR for unruptured	Artery	Reference
1	2.70	1.80	All	[12]	21	1.49	0.85	PcomA	[30]
2	2.70	1.50	All	[8]	22	1.80	1.40	All	[31]
3	1.70	1.30	All	[13]	23	1.30	1.10	PcomA	[32]
4	1.24	0.86	MCA	[14]	24	1.56	0.86	All	[33]
5	2.20	1.60	PcomA	[15]	25	1.32	1.02	All	[34]
6	3.40	1.80	All	[16]	26	1.43	0.95	All	[35]
7	1.60	1.10	All	[17]	27	1.31	0.92	All	[36]
8	1.96	1.50	All	[18]	28	1.48	0.86	PcomA	[37]
9	1.39	1.07	AcomA	[19]	29	2.50	1.44	All	[38]
10	1.26	0.97	All	[20]	30	1.40	0.90	All	[39]
11	1.37	1.17	PcomA	[21]	31	1.90	1.30	MCA	[40]
12	2.06	1.03	All	[22]	32	1.70	1.20	All	[41]
13	1.50	1.30	All	[23]	33	1.75	1.01	MCA	[42]
14	1.76	1.29	All	[24]	34	1.90	1.30	All	[43]
15	1.36	1.05	All	[25]	35	2.30	1.70	All	[44]
16	1.18	0.96	All	[26]	36	1.50	1.20	All	[10]
17	1.90	1.50	ICA	[27]	37	2.20	1.50	MCA	[45]
18	1.60	1.03	MCA	[14]	38	1.49	0.96	All	[46]
19	1.84	1.09	All	[28]	39	1.61	1.49	All	[11]
20	1.27	0.84	PcomA	[29]	40	1.51	1.07	MCA	[9]

Table 2

Mean values of SR

No.	SR for ruptured	SR for unruptured	Artery	Reference	No.	SR for ruptured	SR for unruptured	Artery	Reference
1	2.80	1.80	All	[10]	8	1.77	1.44	PcomA	[21]
2	4.07	2.57	All	[47]	9	2.67	0.98	All	[22]
3	2.09	1.55	AcomA	[48]	10	4.300	2.20	All	[51]
4	2.39	1.20	All	[49]	11	1.50	1.10	All	[23]
5	2.60	1.90	AcomA	[50]	12	2.84	2.05	All	[52]
6	3.22	2.34	AcomA	[19]	13	2.81	0.75	All	[24]
7	2.01	1.22	All	[20]	14	2.13	1.46	All	[25]



The end of Table 2

No.	SR for ruptured	SR for unruptured	Artery	Reference	No.	SR for ruptured	SR for unruptured	Artery	Reference
15	1.30	0.90	AcomA	[53]	23	2.26	1.50	PcomA	[37]
16	3.14	1.58	All	[54]	24	3.04	1.86	All	[38]
17	1.04	0.86	All	[55]	25	2.60	1.20	All	[39]
18	1.92	1.00	PcomA	[30]	26	3.28	2.16	MCA	[42]
19	1.84	1.62	PcomA	[32]	27	2.58	1.47	All	[46]
20	1.88	0.84	All	[33]	28	1.86	1.70	All	[11]
21	2.73	2.31	All	[34]	29	1.22	0.79	MCA	[9]
22	2.65	1.85	All	[35]					

Mean values of AR and SR for AcomA, PcomA and MCA were chosen from Tables 1, 2 and are listed in Tables 3, 4.

SR and AR were analyzed according to the following scheme.

Table 3

Mean values of SR for AcomA and PcomA

AcomA		PcomA	
Ruptured	Unruptured	Ruptured	Unruptured
1.30	0.90	1.77	1.44
2.09	1.55	1.84	1.62
2.60	1.90	1.92	1.00
3.22	2.34	2.26	1.50

Table 4

Mean values of AR for PcomA and MCA

PcomA		MCA	
Ruptured	Unruptured	Ruptured	Unruptured
1.27	0.84	1.24	0.86
1.30	1.10	1.60	1.03
1.37	1.17	1.75	1.01
1.48	0.86	1.90	1.30
1.49	0.85	2.20	1.50
2.20	1.60	1.51	1.07

a sample for ruptured/unruptured aneurysms to identify critical values of AR and/or SR. Comparison of ROC curves for AR and SR.

6. Spearman correlation analysis.

7. Calculation of critical values of AR and/or SR to distinguish groups of ruptured / unruptured aneurysms.

All calculations were carried out in Medcalc 18.11.6 software.

## 2. RESULTS

1. Normality test for distributions in samples from Tables 1 and 2 was carried out with the help of Shapiro – Wilk test [56].

Histograms for AR and SR samples for ruptured and unruptured aneurysms and normality Shapiro – Wilk test diagrams are shown in Fig. 2–5.

1. Checking the distributions in the samples for normality. Building histograms.

2. Confirming the statistical significance of the differences between groups of ruptured and unruptured aneurysms for AR and SR using Mann – Whitney test.

3. Calculating medians and percentiles for samples of ruptured and unruptured aneurysms for AR and SR for all arteries, as well as for AcomA, PcomA, and MCA, for which separate samples of AR and SR values were formed.

4. ROC analysis for AR and SR. Calculation of ROC areas for AR and SR.

5. Selection of articles in which data on both of ratios (AR and SR) was presented and the formation of

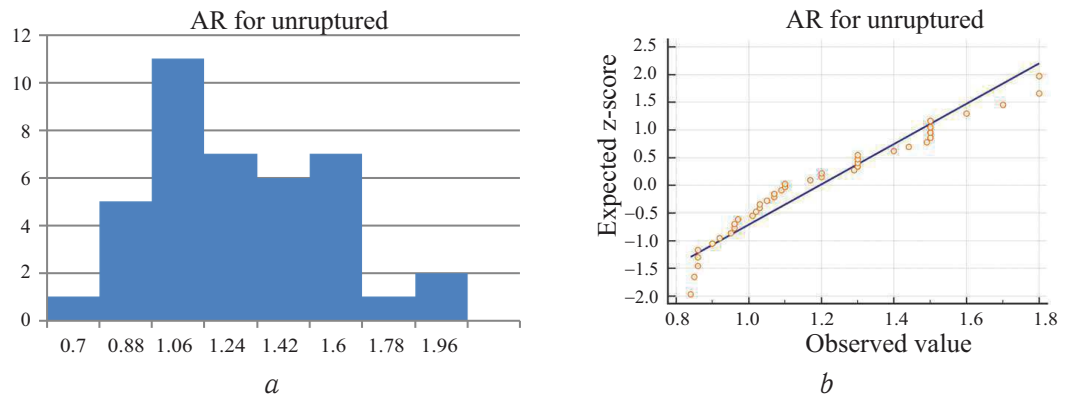


Fig. 2. AR histogram for unruptured aneurysms (a) and Shapiro – Wilk normality test (b)

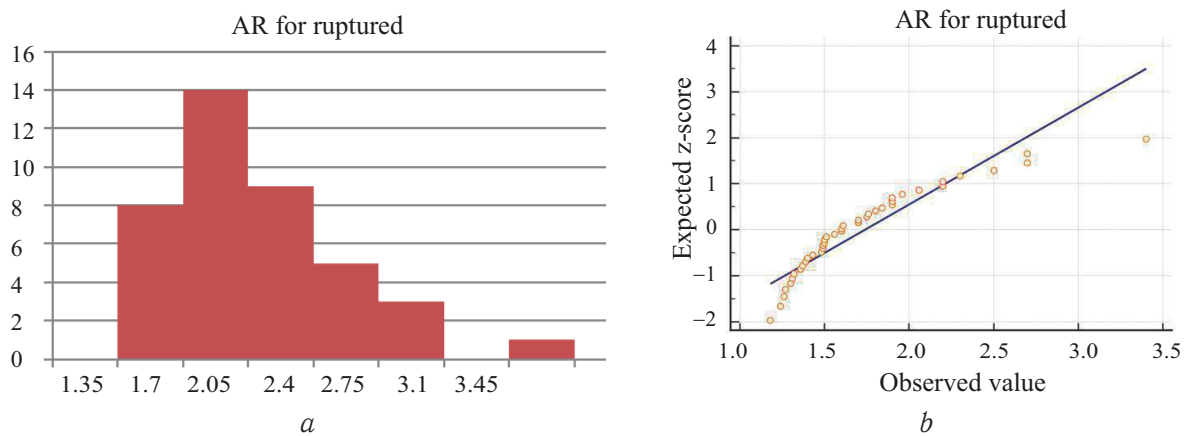


Fig. 3. AR histogram for ruptured aneurysms (a) and Shapiro – Wilk normality test (b)

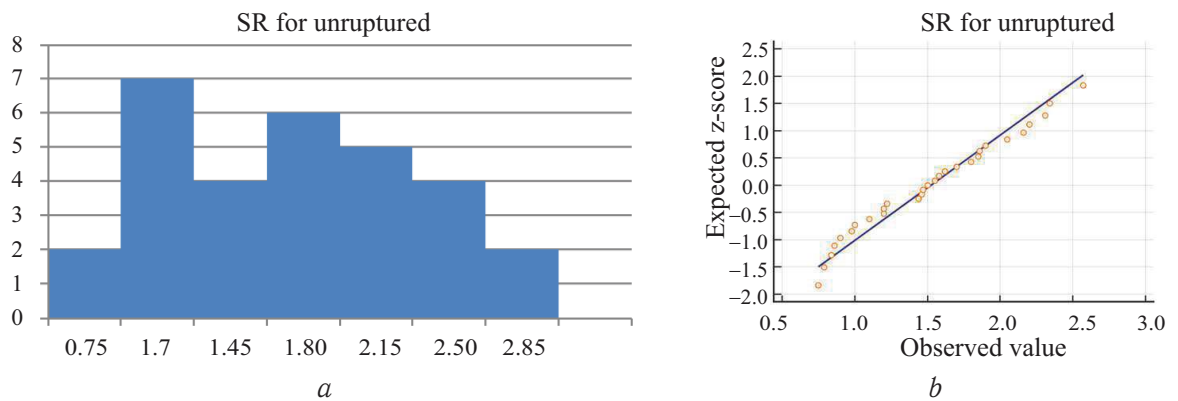


Fig. 4. SR histogram for unruptured aneurysms (a) and Shapiro – Wilk normality test (b)

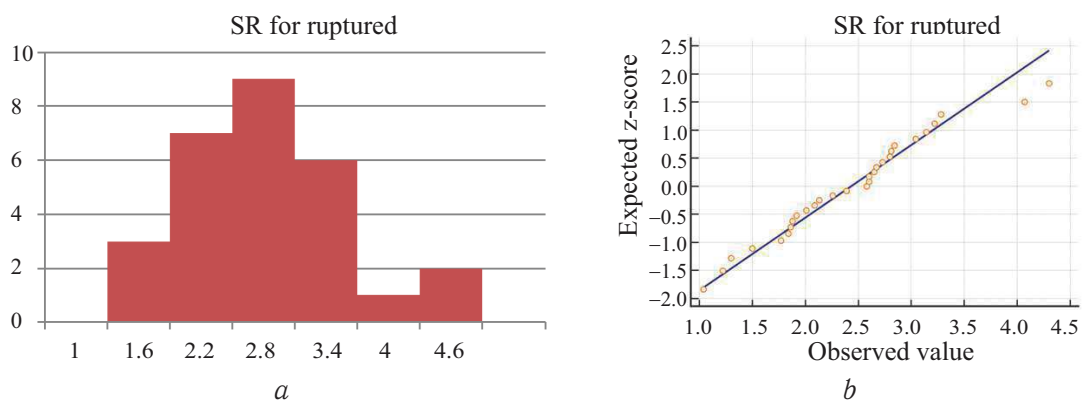


Fig. 5. SR histogram for ruptured aneurysms (a) and Shapiro – Wilk normality test (b)



*Table 5*  
Mann – Whitney test for AR  
and SR ( $P = 0.05$ )

Parameter	AR	SR
Mann – Whitney criterion	205	114
Critical value	628	314

Shapiro – Wilk test, as well as the type of histograms in Fig. 2–5 showed that in each of the four samples in Tables 1 and 2, the distribution of values was not normal. Therefore, nonparametric methods were chosen for statistical analysis.

2. Mann – Whitney test showed that differences between samples for ruptured and unruptured aneurysms for AR and SR parameters are reliable. Tables 5 and 6 show values of the calculated Mann – Whitney test as well as its critical values [57]. The only case where the differences between samples for ruptured and unruptured aneurysms based on SR were found unreliable is the case of the AcomA (Table 6).

*Table 6*  
Mann – Whitney test for AR and SR for AcomA, PcomA  
and MCA ( $P = 0.05$ )

Parameter	SR		AR	
	AcomA	PcomA	PcomA	MCA
Mann – Whitney criterion	4	0	2	0
Critical value	1	1	4	4

3. Medians and percentiles (25%, 75%) for ruptured and unruptured aneurysms for AR and SR parameters for all arteries and for AcomA, PcomA, and MCA were calculated and placed into Tables 7 and 8.

*Table 7*  
Medians (Me) and percentiles (Q25, Q75) for AR and  
SR (for all arteries)

Parameter		Variational-statistical indicators		
		Me	Q25	Q75
AR	Ruptured	1.60	1.39	1.90
	Unruptured	1.09	0.96	1.30
SR	Ruptured	2.60	2.01	2.84
	Unruptured	1.50	1.10	1.90

*Table 8*  
Medians (Me) and percentiles (Q25, Q75) for AR and  
SR (for AcomA, PcomA, MCA)

Artery	Parameter		Variational-statistical indicators		
			Me	Q25	Q75
PcomA	AR	Ruptured	1.37	1.27	1.47
		Unruptured	0.86	0.70	1.02
	SR	Ruptured	1.88	1.67	2.10
		Unruptured	1.47	1.20	1.74
AcomA	SR	Ruptured	2.35	1.53	3.15
		Unruptured	1.73	1.12	2.33
MCA	AR	Ruptured	1.75	1.39	2.10
		Unruptured	1.03	0.77	1.29



4. The results of ROC analysis for AR and SR are shown in Fig. 6 and 7 respectively.

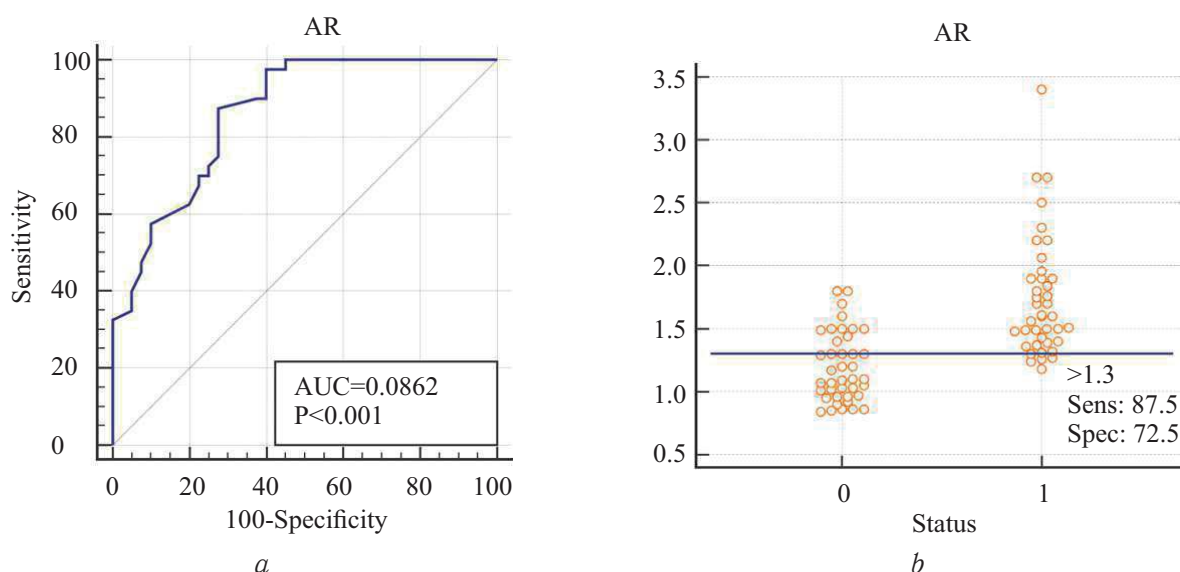


Fig. 6. ROC curve for AR (a), criterion value of AR (b). ROC area for AR is 0.862 (P<0.001). Status shows ruptured (1) and unruptured (0) aneurysms

Sensitivity for SR> 1.7 was 65.5 and specificity was 86.2.

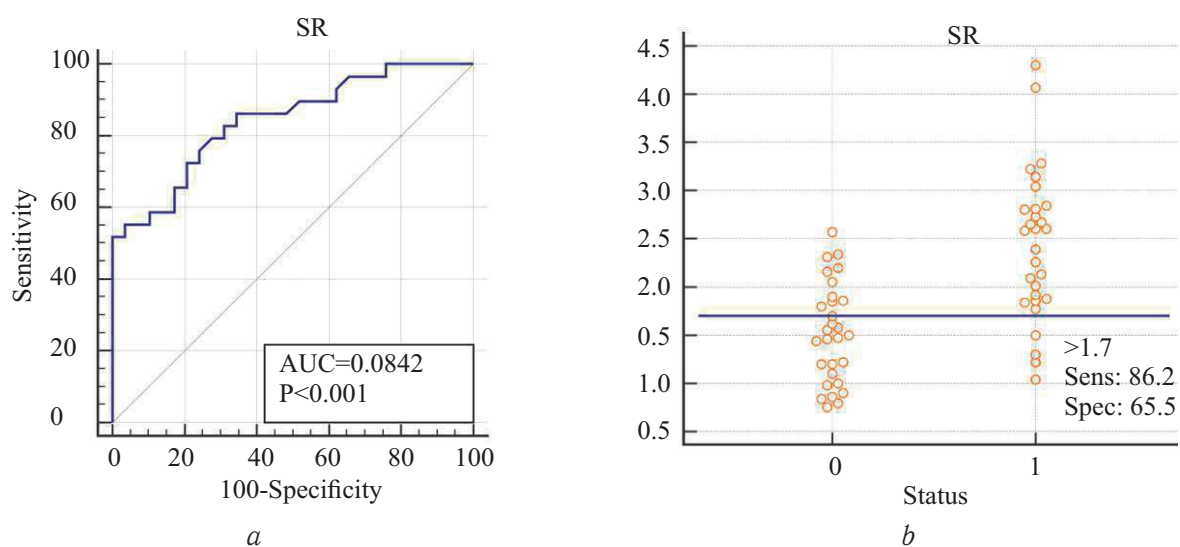


Fig. 7. ROC curve for SR (a), criterion value of SR (b). ROC area for SR is 0.842 (P<0.001). Status shows ruptured (1) and unruptured (0) aneurysms

Sensitivity for AR> 1.3 was 87.5 and specificity was 72.5.

5. Then 14 articles were chosen in which both factors were investigated. Two samples of AR and SR were generated with ruptured/unruptured aneurysm status (Table 9). The first author of the corresponding article and reference number were placed into the right column of Table 9. Comparison of ROC curves for AR and SR values from Table 9 was performed (Fig. 8).

6. Spearman correlation analysis showed high correlation (Spearman coefficient was 0.73, P< 0.001) between AR and SR.

7. SR-AR diagram was constructed for the data from Table 9 (Fig. 9). According to the diagram, critical value of AR (vertical green line, AR= 1.2) was calculated,



which distinguishes ruptured aneurysms from unruptured ones. Blue rhombuses on the diagram refer to unruptured aneurysms, red squares refer to ruptured aneurysms.

Table 9

AR and SR values, aneurysm status and first author in reference list

AR	SR	Ruptured/ Unruptured	First author. reference	AR	SR	Ruptured/ Unruptured	First author. reference
1.20	1.80	Unruptured	Dhar S. [10]	1.01	2.34	Unruptured	Lin N. [19]
0.97	1.22	Unruptured	Zheng Y. [20]	1.17	1.44	Unruptured	Jiang H. [21]
1.03	0.98	Unruptured	Qiu T. [22]	1.00	0.80	Unruptured	Qiu T. [22]
1.05	1.46	Unruptured	Li M. [25]	0.85	1.00	Unruptured	Wang G. X. [46]
0.86	1.46	Unruptured	Wang G. X. [14]	1.10	1.62	Unruptured	Zhang Y. [32]
1.02	2.31	Unruptured	Ho A. L. [34]	0.95	1.85	Unruptured	Fan J. [35]
0.90	1.20	Unruptured	Jeon H. J. [39]	1.01	2.16	Unruptured	Lin N. [19]
1.50	2.80	Ruptured	Dhar S. [10]	1.71	3.22	Ruptured	Lin N. [19]
1.26	2.01	Ruptured	Zheng Y. [20]	1.37	1.77	Ruptured	Jiang H. [21]
2.06	2.67	Ruptured	Qiu T. [22]	1.81	2.36	Ruptured	Qiu T. [22]
1.36	2.13	Ruptured	Li M. [25]	1.49	1.92	Ruptured	Wang G. X. [46]
1.30	1.84	Ruptured	Zhang Y. [32]	1.32	2.73	Ruptured	Ho A. L. [34]
1.43	2.65	Ruptured	Fan J. [35]	1.40	2.60	Ruptured	Jeon H. J. [39]
1.75	3.28	Ruptured	Lin N. [19]	1.24	2.51	Ruptured	Wang G. X. [14]

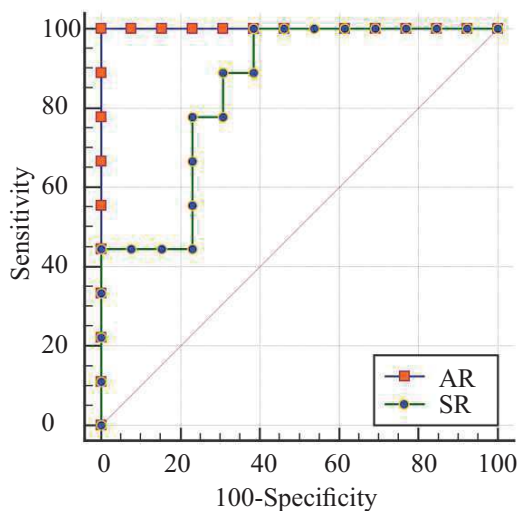


Fig. 8. Comparison of ROC curves for AR and SR (difference between areas is 0.092,  $P=0.08$ )

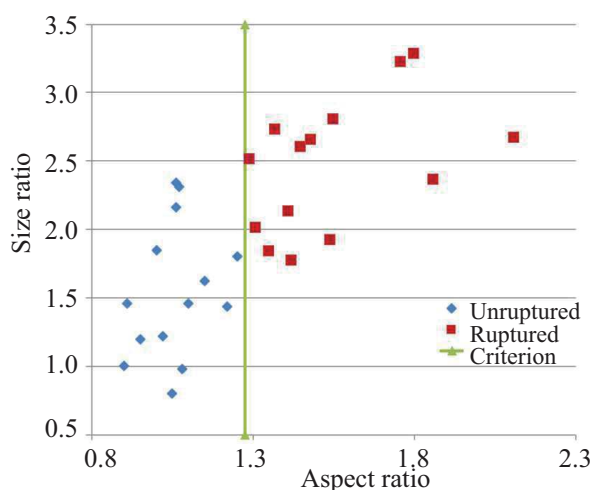


Fig. 9. SR-AR diagram for data from Table 9

### 3. DISCUSSION

Aneurysms are common pathologies of cerebral arteries. Aneurysm rupture can be catastrophic. Nevertheless, not all aneurysms are prone to rupture, so the surgeon must decide on the need for surgical treatment, assessing the likelihood of an aneurysm



rupture. Reliable, easy-to-assess factors can help in assessing the risk of rupture and decision making process.

According to investigations over the past 20–25 years, many risk factors are correlated with rupture of cerebral aneurysms. But none of these factors is used as reliable and independent criterion for analysis of cerebral aneurysm rupture. Many modern studies show that geometric parameters AR and SR are associated with rupture of cerebral aneurysms. The first work on AR was published in 1999 [58]. SR was discovered much later [10]. Moreover, the possibility of differentiation of IAs with the help of these factors is shown by using methods of biomechanics and computational experiment [29, 37, 59]. However, the question still remains open which values of these parameters are considered as thresholds, which could help to identify cerebral aneurysms prone to rupture. The identification of such critical value will provide convenient clinical instrument for differentiating patients with high-risk IAs and elaborating appropriate individual surgery plan.

AR and SR geometrical parameters were selected for the study because they can be easily calculated for almost any aneurysm in CT scan. They have been studied together because both of them are not absolute, but relative values, unlike, for example, the size of aneurysm. Moreover, these parameters are measurable, in contrast to the irregular shape, which is determined subjectively. The subjective factor in the definition of aneurysm irregular shape can introduce a significant error in the diagnosis of an aneurysm and decision making process during preoperative planning.

Although other authors use parametric statistical methods “by default” [9], we deliberately did not use parametric statistical methods, such as, for example, Student’s test, since the distributions in AR and SR samples were not normal. For comparison of medians in AR and SR samples for ruptured and unruptured aneurysms (Tables 7, 8), we used nonparametric Mann – Whitney test.

Many authors [19, 48, 50, 53] believe that AcomA among other arteries is most often subjected to the occurrence of aneurysms. However, in this study, there were no statistically confirmed differences between SR samples of ruptured and unruptured AcomA aneurysms. In contrast, such differences were revealed for both of parameters examined (Table 6) for PcomA and MCA. It should be noted that samples of AcomA, PcomA, and MCA were rather small. Nevertheless, Mann – Whitney test can also be applied to such small samples containing 4–5 values.

ROC analysis for AR and SR (Fig. 6 and 7) showed the highest area under ROC curve for AR. But the difference between area under ROC curve for AR and SR was minimal (0.862 and 0.842 respectively for AR and SR). ROC analysis also allowed us to obtain critical values of AR (1.3) and SR (1.7) which distinguish ruptured and unruptured groups of aneurysms. However, sensitivity for SR turned out to be only 65.5 for critical value of 1.7. At the same time, sensitivity and specificity for AR were 87.5 and 72.5 respectively.

Samples were formed for the values of AR and SR (Table 9), which were simultaneously presented in the same articles. This made it possible to compare ROC curves for AR and SR and to reveal the correlation between these parameters and also to reveal threshold of AR. Comparison of ROC curves for both AR and SR factors (Fig. 8) taken from Table 9 showed that AR also has the highest area under ROC curve (1.000 and 0.908 respectively for AR and SR, difference was 0.092,  $P=0.08$ ).

It was shown that among considered morphological factors, AR is meaningful. Moreover, AR correlates with SR, and therefore we assume that SR parameter is redundant.





The obtained criterion value of  $AR=1.2$  in our opinion is logical. It was confirmed by ROC analysis (Fig. 10) of the data from Table 9 (critical value  $> 1.20$ , sensitivity and specificity were equal to 100, area under the ROC curve was equal to 1.000,  $P < 0.001$ ). It can be considered a great success that the diagram shown in Fig. 9 was obtained. It confirms the high correlation between AR and SR, and, at the same time, it makes it easy to determine the criterion value of AR.

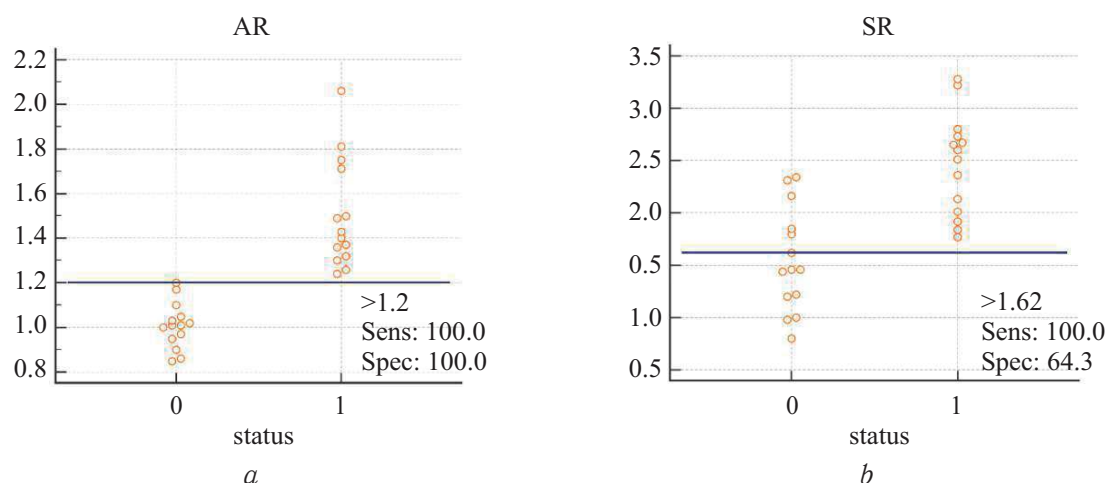


Fig. 10. Interactive diagrams for AR and SR for data from Table 9 (critical values  $AR > 1.2$ ,  $SR > 1.62$ ,  $P < 0.001$ ). Status shows ruptured (1) and unruptured (0) aneurysms

The strength of this study is also that it examines not one group of patients with aneurysms, but this work accumulates many works devoted to the study of morphological factors of cerebral aneurysm rupture.

It should also be noted that values of AR and SR published in recent articles are smaller than the values published 10–15 years ago. We calculated correlation coefficients between mean values of AR and SR and the year of article publication. Spearman correlation coefficients for AR and SR were 0.65 and 0.67 respectively,  $P < 0.05$ . The highest values of AR and SR were published in the first half of the 2000s [8, 12, 16]. We believe that this can be associated with the development of diagnostic methods. Moreover, the relationship between the values of the parameters and the country where the study was conducted, as well as the population was not identified. However, this question requires more detailed study.

## CONCLUSION

High correlation between AR and SR parameters was shown, therefore one of these parameters is redundant. Critical value of AR, which determines ruptured aneurysms, was obtained. We showed that values of AR greater than 1.2 are associated with aneurysm rupture. This morphological parameter specific to cerebral aneurysms is easy to calculate and can be used in the diagnostics of aneurysms and the detection of aneurysms prone to rupture. As a limitation, it is also necessary to note the relatively small sample size, on the basis of which a critical value of AR was obtained. We also did not take into account the age and demographic characteristics of the patients participating in the samples.

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 17-71-10191).



## References

1. Rinkel G. J., Djibuti M., Algra A., van Gijn J. Prevalence and risk of rupture of intracranial aneurysms: a systematic review. *Stroke*, 1998, vol. 29, pp. 251–256.
2. Vernooij M. W., Ikram M. A., Tanghe H. L., Vincent A. J.P. E., Hofman A. Krestin G. P., Niessen W. J., Breteler M. M.B., van der Lugt A. Incidental findings on brain MRI in the general population. *N Engl J Med.*, 2007, vol. 357, pp. 1821–1828. DOI: <https://doi.org/10.1056/NEJMoa070972>
3. De Rooij N. K., Linn F. H., van der Plas J. A., Algra A., Rinkel G. J. Incidence of subarachnoid haemorrhage: a systematic review with emphasis on region, age, gender and time trends. *J Neurol Neurosurg Psychiatry*, 2007, vol. 78, pp. 1365–1372. DOI: <https://doi.org/10.1136/jnnp.2007.117655>
4. Broderick J. P., Brott T. G., Duldner J. E., Tomsick T., Leach A. Initial and recurrent bleeding are the major causes of death following subarachnoid hemorrhage. *Stroke*, 1994, vol. 25, pp. 1342–1347.
5. Ie Roux A. A., Wallace M. C. Outcome and Cost of Aneurysmal Subarachnoid Hemorrhage. *Neurosurg Clin N Am.*, 2010, vol. 21, iss. 2, pp. 235–246. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nec.2009.10.014>
6. Thompson B. G., Brown R. D., Amin-Hanjani S., Broderick J. P., Cockroft K. M., Connolly E. S., Duckwiler G. R., Harris C. C., Howard V. J., Johnston S. C., Meyers P. M., Molyneux A., Ogilvy C. S., Ringer A. J., Torner J. Guidelines for the Management of Patients With Unruptured Intracranial Aneurysms: A Guideline for Healthcare Professionals From the American Heart Association/American Stroke Association. *Stroke*, 2015, vol. 46, no. 8, pp. 2368–2400. DOI: <https://www.ahajournals.org/doi/10.1161/STR.0000000000000070>
7. Etminan N., Rinkel G. J. Unruptured intracranial aneurysms: development, rupture and preventive management. *Nat Rev Neurol*, 2016, vol. 12, no. 12, pp. 699–713. DOI: <https://doi.org/10.1038/nrneurol.2016.150>
8. Ujiie H., Tamano Y., Sasaki K., Hori T. Is the aspect ratio a reliable index for predicting the rupture of a saccular aneurysm? *Neurosurgery*, 2001, vol. 48, no. 3, pp. 495–502.
9. Zhang J., Can A., Mukundan S., Steigner M., Castro V. M., Dligach D., Finan S., Yu S., Gainer V., Shadick N. A., Savova G., Murphy S., Cai T., Wang Z., Weiss S. T., Du R. Morphological Variables Associated With Ruptured Middle Cerebral Artery Aneurysms. *Neurosurgery*, 2018, vol. 85, pp. 75–83. DOI: <https://doi.org/10.1093/neuros/nyy213>
10. Dhar S., Tremmel M., Mocco J., Kim M., Yamamoto J., Siddiqui A. H., Hopkins L. N., Meng H. Morphology Parameters for Intracranial Aneurysm Rupture Risk Assessment. *Neurosurgery*, 2008, vol. 63, no. 2, pp. 185–197. DOI: <https://doi.org/10.1227/01.NEU.0000316847.64140.81>
11. Duan Z., Li Y., Guan S., Ma C., Han Y., Ren X., Wei L., Li W., Lou J., Yang Z. Morphological parameters and anatomical locations associated with rupture status of small intracranial aneurysms. *Scientific Reports*, 2018, vol. 8. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-018-24732-1>
12. Nader-Sepahi A., Casimiro M., Sen J., Kitchen N. D. Is aspect ratio a reliable predictor of intracranial aneurysm rupture? *Neurosurgery*, 2004, vol. 54, no. 6, pp. 1343–1347.
13. Huang Z. Q., Meng Z. H., Hou Z. J., Huang S. Q., Chen J. N., Yu H., Feng L. J., Wang Q. J., Li P. A., Wen Z. B. Geometric Parameter Analysis of Ruptured and Unruptured Aneurysms in Patients with Symmetric Bilateral Intracranial Aneurysms: A Multicenter CT Angiography Study. *AJNR Am J Neuroradiol*, 2016, vol. 37, no. 8, pp. 1413–1417. DOI: <https://doi.org/10.3174/ajnr.A4764>
14. Wang G.-X., Yu J.-Y., Wen L., Zhang L., Mou K.-J., Zhang D. Risk Factors for the Rupture of Middle Cerebral Artery Bifurcation Aneurysms Using CT Angiography. *PLoS One*, 2016, vol. 11, no. 12. DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0166654>



15. Huhtakangas J., Lehecka M., Lehto H., Jahromi B. R., Niemeld M., Kivisaari R. CTA analysis and assessment of morphological factors related to rupture in 413 posterior communicating artery aneurysms. *Acta Neurochir (Wien)*, 2017, vol. 14. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00701-017-3263-4>
16. Weir B., Amidei C., Kongable G., Findlay J. M., Kassell N. F., Kelly J., Dai L., Karri-son T. G. The aspect ratio (dome/neck) of ruptured and unruptured aneurysms. *J Neurosurg.*, 2003, vol. 99, no. 3, pp. 447–451.
17. Ryu C. W., Kwon O. K., Koh J. S., Kim E. J. Analysis of aneurysm rupture in relation to the geometric indices: aspect ratio, volume, and volume-to-neck ratio. *Neuroradiology*, 2011, vol. 53, no. 11, pp. 883–889. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00234-010-0804-4>
18. Han K. Y., Won Y. S., Kwon Y. J., Yang J. Y., Choi C. S. Aspect Ratio (dome/neck) of Ruptured and Unruptured Aneurysms in Relation to Their Sizes and Sites and Ages of Patients: Clinical Research. *Korean J Cerebrovasc Surg*, 2006, vol. 8, no. 11, pp. 3–9.
19. Lin N., Ho A., Charoenvimolphan N., Frerichs K. U., Day A. L., Du R. Analysis of morphological parameters to differentiate rupture status in anterior communicating artery aneurysms. *PLoS One*, 2013, vol. 8, no. 11. DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0079635>
20. Zheng Y., Xu F., Ren J., Xu Q., Liu Y., Tian Y., Leng B. Assessment of intracranial aneurysm rupture based on morphology parameters and anatomical locations. *J Neurointerv Surg*, 2016, vol. 8, no. 12, pp. 1240–1246. DOI: <https://doi.org/10.1136/neurintsurg-2015-012112>
21. Jiang H., Shen J., Weng Y.-X., Pan J.-W., Yu J.-B., Wan Z.-A., Zhan R. Morphology Parameters for Mirror Posterior Communicating Artery Aneurysm Rupture Risk Assessment. *Neurol Med Chir (Tokyo)*, 2015, vol. 55, no. 6, pp. 498–504. DOI: <https://doi.org/10.2176/nmc.oa.2014-0390>
22. Qiu T., Xing H. Morphological Distinguish of Rupture Status between Sidewall and Bifurcation Cerebral Aneurysms. *Int. J. Morphol.*, 2014, vol. 32, no. 3, pp. 1111–1119. DOI: <https://doi.org/10.4067/S0717-95022014000300059>
23. Kang H., Ji W., Qian Z., Li Y., Jiang C., Wu Z., Wen X., Xu W., Liu A. Aneurysm Characteristics Associated with the Rupture Risk of Intracranial Aneurysms: A Self-Controlled Study. *PLoS One*, 2015, vol. 10, no. 11, e0142330. DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0142330>
24. Yu J., Wu Q., Ma F. Q., Xu J., Zhang J. M. Assessment of the risk of rupture of intracranial aneurysms using three-dimensional cerebral digital subtraction angiography. *J Int Med Res*, 2010, vol. 38, no. 5, pp. 1785–1794. DOI: <https://doi.org/10.1177/147323001003800525>
25. Li M., Jiang Z., Yu H., Hong T. Size ratio: a morphological factor predictive of the rupture of cerebral aneurysm? *Can J Neurol Sci*, 2013, vol. 40, no. 3, pp. 366–371.
26. Doddasomayajula R., Chung B. J., Mut F., Jimenez C. M., Hamzei-Sichani F., Putman C. M., Cebal J. R. Hemodynamic Characteristics of Ruptured and Unruptured Multiple Aneurysms at Mirror and Ipsilateral Locations. *AJNR Am J Neuroradiol*, 2017, vol. 38, no. 12, pp. 2301–2307. DOI: <https://doi.org/10.3174/ajnr.A5397>
27. Rafiei A., Hafez A., Jahromi B. R., Kivisaari R., Canato B., Choque J., Colasanti R., Fransua S., Lehto H., Andrade-Barazarte H., Hernesniemi J. Anatomic Features of Paraclinoid Aneurysms: Computed Tomography Angiography Study of 144 Aneurysms in 136 Consecutive Patients. *Neurosurgery*, 2017, vol. 81, no. 6, pp. 949–957. DOI: <https://doi.org/10.1093/neuros/nyx157>
28. Tian Z., Zhang Y., Jing L., Liu J., Zhang Y., Yang X. Rupture Risk Assessment for Mirror Aneurysms with Different Outcomes in the Same Patient. *Front. Neurol.*, 2016, vol. 7, p. 219. DOI: <https://doi.org/10.3389/fneur.2016.00219>



29. Lv N., Yu Y., Xu J., Karmonik C., Liu J., Huang Q. Hemodynamic and morphological characteristics of unruptured posterior communicating artery aneurysms with oculomotor nerve palsy. *J Neurosurg*, 2016, vol. 125, no. 2, pp. 264–268. DOI: <https://doi.org/10.3171/2015.6.JNS15267>
30. Wang G. X., Liu J., Chen Y. Q., Wen L., Yang M. G., Gong M. F., Zhang D. Morphological characteristics associated with the rupture risk of mirror posterior communicating artery aneurysms. *J Neurointerv*, 2018, vol. 10, pp. 995–998. DOI: <https://doi.org/10.1136/neurintsurg-2017-013553>
31. Hao M., Ma J., Huang Q., He S., Liang Z., Wang C. Morphological Parameters of Digital Subtraction Angiography 2D Image in Rupture Risk Profile of Small Intracranial Aneurysms: A Pilot Study. *J Neurol Surg A Cent Eur Neurosurg*, 2016, vol. 77, no. 1, pp. 25–30. DOI: <https://doi.org/10.1055/s-0035-1558409>
32. Zhang Y., Jing L., Liu J., Li C., Fan J., Wang S., Li H., Yang X. Clinical, morphological, and hemodynamic independent characteristic factors for rupture of posterior communicating artery aneurysms. *J Neurointerv Surg*, 2016, vol. 8, no. 8, pp. 808–812. DOI: <https://doi.org/10.1136/neurintsurg-2015-011865>
33. Jing L., Fan J., Wang Y., Li H., Wang S., Yang X., Zhang Y. Morphologic and Hemodynamic Analysis in the Patients with Multiple Intracranial Aneurysms: Ruptured versus Unruptured. *PLoS One*, 2015, vol. 10, no. 7, e0132494. DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0132494>
34. Ho A. L., Lin N., Frerichs K. U., Du R. Intrinsic, Transitional, and Extrinsic Morphological Factors Associated With Rupture of Intracranial Aneurysms. *Neurosurgery*, 2015, vol. 77, no. 3, pp. 433–441. DOI: <https://doi.org/10.1227/NEU.0000000000000835>
35. Fan J., Wang Y., Liu J., Jing L., Wang C., Li C., Yang X., Zhang Y. Morphological-Hemodynamic Characteristics of Intracranial Bifurcation Mirror Aneurysms. *World Neurosurg*, 2015, vol. 84, no. 1, pp. 114–120. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.wneu.2015.02.038>
36. Zhang Y., Yang X., Wang Y., Liu J., Li C., Jing L., Wang S., Li H. Influence of morphology and hemodynamic factors on rupture of multiple intracranial aneurysms: matched-pairs of ruptured-unruptured aneurysms located unilaterally on the anterior circulation. *BMC Neurol.*, 2014, vol. 14, no. 253. DOI: <https://doi.org/10.1186/s12883-014-0253-5>
37. Duan G., Lv N., Yin J., Xu J., Hong B., Xu Y., Liu J., Huang Q. Morphological and hemodynamic analysis of posterior communicating artery aneurysms prone to rupture: a matched case-control study. *J Neurointerv Surg*, 2016, vol. 8, no. 1, pp. 47–51. DOI: <https://doi.org/10.1136/neurintsurg-2014-011450>
38. Jiang Y., Lan Q., Wang Q., Lu H., Ge F., Wang Y. Correlation between the rupture risk and 3D geometric parameters of saccular intracranial aneurysms. *Cell Biochem Biophys*, 2014, vol. 70, no. 2, pp. 1417–1420. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12013-014-0074-6>
39. Jeon H. J., Lee J. W., Kim S. Y., Park K. Y., Huh S. K. Morphological parameters related to ruptured aneurysm in the patient with multiple cerebral aneurysms (clinical investigation). *Neurol Res*, 2014, vol. 36, no. 12, pp. 1056–1062. DOI: <https://doi.org/10.1179/1743132814Y.00000000393>
40. Elsharkawy A., Lehenka M., Niemi M., Kivelev J., Billon-Grand R., Lehto H., Kivisaari R., Hernesniemi J. Anatomic risk factors for middle cerebral artery aneurysm rupture: computed tomography angiography study of 1009 consecutive patients. *Neurosurgery*, 2013, vol. 73, no. 5, pp. 825–837. DOI: <https://doi.org/10.1227/NEU.0000000000000116>
41. Dusak A., Kamasak K., Goya C., Adin M. E., Elbey M. A., Bilici A. Arterial distensibility in patients with ruptured and unruptured intracranial aneurysms: is it a predisposing factor for rupture risk? *Med Sci Monit*, 2013, vol. 19, pp. 703–709. DOI: <https://doi.org/10.12659/MSM.889032>



42. Lin N., Ho A., Gross B. A., Pieper S., Frerichs K. U., Day A. L., Du R. Differences in simple morphological variables in ruptured and unruptured middle cerebral artery aneurysms. *J Neurosurg*, 2012, vol. 117, no. 5, pp. 913–919. DOI: <https://doi.org/10.3171/2012.7.JNS111766>
43. Nikolic I., Tasic G., Bogosavljevic V., Nestorovic B., Jovanovic V., Kojic Z., Djoric I., Djurovic B. Predictable morphometric parameters for rupture of intracranial aneurysms — a series of 142 operated aneurysms. *Turk Neurosurg*, 2012, vol. 22, no. 4, pp. 420–426. DOI: <https://doi.org/10.5137/1019-5149.JTN.4698-11.1>
44. You S. H., Kong D. S., Kim J. S., Jeon P., Kim K. H., Roh H. K., Kim G. M., Lee K. H., Hong S. C. Characteristic features of unruptured intracranial aneurysms: predictive risk factors for aneurysm rupture. *J Neurol Neurosurg Psychiatry*, 2010, vol. 81, no. 5, pp. 479–484. DOI: <https://doi.org/10.1136/jnnp.2008.169573>
45. Sadatomo T., Yuki K., Migita K., Taniguchi E., Kodama Y., Kurisu K. Morphological differences between ruptured and unruptured cases in middle cerebral artery aneurysms. *Neurosurgery*, 2008, vol. 62, no. 3, pp. 602–609. DOI: <https://doi.org/10.1227/01.NEU.0000311347.35583.0C>
46. Wang G.-X., Liu L.-L., Wen L., Cao Y.-X., Pei Y.-C., Zhang D. Morphological characteristics associated with rupture risk of multiple intracranial aneurysms. *Asian Pac J Trop Med*, 2017, vol. 10, no. 10, pp. 1011–1014. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apjtm.2017.09.015>
47. Rahman M., Smietana J., Hauck E., Hoh B., Hopkins N., Siddiqui A., Levy E. I., Meng H., Mocco J. Size ratio correlates with intracranial aneurysm rupture status: a prospective study. *Stroke*, 2010, vol. 41, no. 5, pp. 916–920. DOI: <https://doi.org/10.1161/STROKEAHA.109.574244>
48. Cai W., Shi D., Gong J., Chen G., Qiao F., Dou X., Li H., Lu K., Yuan S., Sun C., Lan Q. Are Morphologic Parameters Actually Correlated with the Rupture Status of Anterior Communicating Artery Aneurysms? *World Neurosurgery*, 2015, vol. 84, no. 5, pp. 1278–1283. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.wneu.2015.05.060>
49. Jiang H., Weng Y. X., Zhu Y., Shen J., Pan J. W., Zhan R. Y. Patient and aneurysm characteristics associated with rupture risk of multiple intracranial aneurysms in the anterior circulation system. *Acta Neurochir (Wien)*, 2016, vol. 158, no. 7, pp. 1367–1375. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00701-016-2826-0>
50. Shao X., Wang H., Wang Y., Xu T., Huang Y., Wang J., Chen W., Yang Y., Zhao B. The effect of anterior projection of aneurysm dome on the rupture of anterior communicating artery aneurysms compared with posterior projection. *Clin Neurol Neurosurg*, 2016, vol. 143, pp. 99–103. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.clineuro.2016.02.023>
51. Kashiwazaki D., Kuroda S. Size ratio can highly predict rupture risk in intracranial small (<5 mm) aneurysms. *Stroke*, 2013, vol. 44, no. 8, pp. 2169–2173. DOI: <https://doi.org/10.1161/STROKEAHA.113.001138>
52. Ma D., Tremmel M., Paluch R. A., Levy E. I., Meng H., Mocco J. Size ratio for clinical assessment of intracranial aneurysm rupture risk. *Neurol Res*, 2010, vol. 32, no. 5, pp. 482–486. DOI: <https://doi.org/10.1179/016164109X12581096796558>
53. Xu T., Lin B., Liu S., Shao X., Xia N., Zhang Y., Xu H., Yang Y., Zhong M., Zhuge Q., Zhao B., Chen W. Larger size ratio associated with the rupture of very small ( $\leq 3$  mm) anterior communicating artery aneurysms. *J Neurointerv Surg*, 2017, vol. 9, no. 3, pp. 278–282. DOI: <https://doi.org/10.1136/neurintsurg-2016-012294>
54. Xiang J., Natarajan S. K., Tremmel M., Ma D., Mocco J., Hopkins L. N., Siddiqui A. H., Levy E. I., Meng H. Hemodynamic-morphologic discriminants for intracranial aneurysm rupture. *Stroke*, 2011, vol. 42, no. 1, pp. 144–152. DOI: <https://doi.org/10.1161/STROKEAHA.110.592923>



55. Zhang Y., Tian Z., Jing L., Zhang Y., Liu J., Yang X. Bifurcation Type and Larger Low Shear Area Are Associated with Rupture Status of Very Small Intracranial Aneurysms. *Front Neurol*, 2016, vol. 24, no. 7, 169. DOI: <https://doi.org/10.3389/fneur.2016.00169>
56. Ghasemi A., Zahediasl S. Normality Tests for Statistical Analysis: A Guide for Non-Statisticians. *Int J Endocrinol Metab*, 2012, vol. 10, no. 2, pp. 486–489. DOI: <https://doi.org/10.5812/ijem.3505>
57. Milton R. C. An Extended Table of Critical Values for the Mann–Whitney (Wilcoxon) Two-Sample Statistic. *Journal of the American Statistical Association*, 1964, vol. 59, no. 307, pp. 925–934.
58. Ujiie H., Tachibana H., Hiramatsu O., Hazel A. L., Matsumoto T., Ogasawara Y., Nakajima H., Hori T., Takakura K., Kajiya F. Effects of size and shape (aspect ratio) on the hemodynamics of saccular aneurysms: a possible index for surgical treatment of intracranial aneurysms. *Neurosurgery*, 1999, vol. 45, no. 1, pp. 119–129.
59. Ivanov D. V., Dol A. V. Morphological and numerical assessment of intracranial aneurysms ruptures risk. *Russian Open Medical Journal*, 2018, vol. 7, e0304. DOI: <https://doi.org/10.15275/rusomj.2018.0304>

---

**Cite this article as:**

Dol A. V., Fomkina O. A., Ivanov D. V. Threshold Values of Morphological Parameters Associated with Cerebral Aneurysm Rupture Risk. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 3, pp. 289–304. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-289-304>

---

УДК 519.22

## **Пороговые значения морфологических параметров, связанных с риском разрыва аневризм сосудов головного мозга**

**А. В. Доль, О. А. Фомкина, Д. В. Иванов**

Доль Александр Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, [perevishl@gmail.com](mailto:perevishl@gmail.com)

Фомкина Ольга Александровна, доктор медицинских наук, доцент кафедры анатомии человека, Саратовский государственный медицинский университет имени В. И. Разумовского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Большая Казачья, д. 112, [oafomkina@mail.ru](mailto:oafomkina@mail.ru)

Иванов Дмитрий Валерьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, [ivanovdv@gmail.com](mailto:ivanovdv@gmail.com)

Многочисленные исследования показывают, что морфологические параметры аневризм связаны с их разрывом. Однако литературные данные о значениях этих параметров значительно различаются. Целью данного исследования является определение значений морфологических параметров, которые коррелируют с разрывом аневризм сосудов головного мозга и могут быть использованы во время предоперационного планирования для выявления аневризм, склонных к разрыву. Средние значения морфологических факторов, таких как соотношение сторон и отношение размеров аневризмы, были собраны из литературных данных для разорвавшихся и неразорвавшихся аневризм. Был выполнен статистический анализ этих факторов. Статистически значимые различия были получены



между средними значениями в выборках отношения размеров и соотношения сторон аневризм для разорвавшихся и неразорвавшихся аневризм. Не обнаружено статистически подтвержденных различий между отношением размеров для разорвавшихся и неразорвавшихся аневризм передней соединительной артерии. Напротив, такие различия были выявлены для обследованных параметров для задней соединительной артерии и для средней мозговой артерии. ROC-анализ позволил вычислить критические значения соотношения сторон и отношения размеров, которые отличают разорвавшиеся аневризмы от неразорвавшихся. Была получена высокая корреляция между отношением размеров и соотношением сторон. Средние значения соотношения сторон и отношения размеров, опубликованные в последние годы, существенно ниже значений данных параметров, опубликованных 10–15 лет назад. Было показано, что среди рассмотренных морфологических факторов соотношение сторон аневризм оказалось значимым. Более того, соотношение сторон коррелирует с отношением размеров, и поэтому отношение размеров можно считать избыточным. Полученное значение критерия соотношения сторон, равное 1.2, было также подтверждено ROC-анализом.

*Ключевые слова:* церебральная аневризма, соотношение сторон, отношение размеров, предоперационное планирование, статистический анализ, ROC-анализ.

Поступила в редакцию: 18.10.2018 / Принята: 26.06.2019 / Опубликовано: 31.08.2019

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

**Благодарности.** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-71-10191).

---

**Образец для цитирования:**

*Dol A. V., Fomkina O. A., Ivanov D. V.* Threshold Values of Morphological Parameters Associated with Cerebral Aneurysm Rupture Risk [Доль А. В., Фомкина О. А., Иванов Д. В. Пороговые значения морфологических параметров, связанных с риском разрыва аневризм сосудов головного мозга] // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 289–304. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-289-304>

---



УДК 539.3

## Теория колебаний углеродных нанотрубок как гибких микрополярных сетчатых цилиндрических оболочек с учетом сдвига

Е. Ю. Крылова, И. В. Папкина, Т. В. Яковлева, В. А. Крысько

Крылова Екатерина Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, kat.kylova@bk.ru

Папкина Ирина Владиславовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математика и моделирование», Саратовский технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77, ikravzova@mail.ru

Яковлева Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математика и моделирование», Саратовский технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77, yan-tan1987@mail.ru

Крысько Вадим Анатольевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математика и моделирование», Саратовский технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77, tak@sun.ru

В работе построена теория нелинейной динамики гибкой однослойной микрополярной цилиндрической оболочки сетчатой структуры. Геометрическая нелинейность учитывается по модели Теодора фон Кармана. Рассматривается неклассическая континуальная модель оболочки на основе среды Коссера со стесненным вращением частиц (псевдоконтинуум). При этом предполагается, что поля перемещений и вращений не являются независимыми. В рассмотрение вводится дополнительный независимый материальный параметр длины, связанный с симметричным тензором градиентом вращения. Уравнения движения элемента оболочки, граничные и начальные условия получены из вариационного принципа Остроградского–Гамильтона на основании кинематических гипотез третьего приближения (Пелеха–Шереметьева–Редди), позволяющих учесть не только поворот, но и искривление нормали после деформации. Предполагается, что цилиндрическая оболочка состоит из  $n$  семейств ребер, каждое из которых характеризуется углом наклона относительно положительного направления оси, направленной по длине оболочки, и расстоянием между соседними ребрами. Материал оболочек изотропный, упругий и подчиняется закону Гука. Рассматривается диссипативная механическая система. Как частный случай приведена система уравнений движения для микрополярной сетчатой оболочки Кирхгофа–Лява. Построенная в работе теория может быть в том числе использована для исследований поведения углеродных нанотрубок под действием статических и динамических нагрузок.

*Ключевые слова:* цилиндрическая оболочка, углеродная нанотрубка, микрополярная теория, псевдоконтинуум Коссера, модель Пелеха–Шереметьева–Редди, сетчатая структура, статика и динамика, модель С. П. Тимошенко, модель Кирхгофа–Лява.

Поступила в редакцию: 20.10.2018 / Принята: 20.12.2018 / Опубликовано: 31.08.2019

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-305-316>





## ВВЕДЕНИЕ

Колебания пластин и оболочек лежат в плоскости научных интересов многих ученых [1–4]. Развитие микросистемных технологий и внедрение их в стратегически важные области экономики привели к повышению интереса исследователей к наноразмерным механическим системам [5, 6]. Микрополярная теория используется при математическом моделировании поведения сплошных цилиндрических оболочек в работе [7], где построена линейная модель на основании кинематических гипотез Кирхгофа. В статьях [8, 9] приведены и исследованы математические модели микрополярных сплошных линейных цилиндрических оболочек, учитывающие не только поворот [8], но и искривление нормали после деформации [9]. Появление сверхтонкого и прочного материала — графена — привело к необходимости исследований таких систем, как углеродные нанотрубки (УНТ) [10–12]. Пиддиэсон [13] был одним из первых, кто применил нелокальную теорию упругости и предложил простейшую балочную модель Эйлера – Бернулли для изучения изгиба УНТ. В дальнейшем появился ряд работ, в которых УНТ рассматривается как балка модели высших приближений Тимошенко [14] и Пелеха – Шереметьева – Редди [15], где учет наноразмера также был связан с градиентной теорией упругости. Моментная теория упругости применена к анализу поведения УНТ в работе [16], в [17] — для изучения динамики углеродных нанотрубок с одинарными стенками на основе градиентных теорий упругости с учетом деформации сдвига. Как механический объект УНТ представляет собой однослойную или многослойную наноразмерную цилиндрическую оболочку сетчатой структуры. Приведенный выше обзор показывает, что средствами теории упругости в различных модификациях УНТ моделируются как балки или цилиндрические оболочки без учета их сетчатой структуры. В данной работе построена теория колебаний УНТ как геометрически и физически нелинейной гибкой однослойной микрополярной цилиндрической оболочки сетчатой структуры.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИКРОПОЛЯРНОЙ СЕТЧАТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕЛЕХА – ШЕРЕМЕТЬЕВА – РЕДДИ

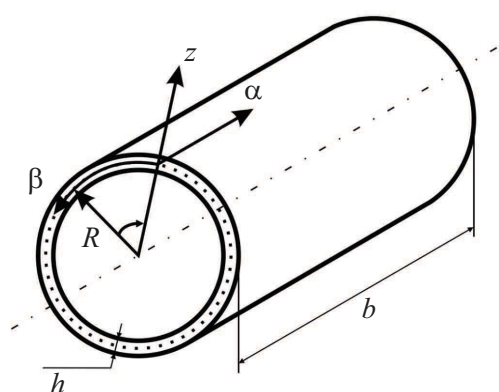


Рис. 1. Схема цилиндрической оболочки

Fig. 1. Scheme of the cylindrical shell

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, занимающую в пространстве  $\mathbf{R}^3$  область  $\Omega = \{0 \leq \alpha \leq b; 0 \leq \beta \leq 2\pi; -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}\}$  (рис. 1).

Компоненты вектора перемещений  $\bar{u}$  запишем с учетом гипотез Пелеха – Шереметьева – Редди:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u(\alpha, \beta, t) + z\gamma_\alpha - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \gamma_\alpha \right), \\ u_\beta &= v(\alpha, \beta, t) + z\gamma_\beta - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} + \gamma_\beta \right), \\ u_z &= w(\alpha, \beta, t), \end{aligned} \quad (1)$$

$u, v, w$  — осевые смещения срединной поверхности оболочки в направлениях  $\alpha, \beta, z$ , соответственно,  $\gamma_\alpha, \gamma_\beta$  — углы поворота поперечных сечений оболочки.



Если в (1) пренебречь членами, подчеркнутыми двумя чертами, то получим соотношение модели С. П. Тимошенко, не учитывающей изгибание нормали, если при этом в членах, подчеркнутых одной чертой, положить  $\gamma_\alpha = -\frac{\partial w}{\partial \alpha}$  и  $\gamma_\beta = -\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta}$ , то получим модель, не учитывающую сдвиг (Кирхгофа – Лява). Компоненты симметричного тензора полных деформаций  $\epsilon$  с учетом принятых гипотез и геометрической нелинейности в форме Т. фон Кармана примут вид

$$\begin{aligned} e_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + z \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\gamma_\alpha}{\partial \alpha} \right), \\ e_{\beta\beta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{2R^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{1}{R} w + z \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \beta} - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\gamma_\beta}{\partial \beta} \right), \\ e_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \left( \frac{z}{2} - \frac{2z^3}{3h^2} \right) \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \alpha} \right) - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}, \\ e_{\beta z} &= \left( \frac{1}{2} - \frac{2z^2}{3h^2} \right) \left( \gamma_\beta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{v}{4R}, \quad e_{\alpha z} = \left( \frac{1}{2} - \frac{2z^2}{3h^2} \right) \left( \gamma_\alpha + \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right), \quad e_{zz} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Классические континуальные модели не учитывают эффекты масштаба на наноразмерном уровне. В работе рассматривается неклассическая континуальная модель оболочки на основе среды Коссера со стесненным вращением частиц (псевдо-континуум). При этом предполагается, что поля перемещений и вращений не являются независимыми [18]. В таком случае компоненты симметричного тензора градиента кривизны  $\chi$  примут вид

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\alpha} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \alpha} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) + \frac{2z^2}{h^2} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \alpha} \right), \\ \chi_{\beta\beta} &= -\frac{1}{2R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \beta} \right) - \frac{2z^2}{h^2 R} \left( \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right), \\ \chi_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \beta} \right) - \\ &\quad - \frac{z^2}{h^2} \left( \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right), \\ \chi_{z\alpha} &= -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} - \frac{v}{R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{\gamma_\beta}{R} \right) - \frac{z}{4} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \gamma_\alpha}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial^2 \gamma_\beta}{\partial \alpha^2} \right) + \\ &\quad + \frac{2z}{h^2} \left( \gamma_\beta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{z^3}{3h^2} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \gamma_\alpha}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial^2 \gamma_\beta}{\partial \alpha^2} \right), \\ \chi_{z\beta} &= -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\gamma_\alpha}{R} \right) - \frac{z}{4} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \gamma_\alpha}{\partial \beta^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \gamma_\beta}{\partial \alpha \partial \beta} \right) + \\ &\quad + \frac{2z}{h^2} \left( \gamma_\alpha + \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{z^3}{3h^2} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \gamma_\alpha}{\partial \beta^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \gamma_\beta}{\partial \alpha \partial \beta} \right), \\ \chi_{zz} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \beta} - \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \alpha} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) - \frac{2z^2}{h^2} \left( \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \alpha} - \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \beta} \right). \end{aligned} \quad (3)$$



Для материала оболочки определяющие соотношения примем в виде

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{E}{1-\nu^2} [e_{\alpha\alpha} + \nu e_{\beta\beta}], \quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1+\nu} e_{\alpha\beta}, \quad \sigma_{z\alpha} = \frac{E}{2(1+\nu)} e_{z\alpha}, \quad \alpha \rightleftharpoons \beta,$$

$$m_{ij} = \frac{El^2}{1+\nu} \chi_{ij}, \quad i, j = \alpha, \beta, z,$$

где  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора Коши,  $m_{ij}$  — компоненты симметричного тензора момента высшего порядка, для неоднородного материала  $E(\alpha, \beta, z)$  — модуль Юнга,  $\nu(\alpha, \beta, z)$  — коэффициент Пуассона,  $l$  — дополнительный независимый материальный параметр длины, связанный с  $\chi$ .

Уравнения движения, граничные и начальные условия получим из вариационного принципа Остроградского – Гамильтона [19, 20, с. 513–518]:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta U + \delta W_\epsilon + \delta W_q) dt = 0, \tag{4}$$

здесь  $K$  — кинетическая энергия,  $K = \frac{1}{2} \rho \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \right] dv$ , вариация внешней работы, связанной с распределенными силами

$$\delta W_q = \int_0^{2\pi} \int_0^b q(\alpha, \beta, t) \delta w d\alpha d\beta$$

и с диссипацией энергии

$$\delta W_\epsilon = \int_{\Omega} \rho \left[ \epsilon_\alpha \frac{\partial u}{\partial t} \delta u + \epsilon_\beta \frac{\partial v}{\partial t} \delta v + \epsilon_z \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right] dv,$$

$\epsilon_i$  — коэффициент диссипации в направлениях  $\alpha, \beta, z$ ,  $\rho$  — плотность материала оболочки,  $q(\alpha, \beta, t)$  — внешняя нормальная нагрузка. Потенциальная энергия  $U$  в упругом теле, при бесконечно малых деформациях, с учетом моментной теории [21] примет вид  $U = \int_{\Omega} (\sigma_{i,j} e_{i,j} + m_{i,j} \chi_{i,j}) dv$ .

С учетом обозначений для классических и неклассических усилий и моментов

$$\{N_{\alpha\alpha}, M_{\alpha\alpha}, S_{\alpha\alpha}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\alpha} z^{\{0,1,3\}} dz, \quad \{Q_{z\alpha}, P_{z\alpha}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{z\alpha} k_s z^{\{0,2\}} dz,$$

$$\{Y_{\alpha\alpha}, R_{\alpha\alpha}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{\alpha\alpha} z^{\{0,2\}} dz, \quad \{Y_{z\alpha}, J_{z\alpha}, I_{z\alpha}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{z\alpha} k_s z^{\{0,1,3\}} dz, \quad \alpha \rightleftharpoons \beta,$$

$$\{T, H, S_{\alpha\beta}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} z^{\{0,1,3\}} dz, \quad \{Y_{\alpha\beta}, R_{\alpha\beta}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{\alpha\beta} z^{\{0,2\}} dz,$$

$$\{Y_{z,z}, R_{z,z}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{z,z} z^{\{0,2\}} dz,$$

из вариационного принципа получим разрешающие уравнения движения (5), граничные и начальные условия.



Функция  $k_s$  характеризует закон распределения касательных напряжений по толщине оболочки:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial N_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial\beta} + \frac{1}{2R^2} \left( -\frac{\partial Y_{\beta\beta}}{\partial\beta} + \frac{\partial Y_{zz}}{\partial\beta} + \frac{\partial^2 Y_{z\beta}}{\partial\beta^2} \right) + \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 Y_{z\alpha}}{\partial\alpha\partial\beta} = \rho h \epsilon_\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
 & \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\beta\beta}}{\partial\beta} + \frac{\partial T}{\partial\alpha} + \frac{1}{2R} Q_{z\beta} - \frac{1}{2R} \frac{\partial Y_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha} + \frac{1}{2R} \frac{\partial Y_{\beta\beta}}{\partial\alpha} - \frac{1}{2R^2} \frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial\beta} - \frac{1}{2R^2} Y_{z\alpha} + \\
 & \quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{z\alpha}}{\partial\alpha^2} - \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 Y_{z\beta}}{\partial\alpha\beta} = \rho h \epsilon_\beta \frac{\partial v}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\
 & \frac{\partial M_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial\beta} - Q_{z\alpha} + \frac{1}{2R} \frac{\partial Y_{\beta\beta}}{\partial\beta} + \frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial\alpha} + \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 J_{z\alpha}}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 J_{z\beta}}{\partial\beta^2} - \\
 & - \frac{1}{2R} \frac{\partial Y_{zz}}{\partial\beta} + \frac{1}{2R} Y_{z\beta} - \frac{4}{3h^2} \frac{\partial S_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha} + \frac{4}{h^2} P_{\alpha z} - \frac{4}{3h^2 R} \frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial\beta} - \frac{2}{h^2 R} \frac{\partial R_{\beta\beta}}{\partial\beta} + \frac{2}{h^2 R} \frac{\partial R_{zz}}{\partial\beta} - \\
 & \quad - \frac{2}{h^2} \frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial\alpha} - \frac{2}{3h^2 R} \frac{\partial^2 I_{\alpha z}}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{4}{h^2} J_{\beta z} - \frac{2}{3h^2 R^2} \frac{\partial^2 I_{\beta z}}{\partial\beta^2} = \frac{34\rho h^3}{315} \frac{\partial^2 \gamma_\alpha}{\partial t^2} - \frac{8h^3 \rho}{315} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha t^2}, \\
 & \frac{\partial H}{\partial\alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\beta\beta}}{\partial\beta} - Q_{z\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha} + \frac{\partial J_{\beta\beta}}{\partial\alpha} - \frac{1}{R} \frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial\beta} + \frac{1}{2R} Y_{z\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{zz}}{\partial\alpha} - \\
 & - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J_{zz}}{\partial\alpha^2} - \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 J_{z\beta}}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{4}{3h^2 R} \frac{\partial S_{\beta\beta}}{\partial\beta} + \frac{4}{h^2} P_{\beta z} - \frac{4}{3h^2} \frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial\alpha} + \frac{2}{h^2} \frac{\partial R_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha} + \frac{2}{h^2} \frac{\partial R_{zz}}{\partial\alpha} + \\
 & \quad + \frac{2}{h^2 R} \frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial\beta} - \frac{2}{3h^2} \frac{\partial^2 I_{\alpha z}}{\partial\alpha^2} - \frac{4}{h^2} J_{\alpha z} + \frac{2}{3h^2 R} \frac{\partial^2 I_{\beta z}}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{34\rho h^3}{315} \frac{\partial^2 \gamma_\beta}{\partial t^2} - \frac{8h^3 \rho}{315 R} \frac{\partial^3 w}{\partial \beta t^2}, \tag{5} \\
 & \frac{\partial}{\partial\alpha} \left( N_{\alpha\alpha} \frac{\partial w}{\partial\alpha} \right) + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left( T \frac{\partial w}{\partial\beta} \right) + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial\beta} \left( T \frac{\partial w}{\partial\alpha} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial\beta} \left( N_{\beta\beta} \frac{\partial w}{\partial\beta} \right) - \frac{1}{R} N_{\beta\beta} + \\
 & + \frac{\partial Q_{z\alpha}}{\partial\alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{z\beta}}{\partial\beta} - \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 Y_{\beta\beta}}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\beta}}{\partial\alpha^2} - \frac{1}{2R^2} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\beta}}{\partial\beta^2} - \frac{1}{2R^2} \frac{\partial Y_{z\alpha}}{\partial\beta} + \\
 & \quad + \frac{1}{2R} \frac{\partial Y_{z\beta}}{\partial\alpha} + \frac{4}{3h^2} \frac{\partial^2 S_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha^2} + \frac{4}{3h^2 R} \frac{\partial^2 S_{\beta\beta}}{\partial\beta^2} - \frac{4}{h^2} \frac{\partial P_{\alpha z}}{\partial\alpha} - \frac{4}{h^2 R} \frac{\partial P_{\beta z}}{\partial\beta} + \frac{8}{3h^2 R} \frac{\partial^2 S_{\alpha\beta}}{\partial\alpha\partial\beta} + \\
 & + \frac{2}{h^2 R} \frac{\partial^2 R_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{2}{h^2 R} \frac{\partial^2 R_{\beta\beta}}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{2}{h^2} \frac{\partial^2 R_{\alpha\beta}}{\partial\alpha^2} - \frac{2}{h^2 R} \frac{\partial^2 R_{\alpha\beta}}{\partial\beta^2} + \frac{4}{h^2 R} \frac{\partial J_{\alpha z}}{\partial\beta} + \frac{4}{h^2} \frac{\partial S_{\beta z}}{\partial\alpha} + q = \\
 & = \rho h \epsilon_z \frac{\partial w}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{8h^3 \rho}{315} \frac{\partial^3 \gamma_\alpha}{\partial \alpha t^2} + \frac{8h^3 \rho}{315 R} \frac{\partial^3 \gamma_\beta}{\partial \beta t^2} - \frac{h^3 \rho}{126} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 t^2} - \frac{h^3 \rho}{126 R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^2 t^2}.
 \end{aligned}$$

К системе уравнений (5) следует присоединить граничные и начальные условия в зависимости от условий закрепления и загрузки оболочки, которые также получаются из вариационного принципа. Пренебрегая в (5) членами, подчеркнутыми двумя чертами, получим уравнения колебаний гибкой сплошной цилиндрической оболочки модели С. П. Тимошенко, не учитывающей изгибание нормали.

Допустим, оболочка состоит из  $n$  семейств ребер,  $\delta_j$ ,  $a_j$ ,  $\varphi_j$  — расстояние между ребрами, ширина ребер, угол между осью  $\alpha$  и осью ребер  $j$ -го семейства. На рис. 2 изображен фрагмент оболочки, состоящей из одного семейства ребер.

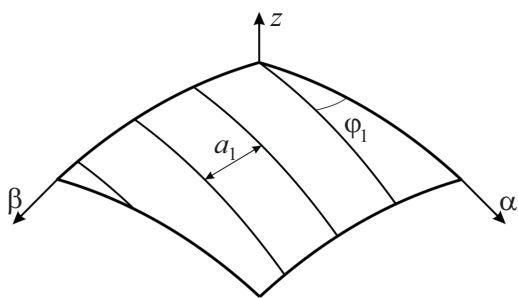


Рис. 2. Фрагмент сетчатой оболочки, состоящей из одного семейства ребер  
 Fig. 2. Fragment of the retina consisting of a single family of ribs

Полагаем, что деформация оси какого-либо стержня равна деформации линии, совпадающей с осью этого стержня в расчетной модели. Будем считать, что одна из главных центральных осей поперечных сечений стержней оболочки совпадает с направлением нормали к срединной поверхности оболочки. Выражения для классических напряжений и напряжений высшего порядка в  $j$ -м семействе ребер, а также отличные от нуля напряжения и напряжения высшего порядка для сетчатой оболочки, состоящей из  $n$  семейств стержней, приведены в работе авторов [22].

Вводя обозначения  $A_{sk} = \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j \cos^s \varphi_j \sin^k \varphi_j}{a_j}$ ,  $s, k = \overline{0, 4}$ , запишем выражения для классических и неклассических усилий и моментов цилиндрической сетчатой оболочки (6) (верхний индекс  $s$  показывает учет сетчатой структуры):

$$\begin{aligned}
 \{N_{\alpha\alpha}^s, M_{\alpha\alpha}^s, S_{\alpha\alpha}^s\} &= A_{40}\{N_{\alpha\alpha}, M_{\alpha\alpha}, S_{\alpha\alpha}\} + A_{22}\{N_{\beta\beta}, M_{\beta\beta}, S_{\beta\beta}\} + A_{31}\{T, H, S_{\alpha,\beta}\}, \\
 \{N_{\beta\beta}^s, M_{\beta\beta}^s, S_{\beta\beta}^s\} &= A_{22}\{N_{\alpha\alpha}, M_{\alpha\alpha}, S_{\alpha\alpha}\} + A_{04}\{N_{\beta\beta}, M_{\beta\beta}, S_{\beta\beta}\} + A_{13}\{T, H, S_{\alpha,\beta}\}, \\
 \{T^s, H^s, S_{\alpha,\beta}^s\} &= A_{31}\{N_{\alpha\alpha}, M_{\alpha\alpha}, S_{\alpha\alpha}\} + A_{13}\{N_{\beta\beta}, M_{\beta\beta}, S_{\beta\beta}\} + A_{22}\{T, H, S_{\alpha,\beta}\}, \\
 \{Q_{z\alpha}^s, P_{z\alpha}^s\} &= A_{20}\{Q_{z\alpha}, P_{z\alpha}\} + A_{11}\{Q_{z\beta}, P_{z\beta}\}, \\
 \{Q_{z\beta}^s, P_{z\beta}^s\} &= A_{11}\{Q_{z\alpha}, P_{z\alpha}\} + A_{02}\{Q_{z\beta}, P_{z\beta}\}, \\
 \{Y_{\alpha\alpha}^s, R_{\alpha\alpha}^s\} &= A_{40}\{Y_{\alpha\alpha}, R_{\alpha\alpha}\} + A_{22}\{Y_{\beta\beta}, R_{\beta\beta}\} + A_{31}\{Y_{\alpha,\beta}, R_{\alpha,\beta}\}, \\
 \{Y_{\beta\beta}^s, R_{\beta\beta}^s\} &= A_{22}\{Y_{\alpha\alpha}, R_{\alpha\alpha}\} + A_{04}\{Y_{\beta\beta}, R_{\beta\beta}\} + A_{13}\{Y_{\alpha,\beta}, R_{\alpha,\beta}\}, \\
 \{Y_{\alpha,\beta}^s, R_{\alpha,\beta}^s\} &= A_{31}\{Y_{\alpha\alpha}, R_{\alpha\alpha}\} + A_{13}\{Y_{\beta\beta}, R_{\beta\beta}\} + A_{22}\{Y_{\alpha,\beta}, R_{\alpha,\beta}\}, \\
 \{Y_{zz}^s, R_{zz}^s\} &= A_{10}\{Y_{z\alpha}, R_{z\alpha}\} + A_{01}\{Y_{z\beta}, R_{z\beta}\} + A_{00}\{Y_{zz}, R_{zz}\}, \\
 \{Y_{z\alpha}^s, J_{z\alpha}^s, I_{z\alpha}^s\} &= A_{20}\{Y_{z\alpha}^s, J_{z\alpha}^s, I_{z\alpha}^s\} + A_{11}\{Y_{z\beta}^s, J_{z\beta}^s, I_{z\beta}^s\} + A_{10}\{Y_{zz}, J_{zz}, I_{zz}\}, \\
 \{Y_{z\beta}^s, J_{z\beta}^s, I_{z\beta}^s\} &= A_{11}\{Y_{z\alpha}^s, J_{z\alpha}^s, I_{z\alpha}^s\} + A_{02}\{Y_{z\beta}^s, J_{z\beta}^s, I_{z\beta}^s\} + A_{01}\{Y_{zz}, J_{zz}, I_{zz}\}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Подставляя в уравнения (5) выражения (6), получим разрешающую систему уравнений движения элемента замкнутой гибкой микрополярной цилиндрической оболочки сетчатой структуры модели Пелеха – Шереметьева – Редди. В данной модели жесткость стержней на изгиб в плоскости, касательной к срединной поверхности оболочки, не учитывается, поэтому порядки систем дифференциальных уравнений, описывающих поведение сетчатых и сплошных оболочек, совпадают. При этом совпадают и формулировки граничных условий соответствующих краевых задач [23].

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИКРОПОЛЯРНОЙ СЕТЧАТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ КИРХГОФА – ЛЯВА

Если в выражениях для компонент вектора перемещений (1) слагаемое при  $z^3$ , подчеркнутое двумя чертами, положить равным нулю, а в слагаемых при  $z$ , подчеркнутых одной чертой, выполнить замену  $\gamma_\alpha$  на  $-\frac{\partial w}{\partial \alpha}$  и  $\gamma_\beta$  на  $-\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta}$ , то, повторяя выкладки предыдущего параграфа, получим математическую модель



колебаний геометрически нелинейной сетчатой микрополярной цилиндрической оболочки Кирхгофа – Лява

$$\begin{aligned}
 & A_{40} \frac{\partial^2 M_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha^2} + A_{22} \frac{\partial^2 M_{\beta\beta}}{\partial \alpha^2} + A_{31} \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2} + \frac{A_{40}}{R^2} \frac{\partial^2 N_{\alpha\alpha}}{\partial \beta^2} + \frac{A_{22}}{R^2} \frac{\partial^2 N_{\beta\beta}}{\partial \beta^2} + \frac{A_{31}}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \beta^2} + \\
 & + \frac{2A_{31}}{R} \frac{\partial^2 M_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{2A_{13}}{R} \frac{\partial^2 M_{\beta\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{2A_{22}}{R} \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha \partial \beta} + A_{40} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( N_{\alpha\alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{A_{22}}{2R^2} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\beta}}{\partial \beta^2} + \\
 & + A_{22} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( N_{\beta\beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + A_{31} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( T \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{2A_{31}}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( N_{\alpha\alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{A_{13}}{2R^2} \frac{\partial^2 Y_{\beta\beta}}{\partial \beta^2} + \\
 & + \frac{2A_{13}}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( N_{\beta\beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{2A_{22}}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( T \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{2A_{31}}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( N_{\alpha\alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{A_{31}}{2R^2} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\alpha}}{\partial \beta^2} + \\
 & + \frac{2A_{13}}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( N_{\beta\beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{2A_{22}}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( T \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{A_{22}}{R^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( N_{\alpha\alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \\
 & + \frac{A_{04}}{R^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( N_{\beta\beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{A_{13}}{R^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( T \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{A_{22}}{R} N_{\alpha\alpha} - \frac{A_{04}}{R} N_{\beta\beta} - \frac{A_{13}}{R} T - \frac{A_{40}}{2R} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha \partial \beta} - \\
 & - \frac{A_{22}}{2R} \frac{\partial^2 Y_{\beta\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{A_{31}}{2R} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{A_{22}}{2R} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{A_{04}}{2R} \frac{\partial^2 Y_{\beta\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{A_{13}}{2R} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{A_{31}}{2} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha^2} + \quad (7) \\
 & + \frac{A_{13}}{2} \frac{\partial^2 Y_{\beta\beta}}{\partial \alpha^2} + \frac{A_{22}}{2} \frac{\partial^2 Y_{\alpha\beta}}{\partial \alpha^2} + q = \rho h \epsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\
 & A_{40} \frac{\partial N_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + A_{22} \frac{\partial N_{\beta\beta}}{\partial \alpha} + A_{31} \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{A_{31}}{R} \frac{\partial N_{\alpha\alpha}}{\partial \beta} + \frac{A_{13}}{R} \frac{\partial N_{\beta\beta}}{\partial \beta} + \frac{A_{22}}{R} \frac{\partial T}{\partial \beta} - \\
 & - \frac{A_{11}}{2R} \frac{\partial^2 Y_{z\alpha}}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{A_{02}}{2R} \frac{\partial^2 Y_{z\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{A_{20}}{2R^2} \frac{\partial^2 Y_{z\alpha}}{\partial \beta^2} - \frac{A_{11}}{2R^2} \frac{\partial^2 Y_{z\beta}}{\partial \beta^2} = \rho h \epsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\
 & \frac{A_{22}}{R} \frac{\partial N_{\alpha\alpha}}{\partial \beta} + \frac{A_{04}}{R} \frac{\partial N_{\beta\beta}}{\partial \beta} + \frac{A_{13}}{R} \frac{\partial T}{\partial \beta} + A_{31} \frac{\partial N_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + A_{13} \frac{\partial N_{\beta\beta}}{\partial \alpha} + A_{22} \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \\
 & + \frac{A_{20}}{2} \frac{\partial^2 Y_{z\alpha}}{\partial \alpha^2} + \frac{A_{11}}{2} \frac{\partial^2 Y_{z\beta}}{\partial \alpha^2} + \frac{A_{11}}{2R} \frac{\partial^2 Y_{z\alpha}}{\partial \alpha \beta} + \frac{A_{02}}{2R} \frac{\partial^2 Y_{z\beta}}{\partial \alpha \beta} = \rho h \epsilon \frac{\partial v}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.
 \end{aligned}$$

К системе уравнений (7) следует присоединить граничные и начальные условия в зависимости от условий закрепления и загрузки оболочки.

## ВЫВОДЫ

В работе впервые построена теория нелинейной динамики гибких микрополярных сетчатых цилиндрических оболочек, основанная на кинематических гипотезах третьего приближения (Пелеха – Шереметьева – Редди), позволяющая учесть не только поворот нормали после деформации, но и ее искривление. Из построенной теории как частные случаи могут быть получены модели второго (С. П. Тимошенко, учитывающие только поворот) и первого (Кирхгофа – Лява) приближения. А также линейные математические модели (не учитывающие теорию Кирхгофа), математические модели динамики сплошных оболочек (не учитывающие теории Пшеничнова), математические модели, полученные на основании классической континуальной теории (без учета масштабных эффектов), математические модели для пологих оболочек. Построенная в работе теория может быть в том числе использована для исследований поведения УНТ под действием статических и динамических нагрузок.



**Благодарности.** Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00351а).

### Библиографический список

1. Белосточный Г. Н., Мыльцина О. А. Геометрически нерегулярные пластинки под действием быстропеременных по временной координате силовых и температурных воздействий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 442–451. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-442-451>
2. Krylova E. Y., Yakovleva T. V., Bazhenov V. G. The influence of the noise field on parametric oscillations of flexible square plates // Russian Aeronautics. 2017. Vol. 60, № 2. P. 177–183. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1068799817020039>
3. Krylova E. Y., Papkova I. V., Erofeev N. P., Zakharov V. M., Krysko V. A. Complex fluctuations of flexible plates under longitudinal loads with account for white noise // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2016. Vol. 57, № 4. P. 714–719. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894416040167>
4. Awrejcewicz J., Krysko A. V., Krysko V. A., Krylova E. Yu. Turbulent phenomena in flexible plates and shells // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2014. № 12. P. 49–76. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-08266-0-5>
5. Krysko A. V., Awrejcewicz J., Zhigalov M. V., Pavlov S. P., Krysko V. A. Nonlinear behaviour of different flexible size-dependent beams models based on the modified couple stress theory. Part 1. Governing equations and static analysis of flexible beams // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2017. № 93. P. 96–105.
6. Krysko A. V., Awrejcewicz J., Zhigalov M. V., Pavlov S. P., Krysko V. A. Nonlinear behaviour of different flexible size-dependent beams models based on the modified couple stress theory. Part 2. Chaotic dynamics of flexible beams // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2017. № 93 P. 106–212.
7. Zhou X., Wang L. Vibration and stability of micro-scale cylindrical shells conveying fluid based on modified couple stress theory // Micro and Nano Letters. 2012. Vol. 7, iss. 7. P. 679–684. DOI: <https://doi.org/10.1049/mnl.2012.0184>
8. Safarpour H., Mohammadi K., Ghadiri M. Temperature-dependent vibration analysis of a FG viscoelastic cylindrical microshell under various thermal distribution via modified length scale parameter: a numerical solution // Journal of the Mechanical Behavior of Materials. 2017. Vol. 26, iss. 1–2. P. 9–24. DOI: <https://doi.org/10.1515/jmbm-2017-0010>
9. Sahmani S., Ansari R., Gholami R., Darvizeh A. Dynamic stability analysis of functionally graded higher-order shear deformable microshells based on the modified couple stress elasticity theory // Composites : Part B. 2013. Vol. 51. P. 44–53. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.02.037>
10. Majeed A., Zeeshan A., Mubbashir S. Vibration analysis of carbon nanotubes based on cylindrical shell by inducting Winkler and Pasternak foundations // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2018. P. 1140–1145. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1430282>
11. Hussain M., Naeem M. N., Shahzad A., He M. Vibrational behavior of single-walled carbon nanotubes based on cylindrical shell model using wave propagation approach // IP Advances. 2017. Vol. 7, iss. 4, 045114. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4979112>
12. Ninh D. G., Bich D. H. Characteristics of nonlinear vibration of nanocomposite cylindrical shells with piezoelectric actuators under thermo-mechanical loads // Aerospace Science and Technology. 2018. Vol. 77. P. 305–312. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.04.008>



13. *Peddie J., Buchanan R., McNitt R. P.* Application of nonlocal continuum models to nanotechnology // *Int. J. Eng. Sci.* 2003. Vol. 41. P. 595–609. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(02\)00210-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(02)00210-0)
14. *Bazehhour B. G., Mousavi S. M., Farshidianfar A.* Free vibration of high-speed rotating Timoshenko shaft with various boundary conditions: effect of centrifugally induced axial force // *Archive of Applied Mechanics*. 2014. Vol. 84, № 12. P. 1691–1700. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-013-0762-5>
15. *Karlicic D., Kozic P., Pavlovic R.* Flexural vibration and buckling analysis of single-walled carbon nanotubes using different gradient elasticity theories based on Reddy and Huu-tai formulations // *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2015. Vol. 51, № 1. P. 217–233. DOI: <https://doi.org/10.15632/jtam-pl.53.1.217>
16. *Иванова Е. А., Морозов Н. Ф., Семенов Б. Н., Фирсова А. Д.* Об определении упругих модулей наноструктур: теоретические расчеты и методика экспериментов // *Изв. РАН. МТТ*. 2005. № 4. С. 75–85.
17. *Daneshmand F., Rafiei M., Mohebpour S. R., Heshmati M.* Stress and strain-inertia gradient elasticity in free vibration analysis of single walled carbon nanotubes with first order shear deformation shell theory // *Appl. Math. Modelling*. 2013. Vol. 37, № 16–17. P. 7983–8003. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.01.052>
18. *Ерофеев В. И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1999. 328 с.
19. *Ostrogradsky M.* Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Petersburg. 1850. Vol. 8, № 3. P. 33–48.
20. *Hamilton W.* Report of the Fourth Meeting of the British Association for the Advancement of Science. L., 1835.
21. *Sun C. T., Zhang Y.* Size-dependent elastic moduli of platelike nanomaterials // *J. Appl. Phys.* 2003. Vol. 3. P. 1212–1218.
22. *Крылова Е. Ю., Папкина И. В., Салтыкова О. А., Синичкина А. О., Крысько В. А.* Математическая модель колебаний размерно-зависимых цилиндрических оболочек сетчатой структуры с учетом гипотез Кирхгофа – Лява // *Нелинейный мир*. 2018. Т. 16, № 4. С. 17–28. DOI: <https://doi.org/10.18127/j20700970-201804-03>
23. *Пшеничников Г. И.* Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок. М. : Наука, 1982. 352 с.

---

**Образец для цитирования:**

*Крылова Е. Ю., Папкина И. В., Яковлева Т. В., Крысько В. А.* Теория колебаний углеродных нанотрубок как гибких микрополярных сетчатых цилиндрических оболочек с учетом сдвига // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 305–316. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-305-316>

---

## **Theory of Vibrations of Carbon Nanotubes Like Flexible Micropolar Mesh Cylindrical Shells Taking into Account Shift**

**E. Yu. Krylova, I. V. Papkova, T. V. Yakovleva, V. A. Krysko**

Ekaterina Yu. Krylova, <https://orcid.org/0000-0002-7593-0320>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, [kat.krylova@bk.ru](mailto:kat.krylova@bk.ru)

Irina V. Papkova, <https://orcid.org/0000-0003-4062-1437>, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St., Saratov 410054, Russia, [ikravzova@mail.ru](mailto:ikravzova@mail.ru)





Tatyana V. Yakovleva, <https://orcid.org/0000-0001-6345-1480>, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St., Saratov 410054, Russia, [yan-tan1987@mail.ru](mailto:yan-tan1987@mail.ru)

Vadim A. Krysko, <https://orcid.org/0000-0002-4914-764X>, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St., Saratov 410054, Russia, [tak@sun.ru](mailto:tak@sun.ru)

A theory of nonlinear dynamics of a flexible single-layer micropolar cylindrical shell of a network structure is constructed. The geometric nonlinearity is taken into account by the model of Theodor von Karman. We consider a nonclassical continuum shell model based on the Cosserat medium with constrained particle rotation (pseudocontinuum). It is assumed that the displacement and rotation fields are not independent. An additional independent material length parameter associated with the symmetric tensor of the rotation gradient is introduced into consideration. The equations of motion of the shell element, boundary and initial conditions are obtained from the variational principle of Ostrogradskii–Hamilton on the basis of kinematic hypotheses of the third approximation (Peleha–Sheremetyev–Reddy), allowing to take into account not only the rotation, but also the curvature of the normal after deformation. It is assumed that the cylindrical shell consists of  $n$  families of edges, each of which is characterized by an inclination angle with respect to the positive direction of the axis directed along the length of the shell and the distance between neighboring edges. The shell material is isotropic, elastic, and obeys Hooke's law. A dissipative mechanical system is considered. As a special case, the system of equations of motion for Kirchhoff–Love's micro-polar reticulated shell is presented. The theory constructed in this paper can be used, among other things, for studying the behavior of CNTs under the action of static and dynamic loads.

**Keywords:** cylindrical shell, CNT, micropolar theory, Cosserat pseudocontinuum, Peleha–Sheremetyev–Reddy model, net structure, statics and dynamics, model Tymoshenko, the Kirchhoff–Love model.

Received: 20.10.2018 / Accepted: 20.12.2018 / Published: 31.08.2019

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 18-01-00351a).

## References

1. Belostochny G. N., Myltcina O. A. The Geometrical Irregular Plates under the Influence of the Quick Changed on the Time Coordinate Forces and Temperature Effects. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 4, pp. 442–451 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-442-451>
2. Krylova E. Y., Yakovleva T. V., Bazhenov V. G. The influence of the noise field on parametric oscillations of flexible square plates. *Russian Aeronautics*, 2017, vol. 60, no. 2, pp. 177–183. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1068799817020039>
3. Krylova E. Y., Papkova I. V., Erofeev N. P., Zakharov V. M., Krysko V. A. Complex fluctuations of flexible plates under longitudinal loads with account for white noise. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, vol. 57, no. 4, pp. 714–719. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894416040167>
4. Awrejcewicz J., Krysko A. V., Krysko V. A., Krylova E. Yu. Turbulent phenomena in flexible plates and shells. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2014, no. 12, pp. 49–76. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-08266-0-5>



5. Krysko A. V., Awrejcewicz J., Zhigalov M. V., Pavlov S. P, Krysko V. A. Nonlinear behaviour of different flexible size-dependent beams models based on the modified couple stress theory. Part 1. Governing equations and static analysis of flexible beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2017, no. 93, pp. 96–105.
6. Krysko A. V., Awrejcewicz J., Zhigalov M. V., Pavlov S. P, Krysko V. A. Nonlinear behaviour of different flexible size-dependent beams models based on the modified couple stress theory. Part 2. Chaotic dynamics of flexible beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2017, no. 93, pp. 106–212.
7. Zhou X., Wang L. Vibration and stability of micro-scale cylindrical shells conveying fluid based on modified couple stress theory. *Micro and Nano Letters*, 2012, vol. 7, iss. 7, pp. 679–684. DOI: <https://doi.org/10.1049/mnl.2012.0184>
8. Safarpour H., Mohammadi K., Ghadiri M. Temperature-dependent vibration analysis of a FG viscoelastic cylindrical microshell under various thermal distribution via modified length scale parameter: a numerical solution. *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, 2017, vol. 26, iss. 1–2, pp. 9–24. DOI: <https://doi.org/10.1515/jmbm-2017-0010>
9. Sahmani S., Ansari R., Gholami R., Darvizeh A. Dynamic stability analysis of functionally graded higher-order shear deformable microshells based on the modified couple stress elasticity theory. *Composites: Part B*, 2013, vol. 51, pp. 44–53. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.02.037>
10. Majeed A., Zeeshan A., Mubbashir S. Vibration analysis of carbon nanotubes based on cylindrical shell by inducting Winkler and Pasternak foundations. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2018, pp. 1140–1145. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1430282>
11. Hussain M., Naeem M. N., Shahzad A., He M. Vibrational behavior of single-walled carbon nanotubes based on cylindrical shell model using wave propagation approach. *IP Advances*, 2017, vol. 7, iss. 4, 045114. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4979112>
12. Ninh D. G., Bich D. H. Characteristics of nonlinear vibration of nanocomposite cylindrical shells with piezoelectric actuators under thermo-mechanical loads. *Aerospace Science and Technology*, 2018, vol. 77, pp. 305–312. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.04.008>.
13. Peddieson J., Buchanan R., McNitt R. P. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *Int. J. Eng. Sci.*, 2003, vol. 41, pp. 595–609. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(02\)00210-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(02)00210-0)
14. Bazehhour B. G., Mousavi S. M., Farshidianfar A. Free vibration of high-speed rotating Timoshenko shaft with various boundary conditions: effect of centrifugally induced axial force. *Archive of Applied Mechanics*, 2014, vol. 84, no. 12, pp. 1691–1700. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-013-0762-5>
15. Karlicic D., Kozic P., Pavlovic R. Flexural vibration and buckling analysis of single-walled carbon nanotubes using different gradient elasticity theories based on reddy and huutai formulations. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, vol. 51, no. 1, pp. 217–233. DOI: <https://doi.org/10.15632/jtam-pl.53.1.217>
16. Ivanova E. A., Morozov N. F., Semenov B. N., Firsova A. D. Determination of elastic moduli of nanostructures: theoretical estimates and experimental techniques. *Mech. Solids*, 2005, vol. 40, no. 4, pp. 60–68 (in Russian).
17. Daneshmand F., Rafiei M., Mohebpour S. R., Heshmati M. Stress and strain-inertia gradient elasticity in free vibration analysis of single walled carbon nanotubes with first order shear deformation shell theory. *Appl. Math. Modelling*, 2013, vol. 37, no. 16–17, pp. 7983–8003. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.01.052>
18. Erofeev V. I. *Volnovye protsessy v tverdykh telakh s mikrostrukturoj* [Wave processes in solids with a microstructure]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1999. 328 p. (in Russian).



19. Ostrogradsky M. *Memoires de l'Academie imperiale des sciences de St. Petersbourg*, 1850, vol. 8, no. 3, pp. 33–48.
20. Hamilton W. *Report of the Fourth Meeting of the British Association for the Advancement of Science*. London, 1835.
21. Sun C. T., Zhang Y. Size-dependent elastic moduli of platelike nanomaterials. *J. Appl. Phys.*, 2003, vol. 3, pp. 1212–1218.
22. Krylova E. Yu., Papkova I. V., Saltykov O. A., Sinichkina A. O., Krysko V. A. Mathematical model of vibrations of the cylindrical shells, which are dimensionally dependent with the net structure, taking into account the Kirchhoff–Love hypotheses. *Nonlineinyi mir* [Nonlinear World], 2018, vol. 16, no. 4. pp. 17–28 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18127/j20700970-201804-03>
23. Pshenichnov G. I. *Teoriya tonkikh uprugikh setchatykh obolochek i plastinok* [Theory of thin elastic mesh shells and plates]. Moscow, Nauka, 1982. 352 p. (in Russian).

---

**Cite this article as:**

Krylova E. Yu., Papkova I. V., Yakovleva T. V., Krysko V. A. Theory of Vibrations of Carbon Nanotubes Like Flexible Micropolar Mesh Cylindrical Shells Taking into Account Shift. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 3, pp. 305–316 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-305-316>

---



УДК 539.3

## Осесимметричное поле напряжений вблизи кругового выреза в теле с зависящими от вида напряженного состояния пластическими свойствами

Е. В. Ломакин, Н. Г. Минаев

Ломакин Евгений Викторович, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории пластичности, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1, evlomakin@yandex.ru

Минаев Никита Геннадьевич, аспирант кафедры теории пластичности, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1, nickita3@yandex.ru

В работе проведен анализ свойств определяющих соотношений теории пластичности для сред с зависящими от вида напряженного состояния пластическими свойствами. Использовано условие пластичности, представленное в соответствующем обобщенном виде, в которое введен параметр вида напряженного состояния, представляющий собой отношение гидростатической компоненты напряжений к эквивалентному напряжению Мизеса, названный в литературе трехосностью напряжений. Для частного вида условия пластичности получено аналитическое решение задачи о пространстве с круговым отверстием в условиях плоской деформации. Проведено сравнение распределения напряжений на основе полученного решения с распределением напряжений в аналогичной задаче для тела, пластические свойства которого инвариантны к виду напряженного состояния, с использованием условия пластичности Губера–Мизеса. Исследовано влияние степени чувствительности свойств материалов к виду напряженного состояния на распределение напряжений в пластических областях.

*Ключевые слова:* теория пластичности, плоская деформация, критерий Кулона–Мора, плоскость с круговым вырезом.

Поступила в редакцию: 19.05.2019 / Принята: 16.06.2019 / Опубликовано: 31.08.2019

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-317-325>

### ВВЕДЕНИЕ

Для многих материалов переход из упругого состояния в пластическое определяется не только величиной интенсивности касательных напряжений или эквивалентным напряжением, но и гидростатической компонентой напряжений. Это связано с тем, что механизм необратимого деформирования материалов имеет не только сдвиговую природу, как это принято в классических теориях пластичности для пластически несжимаемых материалов, но также включает зарождение и развитие микротрещин, пор и других элементов неоднородности структуры. Такие процессы характерны для различных конструкционных материалов, таких как чугун, графит, огнеупорные керамики, горные породы, полимерные материалы, некоторые металлические сплавы. Часть из этих материалов обычно относится к хрупким, но при определенных условиях они проявляют заметные пластические свойства.



При решении различных практически важных задач чаще всего используется модель Друкера – Прагера [1], которая является в некотором смысле обобщением теории Кулона – Мора [2], с условием пластичности, включающим первый инвариант тензора напряжений и второй инвариант девиатора напряжений, или гидростатическую компоненту напряжений и эквивалентное напряжение Мизеса. Исследованию свойств уравнений данной модели посвящены работы многих авторов [1, 3–6] и указано, что в материалах, поведение которых описывается моделью Друкера – Прагера, процессы сдвигового и объемного деформирования взаимосвязаны, такие материалы относятся к дилатирующим. Кроме того, на основе экспериментальных исследований установлено, что пластические свойства материалов зависят не только от интенсивности касательных напряжений и гидростатической компоненты напряжений, но и от вида внешних воздействий или вида напряженного состояния, которое формируется в телах под действием нагрузок [4, 6–8]. Наиболее заметно этот эффект проявляется при исследовании пластических свойств пористых материалов и для данных материалов предложены соответствующие теории пластичности [4, 8–11].

С использованием модели Друкера – Прагера исследованы особенности упруго-пластического деформирования материалов в процессе наноиндектирования и продемонстрировано хорошее соответствие между теоретическими зависимостями и результатами экспериментальных исследований свойств каменного угля [12]. Исследованы также параметры этой модели для полимерных материалов [13]. Получено полуаналитическое решение для тонкого кругового диска и исследовано влияние зависимости критерия пластичности от гидростатического напряжения на характер распределения напряжений и формирование пластических областей в диске [14, 15].

В данной работе получено аналитическое решение задачи о пространстве с круговым отверстием под действием внутреннего давления для случая плоской деформации. Исследовано влияние зависимости пластических свойств материала от вида напряженного состояния на характер распределения напряжений и размер пластических областей в зависимости от параметра, характеризующего чувствительность пластических свойств материала к виду внешних воздействий.

## 1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

В работе [4] условие пластичности для дилатирующей среды представлено в следующем обобщенном виде:

$$F(\sigma_{ij}) = f(\xi)\sigma_0 = k. \quad (1)$$

В этой формуле  $\xi = \sigma/\sigma_0$  — параметр, который характеризует соотношение между нормальным и касательным напряжением в точке сплошной среды,  $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$  — среднее нормальное напряжение или гидростатическая компонента напряжений,  $\sigma_0 = \sqrt{3/2 S_{ij}S_{ij}}$  — интенсивность касательных напряжений,  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$ . Можно принять, что при чистом сдвиге ( $\xi = 0$ ) значение функции  $f(0) = 1$ . Тогда  $k = \sqrt{3}\tau_s$ , где  $\tau_s$  — предел текучести при сдвиге.

При рассмотрении различных выражений для функции  $f(\xi)$  можно получить некоторые из предложенных ранее условий пластичности для поврежденных, пористых и гранулированных сред. Для линейной функции

$$f(\xi) = 1 + C\xi \quad (2)$$



из (1) получается условие Друкера – Прагера  $\sigma_0 + \sigma = k$ , которое находит широкое применение в механике грунтов.

В случае, когда

$$f(\xi) = \sqrt{1 + \alpha\xi^2} \quad (\alpha > 0),$$

получается условие пластичности Грина  $\sigma_0^2 + \alpha\sigma^2 = k^2$ , предложенное для пористых сред. Параметры  $\alpha$  и  $k$  в общем случае представляют собой функции параметра пористости сплошной среды.

При  $f(\xi) \equiv 1$  условие (1) совпадает с условием пластичности Губера – Мизеса  $\sigma_0 = k$  [9].

Принимая ассоциированный с условием (1) закон течения  $\dot{\epsilon}_{ij} = h' \partial F / \partial \sigma_{ij}$ , для случая жесткопластического тела связь между скоростями деформаций и напряжениями можно представить в следующем виде:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = h' \left[ \frac{1}{3} \Lambda(\xi) \delta_{ij} + \frac{3}{2} \frac{\lambda(\xi) f(\xi) S_{ij}}{k} \right], \quad (3)$$

где  $\Lambda(\xi) = f'(\xi)$ ,  $\lambda(\xi) = f(\xi) - \xi f'(\xi)$ ,  $h' = \frac{H}{\chi(\xi)}$ ,  $H = \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}$ ,  $\chi(\xi) = \sqrt{\frac{1}{3} \Lambda^2(\xi) + \frac{3}{2} \lambda^2(\xi)}$ .

Функции  $\Lambda(\xi)$  и  $\lambda(\xi)$  и их производные взаимосвязаны и для них выполняются следующие соотношения:  $\lambda(\xi) + \xi \Lambda(\xi) = f(\xi)$ ,  $\lambda'(\xi) + \xi \Lambda'(\xi) = 0$ . Из (3) можно получить выражения для интенсивности скоростей пластических деформаций  $\Gamma = \sqrt{2/3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = h' \lambda(\xi)$ , где  $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} - 1/3 \dot{\epsilon} \delta_{ij}$  и скорости объемной деформации  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{ij} \delta_{ij} = h' \Lambda(\xi)$ . Из представленных выражений видно, что функция  $\lambda(\xi)$  должна быть положительно определена. В этом случае скорость остаточной объемной деформации пропорциональна интенсивности скоростей деформации  $\dot{\epsilon} = \Gamma \Lambda(\xi) / \lambda(\xi)$ .

В общем случае коэффициент пропорциональности  $\Lambda(\xi) / \lambda(\xi)$  зависит от вида напряженного состояния, т.е. от  $\xi$ , и принимает разные значения для разных соотношений между нормальным и касательным напряжениями в сплошной среде. Для случая линейной функции (2) коэффициент постоянный.

Рассмотрим случай плоской деформации:  $\dot{\epsilon}_{33} = \dot{\epsilon}_{13} = \dot{\epsilon}_{23} = 0$ . Далее, используя (3), можно выразить  $\sigma_{33}$  через  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  и исключить  $\sigma_{33}$  из (1). В результате получаем следующие выражения:

$$\sigma_{33} = \sigma - \frac{2}{9} \sigma_0 \frac{\Lambda(\xi)}{\lambda(\xi)}, \quad \sigma_0 = S_0 \left[ 1 - \frac{\Lambda^2(\xi)}{9\lambda^2(\xi)} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \sigma = S - \sigma_0 \frac{\Lambda(\xi)}{9\lambda(\xi)}, \quad (4)$$

$$S_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2]^{\frac{1}{2}}, \quad S = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

Введем параметр  $\zeta = S/S_0$  и, используя (4), выразим  $\zeta$  через  $\xi$ :

$$\zeta = \left[ \xi + \frac{1}{9} \frac{\Lambda(\xi)}{\lambda(\xi)} \right] \left[ 1 - \frac{1}{9} \frac{\Lambda^2(\xi)}{\lambda^2(\xi)} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Используя (5) и (4), можно представить условие пластичности (1) в виде

$$f_1(\zeta) S_0 = k, \quad f_1(\zeta) = f[\xi(\zeta)] \left[ 1 - \frac{1}{9} \frac{\Lambda_1^2(\zeta)}{\lambda_1^2(\zeta)} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

$$\Lambda_1(\zeta) = \Lambda[\xi(\zeta)], \quad \lambda_1 = \lambda[\xi(\zeta)].$$



Так как  $\zeta = S/S_0 = S f_1(\zeta)/k$ , то  $\zeta$  и напряжение  $S_0$  выражаются через  $S$ , а зависимость  $\zeta = \xi(S)$  является взаимнооднозначной. Также можно отметить, что  $S_0 = \sqrt{3}kF(S)$ , где  $F(S) = 3^{-\frac{1}{2}} f_1^{-1}[\zeta(S)]$ . Формулы для напряжений в случае плоской деформации можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{11} = S - kF(S) \sin 2\theta, \sigma_{22} = S + kF(S) \sin 2\theta, \sigma_{12} = kF(S) \cos 2\theta. \quad (7)$$

В (7) угол  $\theta$  представляет собой угол между осью  $x_1$  и направлением площадки, на которой действует максимальное касательное напряжение. В условиях плоской деформации система уравнений для определения напряженного состояния включает в себя условие пластичности (1) и уравнения равновесия:

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0, \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0. \quad (8)$$

Подставив выражения (7) в уравнения равновесия (8), получим систему для определения  $S$  и  $\theta$ :

$$\begin{aligned} S_{,1} - kF'(S)(S_{,1} \sin 2\theta - S_{,2} \cos 2\theta) - 2kF(S)(\theta_{,1} \cos 2\theta + \theta_{,2} \sin 2\theta) &= 0, \\ S_{,2} + kF'(S)(S_{,1} \cos 2\theta + S_{,2} \sin 2\theta) - 2kF(S)(\theta_{,1} \sin 2\theta - \theta_{,2} \cos 2\theta) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Штрих обозначает дифференцирование по переменной  $S$ . Система (9) будет гиперболической при  $|kF'| < 1$ , что накладывает ограничения на значения функции, характеризующей степень чувствительности пластических свойств среды к изменению вида напряженного состояния.

Выпишем характеристики системы уравнений (9) и обозначим их индексами  $\alpha$  и  $\beta$ , а также выпишем соотношения вдоль них:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \operatorname{tg} \phi_{\alpha,\beta} = \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{1 - k^2 F'^2}}{-kF' + \sin 2\theta}, \quad dS \mp \frac{2kF d\theta}{\sqrt{1 - k^2 F'^2}}. \quad (10)$$

Легко заметить, что характеристики (10) будут ортогональны только в случае, если  $f(\xi) \equiv \text{const}$ , когда условие (1) совпадает с условием пластичности Губера – Мизеса.

## 2. ЗАДАЧА О ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ВЫРЕЗОМ

Рассмотрим задачу о неограниченном теле с круговым вырезом. По всему контуру выреза приложено нормальное давление, равное  $p$ . Перейдем к безразмерным величинам, для этого радиальные координаты отнесем к радиусу отверстия  $a$ , а напряжения — к  $k$ . Рассмотрим критерий пластичности (1) для случая линейной функции (2). Введем полярную систему координат  $(r, \psi)$ . Формулы для напряжений (7) переписутся для полярной системы координат следующим образом:

$$\sigma_{rr} = S - kF(S) \sin 2\theta, \quad \sigma_{\psi\psi} = S + kF(S) \sin 2\theta, \quad \sigma_{r\psi} = kF(S) \cos 2\theta. \quad (11)$$

В условиях осевой симметрии напряжения  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\psi\psi}$  являются главными и уравнения равновесия (8) в полярной системе координат сведутся к одному уравнению:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\psi\psi}}{r} = 0. \quad (12)$$



Граничное условие в этой задаче будет следующим:

$$\sigma_{rr}|_{\bar{r}=1} = -\frac{p}{k}, \quad \text{где } \bar{r} = \frac{r}{a}.$$

В дальнейших формулах везде подразумевается, что  $\bar{r} = r$ , т.е. безразмерный радиус. Подставляя (11) в (12) и интегрируя полученное соотношение с использованием граничного условия, получим следующие выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{C} \left( 1 - r^{\frac{-2uC}{1+uC}} \left( 1 + C\frac{p}{k} \right) \right), \\ \sigma_{\psi\psi} &= \frac{1}{C} \left( 1 - r^{\frac{-2uC}{1+uC}} \left( \frac{1 - Cu + C\frac{p}{k} - C^2u\frac{p}{k}}{1 + Cu} \right) \right), \\ u &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9 - C^2}}. \end{aligned}$$

Уравнения характеристик в полярной системе координат будут следующими:

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\psi} = \left( \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{1 - k^2 F_1^2}}{kF_1 + \sin 2\theta} + \operatorname{ctg} \psi \right) \left( \operatorname{ctg} \psi \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{1 - k^2 F_1^2}}{kF_1 + \sin 2\theta} - 1 \right)^{-1}. \quad (13)$$

В осесимметричном случае уравнения характеристик (13) можно представить в виде

$$\ln r \pm \sqrt{\frac{1+m}{1-m}} \psi = \operatorname{const}, \quad m = \frac{\sqrt{3}C}{\sqrt{9 - C^2}}.$$

Далее необходимо определить радиус пластической области. Максимальный радиус будет при  $\psi_0 = \pm\pi/2$ . Подставив эти значения в уравнения характеристик, определим неизвестный радиус, в результате получим

$$r = \sqrt{e^{2\sqrt{\frac{1+m}{1-m}} \frac{\pi}{2}}}.$$

Можно построить графики зависимости напряжений от радиуса в пластической области при значениях коэффициента  $C$  из условия пластичности (2),  $C = \{0.12; 0.5; 0.8; 1\}$  (этим значениям  $C$  соответствуют следующие соотношения между пределом текучести при растяжении  $\sigma_S^+$  и пределом текучести при сжатии  $\sigma_S^-$ :  $\sigma_S^-/\sigma_S^+ = \{1.08; 1.41; 1.74; 1.98\}$ ), и нагрузок, приложенных на внутреннем радиусе выреза,  $p/k = \{1.5; 2\}$ , и сравнить их с классическим случаем Губера – Мизеса. Радиус пластических деформаций определяется конечной точкой на диаграммах напряжений, которые изображены на графиках.

Приведенные на рис. 1 и 2 графики наглядно демонстрируют зависимость распределения напряжений и величины радиуса пластической области от параметра, характеризующего зависимость пластических свойств материала от вида напряженного состояния и величины приложенного давления.



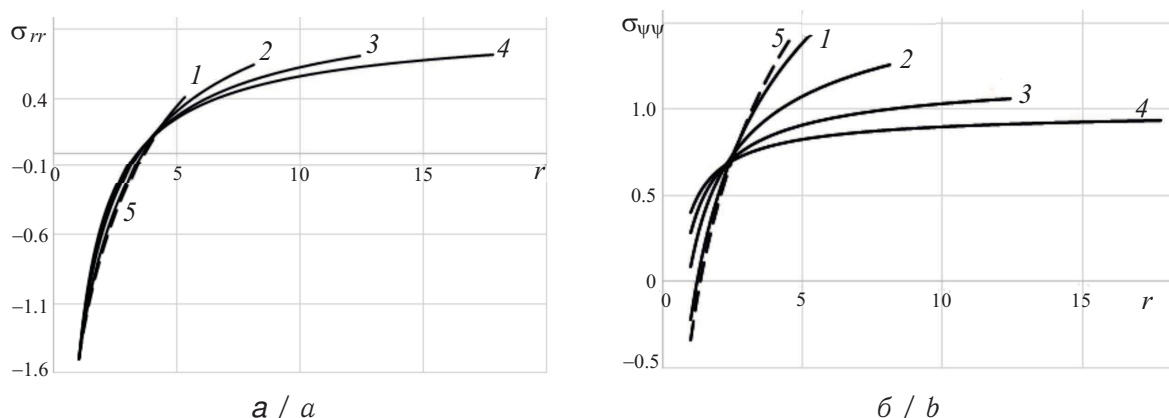


Рис. 1. Распределения радиального напряжения  $\sigma_{rr}$  (а) и окружного напряжения  $\sigma_{\psi\psi}$  (б) в окрестности выреза при  $\frac{p}{k} = 1.5$  и коэффициентах пластичности  $C$  (случай Друкера – Прагера – сплошная линия): 1 –  $C = 0.12$ ; 2 –  $C = 0.5$ ; 3 –  $C = 0.8$ ; 4 –  $C = 1$ ; 5 – случай Губера – Мизеса (пунктирная линия)

Fig. 1. Distributions of radial stress  $\sigma_{rr}$  (a) and circumferential stress  $\sigma_{\psi\psi}$  (b) in the vicinity of the cut for  $\frac{p}{k} = 1.5$  and plasticity coefficients  $C$  (Drucker – Prager case – solid line): 1 –  $C = 0.12$ ; 2 –  $C = 0.5$ ; 3 –  $C = 0.8$ ; 4 –  $C = 1$ ; 5 – Huber – Mises case (dashed line)

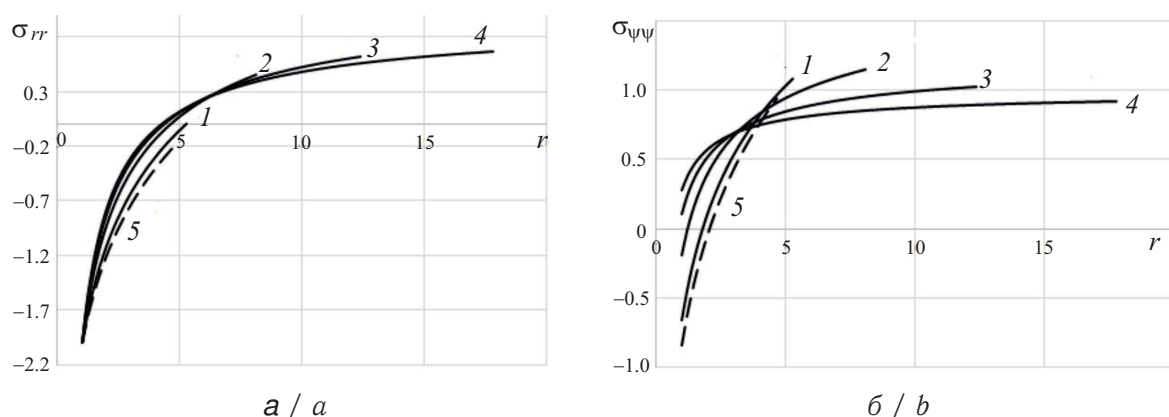


Рис. 2. Распределения радиального напряжения  $\sigma_{rr}$  (а) и окружного напряжения  $\sigma_{\psi\psi}$  (б) в окрестности выреза при  $\frac{p}{k} = 2$  и  $C = \{0.12; 0.5; 0.8; 1\}$  (обозначения те же, что и на рис. 1)

Fig. 2. Distributions of the radial stress  $\sigma_{rr}$  (a) and the circumferential stress  $\sigma_{\psi\psi}$  (b) in the vicinity of the cut at  $\frac{p}{k} = 2$  and  $C = \{0.12; 0.5; 0.8; 1\}$  (the same as in Fig. 1)

## ВЫВОДЫ

В работе получено аналитическое решение задачи о действии внутреннего давления на поверхности цилиндрического канала в теле с зависящими от вида напряженного состояния пластическими свойствами. Исследована зависимость распределения напряжений от параметра, характеризующего чувствительность свойств материала к виду напряженного состояния, и установлено, что распределение напряжений существенным образом зависит от значения коэффициента  $C$ , определяющего данную чувствительность. Показано, что в случае слабой зависимости свойств от вида напряженного состояния, когда  $C = 0.12$  и пределы текучести для условий одноосного растяжения  $\sigma_S^+$  и одноосного сжатия  $\sigma_S^-$  различаются незначительно, т.е.  $\sigma_S^- = 1.08 \sigma_S^+$ , распределение напряжений и их уровень существенно отличаются от значений для материала с инвариантными к виду внешних воздействий пластическими свойствами, т.е. для которого может быть использован



критерий Губера – Мизеса. Кроме того, установлено, что размер пластической области в значительной мере зависит от величины давления на поверхности отверстия.

**Благодарности.** Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 17-01-00318, 17-51-52001).

### Библиографический список

1. *Drucker D. C., Prager W.* Soil mechanics and plastic analysis or limit design // Quarterly of Applied Mathematics. 1952. Vol. 10, № 2. P. 157–165.
2. *Mohr O.* Welche Umstände begingen die Elastizitätsgrenze und den bruch eines Material? // Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. 1900. Vol. 44 (45). P. 1524–1530.
3. *Радаев Ю. Н.* Мгновенно-нерастяжимые директоры в кинематике трехмерных течений сред Кулона – Мора // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 467–483. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-467-483>
4. *Lomakin E. V.* Dependence of the limit state of composite and polymer materials on the type of the stress state. 1. Experimental dependences and determining equations // Mech Compos Mater. 1988. Vol. 24, iss. 1. P. 1–7. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00611327>
5. *Rudnicki J. W., Rice J. R.* Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1975. Vol. 23, iss. 6. P. 371–394. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(75\)90001-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(75)90001-0)
6. *Alexandrov S.* Geometry of plane strain characteristic fields in pressure-dependent plasticity // ZAMM: Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2015. Vol. 95, iss. 11. P. 1296–1301. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201400017>
7. *Ставрогин А. Н., Протосеня А. Г.* Пластичность горных пород. М. : Недра, 1979. 301 с.
8. *Deshpande V. S., Fleck N. A.* Isotropic constitutive models for metallic foams // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2000. Vol. 48, iss. 6–7. P. 1253–1283. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00082-4](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00082-4)
9. *Green R. J.* A plasticity theory for porous solids // International Journal of Mechanical Sciences. 1972. Vol. 14, iss. 4. P. 215–224. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(72\)90063-X](https://doi.org/10.1016/0020-7403(72)90063-X)
10. *Miller R. E.* A continuum plasticity model for the constitutive and indentation behaviour of foamed metals // International Journal of Mechanical Sciences. 2000. Vol. 42, iss. 4. P. 729–754. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(99\)00021-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00021-1)
11. *Onck P. R.* Application of a continuum constitutive model to metallic foam DEN-specimens in compression // International Journal of Mechanical Sciences. 2001. Vol. 43, iss. 12. P. 2947–2959. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(01\)00060-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(01)00060-1)
12. *Vatulyan A. O., Lyapin A. A., Kossovich E. L.* Studying of Elastoplastic Properties of Coal Specimens Using Indentation Technique [Ватульян А. О., Ляпин А. А., Коссович Е. Л. Исследование упругопластических свойств угольных пород на основе метода индентирования] // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 412–420. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-412-420>
13. *Seltzer R., Cisilino A. P., Frontini P. M., Yiu-Wing Mai* Determination of the Drucker – Prager parameters of polymers exhibiting pressure-sensitive plastic behaviour by depth-sensing indentation // International Journal of Mechanical Sciences. 2011. Vol. 53, iss. 6. P. 471–478. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.04.002>
14. *Alexandrov S., Jeng Y-R., Lomakin E.* An exact semi-analytic solution for residual stresses and strains within a thin hollow disc of pressure-sensitive material subject to thermal loading // Meccanica. 2014. Vol. 49, iss. 4. P. 775–794. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-013-9826-4>



15. Alexandrov S., Jeng Y-R., Lomakin E. Effect of Pressure-Dependency of the Yield Criterion on the Development of Plastic Zones and the Distribution of Residual Stresses in Thin Annular Disks // ASME Journal of Applied Mechanics. 2011. Vol. 78, iss. 3. P. 031012–1–031012–5. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4003361>

---

**Образец для цитирования:**

Ломакин Е. В., Минаев Н. Г. Осесимметричное поле напряжений вблизи кругового выреза в теле с зависящими от вида напряженного состояния пластическими свойствами // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 317–325. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-317-325>

---

## Axisymmetric Stress Field Near a Circular Cut in a Solid with Stress State Dependent Plastic Properties

E. V. Lomakin, N. G. Minaev

Evgeny V. Lomakin, <https://orcid.org/0000-0002-8716-5363>, Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia, [evlomakin@yandex.ru](mailto:evlomakin@yandex.ru)

Nikita G. Minaev, <https://orcid.org/0000-0002-6998-6344>, Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia, [nickita3@yandex.ru](mailto:nickita3@yandex.ru)

The paper analyzes the properties of the constitutive relations of the theory of plasticity for a continuum, which plastic properties depend on the type of stress state. The plasticity condition presented in the corresponding generalized form is used, where the parameter of the type of stress state is introduced, which is the ratio of the hydrostatic stress component to the equivalent von Mises stress, named in the literature the stress triaxiality. For a particular type of plasticity condition, an analytical solution of the problem for a solid with a circular hole under plane strain is obtained. The stress distributions corresponding to the obtained solution are compared with the ones for a solid whose plastic properties are invariant to the stress state using the Huber – Mises plasticity condition. The influence of the degree of sensitivity of materials properties to the type of stress state on the stress distributions in plastic areas are studied.

*Keywords:* plasticity theory, plane deformation, Coulomb – More criterion, plane with a circular cut.

Received: 19.05.2019 / Accepted: 16.06.2019 / Published: 31.08.2019

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects No. 17-01-00318, 17-51-52001).

### References

1. Drucker D. C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1952, vol. 10, no. 2, pp. 157–165.
2. Mohr O. Welche Umstände begingen die Elastizitätsgrenze und den bruch eines Materials? *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure*, 1900, vol. 44 (45), pp. 1524–1530.



3. Radaev Yu. N. Instantaneously not Elongated Directors in Three-dimensional Kinematics of the Coulomb – Mohr Medium. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 467–483 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-467-483>
4. Lomakin E. V. Dependence of the limit state of composite and polymer materials on the type of the stress state. 1. Experimental dependences and determining equations. *Mech Compos Mater*, 1988, vol. 24, iss. 1, pp. 1–7. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00611327>
5. Rudnicki J. W., Rice J. R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1975, vol. 23, iss. 6, pp. 371–394. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(75\)90001-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(75)90001-0)
6. Alexandrov S. Geometry of plane strain characteristic fields in pressure-dependent plasticity. *ZAMM: Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2015, vol. 95, iss. 11, pp. 1296–1301. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201400017>
7. Stavrogin A. N., Protosenya A. G. *Plastichnost' gornykh porod* [Plasticity of rocks]. Moscow, Nedra, 1979. 301 p. (in Russian).
8. Deshpande V. S., Fleck N. A. Isotropic constitutive models for metallic foams. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2000, vol. 48, iss. 6–7, pp. 1253–1283. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00082-4](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00082-4)
9. Green R. J. A plasticity theory for porous solids. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1972, vol. 14, iss. 4, pp. 215–224. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(72\)90063-X](https://doi.org/10.1016/0020-7403(72)90063-X)
10. Miller R. E. A continuum plasticity model for the constitutive and indentation behaviour of foamed metals. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2000, vol. 42, iss. 4, pp. 729–754. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(99\)00021-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00021-1)
11. Onck P. R. Application of a continuum constitutive model to metallic foam DEN-specimens in compression. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2001, vol. 43, iss. 12, pp. 2947–2959. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(01\)00060-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(01)00060-1)
12. Vatulyan A. O., Lyapin A. A., Kossovich E. L. Studying of Elastoplastic Properties of Coal Specimens Using Indentation Technique. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 412–420. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-412-420>
13. Seltzer R., Cisilino A. P., Frontini P. M., Yiu-Wing Mai Determination of the Drucker – Prager parameters of polymers exhibiting pressure-sensitive plastic behaviour by depth-sensing indentation. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2011, vol. 53, iss. 6, pp. 471–478. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.04.002>
14. Alexandrov S., Jeng Y-R., Lomakin E. An exact semi-analytic solution for residual stresses and strains within a thin hollow disc of pressure-sensitive material subject to thermal loading. *Meccanica*, 2014, vol. 49, iss. 4, pp. 775–794. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-013-9826-4>
15. Alexandrov S., Jeng Y-R., Lomakin E. Effect of Pressure-Dependency of the Yield Criterion on the Development of Plastic Zones and the Distribution of Residual Stresses in Thin Annular Disks. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 2011, vol. 78, iss. 3, pp. 031012–1–031012–5. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4003361>

---

**Cite this article as:**

Lomakin E. V., Minaev N. G. Axisymmetric Stress Field Near a Circular Cut in a Solid with Stress State Dependent Plastic Properties. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 3, pp. 317–325 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-317-325>

---



# ИНФОРМАТИКА

## A Method of Protected Distribution of Data Among Unreliable and Untrusted Nodes

Yu. V. Kosolapov, F. S. Pevnev

Yury V. Kosolapov, <https://orcid.org/0000-0002-1491-524X>, Institute of Mathematics, Mechanics, and Computer Science named after of I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia, [itaim@mail.ru](mailto:itaim@mail.ru)

Fedor S. Pevnev, Institute of Mathematics, Mechanics, and Computer Science named after of I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia, [fes\\_21@mail.ru](mailto:fes_21@mail.ru)

We consider a model of protecting the confidentiality and recoverability of data in a distributed storage system. It is assumed that informational blocks are coded into the code blocks. Then the blocks are divided into parts and distributed among repositories of the distributed storage. A modification of the code noising method is constructed which simultaneously provides computational resistance to coalition attacks on confidentiality of stored data. Moreover, the modification also provides protection from the failure of a part of the storage nodes. Confidentiality protection is provided for coalitions of greater cardinality than in the case of using the classical method of code noising. It is shown that computational resistance is based on the complexity of solving one well-known problem of theoretical coding.

*Keywords:* wiretap channel, distributed secure storage, coalition attack.

Received: 05.10.2018 / Accepted: 21.05.2019 /

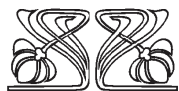
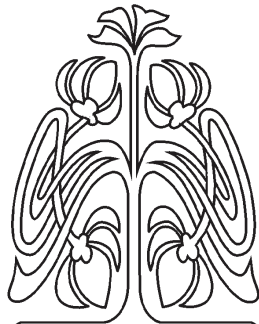
Published: 31.08.2019

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

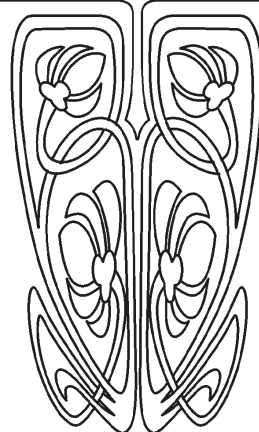
DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-326-337>

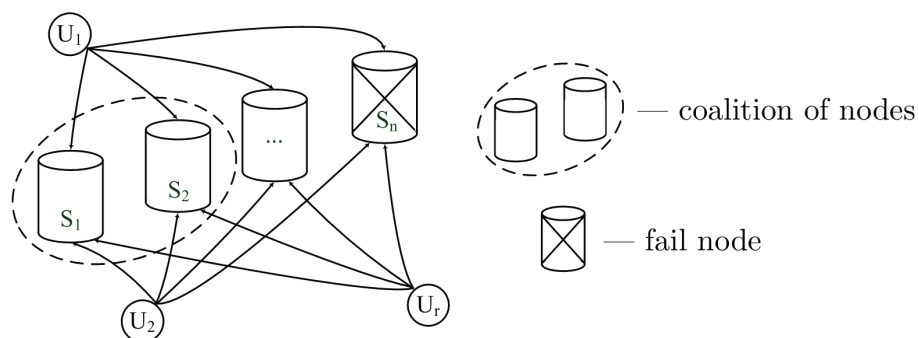
### INTRODUCTION

Let us consider a model of safe data storage on  $n$  independent and in general untrusted repositories  $S_1, \dots, S_n$  (Figure). Further these repositories are sometimes referred to as nodes. We consider cloud repositories like Google Drive,



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





The distributed storage system

Yandex.Disk, etc. to be such independent storages. The users are able to write their data into each of  $n$  repositories and read data from at least  $\nu (\in \mathbb{N})$  ones (inaccessible repositories are crossed out on the Figure). We assume that adversary coalition contains no more than  $\mu (\in \mathbb{N})$  repositories (referred to as participants of coalition) and are able to obtain data from each of them (coalition is marked with a dashed line on the Figure). The parameters  $n, \nu$  and  $\mu$  are known to everybody. The challenge for the developers of a protection system is choosing the transformation of protected data before distributing it among repositories. On the one hand, this transformation should provide confidentiality of protected data against coalition of cardinality  $\mu$  or less, on the other hand, it should provide a possibility of recovering the protected data when any  $n - \nu$  repositories are inaccessible. The coding method is considered to be not secret. We are interested in non-cryptographic methods, because in this case it is not necessary to support the life cycle of cryptographic keys.

The store model described above is actually the research subject of [1]. In [1] transformation of protected data is a *code noising* method (in terminology [2]) based on a pair of linear codes  $(\tilde{C}, C)$  where  $[n, l, \tilde{d}]$ -code  $\tilde{C}$  with length  $n$ , dimension  $l$ , and code distance  $\tilde{d}$  contains  $[n, l - k, d]$ -code  $C$ ,  $k < l$ . In [1] both codes are MDS-codes (Maximum Distance Separable codes). Code noising method is optimal for this store model if  $n - \nu \leq \tilde{d} - 1$  and

$$\mu \leq l - k \tag{1}$$

(see results in [3–6]). In this case the confidentiality is provided in theoretical-informational sense if protected data is uniformly random distributed. The pairs of MDS-codes are also optimal if availability of the data storage is limited [7], or if coalition has an access to an additional part of protected data [8]. Some experimental estimations of code noising resistance in distributed storage are explored in [9], but the observer has identified an attack algorithm in that case.

The article [10] considers a *repetitive interception attack* against the classical code noising method. It is assumed that the observer has the opportunity to notice several partial code blocks corresponding to *one* unknown informational block. In the article [10] it is also assumed that different code blocks are observed on different subsets of coordinates. The repetitive interception attack is successful if condition (1) is wrong [10]. Thus, in the distributed storage model the coalition of repositories is able to attack confidentiality effectively with the repetitive interception attack. This attack is possible if the system similar to one described in [1] is used and the condition (1) is wrong. We offer a modification of the code noising method which provides high resistance to repetitive interception even in case when condition (1) is wrong.



Our solution is based on the regular change of the coding map. Synchronization of the sender and the receiver is not required, however, the sender needs to additionally send the information about the mapping used. We use an approach usual in cryptography to estimate the resistance of proposed method. According to this method it is enough to reduce the task by breaking it into several (usually well-known) mathematical problems. In the present paper the resistance of the constructed method is based on the complexity of one theoretical coding problem.

The article consists of introduction, two sections, and conclusion. The first section describes an analytical model (data storage model), a code noising method and its modification. The second section analyzes the application of the constructed modified method in a distributed storage system. An estimate is obtained for the number of storages that may fail without affecting the possibility of correct recovering of informational blocks from uninjured repositories (nodes). Also the resistance of the modified method is analyzed for coalition attack.

## 1. DATA PROTECTION SCHEME

### 1.1. Analytical model

Let us briefly describe the data storage model proposed in [1]. Let  $i \in \{1, \dots, r\}$  and data from  $i$ -th source  $U_i$  be represented as informational blocks of  $k$  characters over a finite field  $\mathbb{F}_q$ . Each informational block is encoded independently into the code block of  $n$  characters from  $\mathbb{F}_q$  via encoder  $\text{Enc}$ . Then all  $n$  symbols of code block  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{F}_q^n$  are distributed in  $n$  repositories so that  $j$ -th symbol  $c_j$  is written to the repository with number  $\pi_i(j)$  (or equivalently to the node  $S_{\pi_i(j)}$ ) where

$$\pi_i : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

is a permutation. The users independently choose permutations (2) which are not private. We also assume that the users know the permutation  $\pi_i$  while they obtain information from repositories. The permutations may appear different from block to block or from file to file or other way.

To extract one informational block the user reads characters of the corresponding code block from the repositories and then puts the whole block into the decoder  $\text{Dec}$ . The value of  $\pi_i^{-1}(j)$ -th coordinate is unknown for the user if the repository  $S_j$  is inaccessible (e.g. due to failure or injury). In this case we consider this coordinate to be erased and write symbol  $*$  instead of its value. We assume that no more than  $n - \nu$  repositories may be inaccessible while the user is reading data. As the repositories are supposed to be untrusted, we consider every node to be an *eavesdropper* which knows a value of only one coordinate in every code block. Other coordinates are considered to be erased. The participants of coalition of  $\mu$  repositories will know values of  $\mu$  coordinates in every code block. This set of coordinates may be different from block to block because of different permutations conducted (2). Therefore, the coalition has the opportunity to launch a repetitive interception attack from [10] if the classical code noising method is used.

### 1.2. Classical code noising method

The code noising method is used in [1] for keeping data safety against adversary coalition and inaccessibility of the repositories at the same time. We can describe this method in the following way. Let  $\tilde{C}$  be a linear  $[n, l, \tilde{d}]$ -code with length  $n$ , dimen-



sion  $l$ , and code distance  $\tilde{d}$ ,  $\widehat{C}$  and  $C$  are  $[n, k]$ -code and  $[n, l - k]$ -code respectively,  $C \cap \widehat{C} = \mathbf{0} = (0, \dots, 0) (\in \mathbb{F}_q^n)$  and direct sum  $C \oplus \widehat{C}$  is equal to  $\widetilde{C}$ . Let  $\widehat{G}$  and  $G$  be generating matrices of codes  $\widehat{C}$  and  $C$  respectively. Code noising is the function  $f : \mathbb{F}_q^k \times \mathbb{F}_q^{l-k} \rightarrow \widetilde{C}$ ,

$$f(\mathbf{m}, \mathbf{r}) = \mathbf{m}\widehat{G} + \mathbf{r}G = \mathbf{c}$$

where  $\mathbf{m} (\in \mathbb{F}_q^k)$  is an informational block,  $\mathbf{r}$  is vector which is chosen randomly and equiprobably from  $\mathbb{F}_q^{l-k}$ . Let

$$\text{Dec}_{\widetilde{C}} : (\mathbb{F}_q \cup \{*\})^n \rightarrow \mathbb{F}_q^l$$

be a decoder which is able to correct no more than  $\tilde{d} - 1$  erasures in every code block and has vectors from  $\mathbb{F}_q^l$  as output. One can try to obtain the informational block from the block  $\mathbf{c}' \in (\mathbb{F}_q \cup \{*\})^n$  by applying the decoder  $\text{Dec}_{\widetilde{C}}$  to the  $\mathbf{c}'$  and cutting off the last  $l - k$  symbols of the decoder output.

Let us assume that every informational block  $\mathbf{m} (\in \mathbb{F}_q^k)$  has an equal probability  $p_M(\mathbf{m}) = 1/q^k$ , i.e. random variable  $M$  is uniformly distributed over  $\mathbb{F}_q^k$ . As we can see in [1, 4–6, 8] the resistance of the code noising method strongly depends on pair  $(\widetilde{C}, C)$ . In fact for every pair  $(\widetilde{C}, C)$  there exists a threshold  $\mu_0 (\in \mathbb{N})$  such that if the coalition (or eavesdropper) knows the values of no more than  $\mu_0$  coordinates of the code block it will not obtain any information about encoded informational block. Otherwise if  $\mu > \mu_0$  the eavesdropper can get non-zero information. In this case there is at least one set of observed coordinates  $\tau$  ( $|\tau| = \mu$ ) which does not provide the whole set of informational blocks as candidates to be original informational block, i.e. the size of the provided set of candidates is less than  $q^k$ . So the eavesdropper may attempt to use repetitive interception attack from [10]. For example, as it is shown in [1], if  $(\widetilde{C}, C)$  is a pair of MDS-codes then  $\mu_0 = l - k$  (see (1)) where  $l$  is rank of  $\widetilde{C}$  and  $n - k$  is rank of  $C$ . The eavesdropper can easily recover the informational block knowing few partially erased code blocks if  $\mu > \mu_0$  (see [10]). We propose a modification of the code noising method for counteracting a repetitive interception attack. We describe this modification in the next subsection. The defense ability will be described in subsection 2.

### 1.3. Modified code noising method

The main idea of the modified code noising method is periodic change of encoding functions in such way that the legal receiver can determine the exact encoding function using the received code blocks. Note that further the user is called a *legal receiver* if he or she has a permission to read data from the storage. At the same time an illegal eavesdropper cannot determine the exact function. Note that the idea of changing encoding functions is not new. The authors of [11] have used this idea creating the XtX encoding construction. They have assumed that the eavesdropper is able to obtain full data with errors (not erasures) and have analyzed properties of this construction such as code rate and security. The principal distinction of our scheme is using only one operation for providing security instead of two operations as in XtX construction.

We denote the set of numbers  $\{1, \dots, n\}$  as  $\underline{n}$ . Let the set  $\text{supp}(\mathbf{a}) = \{i : a_i \neq 0\}$  be a support of vector  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  and the number  $w(\mathbf{a}) = |\text{supp}(\mathbf{a})|$  be a weight of this vector. For positive integers  $n' \leq n$  the operator

$$\Pi_\tau : \mathbb{F}_q^n \rightarrow \mathbb{F}_q^{n'}$$





will be used as a projection operator on the set  $\tau(\subseteq \underline{n})$ . If  $\tau = \{i_1, \dots, i_{n'}\}$  and  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ , then  $\Pi_\tau(\mathbf{a}) = (a_{i_1}, \dots, a_{i_{n'}})$ . If  $A \subseteq \mathbb{F}_q^n$  is a set then its projection is denoted as a set  $\widehat{\Pi}_\tau(A) = \{\Pi_\tau(\mathbf{a}) : \mathbf{a} \in A\}$ . Let function  $\beta : \mathbb{F}_q^l \rightarrow \mathbb{F}_2^l$  be such that for  $\mathbf{a}$  from  $\mathbb{F}_q^l$ :

$$\beta(\mathbf{a}) = \mathbf{b}(\in \mathbb{F}_2^l) \text{ and } \text{supp}(\mathbf{a}) = \text{supp}(\mathbf{b}). \tag{3}$$

In order to generate matrix

$$\widetilde{G} = (\mathbf{e}_i)_{i=1}^l \tag{4}$$

of  $[n, l, \widetilde{d}]$ -code  $\widetilde{C}$  and for vector  $\mathbf{k}(\in \mathbb{F}_2^l)$  let us denote the submatrix of matrix (4) as  $G_{\mathbf{k}}$  so that  $G_{\mathbf{k}} = (\mathbf{e}_i)_{i \in \text{supp}(\mathbf{k})}$ . Random encoding parametrized with binary vector  $\mathbf{k} \in \mathbb{F}_2^l$  is a function  $g_{\mathbf{k}} : \mathbb{F}_q^{w(\mathbf{k})} \times \mathbb{F}_q^{l-w(\mathbf{k})} \rightarrow \widetilde{C}$  that

$$g_{\mathbf{k}}(\mathbf{m}, \mathbf{r}) = \mathbf{m}G_{\mathbf{k}} + \mathbf{r}G_{\overline{\mathbf{k}}} = \mathbf{c} \tag{5}$$

where  $\mathbf{m} \in \mathbb{F}_q^{w(\mathbf{k})}$ ,  $\mathbf{r}$  is chosen from  $\mathbb{F}_q^{l-w(\mathbf{k})}$  randomly and equiprobably,  $\overline{\mathbf{k}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{1} \in \mathbb{F}_2^l$  and  $w(\mathbf{1}) = l$ . Let  $\mathbf{c}'$  be a partially erased vector corresponding to the code block  $\mathbf{c}$  (see (5)). If  $\mathbf{k}$  is known then one can try to extract informational vector  $\mathbf{m}'$  with the next rule:

$$\mathbf{m}' = g_{\mathbf{k}}^{-1}(\mathbf{c}') = \Pi_{\text{supp}(\mathbf{k})}(\text{Dec}_{\widetilde{C}}(\mathbf{c}')). \tag{6}$$

The set of all possible functions  $g_{\mathbf{k}}$  for given  $\widetilde{G}$  we denote as  $\mathcal{G}(\widetilde{G})$ :

$$\mathcal{G}(\widetilde{G}) = \{g_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \mathbb{F}_2^l\}.$$

The legal sender (or the user who has a permission to write symbols of code blocks into distributed storage) chooses function  $g_{\mathbf{k}}$  randomly and equiprobably from  $\mathcal{G}(\widetilde{G})$ . With this assumption the legal receiver (the user who has a permission to read data from distributed storage) is not able to recover  $\mathbf{m}'$  uniquely with only one code block  $\mathbf{c}'$  because he or she has to know the set of coordinates in  $\text{Dec}_{\widetilde{C}}(\mathbf{c}')$  corresponding to the informational vector (see (6)). The legal receiver should know  $\mathbf{k}$  for recovering the informational block. We propose to put the information about vector  $\mathbf{k}$  into a package of  $\theta + 1$  code blocks,  $\theta \in \mathbb{N}$ . Note that it is usual for data storage systems to read and write data as packages of blocks rather than single blocks.

Let us consider how the legal sender forms  $t$ -th package,  $t \in \mathbb{N}$ . The data from the source are represented as packages of  $\theta$  blocks. The length of blocks may be different in different packages. At first, the sender gets vector  $\mathbf{k}(\in \mathbb{F}_2^l)$  randomly and equiprobably. This vector is matched with function  $g_{\mathbf{k}}$ . At the next step the sender represents the data as a sequence of  $\theta$  blocks with the length equal to  $w(\mathbf{k})$  so that  $t$ -th package  $\mathbf{M}_t$  of informational vectors is

$$\mathbf{M}_t = (\mathbf{m}_{t,1}, \dots, \mathbf{m}_{t,\theta}), \quad \mathbf{m}_{t,1} \in \mathbb{F}_q^{w(\mathbf{k})}.$$

The corresponding package of code blocks is

$$\mathbf{C}_t = (\mathbf{c}_{t,1}, \dots, \mathbf{c}_{t,\theta}, \mathbf{c}_{t,\theta+1}) \tag{7}$$

where  $\mathbf{c}_{t,p} = g_{\mathbf{k}}(\mathbf{m}_{t,p}, \mathbf{r}_{t,p})$  for  $p = 1, \dots, \theta$  and  $\mathbf{c}_{t,\theta+1} = g_{\mathbf{k}}(\mathbf{u}_t, \mathbf{0})$ ,  $\mathbf{0}$  is a zero vector,  $w(\mathbf{u}_t) = w(\mathbf{k})$ . Vector  $\mathbf{u}_t$  is chosen from the set of vectors with weight  $w(\mathbf{k})$  ( $\mathbf{u}_t \in \mathbb{F}_q^{w(\mathbf{k})}$ ) with probability equal to  $(q-1)^{-w(\mathbf{k})}$  for every vector. Let us denote encoding of  $\mathbf{M}_t$  as



$\text{Enc}(\mathbf{M}_t) = \mathbf{C}_t$ . The legal receiver can use the following way for extracting informational blocks from the packages. He or she should calculate vector  $\mathbf{k}' = \beta(\text{Dec}_{\tilde{C}}(\mathbf{c}'_{t,\theta+1}))$  and then find  $\mathbf{m}'_{t,p} = g_{\mathbf{k}'}^{-1}(\mathbf{c}'_{t,p})$ ,  $p = 1, \dots, \theta$ . We denote decoding of package  $\mathbf{C}'_t$  as  $\text{Dec}(\mathbf{C}'_t) = \mathbf{M}'_t = \{\mathbf{m}'_{t,1}, \dots, \mathbf{m}'_{t,\theta}\}$ . We denote constructed modification of the code noising method as  $(\mathcal{G}(\tilde{G}), \theta)$ -scheme.

For our method the code rate is equal to  $R_{\mathbf{k},\theta} = \frac{\theta w(\mathbf{k})}{(\theta+1)n} R$  for fixed  $\mathbf{k} (\in \mathbb{F}_2^l)$  where  $R = l/n$  is the code rate for code  $\tilde{C}$ . As vector  $\mathbf{k}$  is chosen randomly and equiprobably, the expected value  $R_\theta$  of code rate is

$$R_\theta = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{F}_2^l} \frac{\theta w(\mathbf{k})}{(\theta+1)n2^l} R = \frac{\theta}{(\theta+1)n2^l} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{F}_2^l} w(\mathbf{k}) R = \frac{\theta}{2(\theta+1)} R \tag{8}$$

as  $\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{F}_2^l} w(\mathbf{k}) = n2^{l-1}$ . Note that  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} R_\theta = 0,5R$ .

Let us denote the set  $\mathcal{G}(\tilde{G})_{h_1,h_2} = \{g_{\mathbf{k}} : h_1 \leq w(\mathbf{k}) \leq h_2\}$  for  $h_1, h_2 \in \{0, \dots, l\}$ ,  $h_2 \geq h_1$ . One may use this set if it is necessary to increase the code rate  $R_\theta$ , for example. Note that  $\mathcal{G}(\tilde{G}) = \mathcal{G}(\tilde{G})_{0,l}$ . In the next section the  $(\mathcal{G}(\tilde{G}), \theta)$ -scheme is analyzed for resistance against failure of  $n - \nu$  repositories and coalition of  $\mu$  participants (recall that here the length  $n$  of code block is equal to the number of repositories). It is easy to generalize the results represented in the next section if  $(\mathcal{G}(\tilde{G})_{h_1,h_2}, \theta)$ -scheme is used instead of  $\mathcal{G}(\tilde{G})$ .

## 2. ANALYSIS AND APPLICATION OF $(\mathcal{G}(\tilde{G}), \theta)$ -SCHEME

### 2.1. Defense against unreliable nodes

**Theorem 1.** *Let  $\tilde{C}$  be a  $[n, l, \tilde{d}]$ -code generating matrix  $\tilde{G}$ , and package  $\mathbf{C}_t = \text{Enc}(\mathbf{M}_t)$  be an output of  $(\mathcal{G}(\tilde{G}), \theta)$ -scheme using function  $g_{\mathbf{k}}$ ,  $\mathbf{C}'_t = (\mathbf{c}'_{t,1}, \dots, \mathbf{c}'_{t,\theta+1})$  is the corresponding package of partially erased code blocks. If every block  $\mathbf{c}'_{t,p}$ ,  $p = 1, \dots, \theta + 1$  has no more than  $\tilde{d} - 1$  erasures, then  $\text{Dec}(\mathbf{C}'_t) = \mathbf{M}_t$ .*

**Proof.** By condition,  $\tilde{d}$  is code distance of code  $\mathcal{C}$  and there are no more than  $\tilde{d} - 1$  erasures in every code block. Then  $\beta(\text{Dec}_{\tilde{C}}(\mathbf{c}'_{t,\theta+1})) = \mathbf{k}$ . According to condition of the theorem,  $g_{\mathbf{k}}^{-1}(\mathbf{c}'_{t,p}) = \mathbf{m}_{t,p}$  for  $p = 1, \dots, \theta$ . □

Theorem 1 allows us to get limit on number  $n - \nu$  of unreliable nodes when these nodes may be inaccessible but  $(\mathcal{G}(\tilde{G}), \theta)$ -scheme provides the recovery of information. Exactly,  $n - \nu \leq \tilde{d} - 1$  where  $\tilde{d}$  is the code distance of  $\tilde{C}$ .

### 2.2. Defense against coalition of untrusted nodes

If the coalition (or eavesdropper) knows function  $g_{\mathbf{k}}$  then the resistance of the modified code noising method does not exceed the resistance of classical code noising based on the pair  $(\tilde{C}, \mathcal{L}(G_{\mathbf{k}}))$  where  $\mathcal{L}(A)$  is a linear subspace with rows of matrix  $A$  as its basis. In other words if adversary knows  $\mathbf{k}$  he or she will be able to attack with all known ways, e.g. attack on repetitive messages. Further we presume that the next hypothesis is right.

**Hypothesis 1.** *If someone wants to get any information about data in package (7) he or she should obtain information about function  $g_{\mathbf{k}}$  which was used while package encoding.*



Let  $K$  be a vector chosen randomly and equiprobably from  $\mathbb{F}_2^l$ ,  $U$  be a random vector with distribution

$$p_U(\mathbf{u}) = \frac{1}{2^{l(q-1)w(\mathbf{u})}} \tag{9}$$

on  $\mathbb{F}_q^l$ . Obviously, random vectors  $K$  and  $\beta(U)$  have the same distributions. Let us consider for a fixed  $\mathbf{k}$  the random vector

$$C^{\mathbf{k}} = g_{\mathbf{k}}(M^{(w(\mathbf{k}))}, R^{(l-w(\mathbf{k}))}),$$

where  $M^{(w(\mathbf{k}))}$  and  $R^{(l-w(\mathbf{k}))}$  are random vectors distributed uniformly over  $\mathbb{F}_q^{w(\mathbf{k})}$  and  $\mathbb{F}_q^{l-w(\mathbf{k})}$  respectively. Note that random vector  $C^{\mathbf{k}}$  has uniform distribution over  $\tilde{C}$  for any  $\mathbf{k}$ . Let  $H(K)$  and  $H(K|C^{\mathbf{k}})$  be an entropy of a random vector  $K$  and conditional entropy of a random vector  $K$  on condition  $C^{\mathbf{k}}$  respectively:

$$H(K) = - \sum_{\chi \in \mathbb{F}_2^l} p_K(\chi) \log_2(p_K(\chi)) = l,$$

$$H(K|C^{\mathbf{k}}) = - \sum_{\chi \in \mathbb{F}_2^l} \sum_{\mathbf{c} \in \tilde{C}} p_{(K, C^{\mathbf{k}})}(\chi, \mathbf{c}) \log_2(p_{K|C^{\mathbf{k}}}(\chi|\mathbf{c})).$$

If  $C^{\mathbf{k}} = \mathbf{c} (\in \tilde{C})$ , there is no way to choose a correct function from  $\mathcal{G}(\tilde{G})$  using only decoded value  $\text{Dec}_{\tilde{C}}(\mathbf{c})$  because vectors  $M^{(w(\mathbf{k}))}$ ,  $R^{(l-w(\mathbf{k}))}$ , and  $K$  are distributed uniformly. Thus  $H(K|C^{\mathbf{k}}) = l$  and the mutual information  $I(K; C^{\mathbf{k}})$  is equal to zero:

$$I(K; C^{\mathbf{k}}) = H(K) - H(K|C^{\mathbf{k}}) = 0.$$

Moreover, it is not hard to check that  $I(K; (C_1^{\mathbf{k}}, \dots, C_{\theta}^{\mathbf{k}})) = 0$  for  $\theta$  copies  $C_1^{\mathbf{k}}, \dots, C_{\theta}^{\mathbf{k}}$  of a random vector  $C^{\mathbf{k}}$ .

Let us consider the random vectors  $C_1, \dots, C_{\theta}$ ,  $X = U\tilde{G}$ ,  $C_p = C_p^{\beta(\mathbf{u})}$  if  $U = \mathbf{u}$ ,  $p = 1, \dots, \theta$ , where  $U$  is a random vector with distribution (9). Let  $\tau (\subseteq \underline{n})$  be a set of observed coordinates (or the numbers of repositories from the coalition) with cardinality  $|\tau| = \mu$  and  $Z_1, \dots, Z_{\theta}$ ,  $Y$  be random vectors,  $Z_p = \Pi_{\tau}(C_p)$ ,  $p = 1, \dots, \theta$ ,  $Y = \Pi_{\tau}(X)$ . It is not hard to check the next chain of equalities:

$$\begin{aligned} \Pr\{\beta(U) = \mathbf{k} | Z_1 = \mathbf{z}_1, \dots, Z_{\theta} = \mathbf{z}_{\theta}, Y = \mathbf{y}\} &= \frac{\Pr\{\beta(U) = \mathbf{k}, Z_1 = \mathbf{z}_1, \dots, Z_{\theta} = \mathbf{z}_{\theta}, Y = \mathbf{y}\}}{\Pr\{Z_1 = \mathbf{z}_1, \dots, Z_{\theta} = \mathbf{z}_{\theta}, Y = \mathbf{y}\}} = \\ &= \frac{\Pr\{\beta(U) = \mathbf{k}, Z_1 = \mathbf{z}_1, \dots, Z_{\theta} = \mathbf{z}_{\theta}\} \Pr\{Y = \mathbf{y} | \beta(U) = \mathbf{k}, Z_1 = \mathbf{z}_1, \dots, Z_{\theta} = \mathbf{z}_{\theta}\}}{\Pr\{Z_1 = \mathbf{z}_1, \dots, Z_{\theta} = \mathbf{z}_{\theta}, Y = \mathbf{y}\}} = \\ &= \frac{\Pr\{\beta(U) = \mathbf{k}\} \Pr\{Z_1 = \mathbf{z}_1, \dots, Z_{\theta} = \mathbf{z}_{\theta} | \beta(U) = \mathbf{k}\} \Pr\{Y = \mathbf{y} | \beta(U) = \mathbf{k}, Z_1 = \mathbf{z}_1, \dots, Z_{\theta} = \mathbf{z}_{\theta}\}}{\Pr\{Z_1 = \mathbf{z}_1, \dots, Z_{\theta} = \mathbf{z}_{\theta}\} \Pr\{Y = \mathbf{y} | Z_1 = \mathbf{z}_1, \dots, Z_{\theta} = \mathbf{z}_{\theta}\}} = \\ &= \frac{\Pr\{\beta(U) = \mathbf{k}\} \Pr\{Y = \mathbf{y} | \beta(U) = \mathbf{k}\}}{\Pr\{Y = \mathbf{y}\}} = \Pr\{\beta(U) = \mathbf{k} | Y = \mathbf{y}\} = \Pr\{K = \mathbf{k} | Y = \mathbf{y}\}, \end{aligned}$$

for every  $\mathbf{k} \in \mathbb{F}_2^k$ ,  $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{\theta}, \mathbf{y} \in \Pi_{\tau}(\tilde{C})$ . Thus,  $H(K|Z_1, \dots, Z_{\theta}, Y) = H(K|Y)$  and

$$I(K; (Z_1, \dots, Z_{\theta}, Y)) = H(K) - H(K|Y) = I(K; Y) = l - H(K|Y), \tag{10}$$

because  $K$  is equiprobable. For every  $\mathbf{k} \in \mathbb{F}_2^l$  we denote  $B(\mathbf{k}) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^l : \beta(\mathbf{u}) = \mathbf{k}\}$ . Let  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\tau \subseteq \underline{n}$ ,  $\mathbf{y}$  be the implementation of a random vector  $\mathbf{Y} = \Pi_{\tau}(\mathbf{X})$ . Consider the the system of equations

$$\mathbf{u} \Pi_{\tau}(\tilde{G}) = \mathbf{y} \tag{11}$$

where  $\mathbf{u}$  is unknown. The set of solutions of this system denote  $\Gamma(\mathbf{y})$ .



**Lemma 1.** Let  $\hat{\beta}(\Gamma(\mathbf{y})) = \{\beta(\mathbf{g}) : \mathbf{g} \in \Gamma(\mathbf{y})\}$ . Then

$$H(K|Y = \mathbf{y}) \leq \log_2 |\hat{\beta}(\Gamma(\mathbf{y}))| \leq \min\{(l - \text{rank}(\Pi_\tau(\tilde{G}))) \log_2 q; l\}.$$

**Proof.** Note that  $p_{U|Y}(\mathbf{u}|\mathbf{y}) = 0$  if  $\mathbf{u} \notin \Gamma(\mathbf{y})$ . Then

$$\begin{aligned} p_{K|Y}(\mathbf{k}|\mathbf{y}) &= \sum_{\mathbf{u} \in B(\mathbf{k})} p_{U|Y}(\mathbf{u}|\mathbf{y}) = \\ &= \sum_{\mathbf{u} \in B(\mathbf{k}) \cap \Gamma(\mathbf{y})} \frac{p_U(\mathbf{u})}{\sum_{\mathbf{u}' \in \Gamma(\mathbf{y})} p_U(\mathbf{u}')} = \frac{\sum_{\mathbf{u} \in B(\mathbf{k}) \cap \Gamma(\mathbf{y})} 2^{-l}(q-1)^{-w(\mathbf{u})}}{\sum_{\mathbf{u}' \in \Gamma(\mathbf{y})} 2^{-l}(q-1)^{-w(\mathbf{u}')}} = \\ &= \frac{\sum_{\mathbf{u} \in B(\mathbf{k}) \cap \Gamma(\mathbf{y})} (q-1)^{-w(\mathbf{u})}}{\sum_{\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{y})} (q-1)^{-w(\mathbf{u})}} = \frac{|B(\mathbf{k}) \cap \Gamma(\mathbf{y})|}{\sum_{\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{y})} (q-1)^{w(\mathbf{k})-w(\mathbf{u})}}. \end{aligned} \tag{12}$$

It is obvious that

$$p_{K|Y}(\mathbf{k}|\mathbf{y}) \neq 0 \Leftrightarrow B(\mathbf{k}) \cap \Gamma(\mathbf{y}) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathbf{k} \in \hat{\beta}(\Gamma(\mathbf{y})),$$

then

$$\begin{aligned} H(K|Y = \mathbf{y}) &= - \sum_{\mathbf{k} \in \hat{\beta}(\Gamma(\mathbf{y}))} p_{K|Y}(\mathbf{k}|\mathbf{y}) \log_2(p_{K|Y}(\mathbf{k}|\mathbf{y})) = \\ &= - \sum_{\mathbf{k} \in \hat{\beta}(\Gamma(\mathbf{y}))} \frac{|B(\mathbf{k}) \cap \Gamma(\mathbf{y})|}{\sum_{\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{y})} (q-1)^{w(\mathbf{k})-w(\mathbf{u})}} \log_2\left(\frac{|B(\mathbf{k}) \cap \Gamma(\mathbf{y})|}{\sum_{\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{y})} (q-1)^{w(\mathbf{k})-w(\mathbf{u})}}\right) \leq \log_2 |\hat{\beta}(\Gamma(\mathbf{y}))|, \end{aligned}$$

because  $\log_2 |\hat{\beta}(\Gamma(\mathbf{y}))|$  is the entropy of uniformly distributed  $K$  for a given  $\mathbf{y}$ . Estimate of  $\log_2 |\hat{\beta}(\Gamma(\mathbf{y}))|$  is also right because there are only  $2^l$  possible variants of vector  $\mathbf{k}(\in \mathbb{F}_2^l)$ , on the one hand, and equation (11) has  $q^{l-\text{rank}(\Pi_\tau(\tilde{G}))}$  solutions, on the other hand.  $\square$

Let  $B(\mathbf{k}, \mathbf{y}) = B(\mathbf{k}) \cap \Gamma(\mathbf{y})$  and for  $i \in \{0, \dots, l\}$  define  $A_i(\Gamma(\mathbf{y})) = \sum_{\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{y})} (q-1)^{i-w(\mathbf{u})}$ . Then from (12) we get  $p_{K|Y}(\mathbf{k}|\mathbf{y}) = \frac{|B(\mathbf{k}, \mathbf{y})|}{A_{w(\mathbf{k})}(\Gamma(\mathbf{y}))}$ ,

$$\begin{aligned} H(K|Y = \mathbf{y}) &= - \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{F}_2^l} p_{K|Y}(\mathbf{k}|\mathbf{y}) \log_2 p_{K|Y}(\mathbf{k}|\mathbf{y}) = - \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{F}_2^l} \frac{|B(\mathbf{k}, \mathbf{y})|}{A_{w(\mathbf{k})}(\Gamma(\mathbf{y}))} \log_2 \left( \frac{|B(\mathbf{k}, \mathbf{y})|}{A_{w(\mathbf{k})}(\Gamma(\mathbf{y}))} \right) = \\ &= - \sum_{i=0}^l \frac{1}{A_i(\Gamma(\mathbf{y}))} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{F}_2^l : w(\mathbf{k})=i} |B(\mathbf{k}, \mathbf{y})| \log_2 \left( \frac{|B(\mathbf{k}, \mathbf{y})|}{A_i(\Gamma(\mathbf{y}))} \right) = \\ &= - \sum_{i=0}^l \frac{1}{A_i(\Gamma(\mathbf{y}))} \left[ \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{F}_2^l : w(\mathbf{k})=i} |B(\mathbf{k}, \mathbf{y})| (\log_2(|B(\mathbf{k}, \mathbf{y})|) - \log_2(A_i(\Gamma(\mathbf{y})))) \right] = \\ &= - \sum_{i=0}^l \frac{1}{A_i(\Gamma(\mathbf{y}))} \left[ \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{F}_2^l : w(\mathbf{k})=i} |B(\mathbf{k}, \mathbf{y})| \log_2(|B(\mathbf{k}, \mathbf{y})|) - \log_2(A_i(\Gamma(\mathbf{y}))) \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{F}_2^l : w(\mathbf{k})=i} |B(\mathbf{k}, \mathbf{y})| \right] = \\ &= - \sum_{i=0}^l \frac{1}{A_i(\Gamma(\mathbf{y}))} \left[ \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{F}_2^l : w(\mathbf{k})=i} |B(\mathbf{k}, \mathbf{y})| \log_2(|B(\mathbf{k}, \mathbf{y})|) - N_i(\Gamma(\mathbf{y})) \log_2(A_i(\Gamma(\mathbf{y}))) \right], \end{aligned}$$



where  $N_i(\Gamma(\mathbf{y})) = |\{\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{y}) : w(\mathbf{u}) = i\}|$ . Thus, if  $q \neq 2$ , then calculation of  $H(K|Y = \mathbf{y})$  and  $I(K; Y)$  seems to be a hard challenge. Because two or more different solutions of the system (11) can correspond to one binary vector  $\mathbf{k}$  if their supports are the same. Next theorem calculates  $I(K; Y)$  for  $q = 2$ .

**Theorem 2.** *Let  $q = 2$ ,  $\tau \subseteq \underline{n}$ , then  $I(K; Y) = \text{rank}(\Pi_\tau(\tilde{G}))$  for  $(\mathcal{G}(\tilde{G}), \theta)$ -scheme.*

**Proof.** As  $q = 2$  then  $|B(\mathbf{k})| = 1$  and  $\Gamma(\mathbf{y}) = \hat{\beta}(\Gamma(\mathbf{y}))$ , because different binary vectors have different supports. If  $\mathbf{y}$  is fixed, then using Lemma 1 for  $\mathbf{k} \in \Gamma(\mathbf{y})$  we have:

$$p_{K|Y}(\mathbf{k}|\mathbf{y}) = \frac{|B(\mathbf{k}) \cap \Gamma(\mathbf{y})|}{\sum_{\mathbf{u} \in \Gamma(\mathbf{y})} (2-1)^{w(\mathbf{k})-w(\mathbf{u})}} = \frac{1}{|\Gamma(\mathbf{y})|},$$

$$H(K|Y = \mathbf{y}) = - \sum_{\mathbf{k} \in \Gamma(\mathbf{y})} \frac{1}{|\Gamma(\mathbf{y})|} \log_2\left(\frac{1}{|\Gamma(\mathbf{y})|}\right) = \log_2 |\Gamma(\mathbf{y})|.$$

As  $|\Gamma(\mathbf{y})| = 2^{l-\text{rank}(\Pi_\tau(\tilde{G}))}$ , then  $H(K|Y) = H(K|Y = \mathbf{y}) = l - \text{rank}(\Pi_\tau(\tilde{G}))$ . The last step is the substitution of the value of  $H(K|Y)$  into (10).  $\square$

It follows from (10) and Lemma 1 that obtaining information  $I(K; (Z_1, \dots, Z_\theta, Y = \mathbf{y})) = I(K; Y = \mathbf{y})$  is strongly related with constructing  $\Gamma(\mathbf{y})$  as the set of solutions of the system (11). As  $|\Gamma(\mathbf{y})| = 2^{l-\text{rank}(\Pi_\tau(\tilde{G}))}$ , this task can be challenging in selecting parameters of the scheme. In general, if  $(\mathcal{G}(\tilde{G})_{h_1, h_2}, \theta)$  is used, then

$$I(K; Y = \mathbf{y}) \geq \log_2(|\mathcal{G}(\tilde{G})_{h_1, h_2}|) - \log_2(\hat{\beta}(\Gamma(\mathbf{y})) \cap \{\mathbf{k} \in \mathbb{F}_2^l : h_1 \leq w(\mathbf{k}) \leq h_2\}).$$

The complexity of obtaining this information seems to be equivalent to the complexity of making the set

$$\hat{\beta}(\Gamma(\mathbf{y})) \cap \{\mathbf{k} \in \mathbb{F}_2^l : h_1 \leq w(\mathbf{k}) \leq h_2\}.$$

To make this set it is necessary either to construct the set  $\Gamma(\mathbf{y})$  or to look over all possible vectors from  $\mathbb{F}_2^l$ , then choose vectors with weight in range  $[h_1, h_2]$  only and check if these vectors are solutions of the system (11). Furthermore, if  $|\mathcal{G}(\tilde{G})_{h_1, h_2}|$  is small, the eavesdropper is able to check *all* functions from  $\mathcal{G}(\tilde{G})_{h_1, h_2}$ . Thus, the computational complexity of obtaining information *about package of informational blocks* (when Hypothesis 1 is right) is not less than

$$\mathcal{O}\left(\min\left\{|\mathcal{G}(\tilde{G})_{h_1, h_2}|, |\Gamma(\mathbf{y})|\right\}\right), \tag{13}$$

where  $\mathcal{O}(|\mathcal{G}(\tilde{G})_{h_1, h_2}|)$  is the complexity of brute force over all functions from  $\mathcal{G}(\tilde{G})_{h_1, h_2}$  and  $\mathcal{O}(|\Gamma(\mathbf{y})|)$  is the complexity of making the set  $\Gamma(\mathbf{y})$ .

Note that for  $q = 2$  obtaining full information even about the *length* of informational blocks by package (7) is a severe challenge. Consider the general case when  $\mathcal{G}(\tilde{G})_{h_1, h_2}$ -scheme is used. Actually the eavesdropper will get non-zero information about the length only if there is at least one number  $l' \in \{h_1, \dots, h_2\}$  such that there is not any vector with weight  $l'$  in  $\Gamma(\mathbf{y})$ . The complexity of obtaining information about the length on conditions  $\mu < l$  and  $\text{rank}(\Pi_\tau(\tilde{G})) = \mu$  may be reduced to one task in the coding theory. Namely, the matrix  $\Pi_\tau(\tilde{G})$  may be considered as a transposed parity-check matrix of



some  $[l, l - \mu]$ -code. Let vector  $\mathbf{y}$ , number  $w \in \{h_1, \dots, h_2\}$ , and transposed parity-check matrix  $\Pi_\tau(\tilde{G})$  be preassigned. The task of finding vector  $\mathbf{u}$  with weight *no more than*  $w$  on condition (11) is NP-complete [12]. If  $(\mathcal{G}(\tilde{G})_{h_1, h_2}, \theta)$ -scheme is used, then obtaining non-zero information about the length of message is equivalent to finding out that there is no vector  $\mathbf{u}$  with weight *exactly*  $w$  on condition (11). We do not know any polynomial algorithm for resolving the latter task. Note that in binary case this problem is also NP-complete [13].

Thus, according to Hypothesis 1 the resistance of the modified code noising method to known attacks, particularly to the repetitive interception attack, is based on the fact that it may be difficult (depending on the parameters) for the coalition to obtain information about the mapping used. It should be noted that to increase resistance to repetitive interception attack it is also recommended to use small value of the parameter  $\theta$ . In this case the probability of the appearance of code blocks, corresponding to one informational block with the same mapping, is reducing. If  $\theta = 1$ , then the level of defense is maximal in this sense, but code rate  $R_\theta = 0,25$  is minimal.

We assume above that number of repositories is equal to the length of code block. It is practically unreal if length of code block is huge. But proposed  $(\mathcal{G}(\tilde{G}), \theta)$ -scheme may be easily adopted for a smaller number of repositories. If  $N$  is the length of code block and  $n$  is the number of repositories ( $n < N$ ), then we should write no more  $\lceil N/n \rceil$  code symbols into every repository. In this case coalition with  $\mu$  repositories knows no more than  $\mu \lceil N/n \rceil$  symbols of every code block, and inaccessibility of  $n - \nu$  repositories is equivalent to erasure of  $(n - \nu) \lceil N/n \rceil$  symbols of every code block.

### 2.3. An example of $(\mathcal{G}(\tilde{G}), \theta)$ -scheme application

Let  $\tilde{C}$  be a  $[255, 200, 56]$  Reed – Solomon code over  $\mathbb{F}_{2^8}$ ,  $q = 2^8$ . The table contains the comparison of characteristics of  $(\mathcal{G}(\tilde{G}), \theta)$ -scheme and the classical code noising method based on pair  $(\tilde{C}, C)$  if  $C$  is  $[255, 150, 106]$  Reed – Solomon code. Code rate of a pair-based code noising method is  $50/255 \approx 0.196$  and theoretical-informational resistance is achieved if coalition knows no more than 150 symbols of code block [1]. For  $(\mathcal{G}(\tilde{G}), \theta)$ -scheme code rate is equal to 0.196 if  $\theta = 1$  and is about 0.392 if  $\theta \geq 1000$ .

Maximal allowable size  $\mu$  of coalition for  $(\mathcal{G}(\tilde{G}), \theta)$ -scheme is calculated on condition that complexity (13) should be not less than  $2^{128}$ ; it corresponds to high level of resistance according to [14]. Note that estimation (13) for this example takes the form  $\mathcal{O}(\min\{2^{200}, |\Gamma(\mathbf{y})|\})$ . For any different sets  $\tau_1$  and  $\tau_2$

Comparison of characteristics of  $(\mathcal{G}(\tilde{G}), \theta)$ -scheme and  $(\tilde{C}, C)$ -pair

Number of repositories, $n$	3	5	17
length of a part, $\lceil N/n \rceil$	85	51	15
max. value $n - \nu$	0	1	3
max. value $\mu$ for $(\mathcal{G}(\tilde{G}), \theta)$	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>12</b>
max. value $\mu$ for $(\tilde{C}, C)$	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>10</b>

of the same cardinality for generating matrix of Reed – Solomon code we have  $\text{rank}(\Pi_{\tau_1}(\tilde{G})) = \text{rank}(\Pi_{\tau_2}(\tilde{G}))$ . Then for security reason the allowed maximal number  $x$  of symbols observed by the coalition in each code block can be obtained from inequality  $2^{8(200-x)} \geq 2^{128}$ ; so, we have  $x \leq 184$ . Note that each repository knows only  $\lceil \frac{255}{n} \rceil$  symbols of each code block where  $n$  is a number of repositories,  $n \in \{3, 5, 17\}$ . As we can see from the table, the modified method provides defense against a bigger coalition. In particular, in case of using three repositories the modified code noising method provides



computational resistance even in the case when two of the three participants have united in the coalition. At the same time the classical code noising method provides resistance only in the case of the coalition consisting of one participant.

## CONCLUSION

Usually the core of the resistance of modern methods of data confidentiality protection is a certain mathematical problem with a computationally complex solution if particular “secret” is unknown. In this paper, a non-cryptographic method for protecting data confidentiality is constructed based on the use of special data coding and distribution of parts of the encoded data among the nodes of the distributed storage. In this case the “secret” is replaced with the assumption that the observer (i.e. node coalition) cannot get data from all nodes of the distributed storage. The paper shows that the complexity of recovering the protected data by coalition is not less than the complexity of solving the theoretical coding problem of finding all weights of vectors with a given syndrome. The computations lead to the conclusion that the constructed method can provide protection from coalitions of more cardinality than the classical code noising method, and provides not less protection from the failure of storage nodes.

## References

1. Subramanian A., McLaughlin S. W. MDS codes on the erasure-erasure wiretap channel. *arXiv:0902.3286 [cs.IT]*, 2009.
2. Korzhik V., Yakovlev V. Nonasymptotic estimates of information protection efficiency for the wire-tap channel concept. In: *Seberry J., Zheng Y. (eds.). Advances in Cryptology – AUSCRYPT '92. AUSCRYPT 1992. Lecture Notes in Computer Science*, 1993, vol. 718, pp. 183–195. DOI: [https://doi.org/10.1007/3-540-57220-1\\_61](https://doi.org/10.1007/3-540-57220-1_61)
3. Ozarov L. H., Wyner A. D. Wire-Tap Channel II. In: *Beth T., Cot N., Ingemarsson I. (eds.). Advances in Cryptology. EUROCRYPT 1984. Lecture Notes in Computer Science*, 1984, vol. 209, pp. 33–55. DOI: [https://doi.org/10.1007/3-540-39757-4\\_5](https://doi.org/10.1007/3-540-39757-4_5)
4. Wei V. K. Generalized Hamming Weights for Linear Codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1991, vol. 37, no. 5, pp. 1412–1418. DOI: <https://doi.org/10.1109/18.135655>
5. Forney G. D. Dimension/Length Profiles and Trellis Complexity of Linear Block Codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1994, vol. 40, no. 6, pp. 1741–1752. DOI: <https://doi.org/10.1109/18.340452>
6. Luo Y., Mitropant C., Hav Vinck A. J., Chen K. Some New characters on the wire-tap channel of type II. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2005, vol. 51, no. 3, pp. 1222–1229. DOI: <https://doi.org/10.1109/TIT.2004.842763>
7. Hu P., Sung C. W., Ho S.-W., Chan T. H. Optimal Coding and Allocation for Perfect Secrecy in Multiple Clouds. *IEEE Transactions on Information Forensics and Security*, 2016, vol. 11, no. 2, pp. 388–399. DOI: <https://doi.org/10.1109/TIFS.2015.2500193>
8. Kosolapov Yu. V. Codes for a generalized wire-tap channel model. *Problems of Information Transmission*, 2015, vol. 51, no. 1, pp. 20–24. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0032946015010020>
9. Kosolapov Yu. V., Pozdnyakov A. V. Evaluation of resistance of code noising in the distributed data storage. *Systems and Means of Informatics*, 2015, vol. 25, no. 4, pp. 158–174 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.14357/08696527150412>
10. Gazaryan Yu. O., Kosolapov Yu. V. On the experimental estimation of the lower bound for the maximum number of messages in a scheme aimed at data protection against spoofing. *Computational Technologies*, 2015, vol. 20, no. 6, pp. 5–21 (in Russian).
11. Bellare M., Tessaro S., Vardy A. A Cryptographic Treatment of the Wiretap Channel. *arXiv:1201.2205 [cs.IT]*, 2012.



12. Barg S. Some new NP-complete coding problems. *Problems of Information Transmission*, 1994, vol. 30, no. 3, pp. 209–214.
13. Sendrier N., Simos D. E. The Hardness of Code Equivalence over  $\mathbb{F}_q$  and Its Application to Code-Based Cryptography. In: *Gaborit P. (eds.). Post-Quantum Cryptography. PQCrypto 2013. Lecture Notes in Computer Science*, 2013, vol. 7932, pp. 203–216.
14. Lenstra A. K., Verheul E. R. Selecting Cryptographic Key Sizes. *J. Cryptology*, 2001, vol. 14, pp. 255–293. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00145-001-0009-4>

---

**Cite this article as:**

Kosolapov Yu. V., Pevnev F. S. A Method of Protected Distribution of Data Among Unreliable and Untrusted Nodes. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 3, pp. 326–337. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-326-337>

---

УДК 621.391.7

## **Метод защищенного распределения данных среди ненадежных и недоверенных узлов**

**Ю. В. Косолапов, Ф. С. Певнев**

Косолапов Юрий Владимирович, кандидат технических наук, доцент, Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а, [itaim@mail.ru](mailto:itaim@mail.ru)

Певнев Федор Сергеевич, магистрант, Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а, [fes\\_21@mail.ru](mailto:fes_21@mail.ru)

В работе рассматривается модель защиты конфиденциальности и целостности данных в системе распределенного хранения. Предполагается, что информационные блоки кодируются в кодовые блоки, которые затем разделяются на части и распределяются среди узлов хранения распределенного хранилища. В качестве способа кодирования построена модификация метода кодового зашумления, которая одновременно обеспечивает вычислительную стойкость к коалиционным атакам на конфиденциальность хранимых данных, а также обеспечивает защиту от выхода из строя части узлов хранения. При этом защита конфиденциальности обеспечивается для коалиций большей мощности, чем в случае применения классического метода кодового зашумления. Вычислительная стойкость основана на сложности решения одной теоретико-кодовой задачи.

*Ключевые слова:* канал с перехватом, защищенное распределенное хранилище, коалиционные атаки.

Поступила в редакцию: 05.10.2018 / Принята: 21.05.2019 / Опубликовано: 31.08.2019

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

---

**Образец для цитирования:**

*Kosolapov Yu. V., Pevnev F. S. A Method of Protected Distribution of Data Among Unreliable and Untrusted Nodes [Косолапов Ю. В., Певнев Ф. С. Метод защищенного распределения данных среди ненадежных и недоверенных узлов] // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 326–337. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-326-337>*

---





УДК 501.1

## Классификация и распознавание структур генетических последовательностей

**В. А. Твердохлебов, Д. А. Карякин**

Твердохлебов Владимир Александрович, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24, [tverdokhlebovva@list.ru](mailto:tverdokhlebovva@list.ru)

Карякин Денис Алексеевич, аспирант, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, [dakariakin@gmail.com](mailto:dakariakin@gmail.com)

Для решения проблемы определения связей свойств организмов со свойствами соответствующих им генетических последовательностей в статье рассматривается метод классификации последовательностей и распознавание принадлежности исследуемой последовательности конкретному классу. Впервые предлагается классификация последовательностей на основе числовых показателей рекуррентных и  $Z$ -рекуррентных форм, определяющих структуры функциональных связей элементов последовательностей. Для числовых показателей рекуррентных и  $Z$ -рекуррентных форм вводится классификация, которая распространяется на классификацию генетических последовательностей. Каждому рассматриваемому в задаче распознавания классу последовательностей, имеющему содержательную интерпретацию в приложениях, сопоставляется числовая характеристика, обобщающая числовые показатели рекуррентной или  $Z$ -рекуррентной формы, определяющих структуру последовательностей класса. При распознавании полученная числовая характеристика класса сравнивается с числовой характеристикой рекуррентной или  $Z$ -рекуррентной формы, соответствующей исследуемой генетической последовательности. При классификации последовательностей на основе числовых показателей рекуррентной и  $Z$ -рекуррентной форм, определяющих структуры функциональных связей элементов в последовательностях, причинно-следственные связи в генетических последовательностях, заменяются формальными функциональными зависимостями между элементами последовательностей. Задача распознавания рассматривается в двух формах: в форме принадлежности последовательности заданному конкретному классу последовательностей и в форме определения, какому из заданных классов последовательностей принадлежит исследуемая последовательность. Основные математические трудности при решении указанных задач распознавания связаны с определением рекуррентных и  $Z$ -рекуррентных форм, по числовым показателям которых исследуемая последовательность и классы последовательностей различаются. Для преодоления этих трудностей разработан спектр числовых показателей рекуррентных и  $Z$ -рекуррентных форм, с использованием которого рекуррентно и  $Z$ -рекуррентно определены последовательности. Классификация и распознавание иллюстрируются примером, в котором рассматриваются три класса генетических кодов организмов, каждый из которых представлен пятью генетическими последовательностями. Для уточнения и расширения классификации последовательностей и повышения эффективности методов распознавания вводится  $Z$ -рекуррентное определение последовательностей.



*Ключевые слова:* последовательность, генетическая последовательность, рекуррентное определение последовательности,  $Z$ -рекуррентное определение последовательности, рекуррентная форма,  $Z$ -рекуррентная форма, классификация последовательностей, распознавание последовательностей.

Поступила в редакцию: 12.04.2018 / Принята: 22.02.2019 / Опубликовано: 31.08.2019

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-338-350>

## ВВЕДЕНИЕ

При анализе структур и функций генетического материала в решениях проблем наследственности и патологий живых организмов, а также в профилактике и лечении наследственных патологий явно или неявно используются классификации и задачи распознавания генетических последовательностей. Существенное применение имеет математический аппарат.

В данной статье предлагается новый подход построения классификации на основе числовых показателей структур генетических последовательностей и излагаются методы распознавания генетических последовательностей по числовым показателям их структур. Предлагаемые классификация и методы распознавания структур основываются на различных вариантах рекуррентных и  $Z$ -рекуррентных определений последовательностей, интерпретируемых как генетические последовательности [1,2]. Примеры использования рекуррентных определений последовательности в задачах распознавания содержатся в работе [3].

Первоначальными характеристиками генетических последовательностей являются порядки (числовые показатели) рекуррентных форм в рекуррентном определении последовательностей. Числовые показатели рекуррентных определений последовательностей систематизированы в 5-уровневый спектр. На каждом из уровней спектра генетическая последовательность определяется числовой структурой (числом, набором чисел, набором наборов чисел), соответствующей взаиморасположению нуклеотидов в последовательности. С использованием числовых показателей спектра определяются формальные классы генетических последовательностей, которые в ряде случаев могут совмещаться с классами генетических кодов, определяемыми свойствами, имеющими интерпретацию в генетике. Определение классов генетических последовательностей по числовым показателям рекуррентных определений является компактным, классы определяются с использованием простых вычислительных процедур и при решении задач определения класса, которому принадлежит исследуемая генетическая последовательность, применяется простая вычислительная процедура. Практическая эффективность разработанных числовых моделей генетических последовательностей и методов распознавания таких последовательностей по их числовым показателям зависит от меры совпадения формальных классов и представляемых ими классов содержательно определенных в генетике классов. Впервые разработанные основные положения, модели и методы, изложенные в данной статье, апробированы только на некоторых примерах, которые следует рассматривать с точки зрения их логической непротиворечивости и принципиальной возможности использования.

Предлагаемые для исследования свойств генетических последовательностей модели и методы следует рассматривать как разработку формального аппарата, позво-



ляющего строить числовые характеристики генетических последовательностей и множеств генетических последовательностей, а также разрабатывать достаточно простые и логически понятные алгоритмы вычисления формальных показателей, соответствующих генетическим последовательностям и множествам генетических последовательностей.

Спектр числовых показателей рекуррентных определений последовательностей изложен в работах В. А. Твердохлебова [1, 2] и параграфах 1, 2 данной статьи. Алгоритмы и программы, позволяющие определять числовые показатели по трем уровням спектра, разработаны Д. А. Карякиным. Для иллюстрации моделей и методов получения числовых показателей Д. А. Карякиным проведен вычислительный эксперимент, результаты которого изложены в параграфах 3, 4. Анализ полученных результатов написан В. А. Твердохлебовым и Д. А. Карякиным.

## 1. ЧИСЛОВЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ РЕКУРРЕНТНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Генетические последовательности рассматриваются как последовательности знаков без их содержательной интерпретации. Свойства генетических последовательностей представляются числовыми показателями структур последовательностей в форме функциональных зависимостей в формальных представлениях последовательностей. Для этого рассматриваются варианты рекуррентных определений последовательностей и показатели используемых рекуррентных форм. Каждое рекуррентное определение последовательности определяет класс последовательностей, в который входят последовательности с взаимно однозначными переобозначениями (с взаимно однозначным преобразованием) элементов. На основе этого предположения формальный класс последовательностей, соответствующий множеству генетических последовательностей, имеет характеристику точно одной числовой структуры, состоящей из целого положительного числа, или набора целых положительных чисел, или набора наборов целых положительных чисел.

Спектр  $\Omega$  числовых показателей рекуррентных определений последовательностей, предложенный в работах [1, 2], определяется числовыми показателями на пяти уровнях  $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ . Характеристика последовательности на каждом из следующих уровней спектра является более точной относительно предшествующих уровней.

В спектре числовыми значениями представлены порядки рекуррентных форм, длины отрезков последовательности, определяемые отдельными рекуррентными формами, и количество смен рекуррентных форм.

По определению  $\Omega_0(\xi) = m_0(\xi)$ , где  $m_0(\xi)$  — наименьший порядок рекуррентной формы, определяющей всю последовательность  $\xi$ . На уровне  $\Omega_1(\xi)$  спектра  $\Omega(\xi)$  расположено  $m_0$  чисел ( $m_0 \in \mathbb{N}^+$ ), определяющих для порядков от 1 до  $m_0$  размеры наибольших определяемых начальных отрезков последовательности  $\xi$ .

Уровень  $\Omega_2(\xi)$  содержит  $m_0$  чисел, показывающих, сколько раз для рассматриваемого порядка рекуррентных форм потребовалось заменять рекуррентные формы при определении последовательности  $\xi$ . На уровне  $\Omega_3(\xi)$  каждое число смен рекуррентных форм, показанное на уровне  $\Omega_2(\xi)$ , заменено последовательностью чисел, представляющих длины отрезков, определяемых отдельными рекуррентными формами.



По построению спектр динамических показателей определения последовательности состоит из числовых значений:

- наименьшего порядка  $m_0(\xi)$  рекуррентной формы, определяющей всю последовательность  $\xi$ ;
- набора наименьших длин  $d^1(\xi), d^2(\xi), \dots, d^{m_0}(\xi)$ , префиксов последовательности  $\xi$ , задаваемых рекуррентными формами соответственно порядков  $1, 2, \dots, m_0$ ;
- набора чисел  $r^1(\xi), r^2(\xi), \dots, r^{m_0}(\xi)$ , смен рекуррентных форм порядков  $1, 2, \dots, m_0$ , задающих всю последовательность;
- набора наборов длин

$$d_1^1(\xi), d_2^1(\xi), \dots, d_{r^1(\xi)+1}^1(\xi);$$

$$d_1^2(\xi), d_2^2(\xi), \dots, d_{r^2(\xi)+1}^2(\xi);$$

.....

$$d_1^{m_0}(\xi) = |\xi|$$

отрезков последовательности  $\xi$ , где  $d_j^m(\xi)$  — длина  $j$ -го отрезка в определении рекуррентной формой порядка  $m$  последовательности  $\xi$ .

Для любой последовательности  $\bar{\xi} \in U^v$  наименьший порядок рекуррентной формы, определяющей последовательность  $\bar{\xi}$ , будем обозначать  $m_0(\bar{\xi})$ . Для любой последовательности  $\bar{\xi} \in U^v$  и  $m \in \mathbb{N}^+$ , где  $1 \leq m \leq m_0(\bar{\xi})$ , наибольшую длину начального отрезка последовательности  $\bar{\xi}$ , определяемого рекуррентной формой порядка  $m$ , будем обозначать  $d^m(\bar{\xi})$ . Для любой последовательности  $\bar{\xi} \in U^v$  и  $m \in \mathbb{N}^+$ , где  $1 \leq m \leq |\bar{\xi}| - 1$ , число смен рекуррентных форм порядка  $m$ , требующихся при определении последовательности  $\bar{\xi}$ , будем обозначать  $r^m(\bar{\xi})$ . Для любой последовательности  $\bar{\xi} \in U^v$  и  $m \in \mathbb{N}^+$ , где  $1 \leq m \leq m_0(\bar{\xi})$ , и  $j$ , где  $1 \leq j \leq r^m(\bar{\xi})$ , длину  $j$ -го отрезка в определении последовательности  $\bar{\xi}$  будем обозначать  $d_j^m(\bar{\xi})$ .

Используя введенные обозначения, определим спектр параметров, характеризующих последовательность, как следующую структуру:

$$\begin{aligned} \Omega_0(\bar{\xi}) &= \langle m_0(\bar{\xi}) \rangle; \\ \Omega_1(\bar{\xi}) &= \langle d^1(\bar{\xi}), d^2(\bar{\xi}), \dots, d^\alpha(\bar{\xi}) \rangle; \\ \Omega_2(\bar{\xi}) &= \langle r^1(\bar{\xi}), r^2(\bar{\xi}), \dots, r^\alpha(\bar{\xi}) \rangle; \\ \Omega_3(\bar{\xi}) &= \langle \Omega_3^1(\bar{\xi}), \Omega_3^2(\bar{\xi}), \dots, \Omega_3^\alpha(\bar{\xi}) \rangle; \\ \Omega_4(\bar{\xi}) &= \Theta(\Omega_3(\bar{\xi})), \end{aligned}$$

где  $\alpha = m_0(\bar{\xi})$  и  $\Omega_3^j(\bar{\xi}) = \langle d_1^j(\bar{\xi}), d_2^j(\bar{\xi}), \dots, d_{n_j}^j(\bar{\xi}) \rangle$  ( $n_j$  — номер последнего отрезка в определении последовательности  $\bar{\xi}$  как последовательности отрезков, определяемых отдельными рекуррентными формами порядка  $j$ ),  $\Theta$  — оператор замены в  $\Omega_3(\bar{\xi})$  величин длин отрезков весами использованных рекуррентных форм для определения отрезков.

Четвертый уровень  $\Omega_4(\bar{\xi})$  спектра  $\Omega(\bar{\xi})$  к характеристике последовательности  $\bar{\xi}$  по количеству изменений правил, определяющих взаиморасположение элементов в последовательности, и величинам областей действия правил, представленной на уровнях  $\Omega_1(\bar{\xi}) - \Omega_3(\bar{\xi})$ , добавляет оценки сложности правил и величины области использования правил. В достаточно общем случае можно вводить веса правил (рекуррентных форм) и веса реализации правил, используемых при определении отрезка. Например, для каждого шага применения рекуррентной формы  $F(z_1^0, z_2^0, \dots, z_m^0) = z_{m+1}^0$ , т. е. для набора  $(z_1^0, z_2^0, \dots, z_m^0)$ , задается вес  $\Theta(z_1^0, z_2^0, \dots, z_m^0)$



в числовой форме и сумма весов всех шагов применения рекуррентной формы для последовательности полагается весом последовательности.

Первые четыре уровня  $\Omega_0(\xi), \Omega_1(\xi), \Omega_2(\xi)$  и  $\Omega_3(\xi)$  спектра  $\Omega(\xi)$  характеризуют алгоритмические свойства определения последовательности  $\xi$  и ее строение, так как рекуррентные формы являются правилами построения порядка следования элементов. Эти отдельные, базовые, правила сменяют одно другое по общему критерию достижения границы применимости рекуррентной формы.

Расширим спектр  $\Omega$  до спектра  $\Omega'$ , где  $\Omega'$  содержит уровни  $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$  и уровни  $\Omega_5(\xi) = \Omega_0(\xi^{-1}), \Omega_6(\xi) = \Omega_1(\xi^{-1}), \Omega_7(\xi) = \Omega_2(\xi^{-1}), \Omega_8(\xi) = \Omega_3(\xi^{-1}), \Omega_9(\xi) = \Omega_4(\xi^{-1})$ . Проведенный анализ показал, что для использования в представлении неравенства последовательностей  $\xi_1 \neq \xi_2$  числовых показателей последовательностей могут выполняться следующие отношения:  $\xi_1 \neq \xi_2, \Omega_i(\xi_1) = \Omega_i(\xi_2)$  и  $\Omega_i(\xi_1^{-1}) \neq \Omega_i(\xi_2^{-1})$ . Для определения числовых показателей последовательностей по уровням спектра существуют простые алгоритмы.

## 2. Z-РЕКУРРЕНТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕНЕТИЧЕСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Классическое рекуррентное определение последовательностей, устанавливающее функциональную связь каждого  $(m + 1)$ -го элемента последовательности от предшествующих  $m$  элементов, является простейшим и допускает принципиальное усовершенствование.

Z-рекуррентное определение последовательностей предполагает использование двух процедур: процедуру покрытия последовательностей набором элементов и процедуру установления в каждом наборе покрытия функциональных связей.

Как процедура покрытия, так и определение структуры функциональных связей в каждом наборе из покрытия представляют большие возможности для интерпретации в области приложений причинно-следственных связей элементов в генетических последовательностях.

Z-рекуррентные определения последовательностей, рассматриваемых как формальные структуры, обладают свойствами, которые можно представить в следующих утверждениях.

**Теорема 1.** Для последовательности длины  $C, C \in \mathbb{N}^+$ , и величин  $\alpha + \beta \leq C$  существует  $D$  вариантов возможных Z-рекуррентных форм рангов вида  $(i_1, i_2, \dots, i_\alpha, j_1, j_2, \dots, j_\beta)$  для Z-рекуррентного определения, где

$$D = \prod_{t=1}^{\alpha+\beta-1} (C - (\alpha + \beta - t)).$$

**Теорема 2.** Если для двух последовательностей  $\xi_1, \xi_2$  длины  $C, C \in \mathbb{N}^+$ , выполняется условие  $\xi_1 \neq \xi_2$ , то во множестве вариантов Z-рекуррентных форм существует рекуррентная форма, Z-рекуррентно определяющая только одну из последовательностей.

Генетические последовательности живых организмов определяются последовательностями элементов из множества знаков  $M = \{A, T, G, C\}$ .

Ряд важных свойств живых организмов определяются на основе анализа таких последовательностей, включая рассмотрение структур генетической последовательности, т. е. с использованием взаиморасположения элементов в последовательности.



В данной статье предлагаются модели и метод определения числовых показателей, характеризующих варианты рекуррентного определения последовательностей, соответствующих генетическим последовательностям.

С использованием так полученных числовых показателей рекуррентных определений последовательностей ставятся и решаются следующие задачи:

- задача 1 классификации генетических последовательностей по значениям числовых показателей рекуррентных определений последовательностей;
- задача 2 определения принадлежности рассматриваемой генетической последовательности к классу последовательностей по значениям числовых показателей рекуррентного определения рассматриваемой последовательности;
- задача 3 разработки числовых показателей рекуррентного определения последовательностей, представляющих организм, специфических, т.е. разграничивающих классы организмов.

Эффективность для приложений решений задач 1–3 ограничивается полнотой и точностью, с которыми содержательные свойства организмов представлены формальными структурами последовательностей.

Работы [4–14] дают характеристику области возможных приложений полученных в статье результатов для решения задач, связанных с проблемой определения связей свойств организмов со свойствами соответствующих им генетических последовательностей.

На основе исходного рекуррентного определения последовательности числовыми показателями разработан спектр  $\Omega$  вариантов числовых показателей рекуррентных определений.

Спектр  $\Omega$  в работах [1, 2] определен как 5-уровневый спектр  $\Omega = \{\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4\}$ .

Простейшей числовой характеристикой расположений элементов в последовательности полагается порядок рекуррентной формы, используемой для рекуррентного определения последовательности.

Числовые структуры следующих уровней спектра строятся на основе рекуррентных определений частей последовательностей. Классификация генетических последовательностей определяется на основе принадлежностей числовых показателей рекуррентных определений последовательностей выбранным интервалом изменений числовых показателей рекуррентных определений.

Для развития средств числового представления структур генетических последовательностей разработано  $Z$ -рекуррентное определение последовательностей.

Для моделей и методов, используемых в решениях задач 1–3, Д. А. Карякиным разработаны алгоритмы и программы, реализующие методы, а также проведены вычислительные эксперименты, иллюстрирующие решения задач в частных случаях.

Решения задач 1–3 иллюстрируются на примерах, в которых рассматриваются 15 генетических последовательностей имеющих следующую содержательную классификацию:

- последовательности  $\xi_{1,1}^n, \xi_{1,2}^n, \dots, \xi_{1,5}^n$ , представляющие префиксы длины  $n$  генетических последовательностей, соответствующие бактериям;
- последовательности  $\xi_{2,1}^n, \xi_{2,2}^n, \dots, \xi_{2,5}^n$ , представляющие префиксы длины  $n$  генетических последовательностей, соответствующие вирусам;
- последовательности  $\xi_{3,1}^n, \xi_{3,2}^n, \dots, \xi_{3,5}^n$ , представляющие префиксы длины  $n$  генетических последовательностей, соответствующие животным.



С использованием алгоритмов и программ задача 1 решена в вариантах:

– для уровней  $\Omega \in \{\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$  определено число  $n_0$ , для которого выполняются неравенства  $r_i(\xi_\nu^{n_0}) \neq r_i(\xi_j^{n_0})$ , где  $1 \leq \nu, j \leq 5, \nu \neq j$  и  $r_i(\xi)$  — числовой показатель, соответствующий  $i$  уровню.

Рассмотрим задачу построения числовых показателей рекуррентного определения последовательности из множеств последовательностей  $M_1, M_2, M_3$ , по которым элементы разных множеств не пересекаются. Анализ процессов распознавания последовательностей по числовым показателям их рекуррентного определения проведен в двух направлениях:

– построением с фиксированием уровня спектра и увеличением длины последовательностей;

– с переходом вычислений показателей по уровням спектра.

Для того, чтобы решать задачи распознавания генетических последовательностей по числовым показателям их рекуррентных и  $Z$ -рекуррентных определений, требуется найти эффективную рекуррентную или  $Z$ -рекуррентную форму. Общий подход предполагает первоначальное использование рекуррентных форм нулевого уровня. Если для конкретных анализируемых множеств генетических последовательностей числовые показатели нулевого уровня спектра оказываются не достаточными, то проверке на эффективность подвергаются числовые показатели следующих первого, второго, третьего уровней. При этом установлено, что имеются случаи, когда распознавание генетических последовательностей может быть осуществлено на основе применения числовых показателей рекуррентных форм для обращений исследуемых последовательностей. Более сложная методика требуется для поиска  $Z$ -рекуррентных форм, позволяющих с их использованием распознавать генетические последовательности. В случае поиска эффективной  $Z$ -рекуррентной формы можно пользоваться следующим методом.

Для исследования генетической последовательности  $\xi$  рассмотрим варианты покрытия последовательности подпоследовательностями длин  $2, 3, \dots, C$ , где  $C$  — длина исследуемой последовательности. В множестве подпоследовательностей длины  $K, K < C$ , образующих покрытие  $\xi$ , проводится анализ с целью поиска определения наборов целых положительных чисел  $\langle i_1, i_2, \dots, i_a \rangle$  и  $\langle j_1, j_2, \dots, j_b \rangle$ , удовлетворяющих условиям.

В каждой подпоследовательности с первым элементом  $a_{t+i_1}$  рассмотрим покрытия последовательности  $\xi$ . Элементы последовательности  $a_{t+j_1}, a_{t+j_2}, \dots, a_{t+j_b}$  функционально соответствуют (функционально связаны) элементам  $a_{t+i_1}, a_{t+i_2}, \dots, a_{t+i_a}$ . Если для последовательности  $\xi$  имеется  $Z$ -рекуррентное определение  $Z$ -рекуррентной формой порядка  $\langle i_1, i_2, \dots, i_a, j_1, j_2, \dots, j_b \rangle$ , то этот порядок рассматривается как числовая форма характеристики, по которой определяется последовательность  $\xi$  для решения задач распознавания.

Если генетические последовательности  $\xi_1$  и  $\xi_2$  имеют  $Z$ -рекуррентное определение  $Z$ -рекуррентной формой одного и того же порядка  $\langle i_1, i_2, \dots, i_a, j_1, j_2, \dots, j_b \rangle$ , то поиск новой пригодной для распознавания последовательности  $\xi_1$  и  $\xi_2$   $Z$ -рекуррентной формой может быть продолжен как поиск новых наборов, составляющих порядок  $\langle i_1, i_2, \dots, i_a, j_1, j_2, \dots, j_b \rangle$ , так и на основе поиска новых покрытий последовательностей.



### 3. РАСПОЗНАВАНИЕ ГЕНЕТИЧЕСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПО ЧИСЛОВЫМ ПОКАЗАТЕЛЯМ РЕКУРРЕНТНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

Рассмотрим примеры распознавания генетических последовательностей по числовым показателям их рекуррентных определений. Для этого из классов генетических последовательностей, соответствующих бактериям, вирусам, животным, выберем по пять представителей длины 10 000 и построим числовые показатели их рекуррентных определений их префиксов длины 100, 1000, 5000, 10 000.

Исследованные последовательности взяты из банка генетических последовательностей NCBI Genome [15]. В связи с большими размерами рассматриваемых генетических последовательностей и их префиксов их конкретная форма в данной статье не приводится.

Для проведения вычислительного эксперимента разработаны алгоритмы и составлены программы, с использованием которых получены результаты, представленные в табл. 1–9.

Используются следующие обозначения:  $K_1, K_2, K_3$  — классы генетических последовательностей,  $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$  — универсум генетических последовательностей.

Таблица 1 / Table 1

Числовые показатели рекуррентного определения последовательностей по  $\Omega_1$  из  $K_1$   
 Numeric indicators of recurrent definition of sequences by  $\Omega_1$  from  $K_1$

Длина	$\xi_{1,1}$	$\xi_{1,2}$	$\xi_{1,3}$	$\xi_{1,4}$	$\xi_{1,5}$
100	8	8	8	8	15
1000	15	12	23	12	15
5000	20	49	81	23	25
10 000	64	49	81	23	41

Таблица 2 / Table 2

Числовые показатели рекуррентного определения последовательностей по  $\Omega_1$  из  $K_2$   
 Numeric indicators of recurrent definition of sequences by  $\Omega_1$  from  $K_2$

Длина	$\xi_{2,1}$	$\xi_{2,2}$	$\xi_{2,3}$	$\xi_{2,4}$	$\xi_{2,5}$
100	7	9	6	8	8
1000	12	11	10	14	16
5000	14	12	14	15	16
10 000	16	15	15	73	16

Таблица 3 / Table 3

Числовые показатели рекуррентного определения последовательностей по  $\Omega_1$  из  $K_3$   
 Numeric indicators of recurrent definition of sequences by  $\Omega_1$  from  $K_3$

Длина	$\xi_{3,1}$	$\xi_{3,2}$	$\xi_{3,3}$	$\xi_{3,4}$	$\xi_{3,5}$
100	7	7	12	14	8
1000	12	250	19	14	14
5000	20	378	19	19	17
10 000	40	378	60	25	17

Таблица 4 / Table 4

Числовые показатели рекуррентного определения последовательностей по  $\Omega_2$  из  $K_1$   
 Numeric indicators of recurrent definition of sequences by  $\Omega_2$  from  $K_1$

Длина	$\xi_{1,1}$	$\xi_{1,2}$	$\xi_{1,3}$	$\xi_{1,4}$	$\xi_{1,5}$
100	5, 7, 26, 31, 100	6, 17, 44, 100	4, 6, 11, 24, 58, 78, 100	4, 8, 20, 23, 38, 62, 100	4, 8, 14, 56, 100

Таблица 5 / Table 5

Числовые показатели рекуррентного определения последовательностей по  $\Omega_2$  из  $K_2$   
 Numeric indicators of recurrent definition of sequences by  $\Omega_2$  from  $K_2$

Длина	$\xi_{2,1}$	$\xi_{2,2}$	$\xi_{2,3}$	$\xi_{2,4}$	$\xi_{2,5}$
100	4, 9, 12, 33, 56, 100	5, 9, 16, 46, 78, 100	3, 10, 57, 100	2, 5, 14, 38, 75, 92, 100	3, 7, 17, 19, 35, 100





Таблица 6 / Table 6

Числовые показатели рекуррентного определения последовательностей по  $\Omega_2$  из  $K_3$   
 Numeric indicators of recurrent definition of sequences by  $\Omega_2$  from  $K_3$

Длина	$\xi_{3,1}$	$\xi_{3,2}$	$\xi_{3,3}$	$\xi_{3,4}$	$\xi_{3,5}$
100	5, 16, 28, 66, 100	3, 8, 11, 40, 100	3, 8, 10, 14, 23, 100	3, 5, 9, 39, 90, 100	5, 17, 58, 86, 100

Таблица 7 / Table 7

Числовые показатели рекуррентного определения последовательностей по  $\Omega_3$  из  $K_1$   
 Numeric indicators of recurrent definition of sequences by  $\Omega_3$  from  $K_1$

Длина	$\xi_{1,1}$	$\xi_{1,2}$	$\xi_{1,3}$	$\xi_{1,4}$	$\xi_{1,5}$
100	65, 61, 36, 10, 7, 3, 1, 0	67, 59, 34, 19, 8, 2, 1, 0	49, 52, 45, 29, 14, 7, 2, 0	76, 67, 32, 12, 4, 1, 0	60, 52, 31, 16, 6, 2, 1, 0

Таблица 8 / Table 8

Числовые показатели рекуррентного определения последовательностей по  $\Omega_3$  из  $K_2$   
 Numeric indicators of recurrent definition of sequences by  $\Omega_3$  from  $K_2$

Длина	$\xi_{2,1}$	$\xi_{2,2}$	$\xi_{2,3}$	$\xi_{2,4}$	$\xi_{2,5}$
100	69, 60, 36, 17, 4, 2, 0	67, 63, 38, 7, 2, 1, 0	67, 64, 35, 15, 5, 0	66, 56, 34, 19, 9, 4, 1, 0	69, 51, 31, 20, 10, 6, 2, 0

Таблица 9 / Table 9

Числовые показатели рекуррентного определения последовательностей по  $\Omega_3$  из  $K_3$   
 Numeric indicators of recurrent definition of sequences by  $\Omega_3$  from  $K_3$

Длина	$\xi_{3,1}$	$\xi_{3,2}$	$\xi_{3,3}$	$\xi_{3,4}$	$\xi_{3,5}$
100	65, 56, 37, 17, 9, 3, 0	62, 53, 41, 21, 7, 2, 0	49, 48, 47, 34, 21, 10, 8, 3, 1, 0	62, 47, 32, 15, 10, 8, 4, 1, 0	53, 55, 38, 25, 11, 5, 1, 0

#### 4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Проведем анализ результатов вычислительного эксперимента с классами  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ , представленных в табл. 1–9. Числовые показатели рекуррентного определения префиксов длины 100 представлены первыми строчками в табл. 1–3. В этом случае числовые показатели префиксов длины 100 последовательностей имеют пересечения, например по числовому показателю 8. Это означает, что, например, по числовому показателю уровня  $\Omega_0$  последовательности  $\xi_{1,1}$ ,  $\xi_{1,2}$ ,  $\xi_{1,3}$ ,  $\xi_{1,4}$ ,  $\xi_{2,4}$ ,  $\xi_{2,5}$ ,  $\xi_{3,5}$  не различимы.

Аналогичный вывод следует для префиксов последовательности длины 1000. На префиксах длины 5000 числовые показатели рекуррентного определения последовательностей совпадают только для последовательностей  $\xi_{1,1}$ ,  $\xi_{3,1}$ . Следовательно, по числовым показателям рекуррентного определения префиксов длины 5000 генетических последовательностей не различимыми являются только последовательности  $\xi_{1,1}$ ,  $\xi_{3,1}$ . Если для генетических последовательностей рассматриваемых классов вычисляются числовые показатели уровня  $\Omega_0$  для префиксов длины 10 000, то каждая из рассматриваемых последовательностей имеет свой, принадлежащий только ей числовой показатель: классу  $K_1$  соответствуют числовые показатели 23, 41, 49, 64, 81; классу  $K_2$  — показатели 15, 16, 73; классу  $K_3$  — показатели 17, 25, 40, 60, 378.

Числовые показатели следующего уровня  $\Omega_1$  дают более точную и полную характеристику рекуррентного определения последовательностей.



Для того чтобы числовые показатели по уровню  $\Omega_0$  для классов  $K_1, K_2, K_3$  различались, потребовалось рассматривать префиксы длины 5000. Существенно большую полноту и точность представления структур генетических последовательностей дают числовые показатели уровня  $\Omega_1$ . В табл. 4–6 приведены числовые показатели для префикса длины 100. Как видно из данных таблиц, чтобы отличать генетические последовательности по их принадлежности конкретным классам, достаточно вычислить и сравнить числовые показатели префиксов длины 100.

Анализ по числовым показателям уровня  $\Omega_2$ . Рассмотрим случай распознавания генетических последовательностей как элементов в одном и том же классе. Для класса  $K_1$  числовые показатели отдельных последовательностей имеют пересечения для префиксов длин 100 и 1000. Для префиксов длины 5000 числовые показатели уровня  $\Omega_0$  для последовательностей  $\xi 1, 1, ..$  пересечений не имеют. Следует предполагать, что последовательности в классе  $K_2$  по числовым показателям функциональных зависимостей элементов в последовательностях имеют большие различия, так как пересечения числовых показателей на префиксах длины 1000 не имеется. Анализ числовых показателей в табл. 3 показывает, что индивидуальные, присущие каждой последовательности из класса  $K_3$  числовые показатели не пересекаются на префиксах длины 10 000.

Числовые показатели рекуррентного определения последовательностей уровня  $\Omega_1$  достаточны, чтобы по их показателям распознавать каждую последовательность в каждом из классов  $K_1, K_2, K_3$ . Действительно, наборы числовых показателей для префиксов длины 100 последовательностей в табл. 4–6 в каждом из классов  $K_1, K_2, K_3$  попарно различны.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В исследовании генетических последовательностей одной из основных задач является определение причинно-следственных связей между свойствами генетических последовательностей и свойствами организмов, которым соответствуют последовательности.

Любые конкретные свойства генетических последовательностей, представленные формальными показателями, определяют класс последовательностей, причинно-следственно связанный с классами живых организмов, свойствами живых организмов, видами патологий организмов и т.д.

Для исследований генетических последовательностей в данной статье предлагается разработанный формальный аппарат, который позволяет:

- определять последовательность в виде числовых структур (целых положительных чисел, наборов целых положительных чисел, наборов наборов целых положительных чисел);
- строить модели для конкретных генетических последовательностей и модели для любых конечных множеств генетических последовательностей;
- разрабатывать эффективные алгоритмы для построения моделей генетических последовательностей и моделей множеств генетических последовательностей в форме числовых структур;
- выделять из универсума генетических последовательностей с использованием моделей классы генетических последовательностей и на этой основе строить классификацию;
- с использованием разработанных моделей генетических последовательностей



решать задачи проверки равенства генетических последовательностей и задачу проверки принадлежности рассматриваемой генетической последовательности конкретному классу последовательностей;

– сравнивать классы генетических последовательностей с определением непустоты области их пересечения.

В статье результаты вычислительного эксперимента иллюстрируются простейшими примерами.

### Библиографический список

1. *Твердохлебов В. А.* Геометрическая форма автоматных отображений, рекуррентное и  $Z$ -рекуррентное определение последовательностей // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 232–241. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-2-232-241>
2. *Твердохлебов В. А.*  $Z$ -рекуррентное определение последовательностей в задачах контроля и диагностирования процессов в системах // Докл. Акад. воен. наук. 2016. № 2 (70). С. 43–47.
3. *Карякин Д. А.* Анализ генетических кодов по показателям сложности взаиморасположения нуклеотидов // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы междунар. науч. конф. Саратов : ИЦ «Наука», 2016. С. 190–193.
4. *Льюин Б.* Гены. М. : БИНОМ, Лаборатория знаний, 2011. 896 с.
5. *Уотсон Д.* Двойная спираль. Воспоминания об открытии структуры ДНК. М. : Мир, 1969. 152 с.
6. *Hogeweg P.* The Roots of Bioinformatics in Theoretical Biology // PLoS. Computational Biology. 2011. Vol. 7, iss. 3. Art. ID e1002021. DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1002021>
7. *Wattam A. R., Abraham D., Dalay O., Disz T. L., Driscoll T., Gabbard J. L., Gillespie J. J., Gough R., Hix D., Kenyon R., Machi D., Mao C., Nordberg E. K., Olson R., Overbeek R., Pusch G. D., Shukla M., Schulman J., Stevens R. L., Sullivan D. E., Vonstein V., Warren A., Will R., Wilson M. J., Yoo H. S., Zhang C., Zhang Y., Sobral B. W.* PATRIC, the bacterial bioinformatics database and analysis resource // Nucleic Acids Res. 2014. Vol. 42, iss. D1. P. D581–D591. DOI: <https://doi.org/10.1093/nar/gkt1099>
8. *Barnett D. W., Garrison E. K., Quinlan A. R., Stromberg M. P., Marth G. T.* BamTools: a C++ API and toolkit for analyzing and managing BAM files // Bioinformatics. 2011. Vol. 27, iss. 12. P. 1691–1692. DOI: <https://doi.org/10.1093/bioinformatics/btr174>
9. *Plieskatt J., Rinaldi G., Brindley P. J., Jia X., Potriquet J., Bethony J., Mulvenna J.* Bioclosure: a functional library for the manipulation of biological sequences // Bioinformatics. 2014. Vol. 30, iss. 17. P. 2537–2539. DOI: <https://doi.org/10.1093/bioinformatics/btu311>
10. *Goto N., Prins P., Nakao M., Bonnal R., Aerts J., Katayama T.* BioRuby: bioinformatics software for the Ruby programming language // Bioinformatics. 2010. Vol. 26, iss. 20. P. 2617–2619. DOI: <https://doi.org/10.1093/bioinformatics/btq475>
11. *de Brevern A. G., Meyniel J. P., Fairhead C., Neuvéglise C., Malpertuy A.* Trends in IT Innovation to Build a Next Generation Bioinformatics Solution to Manage and Analyse Biological Big Data Produced by NGS Technologies // BioMed Research International. Vol. 2015. Article ID 904541, 15 p. DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2015/904541>
12. *Schuster S. C.* Next-generation sequencing transforms today's biology // Nature Methods. 2008. Vol. 5, iss. 1. P. 16–18. DOI: <https://doi.org/10.1038/nmeth1156>
13. *Сингер М., Берг П.* Гены и геномы. М. : Мир, 1998. 391 с.
14. *Berg J. M., Tymoczko J. L., Stryer L.* DNA, RNA, and the Flow of Genetic Information // Berg J. M., Tymoczko J. L., Stryer L. Biochemistry. 5th ed. N. Y. : W. H. Freeman and Company, 2002. 1515 p.



15. NCBI Genome List. URL: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/genome/browse/> (дата обращения: 18.12.2017).

---

**Образец для цитирования:**

Твердохлебов В. А., Карякин Д. А. Классификация и распознавание структур генетических последовательностей // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 338–350. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-338-350>

---

## Classification and Recognition of Structures of Genetic Sequences

V. A. Tverdokhlebov, D. A. Kariakin

Vladimir A. Tverdokhlebov, <https://orcid.org/0000-0002-2629-441X>, Institute of Precision Mechanics and Control, RAS, 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia, [tverdokhlebovva@list.ru](mailto:tverdokhlebovva@list.ru)

Denis A. Kariakin, <https://orcid.org/0000-0002-0670-3407>, Saratov State University, 83 Astrakhan-skaya St., Saratov 410012, Russia, [dakariakin@gmail.com](mailto:dakariakin@gmail.com)

For solving problems of determining the relationships between the properties of organisms and the properties of the corresponding genetic sequences, we proposed a classification of genetic sequences based on numerical indicators of recurrent and  $Z$ -recurrent shapes, which define the structure of functional relationships of elements in sequences. For numerical indicators of recurrent and  $Z$ -recurrent shapes, we introduce a method of classification of genetic sequences. We compared a numerical characteristic that generalizes numerical values with a numerical characteristic of recurrent or  $Z$ -recurrent shapes which determine the structure of a sequence for each sequence of a biological rank considered in the recognition problem, which has a meaningful interpretation in the application area. The problem of recognition is considered from two points of view: when we determine belonging of a sequence to a specific rank of sequences, and when we determine which group of sequences contains the experimental sequence. Basic mathematical difficulties in solving these recognition problems are associated with the search difference in numerical representation of recurrent and  $Z$ -recurrent shapes of experimental sequences. To overcome these difficulties we created a spectrum of numerical indicators of recurrent and  $Z$ -recurrent shapes. Classification and recognition of sequences are illustrated by an example with three ranks of genetic codes of organisms, each of them represented by 5 sequences.  $Z$ -recurrent shape is introduced to define and extend the classification of sequences and increase the efficiency of recognition methods.

*Keywords:* sequence, genetic sequence, recurrent definition of a sequence,  $Z$ -recursive definition of a sequence, recurrent shape,  $Z$ -recurrent shape, classification of sequences, recognition of sequences.

Received: 12.04.2018 / Accepted: 22.02.2019 / Published: 31.08.2019

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

### References

1. Tverdokhlebov V. A. Geometric Shape Automaton Mappings, Recurrent and  $Z$ -recurrent Definition Sequences. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 2, pp. 232–241 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-2-232-241>



2. Tverdokhlebov V. A. *Z*-recurrent definition sequences in the tasks of monitoring and diagnosing processes in systems. *Reports of the Academy of Military Sciences*, 2016, no. 2 (70), pp. 43–47 (in Russian).
3. Kariakin D. A. Analysis of genetic codes by indicators interposition of nucleotides. In: *Komp'yuternye nauki i informatsionnye tekhnologii* [Computer Science and Information Technology: Proc. Int. Sci. Conf.]. Saratov, Publ. Center "Nauka", 2016, pp. 190–193 (in Russian).
4. Lewin B. *Geny* [Genes]. Moscow, BINOM, Laboratoriya znaniy Publ., 2011. 896 p. (in Russian).
5. Watson D. *Dvojnaya spiral'*. *Vospominaniya ob otkrytii struktury DNK* [Double helix. Memories of the discovery of the structure of DNA]. Moscow. Mir, 1969. 152 p. (in Russian).
6. Hogeweg P. The Roots of Bioinformatics in Theoretical Biology. *PLoS. Computational Biology*, 2011, vol. 7, iss. 3, art. ID e1002021. DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1002021>
7. Wattam A. R., Abraham D., Dalay O., Disz T. L., Driscoll T., Gabbard J. L., Gillespie J. J., Gough R., Hix D., Kenyon R., Machi D., Mao C., Nordberg E. K., Olson R., Overbeek R., Pusch G. D., Shukla M., Schulman J., Stevens R. L., Sullivan D. E., Vonstein V., Warren A., Will R., Wilson M. J., Yoo H. S., Zhang C., Zhang Y., Sobral B. W. PATRIC, the bacterial bioinformatics database and analysis resource. *Nucleic Acids Res.*, 2014, vol. 42, iss. D1, pp. D581–D591. DOI: <https://doi.org/10.1093/nar/gkt1099>
8. Barnett D. W., Garrison E. K., Quinlan A. R., Stromberg M. P., Marth G. T. BamTools: a C++ API and toolkit for analyzing and managing BAM files. *Bioinformatics*, 2011, vol. 27, iss. 12, pp. 1691–1692. DOI: <https://doi.org/10.1093/bioinformatics/btr174>
9. Plieskatt J., Rinaldi G., Brindley P. J., Jia X., Potriquet J., Bethony J., Mulvenna J. Bio-closure: a functional library for the manipulation of biological sequences. *Bioinformatics*, 2014, vol. 30, iss. 17, pp. 2537–2539. DOI: <https://doi.org/10.1093/bioinformatics/btu311>
10. Goto N., Prins P., Nakao M., Bonnal R., Aerts J., Katayama T. BioRuby: bioinformatics software for the Ruby programming language. *Bioinformatics*, 2010, vol. 26, iss. 20, pp. 2617–2619. DOI: <https://doi.org/10.1093/bioinformatics/btq475>
11. de Brevern A. G., Meyniel J. P., Fairhead C., Neuvéglise C., Malpertuy A. Trends in IT Innovation to Build a Next Generation Bioinformatics Solution to Manage and Analyse Biological Big Data Produced by NGS Technologies. *BioMed Research International*, vol. 2015, art. ID 904541, 15 p. DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2015/904541>
12. Schuster S. C. Next-generation sequencing transforms today's biology. *Nature Methods*, 2008, vol. 5, iss. 1, pp. 16–18. DOI: <https://doi.org/10.1038/nmeth1156>
13. Singer M., Berg P. *Geny i genomy* [Genes and genomes]. Moscow, Mir, 1998. 391 p. (in Russian).
14. Berg J. M., Tymoczko J. L., Stryer L. DNA, RNA, and the Flow of Genetic Information. In: *Berg J. M., Tymoczko J. L., Stryer L. Biochemistry*. 5th. ed. New York, W. H. Freeman and Company, 2002. 1515 p.
15. NCBI Genome List. Available at: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/genome/browse/> (accessed 18 Desember 2017).

---

**Cite this article as:**

Tverdokhlebov V. A., Kariakin D. A. Classification and Recognition of Structures of Genetic Sequences. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 3, pp. 338–350 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-338-350>

---



# Mathematical Models for Evaluation of the Higher Education System Functions with DEA Approach

A. A. Firsova, G. Yu. Chernyshova

Anna A. Firsova, <https://orcid.org/0000-0002-8906-6326>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, [a.firsova@rambler.ru](mailto:a.firsova@rambler.ru)

Galina Yu. Chernyshova, <https://orcid.org/0000-0002-6464-0408>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, [cherny111@mail.ru](mailto:cherny111@mail.ru)

The purpose of this research is to develop the Data Envelopment Analysis (DEA) methodology for modeling of the assessment of the regional higher education systems effectiveness. The importance and topicality of this study is based on the increasing role of universities in the economic development of regions and countries in recent decades as well as the need to develop approaches for assessing the university effectiveness, and using mathematical models and methods for these goals. The novelty of the research is the formation of the DEA model and its application to the analysis of regional higher education systems' effectiveness. The hypothesis of uneven development of regional higher education systems was tested from the standpoint of functional approach; the higher education systems' effectiveness has been calculated and the ranking of Russian regions was performed by different DEA models. As a result of the DEA modeling, a quantitative effectiveness assessment was carried out, and a set of Russian regions was ranked according to three basic university functions: education, science, and regional partnership. Conclusions about the level of effectiveness and development strategy of regional higher education systems in Russia have been drawn.

*Keywords:* effectiveness assessment, decision making, data envelopment analysis, regional higher education system.

Received: 14.02.2019 / Accepted: 10.04.2019 / Published: 31.08.2019

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-351-362>

## 1. INTRODUCTION AND LITERATURE REVIEW

The importance of universities and their strengthened role in economic development, their contribution to the development of human capital, innovations and knowledge transfer make the research that determines and assesses the university effectiveness and their role in the economic development highly relevant.

In this context, the use of modern methods of mathematical and computer modeling, Data Envelopment Analysis (DEA) in particular, in order to obtain quantitative and qualitative nonparametric assessments of the higher education system performance appears to be an urgent research challenge.

The purpose of this study is the development and application of DEA methodology and tools for assessing the economic process effectiveness in decision-making in socio-economic macrosystems, in particular, in modeling of the assessment of the regional



higher education systems performance. For this purpose, the following tasks have been completed:

- studying of the possibilities and limitations of DEA model applied in the evaluation of regional higher education systems;
- defining a set of relevant indicators that reflect input resources and outputs of regional higher education systems;
- adjusting and implementing a DEA model for the assessment of the effectiveness of regional higher education systems;
- accumulating empirical data for the research: approbation of the developed model and comparative analysis of regional systems of higher education in 80 regions of the Russian Federation.

## 2. THEORETICAL ANALYSIS

In modern conditions, the competitiveness and sustainable development of the national economy is largely determined by the dynamics of regional systems and the effectiveness of interaction among their subjects, among which universities become a significant driver of economic growth [1–3].

The last decades saw profound systemic structural reforms in the Russian system of higher education. Management decision making aimed at “fine-tuning” of the efficient and optimal size of the higher education system, elimination of inefficiently functioning educational organizations, improvement of the quality and transparency of budget fund spending and applying the effectiveness principle in using funding sources is based on the evaluation of the university effectiveness.

In foreign and domestic research, considerable experience has been accumulated in the use of various specifications of DEA models in assessing the education effectiveness, there are a lot of intercountry comparisons of the university effectiveness, various aspects of the university effectiveness according to different input and output indicators are assessed, there are qualitative conclusions about factors that influence university effectiveness [4–7].

However, the nature of the federal structure of the Russian Federation, the vast territory, the heterogeneity of economic development make it necessary to assess the effectiveness and ranking of not only universities, but also the totality of universities in the region, subject to the influence of general institutional factors of the external environment. The policy of managing a balanced development of higher education in Russia should be based on regions, rather than on individual universities. The ranking of Russian regions in terms of the effectiveness of regional higher education systems has not received enough attention and these issues remain unresolved, highlighting the ongoing relevance of the present study, which is pioneer in this area.

## 3. RESEARCH METHODOLOGY

### 3.1. DEA approach

Data Envelopment Analysis (DEA) is an area of operational research which is actively used to simulate and evaluate the effectiveness of organizations in various branches [5].



As a nonparametric method DEA differs from parametric methods (conventional least square, maximum likelihood estimation and others) as it uses linear programming techniques to calculate the envelope representing the efficiency boundary. DEA does not require the definition of a functional form that is an important advantage of this approach. The DEA evaluates the effectiveness of a set of  $n$  peer entities called Decision-Making Units (DMUs) that convert multiple inputs to multiple outputs.

The set of objects is considered in the multidimensional space of input and output indicators, and a piecewise linear surface is constructed. The efficiency boundary (efficiency frontier) — which is the relative effectiveness of a particular element from the sample — is determined. Thus for each object in the DEA model the scalar value of the effectiveness is calculated.

The main efficiency measure of DEA for DMU is the ratio of the sum of DMU weighted outputs to the sum of its weighted inputs.

DMU is assumed to be effective in a DEA model if the object belongs to the frontier. DEA generates a set of reference objects based on the available data, and DMUs are rated as ineffective in dependence on their locations from the frontier.

Let us consider  $DMU_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) as a set of  $m$  inputs  $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) and a set of  $s$  outputs  $y_{r1}, y_{r2}, \dots, y_{rn}$  ( $r = 1, \dots, s$ ),  $n$  is the number of entity to be evaluated [8].

The base concept of DEA applies mathematical programming to get the maximum ratio of efficiency of  $DMU_k$  [9].

Technical efficiency  $TE_k$  of  $DMU_k$  can be represented as follows:

$$TE_k = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}},$$

where  $u_r$  is the weight of output  $r$ ,  $v_i$  is the weight of input  $i$ ,  $y_{rk}$  is the quantity of output  $r$  of  $DMU_k$ ;  $x_{ik}$  is the quantity of input  $i$  of  $DMU_k$ .

The following fractional model has to be solved for each  $DMU_k$ :

$$\max \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}}$$

s. t.

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u_r, v_i > 0 \quad \forall r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m.$$

It can be converted to the linear program by two different approaches (input-oriented model, output-oriented model). For input-oriented model the weighted sums of inputs are minimized holding outputs constant. For output-oriented the weighted sums of outputs are maximized holding inputs constant.

Input-oriented model in multiplier form is as follows:

$$\max \sum_{r=1}^s u_r y_{rk}$$





s. t.

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} = 1,$$

$$u_r, v_i > 0 \quad \forall r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m.$$

Output-oriented model is as follows:

$$\min \sum_{i=1}^m v_i x_{ik}$$

s. t.

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rk} = 1,$$

$$u_r, v_i > 0 \quad \forall r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m.$$

If we transform these models into a dual form, the envelopment form will be obtained:

– input-oriented model (Dual equation)

$$\max \varphi_k$$

s. t.

$$\varphi_k y_{rk} - \sum_{j=1}^s \lambda_j y_{rj} \leq 0, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$x_{ik} - \sum_{j=1}^s \lambda_j x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\lambda_j > 0 \quad \forall j = 1, \dots, n;$$

– output-oriented model (Dual equation)

$$\min \theta_k$$

s. t.

$$y_{rk} - \sum_{j=1}^s \lambda_j y_{rj} \leq 0, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$\theta_k x_{ik} - \sum_{j=1}^s \lambda_j x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$



$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

where  $\frac{1}{\varphi_k}$  and  $\theta_k$  represent the technical efficiency of DMU $k$ ,  $\lambda_j$  represents the associated weighting of outputs and inputs of DMU $j$ .

The envelopment form of a DEA model contains only  $s + m$  constraints rather than  $n + 1$  constraints in the multiplier form, and it is more convenient to calculate.

DMU $k$  is considered effective in the DEA model when the condition  $\theta_k = 1$  is satisfied,  $\theta_k \in (0; 1]$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

There are several types of DEA based on the above basic model that vary by parameter of returns to scale including CRS (constant returns to scale), VRS (variable returns to scale), NIRS (non-increasing returns to scale), NDRS (non-decreasing returns to scale), GRS (generalized returns to scale) [10, 11].

These DEA models are distinguished by different return to scale parameters. Constant returns to scale assumption is indicated in the constraints of the model. A measure of return to scale for DMU $k$  is added in dual equations:

$$L \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \leq U,$$

where  $L$  ( $0 \leq L \leq 1$ ) and  $U$  ( $1 \leq U$ ) are lower and upper limits for sum of  $\lambda_j$ .

The CRS model has the values of lower and upper limits  $L = 0$ ,  $U = \infty$ . VRS model has the following values of lower and upper limits  $L = 1$ ,  $U = 1$ . The NIRS is derived from the VRS model by substitution of the constraint model and is characterized by the following values of lower and upper limits  $L = 0$ ,  $U = 1$ . The NDRS model is characterized by the following values of lower and upper limits  $L=1$ ,  $U = \infty$ . GRS allows to set additional lower and upper limits, the lower  $L$  ( $0 \leq L \leq 1$ ) and upper  $U$  ( $U \geq 1$ ) limits are established by experts [12].

### 3.2. Indicators and data

The DEA method is a specific benchmarking tool that provides an opportunity to determine the most efficiently functioning objects. A DEA model allows to assess the relative effectiveness using mathematical programming methods.

Within the framework of DEA modeling, the regional educational system can be represented as a converter of its “input” parameters – resource costs, into the variable parameter of the “outcome” – the performance results: students entered the labor market, the commercialization of innovation and social spillover effects of the university functioning in the region.

The choice of indicators for DEA modeling in this study is based on a functional approach to assessing the effectiveness of regional higher education systems. The evaluation of the effectiveness of the regional system of higher education is done on the basis of its performance, which is expressed in the realization of its basic functions: the number of trained students, the effectiveness of researchers and scientists as well as the intellectual activity results, and also the number of partnerships in the regional economy that influence the economy of the region.

As a result, the indicators selected for the analysis were classified for the Input and Output items (Table 1).



Table 1

Input and Output indicators for efficiency assessments of regional higher educational system

Indicator	Function of the university	Indication, unit of measurement	Interpretation of the indicator
Inputs	Educational activity	Students, person	Total number of students attending bachelor, specialist and master degrees in the region, 2014/2015
	Educational activity, scientific researches	Staff, person	Total number of higher-education teaching and academic staff and researchers, 2014/2015
	All functions	Financing, thousand rubles	Revenues, volume of total funds received, 2014/2015
Outputs	Educational activity (EDU)	Employed graduates, person	Number of employed graduates, 2015
	Scientific researches (SCI)	Publications, qty	Total number of published articles of the organization per 100 academic staff, 2015
	Innovations and regional partnerships in regional economy (IRP)	Patents, qty	Issued patents for inventions and utility models, 2015
		Innovation infrastructure units, qty	Number of business incubators, technological parks, centers for collective usage of scientific equipment and university affiliated small enterprises, 2015

To calculate the technical efficiency of the regional higher education systems based on the selected indicators, a sample of data was compiled for 830 universities from 80 regions of Russia in 2015 (the latest available data for the regions of the Russian Federation) [13, 14]. As the results of the analysis, 31 regions were selected for further modeling by the criterion of the amount of funds received, that is, the amount of funding for regional higher education systems. The largest volumes of financing were established in the regions where significant investments were made in recent years in accordance with the state policy of development and reform of higher education. These regions have large federal, national, flagship universities and the Project 5–100 universities. These universities, as large actors of regional systems, make a significant contribution to the regional development, play a significant role in regional economy. From the point of view of the present study, the evaluation of their effectiveness is the most informative for analysis and indicative of the results.

### 3.3. Applying the DEA model

The proposed approach uses three different DEA models with the same set of inputs and different outputs. The models correspond to different areas of assessment of the university activities described in Table 2: educational activity (EDU), scientific researches (SCI), innovations and regional partnerships in the regional economy (IRP).



Table 2

Technical efficiency evaluations of higher education systems for the Russian Federation regions based on the different criteria using DEA models

Technical efficiency for EDU, DMU $\theta$		Technical efficiency for SCI, DMU $\theta$		Technical efficiency for IRP, DMU $\theta$	
Tyumen Region	1	Republic of Mordovia	1	Tomsk Region	1
Perm Region	1	Kaliningrad Region	1	Republic of Tatarstan	1
Samara Region	1	Stavropol Region	1	Belgorod Region	1
Tomsk Region	1	Republic of Sakha (Yakutia)	1	Republic of Bashkortostan	1
Kaliningrad Region	1	Republic of Dagestan	1	Ulyanovsk Region	1
Republic of Sakha (Yakutia)	1	Ulyanovsk Region	0.84	Sverdlovsk Region	0.93
Orenburg Region	1	Udmurt Republic	0.83	Voronezh Region	0.93
Udmurt Republic	1	Krasnodar Region	0.79	Krasnoyarsk Region	0.88
Republic of Mordovia	1	Perm Region	0.76	Samara Region	0.86
Ulyanovsk Region	0.95	Volgograd Region	0.70	Perm Region	0.85
Novosibirsk Region	0.88	Voronezh Region	0.66	Novosibirsk Region	0.81
Republic of Bashkortostan	0.88	Primorsky Region	0.63	Stavropol Region	0.79
Republic of Tatarstan	0.88	Belgorod Region	0.61	Rostov Region	0.73
Chelyabinsk Region	0.88	Kemerovo Region	0.61	Omsk Region	0.72
Sverdlovsk Region	0.88	Orenburg Region	0.55	Volgograd Region	0.69
Belgorod Region	0.88	Sverdlovsk Region	0.55	Khabarovsk Region	0.67
Volgograd Region	0.88	Rostov Region	0.53	Chelyabinsk Region	0.65
Kemerovo Region	0.88	Nizhny Novgorod Region	0.53	Nizhny Novgorod Region	0.64
Omsk Region	0.88	Irkutsk Region	0.52	Kemerovo Region	0.63
Altai Region	0.86	Krasnoyarsk Region	0.50	Krasnodar Region	0.63
Krasnodar Region	0.85	Omsk Region	0.50	Irkutsk Region	0.60
Khabarovsk Region	0.77	Samara Region	0.50	Udmurt Republic	0.56
Rostov Region	0.76	Chelyabinsk Region	0.49	Primorsky Region	0.53
Saratov Region	0.76	Republic of Bashkortostan	0.47	Republic of Sakha (Yakutia)	0.53
Nizhny Novgorod Region	0.76	Novosibirsk Region	0.46	Saratov Region	0.53
Krasnoyarsk Region	0.76	Republic of Tatarstan	0.44	Tyumen Region	0.49
Irkutsk Region	0.76	Khabarovsk Region	0.36	Altai Region	0.46
Primorsky Region	0.76	Tomsk Region	0.34	Republic of Dagestan	0.41
Stavropol Region	0.75	Saratov Region	0.30	Kaliningrad Region	0.35
Voronezh Region	0.65	Tyumen Region	0.21	Republic of Mordovia	0.32
Republic of Dagestan	0.60	Altai Region	0.03	Orenburg Region	0.18

A rough estimation rule of value  $n$  in a DEA model is to choose  $n \geq \max\{m \cdot s, 3(m + s)\}$  [15]. The quantity of DMUs depends on the practical purposes of the research, but it should be noted that as the number of input and output variables increases, the number of effective entities increases. In this case, it is suggested to take the  $n = 31$ .

We have proposed an output-orientation model, because such DEA maximizes output for a given level of input. VRS model's orientation depends on researching objectives. The model which has been applied is NDRS type of returns to scale.

Table 2 presents the computed values of technical efficiency of regional higher education systems for 31 regions of Russia in three different models in accordance with the functions of the higher education system.

The DEA model resulted in the ranking of the regions according to the technical efficiency indicator. This allowed to determine the homogeneity of the regions, to identify leaders and outsiders among the regions.



The regions with the indicator value  $\theta = 1$  proved to be effective in terms of technical efficiency:

- in graduate employability: the Tyumen Region, the Perm Region, the Samara Region, the Tomsk Region, the Kaliningrad Region, the Republic of Sakha (Yakutia), the Orenburg Region, the Udmurt Republic, the Republic of Mordovia;

- in scientific effectiveness, publication activity and patenting: the Stavropol Region, the Kaliningrad Region, the Republic of Sakha (Yakutia), the Republic of Mordovia, the Republic of Dagestan;

- in innovation infrastructure development: the Belgorod Region, the Ulyanovsk Region, the Republic of Bashkortostan, the Republic of Tatarstan, the Tomsk Region.

These regions have an effective structure and return to the funds invested in regional higher education systems; their experience requires detailed analysis, study and dissemination in benchmarking of other regions of Russia.

Table 3 presents the final results of technical efficiency evaluation of regional higher education systems.

Table 3

Summary statistics on DEA results

Descriptive statistics	Technical efficiency for models		
	EDU	SCI	IRP
Mean	0.87	0.60	0.69
Std. deviation	0.11	0.25	0.22
Median	0.88	0.55	0.67
Min	0.60	0.03	0.19
Percentage of effective regions ( $\theta = 1$ )	29.03	16.13	16.13
Percentage of inefficient regions ( $\theta < 0.5$ )	0.00	35.48	19.35

When we compare the scores from models EDU and SCI, EDU and IRP, we can see significant differences. In terms of educational performance, 29% of regional higher education systems are effective, and there are no inefficient universities with  $\theta < 0.5$ . In scientific research and innovation and regional partnership, the percentage of effective regional systems of higher education is much lower: 16%. Thus, while forming strategic directions for the development and reorganization of the Russian regional higher education systems, more attention should be paid to the research and innovation.

Figure 1 shows diagram sticks 3D (visualisation method for plot of the Scatter type) for estimating the magnitude and dispersion of the obtained technical efficiency values for regions.

There are no leading regions in all three areas of development. It means that for all regions there are areas that require further improvement. At the same time, there is only a small number of outsiders in the indicated set of regions in three direction of assessment. Data visualization does not allow to conclude that there is a relationship among the technical efficiency indicators in three parameters by region.

Figure 2 shows the technical efficiency values for each region from the source list. This will allow to compare of 16 regions that are effective in one or several areas in accordance with the university functions. For these regions, the value of technical efficiency equals 1 at least in one model.

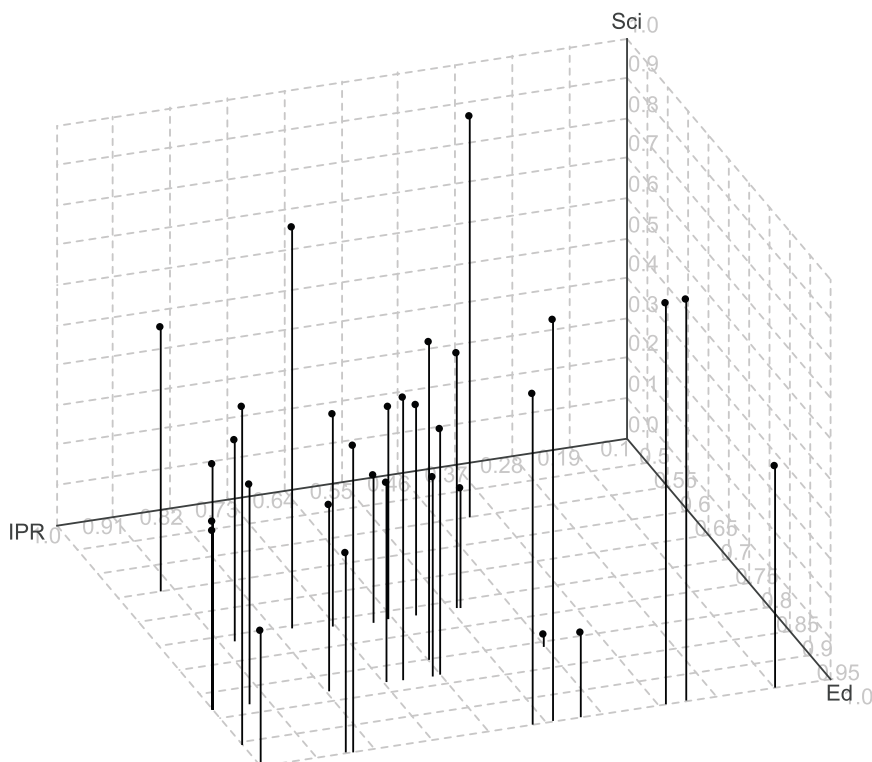


Fig. 1. Regions' technical efficiency estimation in accordance with the functions of the university ( $n = 31$ )

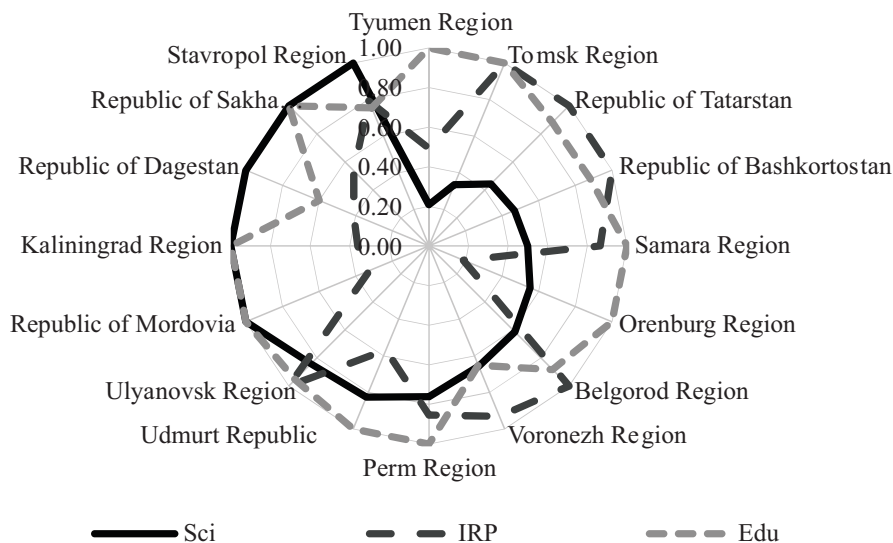


Fig. 2. Leading regions' technical efficiency estimation in accordance with the functions of the university ( $n = 16$ )

For the leading regions presented in the diagram, there is a significant imbalance in the technical efficiency values in various areas. This leads to conclusion that it is necessary to develop a more rational strategy for the balanced development of higher education systems in such regions.

The use of the DEA methodology has made it possible to assess the performance efficiency of regional higher education systems and the achievement in outcomes and to draw the following conclusions.



Thus, the results of the region ranking in educational function efficiency and graduate employability turned out to be quite predictable: the given regions with their economic level are able to provide jobs for the graduates. These are industrially developed regions with well-balanced regional systems of higher education, where universities can provide training that meets the employers' needs. This is connected with the development of the region's economy.

Regions with relatively high efficiency of the innovation infrastructure development, business incubators, centers for common use of technologies, university affiliated small innovative enterprises: the Belgorod Region, the Ulyanovsk Region, the Republic of Bashkortostan, the Republic of Tatarstan, the Tomsk Region are recognized leaders of innovation in Russia. This indirect assessment of the effectiveness of the university research and innovation practice in terms of commercialization of their innovations is the evaluation of the university's effort and skill to build a partnership with stakeholders and innovative infrastructure organizations in the region.

The evaluation of the research efficiency in terms of publication activity of universities and regional higher education systems provides the following results: the leading positions are occupied by Stavropol and Dagestan. Regions with international ranking universities, with strong scholarly traditions in the field of fundamental and technical research, with high publication activity and high citation rates in international WoS and Sc databases, have significantly lower technical efficiency values in this area, for example, the Tomsk Region ( $\theta = 0.34$ ), the Novosibirsk Region ( $\theta = 0.46$ ), Tatarstan ( $\theta = 0.44$ ). These results show that the standard reporting indicators of publication activity need revision in a situation where the number of publications does not reflect their quality.

## CONCLUSION

The development of DEA methods for assessing the effectiveness of the regional innovation system and the university will allow to study various aspects of regional university performance and create tools for such assessment.

Demonstration of the DEA methodology in such area has the essential value for further research. Regional higher education systems have been examined through DEA for three important parameters connected with different functions of the university.

The DEA model makes it possible to obtain a quantitative estimation of the higher education system's efficiency, identify the leaders in the set under consideration, analyze the environment. As a result of monitoring, it is possible to formulate an optimization strategy for the regions with low performance indicators, focusing on the decisions of the leaders.

**Acknowledgements:** The reported study was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project "Development of methodology and tools for assessing the effectiveness of regional higher education system and modelling its balanced development", No. 18-010-01115.

## References

1. Benneworth P. The engaged university in practice? In: P. Benneworth (ed.). *University engagement with socially excluded communities*. Dordrecht, Springer, 2013, pp. 329–343.
2. Etzkowitz H., Leydesdorff L. The Triple Helix – University-Industry-Government Relations: A Laboratory for Knowledge Based Economic Development. *EASST Review*, 1995, vol. 14, no. 1, pp. 14–19.



3. Goddard J. B., Chatterton R. The response of universities to regional needs. *European journal of education*, 2000, vol. 35, no 4, pp. 475–496. DOI: <https://doi.org/10.1111/1467-3435.00041>
4. Aleskerov F. T., Belousova V. Y., Petrushchenko V. V. Models of data envelopment analysis and stochastic frontier analysis in the efficiency assessment of universities. *Autom Remote Control*, 2017, vol. 78, no. 5, pp. 902–923. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117917050125>
5. Emrouznejad A., Parker B. R., Tavares G. Evaluation of research in efficiency and productivity: A survey and analysis of the first 30 years of scholarly literature in DEA. *Socio-Economic Planning Sciences*, 2008, vol. 42, no. 3, pp. 151–157. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.seps.2007.07.002>
6. Firsova A., Chernyshova G. Analysis of efficiency of regional innovation systems taking into account the financing structure. In: *Proceedings of the International Scientific Conference “Competitive, Sustainable and Secure Development of the Regional Economy: Response to Global Challenges” (CSSDRE 2018), Part of series: Advances in Economics, Business and Management Research (AEBMR)*, 2018, vol. 39, pp. 417–422.
7. Wolszczak-Derlacz J. An evaluation and explanation of (in)efficiency in higher education institutions in Europe and the U.S. with the application of two-stage semi-parametric DEA. *Research Policy*. 2017, vol. 46, pp. 1595–1605. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.respol.2017.07.010>.
8. Johnes J. Efficiency measurement. In: *International handbook on the economics of education* / by G. Johnes, J. Johnes. Cheltenham, UK; Northampton, MA, USA, Edward Elgar Publishing Ltd., 2004, pp. 613–742.
9. Charnes A., Cooper W. W., Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operations Research*. 1978, vol. 2, no. 6, pp. 429–444. DOI: [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0377-2217\(78\)90138-8](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8)
10. Banker R. D., Charnes A., Cooper W. W. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 1984, vol. 30, no. 9, pp. 1078–1092. DOI: <https://doi.org/10.1287/mnsc.30.9.1078>.
11. Ylvinger S. *Essays on Production Performance Assessment, Paper II*. Umea Economic Studies, 2000. 531 p.
12. Zhu J. *Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking. Data Envelopment Analysis with Spreadsheets*. New York, Springer, 2008. 334 p.
13. Information and analytical materials on the results of monitoring the effectiveness of educational institutions of higher education. *Ministry of Education and Science of the Russian Federation*. Site. Available at: <http://indicators.miccedu.com/monitoring/?m=vpo> (accessed 01 August 2018).
14. *The Russian Federal Service of State Statistics*. Site. Available at: [http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat\\_main/rosstat/en/statistics/science\\_and\\_innovations/science/](http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/en/statistics/science_and_innovations/science/) (accessed 01 August 2018).
15. Cooper W. W., Seiford L. M., Tone K. *Introduction to Data Envelopment Analysis and Its Uses*. New York, Springer US, 2006. 354 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/0-387-29122-9>

---

**Cite this article as:**

Firsova A. A., Chernyshova G. Yu. Mathematical Models for Evaluation of the Higher Education System Functions with DEA Approach. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 3, pp. 351–362 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-351-362>

---





УДК 004.9,65.011

## Математические модели для оценки функций систем высшего образования средствами DEA

А. А. Фирсова, Г. Ю. Чернышова

Фирсова Анна Александровна, доктор экономических наук, заведующий кафедрой банковского дела, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, a.firsova@rambler.ru

Чернышова Галина Юрьевна, кандидат экономических наук, доцент кафедры дискретной математики и информационных технологий, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, cherny111@mail.ru

Целью данного исследования является применение оптимизационных моделей и методов анализа среды функционирования (Data Envelopment Analysis, DEA) для оценки эффективности региональных систем высшего образования. Была протестирована гипотеза о неравномерности развития региональных систем высшего образования, вычислены агрегированные показатели эффективности систем высшего образования, проведено ранжирование региональных систем высшего образования с помощью моделей DEA. Новизна исследования состоит в модификации модели DEA для применения в задаче анализа эффективности функционирования региональных систем высшего образования. В процессе DEA-моделирования, помимо выбора ориентации модели, необходимо также учесть эффект масштаба. При этом используются дополнительные ограничения в задачах математического программирования в DEA, что обеспечивает построение кусочно-линейной границы эффективности для рассматриваемых объектов различными способами. В работе применялась модифицированная ориентированная на выходы модель с неубывающей отдачей от масштаба. Были реализованы отдельные модели для определения интегральных показателей технической эффективности региональных систем высшего образования в соответствии с тремя основными функциями университета: образование, наука и региональное партнерство.

*Ключевые слова:* оценка эффективности, принятие решений, анализ среды функционирования, региональные системы высшего образования.

Поступила в редакцию: 14.02.2019 / Принята: 10.04.2019 / Опубликовано: 31.08.2019

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

**Благодарности.** Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект «Разработка методологии и инструментария оценки эффективности функционирования региональной системы высшего образования и моделирование ее сбалансированного развития» № 18-010-01115.

---

### Образец для цитирования:

*Firsova A. A., Chernyshova G. Yu. Mathematical Models for Evaluation of the Higher Education System Functions with DEA Approach [Фирсова А. А., Чернышова Г. Ю. Математические модели для оценки функций систем высшего образования средствами DEA] // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 351–362. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-351-362>*

---