МЕХАНИКА

УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ОБОЛОЧЕК В КООРДИНАТАХ ОБЩЕГО ВИДА

А. А. Барышев[1], С. А. Лычев[2], А. В. Манжиров[3]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, BaryshevAA@gmail.com

[2]Доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, lychevsa@mail.ru

[3]Доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, manzh@inbox.ru

Построена математическая модель упругих однородных оболочек в рамках кинематики типа Рейсснера–Миндлина. На основе прямых (бескоординатных) методов тензорного исчисления получены уравнения равновесия в перемещениях в произвольной (не обязательно ортогональной) системе координат, учитывающие асимметрию расположения лицевых поверхностей. Для сферической оболочки предложена процедура построения решения, основанная на методе спектрального разложения, описывающего напряженно-деформированное состояние при потенциальных силовых и моментных статических нагрузках.

Ключевые слова: сферическая оболочка, статический изгиб, аналитические решения, спектральные разложения, собственные функции.

Задачи математического моделирования тонкостенных тел, в частности тонких оболочек, возникают при исследовании очень широкого класса современных материалов и конструкций. Создание новых моделей (теорий) или модификация существующих объясняется, с одной стороны, использованием новых материалов, например наноматериалов [1], композитных материалов [2], с другой — описанием технологических процессов, при которых объекты создаются путем наращивания, например при электролитическом, газодинамическом, парофазном осаждениях, ионной имплантации, стереолитографии [3]. Большинство работ в этом направлении основаны на идее редукции задачи о деформировании трехмерного тела к задаче о некоторой специальной трансформации двумерного многообразия, представленного поверхностью осреднения оболочки. Такое преобразование может быть выполнено различным образом. Это означает, что несмотря на введение в модель одних и тех же кинематических и статических ограничений на напряженно-деформированное состояние, окончательные соотношения и уравнения оказываются различными [4].

Создание моделей тонкостенных тел, позволяющих описывать новые эффекты, естественно, основано на использовании современных понятий механики твердого тела, заложенных в трудах C. Trusdell, R. A. Toupin [5], W. Noll [6], M. Epstein [7], M. E. Gurtin [8], G. A. Maugin [9], Cohen [10] и др. Это позволяет осуществить моделирование процессов, выходящих за рамки классической механики оболочек. Так, слоистые оболочки представляют собой соединения континуального множества мембран, или по терминологии [8] — материальных поверхностей, каждая из которых обладает своей индивидуальной отсчетной конфигурацией. Поэтому деформации этих мембран в «сборке», за исключением специальных случаев, не являются совместными, т. е. слоистые оболочки не обладают натуральной конфигурацией [11].

Целью настоящего исследования является построение уравнений равновесия упругих оболочек в рамках кинематики типа Рейсснера–Миндлина, учитывающих асимметрию строения, в координатах общего вида.

Тонкостенные тела интуитивно понимаются как тела, образы конфигураций которых определяются характерными размерами различных порядков: один их них можно трактовать как «малый параметр». Это определение можно сформулировать более строго, если рассмотреть в физическом пространстве две совокупности открытых шаров. Пусть элементы первой совокупности содержат все образы допустимых конфигураций, а элементы второй полностью содержатся в них. Тогда можно определить наибольший шар из второй совокупности и наименьший из первой. Отношение их радиусов дает параметр, определяющий отношение характерных размеров. Порядок малости этого параметра определяет «степень тонкостенности».

Оболочки определяются как подмножество класса тонкостенных тел, граница которых устроена специальным образом: она представляет объединение двух поверхностей, называемых лицевыми, и конечного множества (возможно, пустого) линейчатых поверхностей. Последние задают так называемый опорный контур оболочки. Если лицевые поверхности эквидистантны, то оболочка классифицируется как оболочка постоянной толщины. Здесь и далее поверхность осреднения будем обозначать символом S. Ортогональная проекция средней линии линейчатых поверхностей на S определяет на ней совокупность (возможно, пустую) замкнутых кривых, которые определяют опорный контур Γ.

Заметим, что в наиболее общем случае S можно рассматривать как ориентируемую поверхность лишь локально, а в целом S представляет собой двумерное гладкое многообразие, накрываемое совокупностью локальных карт, образующих атлас S. То же самое следует сказать и о лицевых поверхностях. Примеры подобных оболочек можно построить как обобщения известных примеров из топологии: лист Мебиуса, бутылка Клейна, яйцо Дунса. Вместе с тем, в рамках статьи ограничимся оболочками, для которых S представляет собой тривиальное многообразие, т. е. двумерное многообразие, атлас которого состоит из одной карты. Более того, будем полагать, что S может быть вложено в физическое (евклидово) пространство $\mathscr{E}$ посредством отображения $\boldsymbol{\rho} : D \to \mathscr{E}, D \subset \mathbb{R}^2$.

Предположение о возможности вложения достаточно сильное: из него вытекает вполне определенная связность, определяющая S глобально как риманово двумерное многообразие. Если дополнительно предположить, что $\boldsymbol{\rho}$ не имеет особых точек, а на S может быть построено непрерывное поле единичных нормалей, то S можно характеризовать как неособую ориентируемую поверхность[1].

1. Рассмотрим подробно необходимые для дальнейшего изложения геометрические структуры на S. Отображение $\boldsymbol{\rho}$ определяет на S поле реперов, которые принято в механике называть векторными базисами [12]:

$$\boldsymbol{\rho}_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial q^\alpha} \qquad (q^1, q^2) \in D \subset \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

На языке геометрии это поле реперов (вернее, их линейные оболочки) задает *касательное расслоение* TS. В общем случае реперы представляют неортогональные пары векторов (скалярное произведение индуцируется скалярным произведением в физическом пространстве) и порождают дуальные реперы $\boldsymbol{\rho}^\alpha$:

$$\boldsymbol{\rho}^\alpha \cdot \boldsymbol{\rho}_\beta = \delta^\alpha_\beta.$$

Поле дуальных реперов определяет *кокасательное расслоение* T^*S.

Определим первый фундаметальный тензор поверхности $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\rho}_\alpha \otimes \boldsymbol{\rho}^\alpha = \boldsymbol{\rho}^\alpha \otimes \boldsymbol{\rho}_\alpha = a_{\alpha\beta} \boldsymbol{\rho}^\alpha \otimes \boldsymbol{\rho}^\beta = a^{\alpha\beta} \boldsymbol{\rho}_\alpha \otimes \boldsymbol{\rho}_\beta. \tag{2}$$

Компоненты $a_{\alpha\beta}, a^{\alpha\beta}$ определяются скалярными произведениями векторных базисов $a_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\rho}_\alpha \cdot \boldsymbol{\rho}_\beta$, $a^{\alpha\beta} = \boldsymbol{\rho}^\alpha \cdot \boldsymbol{\rho}^\beta$. Отметим, что этот тензор является оператором ортогонального проектирования на касательное пространство, т. е.

$$\forall\ \boldsymbol{u} \in TS \qquad \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{u}.$$

Определим, принимая нотацию Гиббса [13], двумерный оператор Гамильтона на многообразии S по формуле

$$\boldsymbol{\nabla}_s = \boldsymbol{\rho}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha}. \tag{3}$$

Тогда градиент векторного поля нормалей $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{\rho}_2}{|\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{\rho}_2|}$ имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\rho}^\alpha \otimes \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial q^\alpha} = -\boldsymbol{B}. \tag{4}$$

Он определяет второй фундаментальный тензор поверхности $\boldsymbol{B}$.

[1]Из классификационной теоремы для двумерных многообразий вытекает, что продолжение S топологически эквивалентно либо плоскости, либо сфере, либо n-тору.

Таким образом, с каждой точкой поверхности S ассоциирована тройка векторов $\boldsymbol{\rho}_1$, $\boldsymbol{\rho}_2$, $\boldsymbol{n}$, которая в силу условий, указанных выше, образует базис в векторном простанстве, ассоциированным с $\mathscr{E}$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие разложения градиента векторного поля и дивергенции тензорного поля, определенного на поверхности осреднения [14]:

$$\forall\ \boldsymbol{u} \in TS \qquad \boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{n}, \tag{5}$$

$$\forall\ \boldsymbol{T} \in TS \otimes TS \qquad \boldsymbol{\nabla}_s \cdot \boldsymbol{T} = (\boldsymbol{\nabla}_s \cdot \boldsymbol{T}) \cdot \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} : \boldsymbol{T}) \boldsymbol{n}. \tag{6}$$

Причем операции с поверхностным оператором Гамильтона могут быть выражены в терминах ковариантной производной ∇_α и соответствующих символов Кристоффеля 2-го рода на поверхности $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$:

$$\boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{A} = \nabla_\alpha u^\beta \boldsymbol{\rho}^\alpha \otimes \boldsymbol{\rho}_\beta = \nabla_\alpha u_\beta \boldsymbol{\rho}^\alpha \otimes \boldsymbol{\rho}^\beta, \qquad \nabla_\alpha u^\beta = \frac{\partial u^\beta}{\partial q^\alpha} + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} u^\gamma, \qquad \nabla_\alpha u_\beta = \frac{\partial u_\beta}{\partial q^\alpha} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} u_\gamma,$$

$$((\boldsymbol{\nabla}_s \cdot \boldsymbol{T}) \cdot \boldsymbol{A})^\alpha = \frac{\partial T^{\beta\alpha}}{\partial q^\beta} + \Gamma^\beta_{\beta\gamma} T^{\gamma\alpha} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} T^{\beta\gamma}.$$

Производные базисных векторов можно представить разложениями:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_\alpha}{\partial q^\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \boldsymbol{\rho}_\gamma + b_{\alpha\beta} \boldsymbol{n}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\rho}^\alpha}{\partial q^\beta} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \boldsymbol{\rho}^\gamma + b^\alpha_\beta \boldsymbol{n}. \tag{7}$$

Координатное представление на поверхности S порождает криволинейные координаты в окрестности S. Фактически, эти криволинейные координаты задают некоторую карту из атласа, накрывающего все физическое пространство:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\rho} + z \boldsymbol{n}, \tag{8}$$

где z — координата, отсчитываемая вдоль нормали, которую далее будем называть трансверсальной координатой. Эта карта является важным элементом теории, поскольку позволяет ввести согласованные координаты как на S, так и на всех слоях, образующих оболочку. Порождаемые этой картой поля реперов (основных и взаимных) имеют вид

$$\boldsymbol{R}_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial q^\alpha}, \qquad \boldsymbol{R}^\alpha \cdot \boldsymbol{R}_\beta = \delta^\alpha_\beta, \qquad \boldsymbol{R}_3 = \boldsymbol{R}^3 = \boldsymbol{n}. \tag{9}$$

Из соотношений (1), (4) и формул (7), (9) следует, что

$$\boldsymbol{R}_\alpha = (\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{\rho}_\alpha, \qquad \boldsymbol{R}^\alpha = (\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{B})^{-1} \cdot \boldsymbol{\rho}^\alpha. \tag{10}$$

Тогда пространственный оператор Гамильтона в окрестности поверхности можно представить в терминах поверхностного оператора $\boldsymbol{\nabla}_s$ (3):

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{R}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \boldsymbol{n} \frac{\partial}{\partial z} = (\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{B})^{-1} \cdot \boldsymbol{\nabla}_s + \boldsymbol{n} \frac{\partial}{\partial z}. \tag{11}$$

2. В теории оболочек Рейсснера–Миндлина (в некоторых работах называемой теорией типа Тимошенко [15]) принимаются следующие гипотезы:

1. Нормальный элемент к поверхности осреднения до деформации не изменяет своей длины.
2. Напряжения обжатия по толщине $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$ малы и ими можно принебречь.

Первую группу гипотез можно классифицировать как *кинематические*, поскольку они задают ограничения на деформацию тела, а вторую — как *статические*, ввиду того что в ней речь идет о специальном типе распределения напряжений.

Очевидно, что постулирование кинематических гипотез эквивалентно введению дополнительных идеальных связей. По этой причине оболочки можно рассматривать как тела со связями [12].

Математическая формулировка кинематических ограничений определяется соотношением

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + w\boldsymbol{n} - z\boldsymbol{\vartheta}, \qquad \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \qquad \boldsymbol{\vartheta} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \tag{12}$$

где $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(q^1, q^2)$, $w = w(q^1, q^2)$ — вектор тангенциальных смещений и прогиб точек поверхности осреднения, $\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\vartheta}(q^1, q^2)$ — вектор, характеризующий поворот нормального элемента. С другой стороны, вводя вектор поворота как $\boldsymbol{\theta} = \vartheta^2 \boldsymbol{e}_1 - \vartheta^1 \boldsymbol{e}_2$, поле перемещений можно записать [16] в виде $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + w\boldsymbol{n} + z\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{n}$.

При заданных ограничениях на поле перемещений (12) его градиент может быть вычислен следующим образом:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla u} &= \left((\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{B})^{-1} \cdot \boldsymbol{\nabla}_s + \boldsymbol{n} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\boldsymbol{v} + w\boldsymbol{n} - z\boldsymbol{\vartheta}) = \\ &= (\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{B})^{-1} \cdot (\boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{v} - \boldsymbol{B} w + \boldsymbol{\nabla}_s w \otimes \boldsymbol{n} - z \boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{\vartheta}) - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{\vartheta}. \end{aligned} \tag{13}$$

Непосредственное использование выражения (13) в значительной степени затрудняется наличием множителя $(\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{B})^{-1}$. В различных вариантах теории оболочек используются разные формы его представления. Ряд авторов полагают его равным $\boldsymbol{A}$ (ввиду малости z и главных значений тензора кривизны), либо используют разнообразные аппроксимации. Это приводит к отличиям в окончательных уравнениях. В этой связи представляется важным конкретизировать форму представления этого множителя. Далее используется асимптотическое разложение:

$$(\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{A} + z\boldsymbol{B} + o(z), \tag{14}$$

которое отражает идею представления полей в виде формулы Тейлора первого порядка по отношению к трансверсальной координате z.

Соответствующее представление для градиента перемещений (13) имеет вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla u} &= \boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} w + (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\nabla}_s w) \otimes \boldsymbol{n} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{\vartheta} + \\ &+ z \left(-\boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{\vartheta} \cdot \boldsymbol{A} + \underline{\boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} w) + (\boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\nabla}_s w - \boldsymbol{\vartheta})) \otimes \boldsymbol{n}} \right). \end{aligned} \tag{15}$$

Заметим, что подчеркнутые слагаемые, как правило, не учитываются [17, с. 31; 18, с. 82; 19].

Тензор, сопряженный к градиенту перемещений (15), может быть записан в форме

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\nabla u})^* &= \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{v})^* - \boldsymbol{B} w + \boldsymbol{n} \otimes (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\nabla}_s w) - \boldsymbol{\vartheta} \otimes \boldsymbol{n} + \\ &+ z \left(-\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{\vartheta})^* + \underline{\left(\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{v})^* - \boldsymbol{B} w \right) \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{n} \otimes (\boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\nabla}_s w - \boldsymbol{\vartheta}))} \right). \end{aligned}$$

Полученные соотношения позволяют записать выражение для тензора малых деформаций $2\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla u} + (\boldsymbol{\nabla u})^*$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= [\boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}]^{sym} - \boldsymbol{B} w + [(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\nabla}_s w - \boldsymbol{\vartheta}) \otimes \boldsymbol{n}]^{sym} + \\ &+ z \left(-[\boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{\vartheta} \cdot \boldsymbol{A}]^{sym} + [\boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} w)]^{sym} + [\boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\nabla}_s w - \boldsymbol{\vartheta}) \otimes \boldsymbol{n}]^{sym} \right). \end{aligned} \tag{16}$$

Эти и все дальнейшие выражения могут быть записаны в компактном виде, если ввести так называемые меры *мембранной* $\boldsymbol{\epsilon}$, *изгибной* $\boldsymbol{\varkappa}$ и *угловой* $\boldsymbol{\gamma}$ деформации:

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}]^{sym} - \boldsymbol{B} w, \qquad \boldsymbol{\varkappa} = [\boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{\vartheta} \cdot \boldsymbol{A}]^{sym}, \qquad \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{v}_s + \boldsymbol{\nabla}_s w - \boldsymbol{\vartheta}. \tag{17}$$

Здесь $[\ldots]^{sym}$ означает операцию выделения симметричной части тензора, т. е. $[\boldsymbol{T}]^{sym} = (\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^*)/2$.

В терминах (17) тензор $\boldsymbol{\varepsilon}$ (16) записывается в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\epsilon} + [\boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{n}]^{sym} + z \left(\underline{\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{Z} + [(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \otimes \boldsymbol{n}]^{sym}} - \boldsymbol{\varkappa} \right), \tag{18}$$

где $\boldsymbol{Z}$ определяется формулой $\boldsymbol{Z} = \left((\boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{v})^* \cdot \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{\nabla}_s \boldsymbol{v})^* \right)/2$. Заметим, что слагаемые $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{Z}$ в большинстве работ входят в тензор изгибной деформации [18, 19].

3. Для изотропного линейного упругого материала оболочки принимаем следующие определяющие соотношения:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\aleph} : \varepsilon + \lambda \boldsymbol{A} tr \varepsilon \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \lambda = \frac{2\mu\nu}{1-\nu} = \frac{E\nu}{1-\nu^2}. \tag{19}$$

Здесь тензор $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши, а тензор $\boldsymbol{\aleph}$ имеет вид

$$\boldsymbol{\aleph} = \boldsymbol{\rho}^\alpha \otimes \boldsymbol{\rho}_\beta \otimes \boldsymbol{\rho}_\alpha \otimes \boldsymbol{\rho}^\beta + k \left(\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{\rho}_\alpha \otimes \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{\rho}^\alpha + \boldsymbol{\rho}^\alpha \otimes \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{\rho}_\alpha \otimes \boldsymbol{n} \right),$$

где k — коэффициент поперечного сдвига [15]. Заметим, что в этом случае выполняется статическая гипотеза в «жестком» варианте [20], так как $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}$ умножается на двумерный единичный оператор $\boldsymbol{A}$.

Тензор напряжений представим в форме следующего разложения:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0^{\|} + \boldsymbol{\sigma}_0^{\perp} + z\left(\boldsymbol{\sigma}_1^{\|} + \boldsymbol{\sigma}_1^{\perp}\right),$$

где $\boldsymbol{\sigma}_0^{\|} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda\boldsymbol{A}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}_0^{\perp} = k\mu\left[\boldsymbol{\gamma}\otimes\boldsymbol{n}\right]^{sym}$, $\boldsymbol{\sigma}_1^{\|} = 2\mu\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{\varkappa}\right) + \lambda\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\epsilon} - \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varkappa}\right)$, $\boldsymbol{\sigma}_1^{\perp} = k\mu\left[\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\gamma}\otimes\boldsymbol{n}\right]^{sym}$.

Ниже приведем результат применения операции tr к тензорам деформаций:

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\nabla}_s\cdot\boldsymbol{v} - w\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B} \qquad \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varkappa} = \boldsymbol{\nabla}_s\cdot\boldsymbol{\vartheta} \qquad \mathrm{tr}\,\boldsymbol{Z} = 0.$$

Следующий важный этап редукции трехмерных уравнений к двумерным связан с аппроксимацией выражения $G(\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{B})^{-1}$. Введение редуцированных напряжений — сил и моментов — основано на интегрировании по трансверсальной координате относительно поверхности осреднения. Для выполнения операции интегрирования удобно предварительно ввести напряжения, приведенные к метрике поверхности осреднения S. Эти напряжения будем обозначать символом $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = G(\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{B})^{-1}\cdot\boldsymbol{\sigma} \qquad G = G(z) = \det\left(\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{B}\right). \tag{20}$$

Из теоремы Гамильтона–Кэли, записанной для тензора, определенного на поверхности, которая может быть сформулирована следующим образом [14]:

$$\boldsymbol{X}^2 - \boldsymbol{X}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}\det(\boldsymbol{X}) = 0, \qquad \text{где} \qquad \boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{B}), \qquad \det(\boldsymbol{X}) = G, \qquad \mathrm{tr}\,\boldsymbol{A} = 2,$$

получаем, что

$$G\left(\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{B}\right)^{-1} = \boldsymbol{A} + z\boldsymbol{C}, \qquad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}.$$

Поэтому разложение в ряд Тейлора по трансверсальной координате тензорного поля $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ дает

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^{\|} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^{\perp} + z\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{\|} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{\perp}\right) + o(z), \tag{21}$$

а входящие в него компоненты определяются формулами

$$\begin{gathered}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^{\|} = \boldsymbol{\sigma}_0^{\|}, \qquad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^{\perp} = k\mu\boldsymbol{\gamma}\otimes\boldsymbol{n}, \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{\|} = 2\mu\left(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{\varkappa}\right) + \lambda\left(\boldsymbol{A}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\varkappa}\right) + \boldsymbol{Y}:\boldsymbol{\epsilon}\right) \qquad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{\perp} = k\mu\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\gamma}\otimes\boldsymbol{n},\end{gathered} \tag{22}$$

где $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$.

Определим тензоры усилий $\boldsymbol{T}$ и тензор моментов $\mathscr{M}$ формулами [14, 21, 22]:

$$\boldsymbol{T} = \int_{-h_-}^{h_+}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\,dz, \qquad \mathscr{M} = -\int_{-h_-}^{h_+} z\hat{\boldsymbol{\sigma}}\times\boldsymbol{n}\,dz. \tag{23}$$

Из определений тензоров следует, что $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T} = 0$, $\boldsymbol{n}\cdot\mathscr{M} = \mathscr{M}\cdot\boldsymbol{n} = 0$. Составляющие тензора усилий определяют *тензор мембранных усилий* $\mathscr{T} = \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{A}$ и *вектор перерезывающих сил* $\mathscr{Q} = \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}$.

На основании (23) выразим тензоры мембранных усилий, моментов и вектор перерезывающих сил через меры деформации (17), обозначая через $h = h_+ + h_-$ толщину оболочки:

$$\begin{gathered}\mathscr{T} = h\left(2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda\boldsymbol{A}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\epsilon}\right) - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\left(2\mu\boldsymbol{\varkappa} + \lambda\boldsymbol{A}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varkappa}\right) + \mathscr{T}_c, \\ \mathscr{T}_c = \frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\left\{2\mu\left(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Z}\right) + \lambda\left(\boldsymbol{A}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\epsilon}\right) + \boldsymbol{Y}:\boldsymbol{\epsilon}\right)\right\}, \\ -\mathscr{M} = \left[\frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\left(2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda\boldsymbol{A}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\epsilon}\right) - \frac{h_+^3 + h_-^3}{3}\left(2\mu\boldsymbol{\varkappa} + \lambda\boldsymbol{A}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varkappa}\right)\right]\times\boldsymbol{n} + \mathscr{M}_c, \\ -\mathscr{M}_c = \frac{h_+^3 + h_-^3}{3}\left\{2\mu\left(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Z}\right) + \lambda\left(\boldsymbol{A}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\epsilon}\right) + \boldsymbol{Y}:\boldsymbol{\epsilon}\right)\right\}\times\boldsymbol{n}, \\ \mathscr{Q} = hk\mu\boldsymbol{\gamma} + \mathscr{Q}_c \qquad \mathscr{Q}_c = \frac{h_+^2 - h_-^2}{2}k\mu\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\gamma},\end{gathered} \tag{24}$$

В этих формулах мы выделяем из общих выражений составляющие сил и моментов, подчеркнутые ранее, наделяя их индексом c (curvature). Отметим, что наличие этих слагаемых приводит к тому, что соответсвующие тензоры сил и моментов являются несимметричными.

Зависимость введенных в (24) тензоров от перемещений и углов поворота точек поверхности осреднения приобретает вид

$$\begin{gathered}
\mathscr{T} = h\left\{2\mu\left[\nabla_s\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right]^{sym} + \lambda\boldsymbol{A}\nabla_s\cdot\boldsymbol{v} - (\lambda\boldsymbol{A}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B} + 2\mu\boldsymbol{B})\,w\right\} - \\
-\frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\left\{2\mu\left[\nabla_s\boldsymbol{\vartheta}\cdot\boldsymbol{A}\right]^{sym} + \lambda\boldsymbol{A}\nabla_s\cdot\boldsymbol{\vartheta}\right\} + \mathscr{T}_c, \\
\mathscr{T}_c = \frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\left\{2\mu\left(\boldsymbol{C}\cdot\left[\nabla_s\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right]^{sym} + \left[\boldsymbol{B}\cdot\nabla_s\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right]^{sym}\right) + \lambda(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}:(\nabla_s\boldsymbol{v} - \boldsymbol{B}w)) + \right. \\
\left. + \boldsymbol{B}\nabla_s\cdot\boldsymbol{v}) - 2\boldsymbol{B}\cdot(\lambda\boldsymbol{A}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B} + 2\mu\boldsymbol{B} + \mu\boldsymbol{C})w\right\}, \\
-\mathscr{M} = \frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\left\{2\mu\left[\nabla_s\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right]^{sym} + \lambda\boldsymbol{A}\nabla_s\cdot\boldsymbol{v} - (\lambda\boldsymbol{A}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B} + 2\mu\boldsymbol{B})\,w\right\}\times\boldsymbol{n} - \\
-\frac{h_+^3 + h_-^3}{3}\left\{2\mu\left[\nabla_s\boldsymbol{\vartheta}\cdot\boldsymbol{A}\right]^{sym} + \lambda\boldsymbol{A}\nabla_s\cdot\boldsymbol{\vartheta}\right\}\times\boldsymbol{n} + \mathscr{M}_c, \\
-\mathscr{M}_c = \frac{h_+^3 + h_-^3}{3}\left\{2\mu\left(\boldsymbol{C}\cdot\left[\nabla_s\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right]^{sym} + \left[\boldsymbol{B}\cdot\nabla_s\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right]^{sym}\right) + \right. \\
\left. + \lambda(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}:(\nabla_s\boldsymbol{v} - \boldsymbol{B}w)) + \boldsymbol{B}\nabla_s\cdot\boldsymbol{v}) - 2\boldsymbol{B}\cdot(\lambda\boldsymbol{A}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B} + 2\mu\boldsymbol{B} + \mu\boldsymbol{C})w\right\}\times\boldsymbol{n}, \\
\mathscr{Q} = hk\mu\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{v}_s + \nabla_s w - \boldsymbol{\vartheta}\right) + \mathscr{Q}_c \qquad \mathscr{Q}_c = \frac{h_+^2 - h_-^2}{2}k\mu\boldsymbol{D}\cdot\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{v}_s + \nabla_s w - \boldsymbol{\vartheta}\right).
\end{gathered} \tag{25}$$

4. Для решения краевых задач часто эффективны методы разложения по собственным функциям дифференциального оператора, порождаемого уравнениями равновесия, записанными в терминах перемещений. Как правило, такие системы уравнений приведены для оболочек постоянной толщины канонической формы в традиционных ортогональных системах координат либо в случаях, когда $h\|\boldsymbol{B}\| \ll 1$.

Получим уравнения равновесия теории оболочек в перемещениях. На основе [11] эту систему, записанную в усилиях и моментах, примем в виде

$$\begin{gathered}
\nabla_s\cdot\mathscr{T}\cdot\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\cdot\mathscr{Q} + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}, \\
\nabla_s\cdot\mathscr{M}\cdot\boldsymbol{A} + \mathscr{Q}\times\boldsymbol{n} + \boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}, \\
\nabla_s\cdot\mathscr{Q} + \boldsymbol{B}:\mathscr{T} + q = 0.
\end{gathered} \tag{26}$$

Здесь $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}$, $q = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{n}$, а $\boldsymbol{p}$ — вектор плотности распределенных усилий, $\boldsymbol{m}$ — вектор распределенных моментов.

Подставим выражения сил и моментов, записанные через перемещения (25):

$$\begin{gathered}
h\left\{\mu\nabla_s^2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} + (\lambda+\mu)\nabla_s\nabla_s\cdot\boldsymbol{v} - \nabla_s\cdot((2\mu\boldsymbol{B} + \lambda\boldsymbol{A}tr\boldsymbol{B})\,w) - k\mu\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{v} + \nabla_s w - \boldsymbol{\vartheta})\right\} - \\
-\frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\left\{\mu\nabla_s^2\boldsymbol{\vartheta}\cdot\boldsymbol{A} + (\lambda+\mu)\nabla_s\nabla_s\cdot\boldsymbol{\vartheta}\right\} + \nabla_s\cdot\mathscr{T}_c\cdot\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\cdot\mathscr{Q}_c + \boldsymbol{g} = 0, \\
h\left\{k\mu\left(\nabla_s^2 w - \nabla_s\cdot\boldsymbol{\vartheta} + \nabla_s\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{v})\right) + 2\mu\boldsymbol{B}:\nabla_s\boldsymbol{v} + \lambda\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}\nabla_s\cdot\boldsymbol{v} - \left(2\mu\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^2 + \lambda\mathrm{tr}^2\boldsymbol{B}\right)w\right\} - \\
-\frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\left\{2\mu\boldsymbol{B}:\nabla_s\boldsymbol{\vartheta} + \lambda\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}\nabla_s\cdot\boldsymbol{\vartheta}\right\} + \boldsymbol{B}:\mathscr{T}_c + \nabla_s\cdot\mathscr{Q}_c + q = 0, \\
\left\{\frac{h_+^3 + h_-^3}{3}\left(\mu\nabla_s^2\boldsymbol{\vartheta} + (\lambda+\mu)\nabla_s\nabla_s\cdot\boldsymbol{\vartheta}\right) + kh\mu\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{v} + \nabla_s w - \boldsymbol{\vartheta}\right)\right\}\times\boldsymbol{n} - \\
-\frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\left\{\mu\nabla_s^2\boldsymbol{v} + (\lambda+\mu)\nabla_s\nabla_s\cdot\boldsymbol{v} - \nabla_s\cdot((2\mu\boldsymbol{B} + \lambda\boldsymbol{A}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B})\,w)\right\}\times\boldsymbol{n} + \\
+\mathscr{Q}_c\times\boldsymbol{n} - \nabla_s\cdot\mathscr{M}_c\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{m} = 0.
\end{gathered} \tag{27}$$

Оператор ∇_s^2 необходимо определять следующим образом: $\nabla_s^2\boldsymbol{f} = \nabla_s\cdot(\nabla_s\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{A})$.

5. Несмотря на сложность уравнений (27), в ряде случаев удается построить аналитические решения порождаемых ими краевых задач. Конечно, это возможно для специальных форм граничных усло-

вий, однако такие «модельные» решения позволяют изучить качественные особенности напряженно-деформированного состояния исследуемых тонкостенных конструкций и построить на их основе алгоритмы численного решения. Наиболее удобной в этом смысле является сферическая оболочка, т. е. оболочка, поверхность осреднения которой представляет собой связанную часть сферы.

Пусть (θ, ψ, z) — сферические координаты, которые связаны с декартовыми следующими формулами:

$$X = (R+z)\sin\theta\cos\psi, \qquad Y = (R+z)\sin\theta\sin\psi, \qquad Z = (R+z)\cos\theta.$$

Здесь R — радиус поверхности осреднения. Связь базиса (1) с декартовым базисом и другие соотношения приведены в статье [11].

Сфера выгодно отличается от других поверхностей тем, что тензор $\boldsymbol{B}$ на ней является шаровым, т. е. $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{A}/R$. Это приводит к существенным упрощениям в системе (27).

Приведем здесь выражения усилий и моментов для сферической оболочки из (25):

$$\begin{gathered}
\mathscr{T} = h\left(2\mu\left[\boldsymbol{\nabla}_s\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right]^{sym} + \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\nabla}_s\cdot\boldsymbol{v} + \frac{2}{R}\left(\lambda+\mu\right)\boldsymbol{A}w\right) - \\
-\frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\left(2\mu\left[\boldsymbol{\nabla}_s\boldsymbol{\vartheta}\cdot\boldsymbol{A}\right]^{sym} + \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\nabla}_s\cdot\boldsymbol{\vartheta}\right), \qquad \mathscr{Q} = hk\mu\left(-\frac{\boldsymbol{v}}{R} + \boldsymbol{\nabla}_s w - \boldsymbol{\vartheta}\right), \\
-\mathscr{M} = \frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\left(2\mu\left[\boldsymbol{\nabla}_s\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right]^{sym} + \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\nabla}_s\cdot\boldsymbol{v} + \frac{2}{R}\left(\lambda+\mu\right)\boldsymbol{A}w\right)\times\boldsymbol{n} - \\
-\frac{h_+^3 + h_-^3}{3}\left(2\mu\left[\boldsymbol{\nabla}_s\boldsymbol{\vartheta}\cdot\boldsymbol{A}\right]^{sym} + \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\nabla}_s\cdot\boldsymbol{\vartheta}\right)\times\boldsymbol{n}.
\end{gathered} \tag{28}$$

Уравнения равновесия (27) примут вид

$$\begin{gathered}
h\left\{\mu\boldsymbol{\nabla}_s^2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} + \left(\lambda+\mu\right)\boldsymbol{\nabla}_s\boldsymbol{\nabla}_s\cdot\boldsymbol{v} + \frac{2}{R}\left(\lambda+\mu\right)\boldsymbol{\nabla}_s w + \frac{k\mu}{R}\left(-\frac{\boldsymbol{v}}{R} + \boldsymbol{\nabla}_s w - \boldsymbol{\vartheta}\right)\right\} - \\
-\frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\left\{\mu\boldsymbol{\nabla}_s^2\boldsymbol{\vartheta}\cdot\boldsymbol{A} + (\lambda+\mu)\boldsymbol{\nabla}_s\boldsymbol{\nabla}_s\cdot\boldsymbol{\vartheta}\right\} + \boldsymbol{g} = 0, \\
h\left\{k\mu\left(\boldsymbol{\nabla}_s^2 w - \boldsymbol{\nabla}_s\cdot\boldsymbol{\vartheta} - \frac{1}{R}\boldsymbol{\nabla}_s\cdot\boldsymbol{v}\right) - \frac{2}{R}\left(\lambda+\mu\right)\boldsymbol{\nabla}_s\cdot\boldsymbol{v} - \frac{4}{R^2}(\lambda+\mu)w\right\} + \\
+\frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\frac{2\left(\lambda+\mu\right)}{R}\boldsymbol{\nabla}_s\cdot\boldsymbol{\vartheta} + q = 0, \\
\left\{\frac{h_+^3 + h_-^3}{3}\left(\mu\boldsymbol{\nabla}_s^2\boldsymbol{\vartheta} + (\lambda+\mu)\boldsymbol{\nabla}_s\boldsymbol{\nabla}_s\cdot\boldsymbol{\vartheta}\right) + kh\mu\left(-\frac{\boldsymbol{v}}{R} + \boldsymbol{\nabla}_s w - \boldsymbol{\vartheta}\right)\right\}\times\boldsymbol{n} - \\
-\frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\left\{\mu\boldsymbol{\nabla}_s^2\boldsymbol{v} + (\lambda+\mu)\boldsymbol{\nabla}_s\boldsymbol{\nabla}_s\cdot\boldsymbol{v} + \frac{2}{R}\left(\lambda+\mu\right)\boldsymbol{\nabla}_s w\right\}\times\boldsymbol{n} + \boldsymbol{m} = 0.
\end{gathered} \tag{29}$$

6. Пусть опорный контур Γ сферической оболочки представляет собой окружности $\theta = \theta_0, \theta = \theta_1$. Будем полагать, что края оболочки на опорном контуре жестко закреплены:

$$\boldsymbol{v}|_\Gamma = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{\vartheta}|_\Gamma = \boldsymbol{0}, \qquad w|_\Gamma = 0. \tag{30}$$

Рассмотрим случай, когда напряженно-деформированное состояние, возникающее в оболочке, осесимметрично (некоторые несимметричные НДС рассмотрены в [23]). Тогда решение краевой задачи (29), (30) будем искать в пространстве интегрируемых с квадратом вектор-функций, определенных в области $[\theta_0; \theta_1]$, со скалярным произведением

$$\langle\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\rangle = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\boldsymbol{X}\cdot H\cdot\boldsymbol{Y}\sin\theta d\theta$$

в форме разложения по собственным функциям оператора $\mathscr{L}$:

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{\lambda_k}\mathbf{U}_k,$$

где $\mathbf{U}_k$ — собственные функции обобщенной задачи Штурма–Лиувилля:

$$\mathscr{L}\left[\mathbf{U}_k\right] + \lambda_k H \mathbf{U}_k = 0, \qquad \mathscr{B}\left[\mathbf{U}_k\right] = 0, \tag{31}$$

а α_k — коэффициенты Фурье, определяемые заданными внешними силовыми и моментными полями:

$$\alpha_k = \langle \boldsymbol{U}_k, \boldsymbol{G} \rangle, \qquad \boldsymbol{G} = -\frac{\rho\left(1-\nu^2\right)}{E}\left(R^2 g, m, R^2 q\right).$$

Здесь H — матрица, содержащая инерционные члены динамической задачи, определяется формулой

$$H = \begin{pmatrix} 1 + \frac{h_+^2 - h_-^2}{Rh} & -\left(\frac{h_+^2-h_-^2}{2Rh} + 2\frac{h_+^3+h_-^3}{3Rh}\right) & 0 \\ -\left(\frac{h_+^2-h_-^2}{2Rh} + 2\frac{h_+^3+h_-^3}{3Rh}\right) & \frac{h_+^3+h_-^3}{3Rh} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{h_+^2-h_-^2}{Rh} \end{pmatrix},$$

оператор $\mathscr{L}$, характеризующий упругую реакцию оболочки на перемещения, имеет вид

$$\mathscr{L} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla}_s^2 - \frac{1}{\sin^2\theta} + C - K & -\left(K + \frac{h_+^2-h_-^2}{2Rh}(\boldsymbol{\nabla}_s^2 - \frac{1}{\sin^2\theta} + C)\right) & (K+B)\dfrac{d}{d\theta} \\ -\left(K + \frac{h_+^2-h_-^2}{2Rh}(\boldsymbol{\nabla}_s^2 - \frac{1}{\sin^2\theta} + C)\right) & \frac{h_+^3+h_-^3}{3R^2h}\left(\boldsymbol{\nabla}_s^2 - \frac{1}{\sin^2\theta} + C\right) - K & \left(K - \frac{h_+^2-h_-^2}{2Rh}B\right)\dfrac{d}{d\theta} \\ -(K+B)\left(\dfrac{d}{d\theta} + \cot\theta\right) & -\left(K - \frac{h_+^2-h_-^2}{2Rh}B\right)\left(\dfrac{d}{d\theta} + \cot\theta\right) & K\boldsymbol{\nabla}_s^2 - 2B \end{pmatrix},$$

$\mathbf{U} = (v/R, \vartheta, w/R)$ — искомый вектор. Заметим, что в рассматриваемом случае введенный оператор является самосопряженным; $\boldsymbol{\nabla}_s^2 = \dfrac{d^2}{d\theta^2} + \cot\theta\dfrac{d}{d\theta}$; $B = 1+\nu, C = 1-\nu, K = kC/2$. Оператор краевых условий можно записать в форме

$$\mathscr{B}[\mathbf{U}] = \left\{v|_{\theta=\theta_0}, \vartheta|_{\theta=\theta_0}, w|_{\theta=\theta_0}, v|_{\theta=\theta_1}, \vartheta|_{\theta=\theta_1}, w|_{\theta=\theta_1}\right\}. \tag{32}$$

Целесообразность использования введенного скалярного произведения обусловливается тем, что каждое собственное значение λ с точностью до множителя определяет собственную частоту колебаний оболочки.

Считается, что внешние поля являются потенциальными, т. е. $g = \mathfrak{g}'$, $m = \mathfrak{m}'$. В этом случае собственные функции могут быть выражены через известные специальные функции. Будем искать тангенциальное смещение и угол поворота в форме $v = \Phi_k', \vartheta = \Psi_k'$. Подставим эти представления в уравнения и первые два проинтегрируем по θ, учитывая, что $\int\left(\boldsymbol{\nabla}_s^2\dfrac{d}{d\theta} - \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{d}{d\theta}\right)d\theta = \boldsymbol{\nabla}_s^2$. Тогда система принимает вид линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами относительно оператора дифференцирования $\boldsymbol{\nabla}_s^2$:

$$\begin{gathered}\left(\boldsymbol{\nabla}_s^2 + C - K\right)\Phi_k - \left(K + \frac{h_+^2 - h_-^2}{2Rh}(\boldsymbol{\nabla}_s^2 + C)\right)\Psi_k + (K+B)\,w_k = -\frac{\rho R^2\left(1-\nu^2\right)}{E}\mathfrak{g}, \\ -\left(K + \frac{h_+^2 - h_-^2}{2Rh}(\boldsymbol{\nabla}_s^2 + C)\right)\Phi_k + \left(\frac{h_+^3 + h_-^3}{3R^2h}\left(\boldsymbol{\nabla}_s^2 + C\right) - K\right)\Psi_k + \\ + \left(K - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2Rh}B\right)w = -\frac{\rho\left(1-\nu^2\right)}{E}\mathfrak{m}, \\ -(K+B)\,\boldsymbol{\nabla}_s^2\Phi_k - \left(K - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2Rh}B\right)\boldsymbol{\nabla}_s^2\Psi_k + \left(K\boldsymbol{\nabla}_s^2 - 2B\right)w_k = -\frac{\rho R^2\left(1-\nu^2\right)}{E}q.\end{gathered}$$

Это свойство позволяет представить решение рассматриваемой краевой задачи в форме разложения по базисным функциям, определяемым хорошо изученными решениями уравнения Гельмгольца: $\boldsymbol{\nabla}_s^2\zeta = \Lambda\zeta$. В силу матричной структуры полученных уравнений векторы (Φ_k, Ψ_k, w_k) можно представить как $(\Phi_k, \Psi_k, w_k) = (a_k, b_k, c_k)\,\zeta_k$, где функции $\zeta_k = \zeta_k(\theta)$ являются решением порождающего уравнения $\boldsymbol{\nabla}_s^2\zeta = \Lambda_k\zeta$. Характеристические числа Λ_k в этом случае являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} \Lambda + C - K & -\left(K + \frac{h_+^2 - h_-^2}{2Rh}(\Lambda + C)\right) & K + B \\ -\left(K + \frac{h_+^2 - h_-^2}{2Rh}(\Lambda + C)\right) & \frac{h_+^3 + h_-^3}{3R^2h}(\Lambda + C) - K & K - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2Rh}B \\ -(K+B)\Lambda & -\left(K - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2Rh}B\right)\Lambda & K\Lambda - 2B \end{vmatrix} = 0, \qquad (33)$$

а собственные значения λ_k находятся путем удовлетворения граничных условий. Такой способ получения решения по-видимому впервые применен в статье [24].

Таким образом, в работе на основе прямых (бескоординатных) методов тензорного исчисления получены уравнения равновесия в перемещениях в произвольной (неортогональной) системе координат, учитывающие асимметрию расположения лицевых поверхностей. Для сферической оболочки предложена процедура построения решения, основанная на методе спектрального разложения, описывающем напряженно-деформированное состояние при потенциальных силовых и моментных статических нагрузках.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проекты* 11-01-00669-а, 12-08-01119-а, 12-08-01260-а, 12-08-90806-мол-рф).

Библиографический список

1. *Еремеев В. А., Альтенбах Х., Морозов Н. Ф.* Линейная теория оболочек при учете поверхностных напряжений // Докл. АН. 2009. Т. 429, № 4. С. 472–476.
2. *Shen H. S.* Functionally graded materials : nonlinear analysis of plates and shells. CRC Press, 2009. 280 p.
3. *Лычев С. А., Лычева Т. Н., Манжиров А. В.* Нестационарные колебания растущей круглой пластины // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 2. С. 199–208.
4. *Leissa A. W.* Vibration of shells. Acoustical Society of America, 1993. 428 p.
5. *Truesdell C., Toupin R. A.* The classical field theories. Handbuch der Physik. B. III/1 / ed. S. Flügge. Berlin : Springer-Verlag, 1960. P. 226–858.
6. *Noll W.* Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // Arch. Rat. Mech. Anal. 1956. Vol. 27, № 1. P. 1–32.
7. *Epstein M.* The geometrical language of continuum mechanics. Cambridge : Cambridge University Press, 2010.
8. *Gurtin M. E., Murdoch A.I.* A continuum theory of elastic material surfaces // Arch. Ration. Mech. Anal. 1975. Vol. 57, № 4. P. 291–323.
9. *Maugin G. A.* Material inhomogeneities in elasticity. London : Chapman and Hall, 1993. 280 p.
10. *Cohen H., Wang C.-C.* Some equilibrium problems for compressible, anisotropic, laminated nonlinearly elastic bodies // Arch. Ration. Mech. Anal. 1992. Vol. 119, № 9. P. 1–34.
11. *Лычев С. А., Барышев А. А.* Уравнения равновесия для материально единообразных неоднородных оболочек со слоистой структурой // Вестн. ПНИПУ. Механика. 2012. № 4. С. 42–65.
12. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М. : Наука, 1980. 512 с.
13. *Gibbs J. W.* Elements of vector analysis. New Haven, 1884.
14. *Еремеев В. А., Зубов Л. М.* Механика упругих оболочек / отв. ред. В. А. Бабешко. М. : Наука, 2008. 280 с.
15. *Григолюк Э. И. Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М. : ВИНИТИ, 1973. 272 с.
16. *Пелех Б. Л.* Обобщенная теория оболочек : учеб. пособие. Львов : Выща школа, 1978. 159 с.
17. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л. : Судпромгиз, 1962. 431 с.
18. *Кабриц С. А., Михайловский Е. И., Товстик П. Е., Черных К. Ф., Шамина В. А.* Общая нелинейная теория упругих оболочек / под ред. К. Ф. Черныха, С. А. Кабрица. СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2002. 388 с.
19. *Chapelle D., Bathe K. J.* The Finite Element Analysis of Shells — Fundamentals. N. Y. : Springer, 2011. Vol. XV. 410 p.
20. *Михайловский Е. И.* Классическая теория оболочек // Вестн. Сыктывкар. ун-та. Сер. 1 : Мат. Мех. Инф. 2006. Вып. 6. С. 123–164.
21. *Lebedev L. P., Cloud M. J, Eremeyev V. A.* Advanced Engineering Analysis: Calculus of Variations and Functional Analysis with Applications in Mechanics. New Jersey : World Scientific, 2012. 499 p.
22. *Жилин П. А.* Прикладная механика. Основы теории оболочек : учеб. пособие. СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2006. 167 с.
23. *Лизарев А. Д., Ростанина Н. Б.* Колебания металлополимерных и однородных сферических оболочек. Минск : Наука и техника, 1984. 192 с.
24. *Сеницкий Ю. Э., Лычев С. А.* Динамика трёхслойных сферических оболочек несимметричной структуры // Тр. XVIII междунар. конф. по теории оболочек и пластин. Саратов, 1997. Т. 1. С. 47–52.

The Equilibrium Equations of Shells in the Coordinates of the General Form

A. A. Baryshev[1], S. A. Lychev[2], A. V. Manzhirov[2]

[1]Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, BaryshevAA@gmail.com
[2]Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Science, Russia, 119526, Moscow, prosp. Vernadskogo, 101, block 1, lychevsa@mail.ru, manzh@inbox.ru

A mathematical model of homogeneous elastic shells is consider under kinematics Reissner–Mindlin type. Through direct (coordinateless) methods of the tensor calculus equations of equilibrium are obtained in terms of displacements in an arbitrary (not necessarily orthogonal) coordinate system, taking into account the asymmetry of the location of the front surface. For a spherical shells proposed procedure for constructing solutions, based on the method of spectral decomposition, which describes the stress-strain state at the potential power and torque static loads.

Key words: sphere shell, equilibrium equations, analytical solutions, spectral decomposition, eigenfunctions.

References

1. Altenbach H., Eremeyev V. A., Morozov N. F. Linear theory of shells taking into account surface stresses. *Doklady Physics*, 2009, vol. 54, no. 12, pp. 531–535.
2. Shen H. S. *Functionally graded materials : nonlinear analysis of plates and shells*. CRC Press, 2009, 280 p.
3. Lychev S. A., Lycheva T. N., Manzhirov A. V. Unsteady vibration of a growing circular plate. *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 325–333.
4. Leissa A. W. *Vibration of shells*. Acoustical Society of America, 1993. 428 p.
5. Truesdell C., Toupin R. A. The classical field theories. *Handbuch der Physik* [Encyclopedia of Physics]. Vol. III/1 / ed. S. Flügge. Berlin, Springer-Verlag, 1960, pp. 226–858 (in German).
6. Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1956, vol. 27, no. 1, pp. 1–32.
7. Epstein M. *The geometrical language of continuum mechanics*. Cambridge, Cambridge University Press, 2010.
8. Gurtin M. E., Murdoch A. I. A continuum theory of elastic material surfaces. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1975, vol. 57, no. 4, pp. 291–323.
9. Maugin G. A. *Material inhomogeneities in elasticity*. London, Chapman and Hall, 1993, 280 p.
10. Cohen H., Wang C.-C. Some equilibrium problems for compressible, anisotropic, laminated nonlinearly elastic bodies. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1992, vol. 119, no. 9, pp. 1–34.
11. Lychev S. A., Baryshev A. A. Equilibrium equations for material uniform and inhomogeneous laminated shells. *PNRPU Mechanics Bulletin. Mechanics*, 2012, no. 4, pp. 42–65 (in Russian).
12. Lurie A. I. *Nelineinaia teoriia uprugosti* [Nonlinear theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1980, 512 p. (in Russian).
13. Gibbs J. W. *Elements of vector analysis*. New Haven, 1884.
14. Eremeev V. A., Zubov L. M. *Mekhanika uprugikh obolochek* [Mechanics of Elastic Shells]. Moscow, Nauka, 2008. 280 p. (in Russian).
15. Grigoliuk E. I. Selezov I. T. *Neklassicheskie teorii kolebanii sterzhnei, plastin i obolochek* [Non-classical theory of vibrations of rods, plates and shells]. Moscow, VINITI, 1973, 272 p. (in Russian).
16. Pelekh B. L. *Obobshchennaia teoriia obolochek* [Generalized theory of shells]. L'vov, Vyshcha shkola, 1978, 159 p. (in Russian).
17. Novozhilov V. V. *Teoriia tonkikh obolochek* [The theory of thin shells]. Leningrad, Sudpromgiz, 1962, 431 p.
18. Kabrits S. A., Mikhailovskii E. I., Tovstik P. E., Chernykh K. F., Shamina V. A. *Obshchaia nelineinaia teoriia uprugikh obolochek* [General nonlinear theory of elastic shells]: ed. K. F. Chernyh, S. A. Kabrica. St. Petersburg, St. Petersburg Press, 2002, 388 p. (in Russian).
19. *Chapelle D., Bathe K. J.* The Finite Element Analysis of Shells — Fundamentals. New York, Springer, 2011, Vol. XV, 410 p.
20. Mikhailovskii E. I. Klassicheskaia teoriia obolochek [The classical theory of shells]. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Ser. 1.: Math. Mech. Inform.*, 2006, no. 6, pp. 123–164 (in Russian).
21. Lebedev L. P., Cloud M. J, Eremeyev V. A. *Advanced Engineering Analysis: Calculus of Variations and Functional Analysis with Applications in Mechanics*. New Jersey, World Scientific, 2012. 499 p.
22. Zhilin P. A. *Prikladnaia mekhanika. Osnovy teorii obolochek* [Applied Mechanics. Foundations of the Theory of Shells]. St. Petersburg, St. Petersburg State Polytech. Univer. Press, 2006, 167 p. (in Russian).
23. Lizarev A. D., Rostanina N. B. *Kolebaniia metallopolimernykh i odnorodnykh sfericheskikh obolochek* [Vibration in metal- and homogeneous spherical shells]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1984, 192 p. (in Russian).
24. Senitskii Yu. E., Lychev S. A. Dinamika trekhsloinykh sfericheskikh obolochek nesimmetrichnoi struktury [The dynamics of three-layer spherical shells asymmetric structure]. *Trudy XVIII mezhdunarodnoi konferentsii po teorii obolochek i plastin*. Saratov, 1997, vol. 1, pp. 47–52 (in Russian).