References

1. Alimov O. D., Manzhosov V. K., Eremiants V. E. *Udar. Rasprostranenie voln deformacij v udarnyh sistemah* [Shock. Propagation of strain waves in shock systems]. Moscow, Nauka, 1985, 354 p. (in Russian).
2. Alimov O. D., Basov S. A. *Gidravlicheskie vibroudarnye sistemy* [Hydraulic vibroimpact systems]. Moscow, Nauka, 1990, 352 p. (in Russian).
3. Krupenin V. L. Udarnye i vibroudarnye mashiny i ustrojstva [Shock and vibroimpact machine and devices]. *Vestnik nauchno-tehnicheskogo razvitija*, 2009, no. 4 (20), pp. 3–32 (in Russian).
4. Manzhosov V. K., Novikov D. A. Impact system motion modes simulation at periodic force effect. *Izv. Sarat. Univ. N. S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2010, vol. 10, iss. 4, pp. 65–71 (in Russian).
5. Manzhosov V. K., Novikov D. A. Limit cycles of motion of a shock system in case of relay-type force and shock action at the moment of force switching. *Avtomatizacija processov upravlenija*, 2011, no. 3(25), pp. 14–20 (in Russian).

УДК 539.374

ПОЛЕВЫЕ УРАВНЕНИЯ И d-ТЕНЗОРЫ ТЕРМОУПРУГОГО КОНТИНУУМА С «ТОНКОЙ» МИКРОСТРУКТУРОЙ

В. А. Ковалев[1], Ю. Н. Радаев[2]

[1]Доктор физико-математических наук, зав. кафедрой прикладной математики и аналитической поддержки принятия решений, Московский городской университет управления Правительства Москвы, vlad_koval@mail.ru

[2]Доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Рассматривается новая нелинейная математическая модель термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой. Построение модели выполнено в терминах 4-ковариантного лагранжева формализма теории поля. Микроструктура континуума задается микроструктурными d-тензорами, которые вводятся в теоретико-полевую схему как экстраполевые переменные (d-переменные). Указывается «естественная» плотность вариационного интегрального функционала термоупругого действия и сформулирован соответствующий вариационный принцип наименьшего действия. Ковариантные уравнения термоупругого поля в континууме с микроструктурой получаются в канонической форме Эйлера–Лагранжа. Обсуждаются определяющие уравнения поля и их место в схеме теоретико-полевого подхода. Выполнен учет инерционности микроструктурной «составляющей» поля. Вариационные симметрии интегрального функционала термоупругого действия применяются для построения ковариантных канонических тензоров термомеханики и 4-токов. Даны канонические формы дивергентных законов сохранения термоупругого поля в плоском 4-пространстве-времени.

Ключевые слова: термоупругость, микроструктура, поле, экстраполе, действие, лагранжиан, ковариантность, симметрия, закон сохранения, d-тензор, 4-ток, тензор энергии-импульса.

1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Под микроструктурой континуума обычно понимается существование нескольких различных физических масштабов (структурных уровней), определяющих состояние континуума, их самосогласованное взаимодействие и возможность передачи энергии с одного структурного уровня на другой. Теория таких континуумов основывается на необходимости допустить существование дополнительных (экстра) степеней свободы и возможности исследовать физически бесконечно малый объем не как материальную точку, а как существенно более сложный объект, с присущими ему дополнительными степенями свободы (ротационными, осцилляционными), как своего рода микроконтинуум, обладающий возможностью дополнительной микродеформации.

Вопросы, связанные с изучением континуума с микроструктурой, находятся в русле тех течений в механике деформируемого твердого тела, которые отдают приоритет структурному моделированию. При этом необходимо учитывать, что существенной особенностью современного состояния естественных наук является явно просматриваемая тенденция решения нелинейных проблем (в том числе и проблем механики деформируемого твердого тела) вне рамок имеющегося физически надежно обоснованного набора математических моделей. Конечной целью математического моделирования обычно ставится формулировка замкнутых систем уравнений, без чего в принципе невозможны постановка и решение прикладных задач. Корректное построение новых математических моделей континуума, в свою очередь, должно опираться на проверенные временем принципы и методы. Не последняя роль здесь принадлежит методам теории поля. Часто эти методы выступают как, по существу, единственный инструмент вывода физически приемлемых уравнений.

Целью настоящей работы является построение нелинейной теоретико-полевой модели термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой, представляемой конечным набором тензоров, ранг которых может быть сколь угодно высоким.

2. ФИЗИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ, СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Ключевое положение классической теории поля (см., например, [1, 2]) заключается в том, что непрерывное физическое поле математически представляется некоторым интегральным функционалом $\mathfrak{I}$, который по историческим причинам называется действием (action):

$$\mathfrak{I} = \int \mathscr{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) d^4 X. \tag{1}$$

Здесь характерная для теории поля символика, развитая в [1, 2], имеет следующий смысл: $\mathscr{L}$ — «естественная» плотность лагранжиана (плотность действия); φ^k — упорядоченный массив физических полевых переменных; X^β $(\beta = 1, 2, 3, 4)$ — четыре пространственно-временные координаты; d^4X — «естественный» элемент объема четырехмерного пространства-времени. Заметим, что в традиционных текстах, посвященных классической теории поля, действие и функционал действия обычно обозначаются через S.

Символ d^4X в (1) указывает на «естественный» пространственно-временной элемент объема и представляет собой обычное произведение дифференциалов пространственно-временных координат:

$$d^4X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4.$$

Через ∂_β в математическом оформлении действия, данном (1) и далее, обозначается оператор *полного* дифференцирования по пространственно-временной координате X^β; в соответствии с цепным правилом дифференциального исчисления находим:

$$\partial_\beta = \partial_\beta^{\mathrm{expl}} + \sum_{s \geq 0} \left(\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \partial_\beta \varphi^l\right) \frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \varphi^l)},$$

где символ $\partial_\beta^{\mathrm{expl}}$ — оператор *частного* дифференцирования по *явному* вхождению переменной X^β.

Четвертую по счету координату в дальнейшем будем ассоциировать со временем, которое, возможно, будет трансформироваться с помощью размерной постоянной так, чтобы уравнять физические размерности всех четырех пространственно-временных координат. Полное дифференцирование по времени будет обозначаться как символом ∂_4, так и традиционной точкой.

В теориях поля лагранжиан $\mathscr{L}$ всегда приходится рассматривать как функцию следующего набора переменных:

$$\varphi^s, \partial_{\alpha_1} \varphi^s, \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \varphi^s, \dots, X^\gamma. \tag{2}$$

Обычно лагранжиан подбирают так, чтобы получить известные уравнения поля или конструируют, обеспечивая заданную симметрию и выполнение некоторых дополнительных требований, например, чтобы получались линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Построение принципиально новых лагранжианов, описывающих нелинейные физические процессы, является в известном смысле достаточно сложным видом искусства.

Вариационное описание поля не может быть осуществлено без предварительного указания пространственно-временного многообразия с возможностью измерения в нем элементарных длин и объемов. Пространство-время обладает рядом фундаментальных особенностей: пространство и время однородны (отсутствуют привилегированные места в пространстве и избранные точки отсчета времени); пространство изотропно (нет избранных преимущественных направлений); четырехмерное пространство-время изотропно; пространство, возможно, обладает некоторыми скрытыми симметриями; направление хода времени не регламентировано. Перечисленные свойства пространства-времени могут быть сформулированы на языке групп преобразований пространственно-временных координат.

Преобразование пространственно-временных координат и физических полевых переменных

$$\widetilde{X}^\beta = \mathscr{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \qquad \widetilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon) \tag{3}$$

порождает, очевидно, преобразование всего комплекса переменных (2):

$$\begin{gathered} X^\gamma, \varphi^s, \partial_{\alpha_1}\varphi^s, \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\varphi^s, \ldots, \\ \downarrow \\ \widetilde{X}^\gamma, \widetilde{\varphi}^s, \widetilde{\partial}_{\alpha_1}\widetilde{\varphi}^s, \widetilde{\partial}_{\alpha_1}\widetilde{\partial}_{\alpha_2}\widetilde{\varphi}^s, \ldots . \end{gathered}$$

Чаще всего, предполагается, что преобразования (3) образуют однопараметрическую группу преобразований (группу Ли преобразований).

Полные вариации полевых переменных и пространственно-временных координат, отвечающие их преобразованию в соответствии с (3), вычисляются согласно

$$\delta X^\beta = \varepsilon \left(\frac{\partial \mathscr{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}, \qquad \delta\varphi^k = \varepsilon \left(\frac{\partial \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}.$$

Для теории поля числовая *величина* действия не столь важна, как его *форма*, задаваемая лагранжианом $\mathscr{L}$, который определяется (помимо всего прочего) выбором тех или иных координатных систем в пространственно-временном многообразии и математического представления полевых переменных. В новых переменных, вообще говоря, изменяется форма лагранжиана $\mathscr{L}$:

$$\mathscr{L} \to \widetilde{\mathscr{L}},$$

где $\widetilde{\mathscr{L}}$ — «естественная» плотность лагранжиана, выраженная с помощью новых пространственно-временных координат $\widetilde{X}^\beta$ и физических полей $\widetilde{\varphi}^k$. Однако величина действия должна оставаться неизменной (так называемая эквивалентность действия относительно группы преобразований (3)). Таким образом, функционалы

$$\mathfrak{I} = \int_{\mathscr{D}} \mathscr{L}(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \ldots, X^\beta) d^4X, \qquad \widetilde{\mathfrak{I}} = \int_{\widetilde{\mathscr{D}}} \widetilde{\mathscr{L}}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \ldots, \widetilde{X}^\beta) d^4\widetilde{X}$$

называются эквивалентными при их преобразовании группой (3) тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\widetilde{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}$.

Математическое описание поля представляет собой вариационный принцип, который по соображениям исторического характера, называется вариационным принципом Гамильтона–Остроградского (или принципом наименьшего действия). Действительное поле реализуется в пространстве-времени таким образом, что действие оказывается экстремальным, т.е. первая вариация действия обращается в нуль для всех допустимых вариаций физических полей φ^k при неварьируемых пространственно-временных координатах и четырехмерной области, выступающей в качестве носителя поля: $\delta\mathfrak{I} = 0$. В аналитической механике такому способу варьирования отвечают так называемые изохронные вариации.

Из принципа наименьшего действия получаются ковариантные дифференциальные уравнения поля в форме уравнений Эйлера–Лагранжа:

$$\mathscr{E}_k(\mathscr{L}) = 0, \tag{4}$$

где $\mathscr{E}_k(\mathscr{L}) \equiv \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} + \partial_\gamma\partial_\beta \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k)} - \cdots$ есть один из самых важных дифференциальных операторов математической физики — оператор Эйлера.

Действительные физические поля (при условии их гладкости) обязаны удовлетворять системе дифференциальных уравнений Эйлера–Лагранжа (4).

Структура дифференцирований в операторе Эйлера становится более понятной и обозримой, если ввести обозначения (см. [3]) $\dfrac{\partial}{\partial \varphi^l} = \underset{0}{\partial_l}$, $\dfrac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\varphi^l)} = \underset{s}{\partial_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}}$ и записать его символически в форме

$$\mathscr{E}_l = \sum_{s\geq 0} (-1)^s \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s} \underset{s}{\partial_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}}.$$

Здесь в сумме при $s = 0$ подразумевается слагаемое $\underset{0}{\partial}_l$, обозначающее частное дифференцирование по полевой переменной φ^l.

Заметим, что принцип наименьшего действия ограничивает физически допустимые лагранжианы. Так, недопустимы лагранжианы, для которых соответствующие интегральные функционалы не имеют экстремалей ни при каких вещественных полевых переменных или для которых дифференциальные уравнения поля (4) противоречивы.

В современной научной литературе часто говорится об инвариантности уравнений Эйлера–Лагранжа. Однако это противоречит действительному положению дел. Математически строгое определение инвариантности системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно группы преобразований известно из группового анализа и означает сохранение формы уравнений при их преобразовании к новым переменным согласно (3). Относительно произвольной однопараметрической геометрической группы преобразований (3) уравнения Эйлера–Лагранжа, вообще говоря, неинвариантны, но они ковариантны (при условии, что действие удовлетворяет принципу эквивалентности, гарантирующему при, возможно, изменяющейся «естественной» плотности лагранжиана постоянство величины действия относительно произвольных геометрических преобразований пространственно-временных координат и полевых переменных), поскольку в новых переменных правило их составления остается прежним.

Исключительный интерес в теории вариационных симметрий представляют однопараметрические геометрические группы преобразований, которые при неизменности формы функционала действия сохраняют его величину при преобразовании координат и полей согласно (3) и соответствии пространственно-временных 4-областей интегрирования в переменных X^β и $\widetilde{X}^\beta$. Указанные группы обычно называют геометрическими группами абсолютной инвариантности функционала действия, а также абсолютными геометрическими симметриями действия по Гамильтону (или просто вариационными симметриями действия). Инвариантность функционала действия (вариационная симметрия действия) относительно однопараметрической геометрической группы преобразований (3) порождает некоторый дивергентный закон сохранения. Общая теория законов сохранения для систем дифференциальных уравнений в частных производных, которые получаются как уравнения Эйлера–Лагранжа некоторой вариационной задачи, следующих из существования геометрических вариационных симметрий действия, излагается, например, в [3, с. 377–386]. Дивергентный закон сохранения является обобщением известного из теории обыкновенных дифференциальных уравнений понятия первого интеграла и всегда имеет форму дивергентного дифференциального уравнения:

$$\partial_\beta J^\beta = 0, \tag{5}$$

где $J^\beta(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \ldots, X^\mu)$ — 1-контравариантный пространственно-временной 4-вектор, которое должно удовлетворяться для любого решения уравнений поля. Вектор J^β — дифференциальная функция, зависящая от градиентов полевых переменных, наивысший порядок которых на единицу меньшего порядка уравнений поля; этот вектор называется вектором тока (или 4-током).

Классический метод поиска законов сохранения с помощью вариационных симметрий действия кратко может быть описан следующим образом.

Критерий инвариантности функционала действия (1) относительно геометрической группы преобразований (3) имеет вид

$$\delta\mathscr{L} + \mathscr{L}\frac{\partial(\delta X^\gamma)}{\partial X^\gamma} = 0, \tag{6}$$

где вариация лагранжиана $\delta\mathscr{L}$ — линейная по ε часть приращения:

$$\mathscr{L}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \ldots, \widetilde{X}^\beta) - \mathscr{L}(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \ldots, X^\beta).$$

Если лагранжиан зависит от градиентов поля порядка не выше первого, вариация лагранжиана, очевидно, равна

$$\delta\mathscr{L} = \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial X^\gamma}\right)_{\mathrm{expl}}\delta X^\gamma + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^k}\delta\varphi^k + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\delta(\partial_\beta\varphi^k).$$

Учитывая затем формулу для полной вариации первых градиентов поля

$$\delta(\partial_\beta\varphi^k) = \partial_\beta(\overline{\delta}\varphi^k) + (\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k)\delta X^\gamma,$$

где вариации $\delta\varphi^k$ и $\overline{\delta}\varphi^k$ связаны уравнением $\delta\varphi^k = \overline{\delta}\varphi^k + (\partial_\gamma\varphi^k)\delta X^\gamma$, получаем:

$$\delta\mathscr{L} = (\partial_\gamma\mathscr{L})\delta X^\gamma + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^k}\overline{\delta}\varphi^k + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\partial_\beta(\overline{\delta}\varphi^k)$$

или

$$\delta\mathscr{L} = \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\right)\overline{\delta}\varphi^k + (\partial_\gamma\mathscr{L})\delta X^\gamma + \partial_\beta\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\overline{\delta}\varphi^k\right).$$

В результате, когда вариационная симметрия действия известна и лагранжиан зависит от градиентов поля порядка не выше первого, уравнение (6) преобразуется к

$$\mathscr{E}_j(\mathscr{L})\overline{\delta}\varphi^j + \partial_\beta\left(\mathscr{L}\delta X^\beta + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\overline{\delta}\varphi^k\right) = 0. \tag{7}$$

Разделив затем левые и правые части (7) на параметр ε и обозначая

$$\mathscr{Q}^j = \frac{\overline{\delta}\varphi^j}{\varepsilon}, \qquad J^\beta = \mathscr{L}\frac{\delta X^\beta}{\varepsilon} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\frac{\overline{\delta}\varphi^k}{\varepsilon},$$

приходим к равенству

$$\mathscr{Q}^j\mathscr{E}_j(\mathscr{L}) = \partial_\beta(-J^\beta).$$

Таким образом, при выполнении уравнений поля (4) будет справедлив дивергентный закон сохранения (5).

3. ПОЛЕВАЯ ТЕОРИЯ ТЕРМОУПРУГОГО КОНТИНУУМА С МИКРОСТРУКТУРОЙ

Одним из самых распространенных подходов к изучению деформации континуума является концепция сравнения пространственных положений составляющих его точек. В этом плане необходимы инструменты, позволяющие однозначно идентифицировать все точки, совокупность которых образует континуум. В качестве одного из способов индивидуализации, широко используемых в механике деформируемого твердого тела, обычно выступают метки, частным вариантом которых являются лагранжевы координаты-метки. Однако в некоторых случаях механизм идентификации заранее может быть не вполне ясным, как это видно на примере перемещения тени, отбрасываемой некоторым движущимся от системы источников света телом.

В теориях континуума с микроструктурой (см., например, [4]) произвольная «конечная» деформация континуума, представляемая чисто геометрическим преобразованием $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ положения $\mathbf{X}$ отсчетной конфигурации в соответствующее актуальное место $\mathbf{x}$ пространства, сопровождается экстрадеформацией, проявляющейся в форме нарушений взаимной ориентации и метрических характеристик системы трех некомпланарных d-векторов $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3$), связанных с микроэлементом:

$$\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}(\mathbf{X}, t). \tag{8}$$

Переменные $\mathbf{X}$ и $\mathbf{x}$ выступают как соответственно лагранжева (отсчетная) и эйлерова (пространственные) переменные, если пользоваться стандартной терминологией механики континуума. С этими переменными связаны метрики $G_{\alpha\beta}$, g_{ij}. Конвективная метрика характеризуется метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$.

Заметим, что лагранжевы переменные X^α ($\alpha = 1, 2, 3$), дополненные четвертой временной координатой, выступают как пространственно-временные координаты. Эйлеровы переменные x^j ($j = 1, 2, 3$) представляют собой физические поля. То же самое относится к «мягкой» системе d-векторов $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3$). Но они классифицируются нами как экстраполевые (сверх переменных x^j) переменные и вводятся в формализм теории поля с помощью пространственных компонент $\underset{\mathfrak{a}}{d}^j$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$).

Система трех d-векторов, ассоциированных с каждой точкой континуума, собственно, и задает микроструктуру континуума. С теоретико-полевой точки зрения наличие микроструктуры приводит лишь к увеличению числа полевых переменных и, возможно, повышению максимального порядка дифференцирований в «естественной» плотности лагранжиана. «Тонкая» (fine) микроструктура континуума представляется экстраполями контравариантных тензоров (d-тензоров) сколь угодно высоких рангов

$$\underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots} \qquad (\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \ldots).$$

Выбранная здесь схема описания микроструктуры и возможность ее математического представления d-тензорами произвольно высоких четных рангов (симметричными по всем индексам) подробно описана в работе Ю. Н. Радаева «Континуальные модели поврежденности твердых тел» (М., 1999).

Экстрадеформация, обусловленная наличием «тонкой» микроструктуры, математически описывается отображениями, подобными (8).

Поведение репера $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3)$ характеризуется как его возможной «чистой» деформацией (сдвигами трехгранника и удлинениями его ребер), так и поворотом. Ясно, что каждый элемент континуума с микроструктурой обладает большим числом степеней свободы, чем классический континуум. С дополнительными степенями свободы, которыми обладает микроэлемент, связаны естественно и дополнительные инерция, импульс, кинетическое и деформационное действие (кинетическая энергия и свободная энергия). Трансформация репера $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3)$ может сводиться только к его «жестким» поворотам в пространстве; в этом случае [5], помимо трех трансляционных степеней свободы, микроэлемент будет обладать лишь тремя дополнительными ротационными степенями свободы. Возможность исключительно «жесткой» трансформации указанного репера можно выразить уравнениями

$$g_{ij} \underset{\mathfrak{a}}{d}^i \underset{\mathfrak{b}}{d}^j = \underset{\mathfrak{ab}}{\delta} \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b} = 1, 2, 3),$$

где g_{ij} — компоненты эйлеровой пространственной метрики, $\underset{\mathfrak{ab}}{\delta}$ — символ Кронекера, которые, очевидно, имеют смысл дополнительных кинематических ограничений, накладываемых на экстраполевые переменные $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3)$.

В более широком смысле дополнительное кинематическое ограничение может накладываться на экстрадеформацию континуума с микроструктурой в форме конечного уравнения:

$$\mathscr{F}(\underset{1}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \underset{2}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \ldots) = 0,$$

связывающего экстраполевые переменные $\underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}$ $(\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \ldots)$.

В качестве основной термической полевой переменной примем температурное смещение ϑ, которое определяется как первообразная по времени (при фиксированных лагранжевых переменных) от абсолютной температуры θ. Именно такой подход характерен для теоретико-полевых формулировок термомеханики [6–9].

Перечислим далее все определяющие переменные термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой: градиент деформации $\partial_\alpha x^j$ $(j, \alpha = 1, 2, 3)$; d-векторы $\underset{\mathfrak{a}}{d}^j$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$ вместе с их референциальными градиентами $\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3;\ \alpha = 1, 2, 3)$; d-тензоры $\underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}$ $(\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \ldots;\ j_1, j_2, \cdots = 1, 2, 3)$ и их референциальные градиенты $\partial_\alpha \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}$ $(\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \ldots;\ \alpha = 1, 2, 3;$ $j_1, j_2, \cdots = 1, 2, 3)$; градиент температурного смещения $\partial_\alpha \vartheta$ и скорость температурного смещения $\partial_4 \vartheta$.

В терминах отсчетных переменных X^α $(\alpha = 1, 2, 3)$, эйлеровых переменных x^j $(j = 1, 2, 3)$, экстраполевых d-переменных и температурного смещения ϑ «естественная» плотность действия (лагранжиан) в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии должна иметь форму

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(X^\beta, x^j, \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \vartheta, \dot{x}^j, \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^j, \underset{\mathfrak{c}}{\dot{d}}^{j_1 j_2 \cdots}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \partial_\alpha \vartheta). \tag{9}$$

Более конкретная форма получается, если рассматривать плотность действия как разность плотности кинетической энергии и свободной энергии Гельмгольца:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}} g_{kj} \dot{x}^k \dot{x}^j + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}} g_{ij} \overset{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{I}} \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^i \underset{\mathfrak{b}}{\dot{d}}^j + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}} g_{j_1 k_1} g_{j_2 k_2} \cdots \overset{\mathfrak{cd}}{\mathfrak{I}} \underset{\mathfrak{c}}{\dot{d}}^{j_1 j_2 \cdots} \underset{\mathfrak{d}}{\dot{d}}^{k_1 k_2 \cdots} \cdots -$$
$$- \psi(X^\beta, x^j, \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \vartheta, \dot{x}^j, \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^j, \underset{\mathfrak{c}}{\dot{d}}^{j_1 j_2 \cdots}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \partial_\alpha \vartheta).$$

Здесь точкой обозначается частное дифференцирование по времени ∂_4 при постоянных лагранжевых координатах X^α; ρ_R — референциальная плотность; $\overset{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{I}}$, $\overset{\mathfrak{cd}}{\mathfrak{J}}$ — тензоры инерции микроэлемента.

Вариационный интеграл термоупругого действия в силу указанной формулой (9) плотности будет иметь следующий вид:

$$\mathfrak{I} = \int \mathscr{L}(X^\beta, x^j, \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \vartheta, \dot{x}^j, \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^j, \underset{\mathfrak{c}}{\dot{d}}^{j_1 j_2 \cdots}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \partial_\alpha \vartheta) d^4 X$$
$$(\mathfrak{a} = 1,2,3; \quad \mathfrak{c} = 1,2,3,\ldots; \quad \alpha,\, \beta = 1,2,3; \quad j, j_1, j_2, \cdots = 1,2,3). \tag{10}$$

Соответствующие вариационному интегралу (10) и принципу наименьшего действия связанные уравнения поля получаются в ковариантной форме и распадаются на следующие четыре группы:

$$\begin{gathered}
\partial_\alpha S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} - \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^j} \qquad (\alpha = 1,2,3;\ j = 1,2,3),\\
\partial_\alpha \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} + \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{A}}_j - \partial_4 \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_j = 0 \qquad (\mathfrak{a} = 1,2,3;\ \alpha = 1,2,3;\ j = 1,2,3),\\
\partial_\alpha \overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha\cdot\cdots}_{\cdot j_1 j_2 \cdots} + \overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{A}}_{j_1 j_2 \cdots} - \partial_4 \overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{Q}}_{j_1 j_2 \cdots} = 0 \qquad (\mathfrak{c} = 1,2,3,\ldots;\ \alpha = 1,2,3;\ j_1, j_2, \cdots = 1,2,3),\\
\partial_\alpha j^\alpha_\mathrm{R} + \dot{s} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vartheta} \qquad (\alpha = 1,2,3).
\end{gathered} \tag{11}$$

Лагранжев полевой формализм исключительно удобен тем, что определяющие уравнения континуума выступают просто как обозначения для полевых частных производных, которые вводятся для записи дифференциальных уравнений поля (11):

$$\begin{gathered}
P_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^j}, \qquad \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^j}, \qquad \overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{Q}}_{j_1 j_2 \cdots} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{\mathfrak{c}}{\dot{d}}^{j_1 j_2 \cdots}},\\
S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha x^j)}, \qquad \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j)}, \qquad \overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha\cdot\cdots}_{\cdot j_1 j_2 \cdots} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots})},\\
\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{A}}_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d}^j}, \qquad \overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{A}}_{j_1 j_2 \cdots} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}}, \qquad s = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\vartheta}}, \qquad j^\alpha_\mathrm{R} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha \vartheta)}.
\end{gathered}$$

В приведенных выше определяющих уравнениях приняты следующие обозначения: P_j — обобщенный импульс, соответствующий трансляционным степеням свободы; $\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_j$, $\overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{Q}}_{j_1 j_2 \cdots}$ — обобщенные экстраимпульсы, соответствующие дополнительным (в том числе ротационным) степеням свободы; $S^{\alpha\cdot}_{\cdot j}$ — первый тензор напряжений Пиола–Кирхгофа; $\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j}$ $\overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha\cdot\cdots}_{\cdot j_1 j_2 \cdots}$ — тензоры экстранапряжений (hyperstress tensors); $\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{A}}_j$ $\overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{A}}_{j_1 j_2 \cdots}$ — обобщенные силы-моменты, сопряженные экстраполевым переменным $\underset{\mathfrak{a}}{d}^j$ $(\mathfrak{a} = 1,2,3;\ j = 1,2,3)$, $\underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}$ $(\mathfrak{c} = 1,2,3,\ldots;\ j_1, j_2, \cdots = 1,2,3)$; s — плотность энтропии (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии); j^α_R — референциальный вектор потока энтропии (в единицу времени через единицу площади в отсчетном состоянии).

Полевое уравнение в последней строке (11) выражает баланс энтропии. Если плотность действия не содержит явных вхождений температурного смещения, то производство энтропии будет равно нулю. Таким образом, уравнение транспорта тепла будет иметь гиперболический аналитический тип так же, как это имеет место в гиперболической термоупругости Грина–Нахди GNII [2].

4. ПЛОСКОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

В дальнейшем будем считать пространство-время плоским. В этом случае выполняется условие трансляционной инвариантности действия. Поэтому можно ввести 4-ковариантный тензор энергии-импульса и сформулировать с его помощью законы сохранения, соответствующие сдвигами всех четырех пространственно-временных координат [2]. Следуя [2], определим компоненты канонического тензора энергии-импульса термоупругого поля $T^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda}$ $(\lambda,\, \mu = 1,2,3,4)$ в континнуме с микроструктурой. Всего имеются следующие четыре группы соотношений:

$$T^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda} = \mathscr{L}\delta^\mu_\lambda + S^{\mu\cdot}_{\cdot l}(\partial_\lambda x^l) + \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\mu\cdot}_{\cdot l}(\partial_\lambda \underset{\mathfrak{a}}{d}^l) + \overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{M}}{}^{\mu\cdot\cdots}_{\cdot j_1 j_2 \cdots}(\partial_\lambda \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}) - j^\mu_\mathrm{R}(\partial_\lambda \vartheta) \qquad (\lambda,\, \mu = 1,2,3), \tag{12}$$

$$T^{\mu\cdot}_{\cdot 4} = S^{\mu\cdot}_{\cdot l}\dot{x}^l + \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\mu\cdot}_{\cdot l}\dot{\underset{\mathfrak{a}}{d}}{}^l + \overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{M}}{}^{\mu\cdot\cdot\cdots}_{\cdot j_1 j_2\cdots}\dot{\underset{\mathfrak{c}}{d}}{}^{j_1 j_2\cdots} - j^{\mu}_{\mathrm{R}}\dot{\vartheta} \qquad (\lambda = 4;\ \mu = 1,2,3), \tag{13}$$

$$T^{4\cdot}_{\cdot\lambda} = -(\partial_\lambda x^l)P_l - (\partial_\lambda \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^l)\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_l - (\partial_\lambda \underset{\mathfrak{c}}{d}{}^{j_1 j_2\cdots})\overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{Q}}_{j_1 j_2\cdots} - s(\partial_\lambda\vartheta) \qquad (\lambda = 1,2,3;\ \mu = 4), \tag{14}$$

$$T^{4\cdot}_{\cdot 4} = \mathscr{L} - \dot{x}^l P_l - \dot{\underset{\mathfrak{a}}{d}}{}^l\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_l - \dot{\underset{\mathfrak{c}}{d}}{}^{j_1 j_2\cdots}\overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{Q}}_{j_1 j_2\cdots} - s\dot{\vartheta} \qquad (\lambda = 4;\ \mu = 4). \tag{15}$$

Приведенные выше компоненты тензора энергии-импульса термоупругого поля позволяют быстро найти полный гамильтониан поля $\mathscr{H}$, вектор псевдоимпульса поля $\mathscr{P}_\lambda$, вектор Умова–Пойнтинга Γ^μ и тензор напряжений Эшелби $P^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda}$.

Так, компонента (15) тензора энергии-импульса представляет собой взятую с отрицательным знаком плотность гамильтониана:

$$\mathscr{H} = \dot{x}^l P_l + \dot{\underset{\mathfrak{a}}{d}}{}^l\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_l + \dot{\underset{\mathfrak{c}}{d}}{}^{j_1 j_2\cdots}\overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{Q}}_{j_1 j_2\cdots} + \dot{\vartheta}s - \mathscr{L}.$$

Компоненты (14) определяют ковариантный вектор псевдоимпульса поля согласно формуле

$$\mathscr{P}_\lambda = -(\partial_\lambda x^l)P_l - (\partial_\lambda \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^l)\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_l - (\partial_\lambda \underset{\mathfrak{c}}{d}{}^{j_1 j_2\cdots})\overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{Q}}_{j_1 j_2\cdots} - s(\partial_\lambda\vartheta) \qquad (\lambda = 1,2,3).$$

Из компонент (13) формируется контравариантный вектор Умова–Пойнтинга:

$$\Gamma^\mu = S^{\mu\cdot}_{\cdot l}\dot{x}^l + \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\mu\cdot}_{\cdot l}\dot{\underset{\mathfrak{a}}{d}}{}^l + \overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{M}}{}^{\mu\cdot\cdot\cdots}_{\cdot j_1 j_2\cdots}\dot{\underset{\mathfrak{c}}{d}}{}^{j_1 j_2\cdots} - j^{\mu}_{\mathrm{R}}\dot{\vartheta} \qquad (\mu = 1,2,3).$$

Компоненты (12) тензора энергии-импульса, взятые с противоположным знаком, дают возможность вычислить тензор напряжений Эшелби:

$$-P^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda} = \mathscr{L}\delta^\mu_\lambda + S^{\mu\cdot}_{\cdot l}(\partial_\lambda x^l) + \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\mu\cdot}_{\cdot l}(\partial_\lambda \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^l) + \overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{M}}{}^{\mu\cdot\cdot\cdots}_{\cdot j_1 j_2\cdots}(\partial_\lambda \underset{\mathfrak{c}}{d}{}^{j_1 j_2\cdots}) - j^{\mu}_{\mathrm{R}}(\partial_\lambda\vartheta) \qquad (\lambda, \mu = 1,2,3).$$

4-ковариантный закон сохранения, соответствующий вариационным симметриям действия в форме трансляций пространственно-временных координат $\partial_\mu T^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda} = 0$ (λ, $\mu = 1,2,3,4$), естественным образом распадается на два симметричных канонических уравнения баланса энергии и псевдоимпульса термоупругого поля: $-\dot{\mathscr{H}} + \partial_\mu\Gamma^\mu = 0$, $-\dot{\mathscr{P}}_\lambda + \partial_\mu P^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda} = 0$.

Теоретико-полевой подход (и лагранжев формализм) применим только к тем полям, в которых сохраняется постоянной полная энергия. Он не отражает того обстоятельства, что в реальном эволюционирующем поле полная энергия убывает, трансформруясь в другие виды энергии, например в тепловую энергию, т. е. происходит рассеяние энергии, сопровождающееся возрастанием энтропии. Однако не стоит и сужать возможности такого подхода. Возможность освобождения (стока) энергии может быть учтена не столько в уравнениях поля, сколько сингулярностями поля.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (*проект* 13-01-00139 «*Гиперболические тепловые волны в твердых телах с микроструктурой*»).

Библиографический список

1. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Элементы теории поля : вариационные симметрии и геометрические инварианты. М. : Физматлит, 2009. 156 с.

2. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.

3. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1978. 400 с.

4. *Toupin R. A.* Theories of Elasticity with Couple-stress // Arch. Ration. Mech. Anal. 1964. Vol. 17, № 5. P. 85–112.

5. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. Paris : Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.

6. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Вывод тензоров энергии-импульса в теориях микрополярной гиперболической термоупругости // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 5. С. 58–77.

7. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Теоретико-полевые формулировки и модели нелинейной гиперболической микрополярной термоупругости // XXXVI Дальневосточная мат. шк.-семинар им. акад. Е. В. Золотова : сб. докл. Владивосток : ИАПУ ДВО РАН, 2012. С. 137–142.

8. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Точно сохраняющиеся инварианты связанного микрополярного термоупругого поля // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 4. С. 71–79.
9. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Ковариантная форма уравнений совместности на поверхностях сильного разрыва в микрополярном термоупругом континууме: гиперболическая теория // Современные проблемы механики сплошной среды : тр. XVI Междунар. конф., 16–19 окт. 2012 г., Ростов-на-Дону. Т. II. Ростов н/Д : Изд-во Южн. федер. ун-та, 2012. С. 99–103.

Covariant Field Equations and d-tensors of Hyperbolic Thermoelastic Continuum with Fine Microstructure

V. A. Kovalev[1], Yu. N. Radayev[2]

[1]Moscow City Government University of Management, Russia, 107045, Moscow, Sretenka str., 28, vlad_koval@mail.ru
[2]Institute for Problems in Mechanics of RAS, Russia, 119526, Moscow, Vernadskogo av., 101, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

A non-linear mathematical model of hyperbolic thermoelastic continuum with fine microstructure is proposed. The model is described in terms of 4-covariant field theoretical formalism. Fine microstructure is represented by d-tensors, playing role of extra field variables. A Lagrangian density for hyperbolic thermoelastic continuum with fine microstructure is given and the corresponding least action principle is formulated. 4-covariant field equations of hyperbolic thermoelasticity are obtained. Constitutive equations of microstructural hyperbolic thermoelasticity are discussed. Virtual microstructural inertia is added to the considered action density. It is also concerned to the thermal inertia. Variational symmetries of the thermoelastic action are used to formulate covariant conservation laws in a plane space–time.

Key words: thermoelasticity, microstructure, field, extra field, action, Lagrangian, covariance, symmetry, conservation law, d-tensor, 4-current, energy–momentum tensor.

References

1. Kovalev V. A., Radaev Yu. N. *Elementy teorii polia: variatsionnye simmetrii i geometricheskie invarianty* [Elements of the field theory: variational symmetries and geometric invariants]. Moscow, Fizmatlit, 2009, 156 p. (in Russian).
2. Kovalev V. A., Radaev Yu. N. *Volnovye zadachi teorii polia i termomekhanika* [Wave problems of the field theory and thermomechanics]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2010, 328 p. (in Russian).
3. Ovsiannikov L. V. *Gruppovoi analiz differentsial'nykh uravnenii* [Group analysis of differential equations]. Moscow, Nauka, 1978, 400 p. (in Russian).
4. Toupin R. A. Theories of Elasticity with Couple-stress. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1964, vol. 17, no. 5, pp. 85–112.
5. Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909, 226 p. (in French).
6. Kovalev V. A., Radaev Yu. N. Derivation of energy-momentum tensors in the theories of hyperbolic micropolar thermoelasticity. *Mech. Sol.* 2011, vol. 46, no. 5, pp. 705—720.
7. Kovalev V. A., Radaev Yu. N. Teoretiko-polevye formulirovki i modeli nelineinoi giperbolicheskoi mikropoliarnoi termouprugosti [Covariant field formulations and models of non-linear hyperbolic micropolar thermoelasticity]. *XXXVI Dal'nevostochnaia matematicheskaia shkola-seminar im. akad. E. V. Zolotova*. Vladivostok, 2012, pp. 137–142 (in Russian).
8. Kovalev V. A., Radaev Yu. N. On precisely conserved quantities of coupled micropolar thermoelastic field. *Izv. Sarat. Univ. N. S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 4, pp. 71–79 (in Russian).
9. Kovalev V. A., Radaev Yu. N. Kovariantnaia forma uravnenii sovmestnosti na poverkhnostiakh sil'nogo razryva v mikropoliarnom termouprugom kontinuume: giperbolicheskaia teoriia [Covariant forms of jump equations on shock surfaces in micropolar thermoelastic continuum: a hyperbolic theory]. *Trudy XVI Mezhdunarodnoi konferentsii «Sovremennye problemy mekhaniki sploshnoi sredy»*. vol. II. Rostov on Don, 2012, pp. 99–103 (in Russian).