References

1. Kahneman D., Tversky A. Prospect theory : an analysis of decision under risk. *Econometrica*, 1979, vol. 47, pp. 263–291.

2. Tversky A., Kahneman D. Advances in prospect theory : cumulative representation of uncertainty. *J. of Risk and Uncertainty*, 1992, vol. 5(4), pp. 297–323.

3. Storn R., Price K. Differential evolution — a simple and efficient adaptive scheme or global optimization over continuous spaces. *J. of Global Optimization*, 1997, vol. 11. pp. 341–359.

4. Price K., Storn R. M., Lampinen J. A. *Differential evolution : a practical approach to global optimization*. Berlin, Springer, 2005.

УДК 519.85, 519.712

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА КАРДИНАЛЬНОСТЬ МЕТОДАМИ ЭВРИСТИЧЕСКОГО ПОИСКА

А. А. Хомченко[1], К. Лукас[2], С. В. Миронов[3], С. П. Сидоров[4]

[1]Аспирант кафедры математической экономики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, aahomchenko@gmail.com

[2]Профессор, Брунельский университет, Лондон, Великобритания, cormac.lucas@brunel.ac.uk

[3]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, mironovsv@info.sgu.ru

[4]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической экономики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, sidorovsp@info.sgu.ru

В настоящей работе рассматривается задача портфельной оптимизации с ограничением на кардинальность. Введение ограничения на максимальное количество активов в портфеле сводит задачу оптимального портфельного инвестирования к смешанной целочисленной задаче квадратичного программирования. Эффективную границу предлагается найти с помощью метаэвристического подхода с использованием генетического алгоритма.

Ключевые слова: смешанная целочисленная оптимизация, генетический алгоритм, оптимальное портфельное инвестирование.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть N — общее число доступных активов; K — необходимое количество активов в выбранном портфеле; μ_i — ожидаемая доходность актива i, $i = 1,\dots,N$; σ_{ij} — ковариация между доходностью от актива i и актива j, $i = 1,\dots,N$, $j = 1,\dots,N$; ρ — необходимый уровень ожидаемой доходности; l_i $(l_i \ge 0)$ — нижнее ограничение на размер доли, инвестируемой в актив i, $i = 1,\dots,N$, если инвестиции вложены в актив i, и u_i $(u_i \ge 0)$ — верхнее ограничение на размер доли, инвестируемой в актив i, $i = 1,\dots,N$.

Переменными модели являются x_i — доля $(0 \le x_i \le 1)$ от общего объема инвестиций, вложенных в актив i $(i = 1,\dots,N)$, и переменная δ_i, равная 1, если актив i $(i = 1,\dots,N)$ включен в портфель, и равная 0, в противном случае.

Мы рассматриваем следующую модель Марковица с дискретными ограничениями на размер доли, инвестируемой в актив, и ограничениями на кардинальность: найти минимум квадратичной формы:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}x_ix_j \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{N}\mu_ix_i = \rho, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{N}x_i = 1, \tag{3}$$

© Хомченко А. А., Lucas C., Миронов С. В., Сидоров С. П., 2013

$$l_i\delta_i \le x_i \le u_i\delta_i, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \delta_i = K, \tag{5}$$

$$\delta_i \in \{0, 1\}, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{6}$$

Оптимизационная задача (1)–(6) рассматривалась в статье [1]. Нужно отметить, что модель Марковица (без ограничений) состоит из соотношений (1)–(4), где $\delta_i = 1$, $i = 1, \ldots, N$.

Введение ограничения на кардинальность числа активов, присутствующих в портфеле, меняет классическую модель квадратичной оптимизации [2] на смешанно-целочисленную задачу квадратичного программирования (СЦЗКП), которая является NP-полной [3]. Поскольку для СЦЗКП трудно найти оптимальное решение, многие исследователи и трейдеры используют эвристики, то есть неточные методы решения задач в этой области.

В настоящей работе, развивая идеи статей [1] и [4], для нахождения эффективной границы для портфелей с ограничением на кардинальность мы предлагаем алгоритм, основанный на использовании метаэвристических подходов, а именно генетического алгоритма [5].

1. ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Генетические алгоритмы (ГА) являются поисковым механизмом, основанным на эволюционных принципах естественного отбора и генетики. Теоретические основы ГА были первоначально разработаны Холландом [5]. Они работают с популяциями решений и используют принцип выживания. В ГА переменные решения закодированы в конечные строки, называемые хромосомами. Чтобы реализовать естественный отбор и вывести хорошие решения, хромосомы оцениваются по критерию пригодности (фитнес-критерию). В рассматриваемых задачах оптимизации мера пригодности обычно непосредственно связана с целевой функцией. ГА используют популяцию особей (обычно фиксированного размера), которая с изменениями переходит от одной итерации ГА к другой. ГА использует четыре основных оператора: отбора, скрещивания, мутации и замены. Популяция изменяется посредством итерационно повторяемого применения этих операторов, при этом более сильные и пригодные решения (элементы популяции) заменяют более слабых. Более всесторонний обзор ГА можно найти в статьях [6–9].

Обозначим $\Delta_N = \{(\delta_1, \ldots, \delta_N) : \delta_i \in \{0,1\}\}$ и $\Delta_N(K) =: \{\delta \in \Delta_N,\ \sum_{i=1}^{N} \delta_i = K\}$. Для $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_N) \in \Delta_N$ обозначим $S(\delta) = \{i \in \{1, \ldots, N\} :\ \delta_i = 1\}$ и пусть $P(\delta, \rho)$ есть следующая задача квадратичного программирования:

$$\sum_{i \in S(\delta)} \sum_{j \in S(\delta)} \sigma_{ij} x_i x_j \to \min \tag{7}$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{i \in S(\delta)} \mu_i x_i = \rho, \tag{8}$$

$$\sum_{i \in S(\delta)} x_i = 1, \tag{9}$$

$$l_i \le x_i \le u_i, \qquad i \in S(\delta). \tag{10}$$

В настоящей работе предлагается следующая модификация алгоритма, рассмотренного в статье [4]. Обозначим $P_{\min}(\delta, \rho)$ решение задачи (7)–(10), т. е. минимальное значение целевой функции (7) в оптимальной точке допустимого множества, определяемого соотношениями (8)–(10). Если для некоторых δ, ρ допустимое множество задачи $P(\delta, \rho)$ пусто, будем полагать $P_{\min}(\delta, \rho) = M$ для некоторого достаточно большого положительного числа M. Обозначим $\Delta_N(K, \rho)$ множество всех тех $\delta \in \Delta_N(K)$, для которых множество всех $x \in \mathbb{R}^K$, удовлетворяющих (8)–(10), непусто.

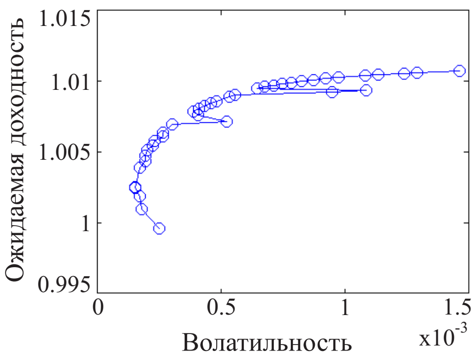
Возьмем $\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$, где $\rho_{\min}$ есть минимальное значение доходностей активов, $\rho_{\max}$ есть максимальное значение доходностей активов. Работа ГА состоит в выполнении следующих шагов.

1. *Кодирование.* В нашем ГА используется фиксированный размер популяции $P = s^2$ портфелей, s есть некоторое натуральное число. Элементами популяции (особями) будут $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_N) \in \in \Delta_N(K)$.
2. *Генерация начальной популяции* $\Delta^0_{N,P}(K)$ происходит путем случайного выбора P элементов из элементов множества $\Delta_N(K, \rho)$. Отметим, что для непустоты решения задачи $P(\delta, \rho)$ необходимо включения как части активов, имеющих доходность, более высокую, чем ρ, так и части активов с доходностью меньшей, чем ρ. Для отсечения заведомо недопустимых элементов популяции мы использовали соответствующую маску.
3. *Отбор.* Для каждого элемента $\delta \in \Delta^{(j)}_{N,P}(K)$ текущей j-й популяции решается оптимизационная задача $P(\delta, \rho)$ и находится соответствующее значение $P_{\min}(\delta, \rho)$. Портфели сортируются в порядке увеличения риска (дисперсии) и берутся первые $2s$ элементов этого упорядоченного списка, чтобы на их основе составить новую популяцию для следующего поколения, т. е. выбираем $2s << P$ элементов текущей j-й популяции $\Delta^{(j)}_{N,P}(K)$ с наименьшим значением $P_{\min}(\delta, \rho)$. Обозначим через A_j множество особей, полученных в результате отбора на шаге j. Отберем случайным образом s элементов множества A_j и обозначим получившееся множество $A_{1,j}$. Множество остальных элементов обозначим $A_{2,j}$.
4. *Скрещивание.* Каждой паре элементов (ε, δ), $\varepsilon \in A_{1,j}$, $\delta \in A_{2,j}$, ставится в соответствие элемент (потомок) γ по следующим правилам:
   - если $\varepsilon_i = 1$ и $\delta_i = 1$ (т.е. актив присутствует в обоих родительских портфелях), то $\gamma_i = 1$ (он присутствует и в потомке);
   - если $\varepsilon_i = 0$ и $\delta_i = 0$ (актив отсутствует в обоих родительских портфелях), то $\gamma_i = 0$ (он отсутствует и в потомке);
   - если $\varepsilon_i + \delta_i = 1$ (актив присутствует только в одном из родительских портфелей), то его присутствие (или отсутствие) в потомке будет решено на основе случайного выбора так, чтобы $\sum_i \gamma_i = K$.

   В результате скрещивания получаем $P = s^2$ потомков.
5. *Мутация* является стандартной для ГА и представляет собой степень случайного изменения элементов с низкой вероятностью. В рассматриваемом ГА потомок подвергается мутации с вероятностью α посредством случайного выбора одного актива в портфеле-потомке и замены его случайным активом, не представленным в портфеле-потомке, а также в родительских портфелях.

Нужно отметить, что нельзя гарантировать, что в результате мутации получится потомок, имеющий допустимое решение задачи (8)–(10), т. е. возможно, что не существует допустимого потомка для некоторых родителей после скрещивания и мутации.

2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ



Эффективная граница

В вычислительном эксперименте использовались реальные данные об акциях 86 компаний за определенный промежуток времени (291 день), для расчета эффективных портфелей применялся пакет прикладных программ Matlab. В конце работы генетического алгоритма P портфелей последней популяции участвуют в построении эффективной границе с ограничением на кардинальность. Рисунок визуализирует эффективную границу для задачи (1)–(6). Использовались следующие параметры генетического алгоритма: общее число доступных активов $N = 86$, необходимое количество активов в выбранном портфеле (кардинальность) $K = 10$, размер популяции $P = 100$, $s = 10$, вероятность мутации $\alpha = 0,1$.

В заключение отметим, что генетические алгоритмы оказываются эффективным средством решения задачи (1)–(6) в случае, когда N достаточно велико и $K << N$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 13-01-00175).

Библиографический список

1. *Chang T.-J., Yang S.-C., Chang K.-J.* Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm // Expert Systems with Applications. 2009. Vol. 36. P. 10529–10537.

2. *Markowitz H.* Portfolio selection // J. of Finance. 1952. Vol. 7. P. 77–91.

3. *Moral-Escudero R., Ruiz-Torrubiano R., Suarez A.* Selection of optimal investment portfolios with cardinality constraints // Proc. of the 2006 IEEE Congress on Evolutionary Computation. 2006. P. 2382–2388.

4. *Woodside-Oriakhi M., Lucas C., Beasley J. E.* Heuristic algorithms for the cardinality constrained efficient frontier // European J. of Operational Research. 2011. Vol. 213 (3). P. 538–550.

5. *Holland J. H.* Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis With Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence. Ann Arbor, MI, USA : University of Michigan Press, 1975.

6. Search Methodologies: Introductory Tutorials in Optimization and Decision Support Techniques / eds. E. K. Burke, G. Kendall. Berlin : Springer, 2005.

7. Local Search in Combinatorial Optimization / eds. E. H. L. Aarts, J. K. Lenstra. Princeton, USA : Princeton Univ. Press, 2003.

8. *Beasley J. E.* Population heuristics // Handbook of Applied Optimization / eds. P. M. Pardalos, M. G. C. Resende. Oxford : Oxford Univ. Press, 2002. P. 138–157.

9. *Mitchell M.* An Introduction to Genetic Algorithms. Cambridge, MA, USA : MIT Press, 1996.

Heuristic Algorithm for the Cardinality Constrained Portfolio Optimization Problem

A. A. Homchenko[1], C. Lucas[2], S. V. Mironov[1], S. P. Sidorov[1]

[1]Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, aahomchenko@gmail.com, mironovsv@info.sgu.ru, sidorovsp@info.sgu.ru

[2]Brunel University, Kingston Lane, Uxbridge, London, United Kingdom, UB8 3PH, cormac.lucas@brunel.ac.uk

In the paper we consider the cardinality constrained portfolio optimization problem. Constraint on the number of assets in portfolio leads to the mixed integer optimization problem. Effective frontier is constructed using the metaheuristic approach by genetic algorithm.

Key words: mixed-integer optimization, genetic algorithms, portfolio optimization problem.

References

1. Chang T.-J., Yang S.-C., Chang K.-J. Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, 2009, vol. 36, pp. 10529–10537.

2. Markowitz H. Portfolio selection *J. of Finance*, 1952, vol. 7, pp. 77–91.

3. Moral-Escudero R., Ruiz-Torrubiano R., Suarez A. Selection of optimal investment portfolios with cardinality constraints. *Proc. of the 2006 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, 2006, pp. 2382–2388.

4. Woodside-Oriakhi M., Lucas C., Beasley J. E. Heuristic algorithms for the cardinality constrained efficient frontier. *European Journal of Operational Research*, 2011, vol. 213 (3), pp. 538—550.

5. Holland J. H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis With Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence*. Ann Arbor, MI, USA, University of Michigan Press, 1975.

6. *Search Methodologies: Introductory Tutorials in Optimization and Decision Support Techniques*. Eds. E. K. Burke, G. Kendall. Berlin, Springer, 2005.

7. *Local Search in Combinatorial Optimization*. Eds. E. H. L. Aarts, J. K. Lenstra. Princeton, USA, Princeton Univ. Press, 2003.

8. Beasley J. E. Population heuristics. *Handbook of Applied Optimization*. Eds. P. M. Pardalos, M. G. C. Resende. Oxford, Oxford University Press, 2002, pp. 138–157.

9. Mitchell M. *An Introduction to Genetic Algorithms*. Cambridge, MA, USA, MIT Press, 1996.