МАТЕМАТИКА

УДК 517

О НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ МИНИМУМА КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА С ИНТЕГРАЛОМ СТИЛТЬЕСА И НУЛЕВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ НА ЧАСТИ ИНТЕРВАЛА

Т. А. Иванникова[1], Е. В. Тимашова[2], С. А. Шабров[3]

[1]Магистрант кафедры математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, solliden_2008@inbox.ru
[2]Магистрант кафедры математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, juli4732@mail.ru
[3]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, shaspoteha@mail.ru

В работе получено необходимое условие экстремума квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса для случая, когда коэффициент при старшей производной может обращаться в нуль на части интервала. Показано, что получаемая математическая модель обладает свойством невырожденности. Доказано, что разнопорядковая граничная задача, возникающая как необходимое условие экстремума, занимает «промежуточное» положение между краевыми задачами четвертого и второго порядков –- пространство решений имеет размерность три.

Ключевые слова: функционал, необходимое условие, интеграл Стилтьеса, производная по мере.

ВВЕДЕНИЕ

В работе получено необходимое условие экстремума функционала:

$$\Phi(u)=\int_0^\xi \frac{pu''^2_{xx}}{2}\,dx+\int_\xi^l \frac{ru'^2_x}{2}\,dx+\int_0^l \frac{u^2}{2}\,dQ-\int_0^l u\,dF+\gamma_1\frac{u^2(0)}{2}+\gamma_2\frac{u'^2(0)}{2}+\gamma_3\frac{u^2(l)}{2}, \qquad (1)$$

определенного на множестве E абсолютно непрерывных на $[0;l]$ функций, первая производная которых абсолютно непрерывна на $[0,\xi]$, имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение, вторая квазипроизводная $pu''_{xx}(x)$ является функцией ограниченной на $[0,\xi]$ вариации.

На протяжении всей работы мы предполагаем выполненными следующие условия:

1) $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ имеют конечное на $[0;l]$ изменение;
2) $p(x)>0$ на $[0;\xi)$;
3) интеграл $\int\limits_0^{\xi-0}\dfrac{dt}{p(t)}$ конечен;
4) $r(x)>0$ для всех $x\in(\xi;l]$;
5) $Q(x)$ — не убывает на $[0;l]$;
6) $\gamma_i\geq 0$ $(i=1,2,3)$;
7) $\gamma_1+\gamma_2>0$, $\gamma_3>0$.

Все производные в равенстве (1) понимаются в классическом смысле; вторая — существует почти всюду (по мере Лебега); мы принимаем следующее соглашение для функции $\varphi(x)$, принадлежащей $BV[0;l]$ — пространству функций ограниченной на $[0;l]$ вариации: если для некоторой внутренней точки η отрезка $[0;l]$ справедливо равенство $\varphi(\eta-0)=\varphi(\eta+0)$, то $\varphi(\eta)$ равно $\varphi(\eta-0)$ $(=\varphi(\eta+0))$, т. е. $\varphi(x)$ непрерывна в точке η.

Первый и второй интегралы в (1) понимаются по Лебегу, третий и четвертый — по Риману–Стилтьесу.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Задача минимизации функционала (1) на множестве E возникает при моделировании малых деформаций механической системы, состоящей из стержня, на левом конце которого имеются две пружины жесткости γ_1 и γ_2, реагирующие на смещение и поворот соответственно, а к правому прикреплена растянутая струна, правый конец которой имеет упругое закрепление с помощью пружины γ_3, когда (1) описывает потенциальную (полную) энергию системы.

Договоримся под записью $\gamma_1 = \infty$ подразумевать условие $u(0) = 0$, а под $\gamma_2 = \infty$ и $\gamma_3 = \infty$ — $u'(0) = 0$ и $u(l) = 0$ соответственно.

Продолжим функции $p(x)$ и $r(x)$ на оставшуюся часть $[0; l]$ нулем.

Пусть $u(x)$ дает минимум функционалу $\Phi(u)$ на E. Введем в рассмотрение скалярную функцию $\varphi(\lambda) = \Phi(u + \lambda h)$. У этой функции точка $\lambda = 0$ является точкой минимума, поэтому производная $\varphi'(0)$, если она существует, обязана обращаться в 0. Легко видеть, что $\varphi(\lambda)$ является квадратичной относительно λ функцией, поэтому

$$\varphi'(0) \equiv \int_0^\ell p u''_{xx} h''_{xx}\,dx + \int_0^\ell r u'_x h'_x\,dx + \int_0^\ell u h\,dQ - \int_0^\ell h\,dF + \\ + \gamma_1 u(0)h(0) + \gamma_2 u'(0)h'(0) + \gamma_3 u(l)h(l) = 0 \tag{2}$$

для любой функции $h \in E$.

На множестве $[0; \ell] \setminus S(Q)$ определим функцию $\alpha(x) = \int_0^x u\,dQ$. Тогда $\int_0^\ell uh\,dQ = \int_0^\ell h\,d\alpha$ (на основании результатов работы [1]) и

$$\int_0^\ell p u''_{xx} h''_{xx}\,dx + \int_0^\ell r u'_x h'_x\,dx + \int_0^\ell h\,d(\alpha - F) + \gamma_1 u(0)h(0) + \gamma_2 u'_x(0)h'_x(0) + \gamma_3 u(l)h(l) = 0.$$

Третий интеграл в последнем равенстве мы проинтегрируем по частям, что возможно в силу свойств $h(x), \alpha(x)$ и $F(x)$:

$$\int_0^\ell p u''_{xx} h''_{xx}\,dx + \int_0^\ell (r u'_x - \alpha + F) h'_x\,dx + h(l)(\alpha(l) - F(l)) - h(0)(\alpha(0) - F(0)) + \\ + \gamma_1 u(0)h(0) + \gamma_2 u'_x(0)h'_x(0) + \gamma_3 u(l)h(l) = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим множество $E_1 = \{u \in E | u(x) = 0$ для всех $x \geqslant \xi, h(0) = h'(0) = 0\}$. Для $h \in E_1$ равенство (3) принимает вид

$$\int_0^\xi p u''_{xx} h''_{xx}\,dx + \int_0^\xi (r u' - \alpha + F) h'\,dx = 0.$$

Вводя функцию $\beta(x) = \int_0^x (r u'(s) - \alpha(s) + F(s))\,ds$ и интегрируя по частям интеграл $\int_0^\xi h'_x\,d\beta$, будем иметь:

$$\int_0^\xi (p u'' - \beta) h''\,dx + \beta(\xi - 0) h'(\xi - 0) = 0. \tag{4}$$

Для дальнейших рассуждений нам понадобится лемма из [2], которую для удобства читателя мы приведем здесь без доказательства.

Лемма 1 [2]. *Пусть $A(x)$ имеет конечное на $[0; \xi]$ изменение. Интеграл $\int_0^\xi A(x) h''(x)\,dx$ равен нулю для любой $h \in E$, удовлетворяющей дополнительным условия: $h(\xi) = h'(\xi) = 0$. Тогда $A(x)$ — линейная на $[0; \xi]$ функция.*

Из леммы мы находим, что $p u''_{xx}(x) - \beta(x) = C_1 + C_2 x$ почти всюду, а так как $\beta(x)$ и $C_1 + C_2 x$ абсолютно непрерывны на $[0; \xi]$, то равенство $p u''_{xx}(x) - \beta(x) = C_1 + C_2 x$ превращается на $[0; \xi]$ в тождество. Из (4) также находим, что $C_1 + C_2 \xi + \beta(\xi - 0) = 0$ (так как в качестве $h(x)$ допускаются функции, для которых $h'(\xi - 0) \neq 0$). Тогда $p u''_{xx}(\xi - 0) = 0$.

Отсюда мы находим, что $p u''_{xx}(x)$ абсолютно непрерывна на всем $[0; \ell]$, следовательно, интеграл $\int_0^\ell p u''_{xx} h''_{xx}\,dx$ допускает интегрирование по частям:

$$\int_0^\ell p u''_{xx} h''_{xx}\,dx = p u''_{xx} h'_x \Big|_0^\ell - \int_0^\ell (p u''_{xx})'_x\, h'_x\,dx = -p u''_{xx}(0) h'_x(0) - \int_0^\ell (p u''_{xx})'_x\, h'_x\,dx,$$

так как $p(l) = 0$. Тогда равенство (3) принимает вид

$$\int_0^\ell \Big[-(p u''_{xx})'_x + r u'_x - \alpha + F \Big] h'_x\,dx + h(l)(\alpha(l) - F(l)) - h(0)(\alpha(0) - F(0)) -$$

$$-pu''_{xx}(0)h'_x(0) + \gamma_1 u(0)h(0) + \gamma_2 u'_x(0)h'_x(0) + \gamma_3 u(l)h(l) = 0 \tag{5}$$

для любой $h \in E$.

Лемма 2. *Пусть $A(x)$ — функция ограниченной вариации и пусть для любой $h \in E$*

$$\int_0^\ell A\,dh = 0.$$

Тогда $A(x)$ есть константа на $(0;\ell)$.

Доказательство. Так как $h \in E$, то интеграл $\int_0^\ell (A - C)\,dh$ равен нулю для любой константы C и для $C^* = \dfrac{1}{\ell}\int_0^\ell A(s)\,ds$, в частности. Функция $h(x) = \int_0^x (A(s) - C^*)\,ds$, очевидно, принадлежит E. Поэтому равенство $\int_0^\ell (A - C^*)\,dh = 0$ принимает вид $\int_0^\ell (A(s) - C^*)^2\,ds = 0$. Отсюда вытекает, что равенство $A(x) - C^* = 0$ справедливо почти всюду.

Пусть ξ — внутренняя точка, в которой равенство $A(x) - C^* = 0$ нарушается. Так как $A(x)$ имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение, то односторонние пределы $A(\xi - 0)$ и $A(\xi + 0)$ существуют. Ввиду того что множество точек, в которых $A(x) = C^*$ имеет полную меру, найдутся две последовательности $\{\xi'_n\}$ и $\{\xi''_n\}$ такие, что для всех n справедливо 1) $\xi'_n < \xi < \xi''_n$; 2) $\xi'_n \to \xi$ и $\xi''_n \to \xi$; 3) $A(\xi'_n) = A(\xi''_n) = C^*$.

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в последнем равенстве будем иметь $A(\xi - 0) = A(\xi + 0) = C^*$, т. е. односторонние пределы совпадают, что вместе с принятым соглашением означает непрерывность $A(x)$ в точке ξ^*. Таким образом, $A(x) \equiv C^*$ на $(0;l)$. Лемма доказана.

Из (5), на основании леммы 2, мы получаем тождество $-(pu''_{xx})'_x(x) + ru'(x) - \alpha(x) + F(x) \equiv C$ при некоторой постоянной C. Дифференцируя по мере σ, содержащей все особенности системы (см. [3]), последнее тождество мы придем к уравнению

$$(pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma.$$

Так же из (5) мы получаем равенства

$$-\alpha(0) + F(0) - C + \gamma_1 u(0) = 0, \qquad -pu''_{xx}(0) + \gamma_2 u'_x(0) = 0, \qquad \alpha(l) - F(l) + C + \gamma_3 u(l) = 0.$$

Из первого и третьего равенств мы получаем граничные условия (так как $(pu''_{xx})'_x(0) - \alpha(0) + F(0) = C$ и $ru'_x(l) - \alpha(l) + F(l) = C$):

$$\left(pu''_{xx}\right)'_x(0) + \gamma_1 u(0) = 0, \qquad ru'_x(l) + \gamma_3 u(l) = 0.$$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема. *Если $u(x)$ дает минимум функционалу $\Phi(u)$ на множестве E, то $u(x)$ принадлежит пространству $\widetilde{E} \subset E$ функций, вторая квазипроизводная $\left(pu_0{}''_{x\mu}\right)(x)$ которых абсолютно непрерывна на $[0;l]$, $\left(pu_0{}''_{x\mu}\right)'_x$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0;l]$ и является решением граничной задачи:*

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ \left(pu''_{xx}\right)'_x(0) + \gamma_1 u(0) = 0, \\ -\left(pu''_{xx}\right)(0) + \gamma_2 u'_x(0) = 0, \\ \left(ru'_x\right)(l) + \gamma_3 u(l) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Изучать полученную систему можно и с позиций теории обобщенных функций, когда все штрихи означают обобщенное дифференцирование. Однако на этом пути возникает ряд труднопреодолимых препятствий. Во-первых, возникает проблема умножения обобщенной функции на разрывную, которая на данный момент не решена. Во-вторых, даже в случае решения первой проблемы, удаётся установить слабую разрешимость (6). И в-третьих, подход к изучению уравнения (и самой модели) с позиций теории обобщенных функций не даёт возможности применения качественных методов анализа (типа теорем Ролля) решения уравнения.

Уравнение в (6) в точке ξ реализуется как условия

$$u(\xi - 0) = u(\xi + 0), \qquad (pu''_{xx})(\xi - 0) = 0, \qquad \Delta(pu''_{xx})'_x(\xi) - \Delta(ru'_x)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = 0.$$

Последнее равенство принимает вид $(pu''_{xx})'_x(\xi-0)+(ru'_x)(\xi+0)=0$, если вспомнить, что $p(x)\equiv 0$ при $x\geqslant\xi$ и предположить отсутствие упругой опоры в точке ξ.

Покажем, что модель (6) обладает свойством невырожденности, т. е. однородная задача (при $F(x)\equiv\mathrm{const}$) имеет только тривиальное решение.

Если это не так, то существует нетривиальное решение $u(x)$. Подставим $u(x)$ в уравнение, умножим полученное тождество на $u(x)$ и проинтегрируем по мере σ по всему $[0;\ell]$:

$$\int_0^\ell\left((pu''_{xx})''_{x\sigma}-(ru'_x)'_\sigma+uQ'_\sigma\right)u(x)\,d\sigma=0.$$

Разбивая интеграл на три и интегрируя по частям первый из них дважды, а второй один раз, будем иметь

$$(pu''_{xx})'_xu(x)|_0^\ell-(pu''_{xx})u'_x(x)|_0^\ell-(ru'_x)u(x)|_0^\ell+\int_0^\ell pu''^2_{xx}\,dx+\int_0^\ell ru'^2_x\,dx+\int_0^\ell u^2Q'_\sigma\,d\sigma=0.$$

В силу граничных условий последнее равенство принимает вид

$$\gamma_1u^2(0)+\gamma_2u'^2(0)+\gamma_3u^2(l)+\int_0^\ell pu''^2_{xx}\,dx+\int_0^\ell ru'^2_x\,dx+\int_0^\ell u^2Q'_\sigma\,d\sigma=0.$$

В последнем равенстве все слагаемые неотрицательны, поэтому $\gamma_1u^2(0)=0$, $\gamma_2u'^2(0)=0$, $\gamma_3u^2(l)=0$, $\int_0^\ell pu''^2_{xx}\,dx=0$, $\int_0^\ell ru'^2_x\,dx=0$ и $\int_0^\ell u^2Q'_\sigma\,d\sigma=0$. Из первого и второго равенств, содержащих интеграл, мы находим, что $pu''_{xx}(x)=0$ и $ru'_x(x)=0$ почти всюду на $[0;\ell]$. Из первого следует, что $u(x)$ на $[0;\xi]$ есть линейная функция, из второго — $u(x)$ есть константа на $[\xi,l]$.

В то же время равенство $\gamma_3u^2(l)=0$ означает, что $u(l)=0$. Отсюда находим, что $u(x)\equiv 0$ на $[\xi,l]$ и в силу непрерывности решения $u(\xi-0)=0$.

Из условия $\gamma_1+\gamma_2>0$ мы находим, что либо $\gamma_1u^2(0)=0$, либо $\gamma_2u'^2(0)=0$ (либо выполняются оба равенства). В первом случае мы получим, что линейная на $[0;\xi]$ функция $u(x)$ на концах этого отрезка принимает нулевые значения, т. е. $u(x)\equiv 0$ на $[0;\xi]$. Во втором случае делаем вывод о том, что $u'(x)$ на $[0;\xi]$ есть нулевая константа, а затем установим тривиальность $u(x)$ на $[0;\xi]$.

Таким образом, $u(x)$ есть нуль на всем $[0;\ell]$, что противоречит нашему предположению.

Покажем, что рассматриваемая модель занимает «промежуточное» положение между моделями, которые описываются граничными задачами второго и четвертого порядков соответственно, в следующем смысле: размерность пространства решений однородного уравнения (размерность модели) равна трем, т. е. существует система из трех линейно независимых решений однородной модели; любые другие решения могут быть выражены через эти три. Следует отметить, что применить здесь классическую схему не представляется возможным. В самом деле, если поставить задачу Коши в точке x_0 слева от ξ, то решение будет существовать на всем полуинтервале $[0;\xi)$. Используем теперь условия вклейки в точке ξ. Мы можем подставить начальную задачу в точку $\xi+0$. Мы получим решение на полуинтервале $(\xi;\ell]$. Таким образом, мы можем получить решения на всем $[0;\ell]$. Однако, ставя задачу Коши справа от ξ в силу теоремы о существовании единственности, мы получим решение на полуинтервале $(\xi;\ell]$, но «перебраться» за точку ξ без соблюдения единственности мы не можем ($u'_x(\xi-0)$ не определено).

Далее, для простоты мы рассмотрим случай $\gamma_i=\infty$ ($i=1,2,3$). Все сказанное справедливо и в общем случае (при условии невырожденности модели) при небольших изменениях рассуждений.

Введем обозначения: $l_1u=u(0)$, $l_2u=u'(0)$, $l_3u=u(\ell)$.

Покажем, что существует система линейно независимых функций, удовлетворяющих условию $l_i\varphi_j=\delta_i^j$, где δ_i^j — символ Кронекера, равный 1, если $i=j$, и 0 — в противном случае.

На полуинтервале $[0;\xi)$ функции $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^4$ и $\varphi_*(x)$ определим как решения однородного уравнения $(pu''_{xx})''_{x\sigma}-(ru'_x)'_\sigma+uQ'_\sigma=0$ и неоднородного уравнения $(pu''_{xx})''_{x\sigma}-(ru'_x)'_\sigma+uQ'_\sigma=F'_\sigma$ соответственно, удовлетворяющие начальным условиям $\varphi_i(0)=\delta_i^1$, ${\varphi_i}'_x(0)=\delta_i^2$, $p{\varphi_i}''_{xx}(0)=\delta_i^3$, $(p{\varphi_i}''_{xx})(0)=\delta_i^4$ ($i=1,2,3,4$) и $\varphi_*(0)={\varphi_*}'_x(0)=p{\varphi_*}''_{xx}(0)=(p{\varphi_*}''_{xx})'_x(0)=0$. Аналогично на $(\xi;\ell]$ определим функции $\{\psi_j(x)\}_{j=1}^2$ и $\varphi^*(x)$ как решения однородного $-(ru'_x)'_\sigma+uQ'_\sigma=0$ и $-(ru'_x)'_\sigma+uQ'_\sigma=F'_\sigma$ соответственно, удовлетворяющие начальным условиям $\psi_j^{(i-1)}(0)=\delta_i^j$ и $\varphi^{*(i-1)}(0)=0$ ($i,j=1,2$). Существование решений задач Коши обеспечивается соответствующими теоремами.

Функция

$$u(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{4} \alpha_i \varphi_i(x) + \varphi_*(x) & \text{при } x < \xi, \\ \sum\limits_{j=1}^{2} \beta_j \psi_j(x) + \varphi^*(x) & \text{при } x > \xi \end{cases} \tag{7}$$

удовлетворяет краевым условиям $u(0) = u'(0) = u(\ell) = 0$ при любых α_3, α_4 и β_2, если только $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = 0$. Остается заметить, что существует единственная тройка чисел $(\alpha_3, \alpha_4, \beta_2)$ такая, что функция $u(x)$ удовлетворяет остальным трем краевым условиям. В самом деле, для этого необходимо и достаточно, чтобы α_3, α_4 и β_2 удовлетворяли системе

$$\begin{cases} \alpha_3 \varphi_3(\xi - 0) + \alpha_4 \varphi_4(\xi - 0) + \varphi_*(\xi - 0) = \beta_2 \psi_2(\xi + 0) + \varphi^*(\xi + 0), \\ \alpha_3 (p {\varphi_3}''_{xx})(\xi - 0) + \alpha_4 (p {\varphi_4}''_{xx})(\xi - 0) + (p {\varphi_*}''_{xx})(\xi - 0) = 0, \\ \alpha_3 (p {\varphi_3}''_{xx})'_x(\xi - 0) + \alpha_4 (p {\varphi_4}''_{xx})'_x(\xi - 0) + (p {\varphi_*}''_{xx})'_x(\xi - 0) + \\ +\beta_2 r(\xi + 0) {\psi_2}'_x(\xi + 0) + r(\xi + 0) {\varphi^*}'_x(\xi + 0) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

определитель которой отличен от нуля, так как однородная система (при $\varphi_*(x) \equiv \varphi^*(x) \equiv 0$, что соответствует однородной модели) имеет только нулевое решение ввиду доказанной выше невырожденности. Таким образом, система (8) имеет единственное решение при любой допустимой $F(x)$.

Беря в (7) $\varphi_*(x) \equiv \varphi^*(x) \equiv 0$ и последовательно $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \beta_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ и $\beta_1 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, получим три линейно независимых решения однородной модели (6), причем всё пространство решений однородной модели исчерпывается ими. Последнее и означает, что размерность пространства решений однородного уравнения $Lu = 0$ равна трем.

Покажем теперь, что при выполнении условий 1)–7) экстремаль $u_0(x)$ (решение краевой задачи) функционала (1) доставляет минимум. В самом деле, вторая вариация функционала $\Phi(u)$ на допустимой экстремали имеет вид

$$\delta^2 \Phi(u_0) h = \int_0^l p {h''_{x\mu}}^2 \, d\mu + \int_0^l r {h'_x}^2 \, dx + \int_0^l h^2 \, dQ + \gamma_1 h^2(0) + \gamma_2 {h'}^2(0) + \gamma_3 h^2(l),$$

которая при всех $h \in E$ принимает неотрицательные значения.

Библиографический список

1. *Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И., Зверева М. Б., Шабров С. А.* Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах. М. : Физматлит, 2009. 192 с.
2. *Шабров С. А.* О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 52–55.
3. *Шабров С. А.* О μ-регуляризации функции с конечным изменением // Сб. статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ. Воронеж, 1999. С. 166–169.
4. *Покорный Ю. В.* Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Докл. АН. 1999. Т. 364, № 2. С. 167–169.

On Necessary Conditions for a Minimum of a Quadratic Functional with a Stieltjes Integral and Zero Coefficient of the Highest Derivative on the Part of the Interval

T. A. Ivannikova, E. V. Timashova, S. A. Shabrov

Voronezh State University, Russia, 394006, Voronezh, Universitetskaya pl., 1, solliden_2008@inbox.ru, juli4732@mail.ru, shaspoteha@mail.ru

In this paper we obtain a necessary condition for an extremum of a quadratic functional with a Stieltjes integral in the case where the coefficient of the highest derivative may vanish on a part of the interval. It is shown that the resulting mathematical model has the property of non-degeneracy. It is proved that a Variable boundary problem that arises as a necessary condition for an extremum is an «intermediate» position between the boundary value problems of fourth- and second-order — the solution space has dimension three.

Key words: functional, a necessary condition, Stieltjes integral, derivative on the measure.

References

1. Pokornyi Yu. V., Bakhtina Zh. I., Zvereva M. B., Shabrov S. A. *Ostsilliatsionnyi metod Shturma v spektral'nykh zadach* [Sturm oscillation method in spectral problems]. Moscow, Fizmatlit, 2009, 192 p. (in Russian).
2. Shabrov S. A. On a necessary condition of at least one quadratic functional with an integral Stieltjes. *Izv. Sarat. Univ. N. S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 1. pp. 52–55 (in Russian).
3. Shabrov S. A. O μ-reguliarizatsii funktsii s konechnym izmeneniem [About μ-regularization of function of finite variation] *Sb. statei aspirantov i studentov matematicheskogo fakul'teta VGU*. Voronezh, 1999, pp. 166–169 (in Russian).
4. Pokornyi Yu. V. The Stieltjes integral and derivatives with respect to the measure in ordinary differential equations. *Dokl. Math.*, 1999, vol. 59, no. 1, pp. 34–37.

УДК 517.518.34, 517.518.36, 517.986.62

МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА РАСТЯЖЕНИЯ В ПРОИЗВЕДЕНИИ ЛОКАЛЬНО-КОМПАКТНЫХ НУЛЬ-МЕРНЫХ ГРУПП

С. Ф. Лукомский

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, LukomskiiSF@info.sgu.ru

В действительном вейвлет-анализе d-мерный оператор растяжения может быть записан с помощью действительной $d \times d$ матрицы. В настоящей работе найден явный вид оператора растяжения в произведении локально-компактных нуль-мерных абелевых групп.

Ключевые слова: нуль-мерные группы, оператор растяжения, кратномасштабный анализ.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы активно изучаются всплесковые базисы на группах Виленкина G_V и полях $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел, а также кратномасштабный анализ (КМА), позволяющий строить такие базисы. В значительной мере это связано с тем, что всплесковые базисы на G_V и $\mathbb{Q}_p$, которые получаются в рамках соответствующего КМА, состоят из ступенчатых функций и, значит, могут быть использованы в цифровой обработке дискретной информации. Поэтому особый интерес вызывают всплесковые базисы на произведениях G_V^d и $\mathbb{Q}_p^d$. Первая попытка получить всплесковые базисы в $L_2(\mathbb{Q}_p^d)$ была предпринята в работе А. Хренникова и В. Шелковича [1], где многомерные всплесковые базисы были получены как произведение одномерных. В. Шелкович и М. Скопина [2] в 2009 г. построили многомерные 2-адические базисы Хаара в $L_2(\mathbb{Q}_2^d)$, используя тензорное произведение одномерных КМА. При построении всплесковых базисов и КМА основную роль играет наличие операторов растяжения и сдвига. Так, в работе [2] в качестве d-мерного оператора растяжения A_d использовался оператор покомпонентного растяжения, т. е. $A_d(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)}) = (A_1 x^{(1)}, A_1 x^{(2)}, \dots, A_1 x^{(d)})$, где A_1 — одномерный оператор растяжения. В классическом случае [3] d-мерный оператор растяжения может быть определен с помощью целочисленной матрицы $\mathscr{A}_{d\times d}$ равенством $A_d(X) = \mathscr{A} X$. Э. Кинг и М. Скопина [4] в 2010 г. выяснили, что при построении КМА в $L_2(\mathbb{Q}_2^2)$ в качестве $\mathscr{A}$ можно взять шахматную матрицу $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Поле $\mathbb{Q}_p$ является частными случаями нуль-мерной группы, а их произведение $\mathbb{Q}_p^d$ также будет нуль-мерной группой. Поэтому естественно рассмотреть более общий вопрос: какой вид имеет оператор растяжения в произведении нуль-мерных групп. В работах [5, 6], учитывая тот факт, что произведение нуль-мерных групп снова нуль-мерная группа, была предложена конструкция построения оператора растяжения на произведении компактных нуль-мерных групп, однако этот оператор не удалось записать в виде $A_d(X) = \mathscr{A} X$. В настоящей работе мы покажем, что оператор растяжения, рассмотренный в работах [5, 6], может быть записан в виде $A_d(X) = \mathscr{A} E_A \mathscr{A}^{-1} X$, где $\mathscr{A} = \mathscr{A}_{d\times d}$ — невырожденная матрица над полем вычетов по простому модулю p, и E_A матрица, в которой на диагонали, ниже главной, стоят 1, в правом верхнем углу — одномерный оператор растяжения A_1, и остальные элементы равны нулю.