УДК 519.71

ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ МАТРИЧНЫХ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЗАДАЧЕ О БОКОВОМ ДВИЖЕНИИ ГРУППЫ САМОЛЕТОВ

А. Ю. Литвин[1], **В. Т. Приставко**[2]

[1]Аспирант кафедры математической теории экономических решений, Санкт-Петербургский государственный университет, alybey@mail.ru

[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории экономических решений, Санкт-Петербургский государственный университет, pvt1@yandex.ru

Слежение за динамическим объектом, не доступным непосредственному наблюдению, на практике усложняется из-за наличия случайных воздействий (шумов): порывы ветра отклоняют самолет от заданного курса, показания датчиков всегда содержат некоторую неточность. Для того чтобы уменьшить влияние шумов применяются фильтры. В статье предлагается осуществлять одновременную фильтрацию движения группы одинаковых объектов за счет постановки задачи в матричных переменных. Предлагается рассматривать управляемый фильтр. Введенный линейно-квадратичный критерий качества позволяет учитывать ограничения на управление фильтром, что делает его физически реализуемым. Доказаны утверждения, позволяющие получать оптимальные матричные фильтры. Полученное решение существует всегда, что может быть несправедливо для других фильтров.

Ключевые слова: матричная фильтрация, матрица n-ковариаций, квадратичный функционал качества, боковое движение самолета.

ВВЕДЕНИЕ

По проблемам современной теории фильтрации написано множество работ как теоретического, так и прикладного характера. Разработано множество подходов к решению различных технических задач. Однако сказанное справедливо главным образом по отношению к векторной теории фильтров, в то время как теория матричных фильтров, являющаяся естественным развитием векторной теории, разработана мало.

В статье поставлена и решена задача оптимальной фильтрации матричного гауссовского процесса. Применимость полученных результатов показана на примере задачи фильтрации бокового движения группы самолетов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на некотором полном вероятностном пространстве $(\mathbf{\Omega}, F, \mathbb{P})$ с неубывающим непрерывным справа семейством σ-подалгебр F задан $X = X_t, t \in [0,T]$, $X_t \in \mathbb{R}^{n\times m}$ — случайный матричный процесс диффузионного типа

$$\mathbf{d}X_t = A_t X_t \mathbf{d}t + b\mathbf{d}w_t, \tag{1}$$

где, по предположению, w_t — гауссовский матричный процесс с независимыми нормально распределенными стандартными $\mathbf{N}(0,1)$ компонентами соответствующих размерностей, случайная матрица X_0 не зависит от матричной последовательности случайных воздействий w_t на систему уравнений, математическое ожидание $\mathbf{E}[X_0] = \overline{X}_0$ и матрица n-ковариаций $\mathbf{cov}(X_0, X_0) = \gamma_0$ заданы и конечны,

$$b = \|b_{ij}\|_{n\times l}, \qquad A_t = \|a_{ij}(t)\|_{n\times n}.$$

Определение 1. Будем говорить, что случайный матричный процесс $\xi = (\xi_t) \in \mathbb{R}^{[n\times m]}$, $0 \le t \le 1$, есть *сильное решение стохастического матричного дифференциального уравнения:*

$$\boldsymbol{d}\xi_t = a(t,\xi)dt + b(t,\xi)dW_t, \quad a(t,\xi) = \|a_{ij}(t,\xi)\|_{n\times m}, \quad b(t,\xi) = \|b_{kl}(t,\xi)\|_{n\times p}$$

с F_0-измеримым начальным условием $\xi_0 = \eta$, если при каждом t, $0 < t \le 1$, величины ξ_t являются F_t-измеримыми,

$$\mathbf{P}\left(\int_0^1 |a_{ij}(t,\xi)|\,dt < \infty\right) = 1, \quad \mathbf{P}\left(\int_0^1 b_{kl}^2(t,\xi)\,dt < \infty\right) = 1, \quad i,k = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}, \quad l = \overline{1,p},$$

и с вероятностью 1 для каждого t, $0 \le t \le 1$,

$$\xi_t = \eta + \int_0^t a(s,\xi)\,ds + \int_0^t b(s,\xi)\,dW_s.$$

Замечание 1. Пусть $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ — случайная матрица, которая имеет конечный второй момент, $t \in [0,\ N]$, $N \in \mathbb{N}$. Тогда n-ковариационной матрицей $\mathbf{cov}(\tilde{x},\tilde{x}) = \tilde{a}$ матрицы $\tilde{x}$ называется

$$\tilde{a}_t = \mathbf{E}[\tilde{x}_t\tilde{x}_t^*] = \mathbf{E}\left[\begin{pmatrix} \tilde{x}_{11} & \dots & \tilde{x}_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{x}_{n1} & \dots & \tilde{x}_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x}_{11} & \dots & \tilde{x}_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{x}_{1m} & \dots & \tilde{x}_{nm} \end{pmatrix}\right].$$

Здесь и далее под знаком «*» понимается операция транспонирования. Видно, что $\tilde{a}_t = \| \tilde{a}_{ij}(t) \|_{n\times n}$ и является симетрическим набором обыкновенных ковариаций данной матрицы по столбцам.

Рассмотрим наблюдения для уравнения (1) в виде случайного матричного процесса диффузионного типа:

$$\mathbf{d}Y_t = H_tX_t\mathbf{d}t + B\mathbf{d}v_t, \tag{2}$$

где матрицы имеют следующие размерности: Y_t — $[\beta\times m]$, H_t — $[\beta\times n]$, B — $[\beta\times\delta]$, v_t — $[\delta\times m]$; v_t — гауссовский матричный процесс с независимыми нормально распределенными стандартными $\mathbf{N}(0,1)$ компонентами.

Определение 2. *Линейным матричным фильтром заданной структуры* называется такой фильтр Z_t, изменение состояния которого описывается на вероятностном пространстве $(\mathbf{\Omega}, F, \mathbb{P})$ случайным процессом, определяемым системой линейных стохастических матричных дифференциальных уравнений вида

$$\mathbf{d}Z_t = F_tZ_t\mathbf{d}t + U_t\mathbf{d}Y_t, \tag{3}$$

где $Z_t \in \mathbb{R}^{n\times m}$, F_t и U_t — неизвестные матричные функции размерностей $[n\times n]$, $[n\times\beta]$ соответственно; Z_0 — неизвестное, но неслучайное начальное условие; U_t принадлежит классу линейных функций: $U_t = \gamma_t\mu_t + \eta_t$; $\varepsilon_t = X_t - Z_t$ — матричная ошибка оценки; n-ковариационная матрица $\gamma_t = \mathbf{cov}(\varepsilon_t,\varepsilon_t)$ положительно определенная, симметрическая размерности $[n\times n]$.

Определение 3. Управление U_t состоянием фильтра Z, для которого система уравнений (1)–(3) имеет единственное сильное решение, называется *допустимым*.

В качестве критерия работы фильтра Z_t рассмотрим следующий функционал $J(T,\gamma_t,U_t)$:

$$\begin{aligned} J(T,\gamma_t,U_t) &= \mathbf{Sp}\left(\mathbf{E}[\varepsilon_T^*\Theta_T\varepsilon_T + \int_0^T(\varepsilon_t^*P\varepsilon_t + U_tQU_t^*\Theta_t + 2U_tR\Theta_t)\mathbf{d}t]\right) = \\ &= \mathbf{Sp}\left(\gamma_T\Theta_T + \int_0^T(\gamma_tP + U_tQU_t^*\Theta_t + 2U_tR\Theta_t)\mathbf{d}t\right), \end{aligned} \tag{4}$$

где Q — симметрическая положительно-определенная матрица размерности $[\beta\times\beta]$; P — симметрическая неотрицательно-определенная матрица размерности $[n\times n]$; Θ_T — положительно-определенная матрица размерности $[n\times n]$. Матрицы P, Q, R, Θ_T являются известными постоянными матрицами.

Скажем несколько слов о введенном функционале. В работах Р. Калмана и А. Н. Ширяева, посвященных проблемам фильтрации случайных процессов, в качестве критерия качества выступал минимум среднего квадрата ошибки. Однако полученное ими решение зависит от некоторой обратной матрицы, которая, вообще говоря, в некоторые моменты времени может не существовать. Введение управления фильтром, как будет показано, позволяет получить управление, лишенное этого недостатка. Кроме того, вполне очевидно, что введенный функционал является обобщением критерия минимума среднего квадрата ошибки. За счет выбора матрицы Q можно учесть ограничения на допустимые управления, что существенно для практической реализации фильтра.

Задача фильтрации. *Требуется найти в классе допустимых функций оптимальные параметры фильтра Z, для которых функционал J принимал бы наименьшее возможное значение, и ошибка фильтрации была бы несмещенной.*

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ ФИЛЬТРОВ

Для решения задачи фильтрации определим параметры F_t и U_t фильтра Z_t.

Теорема 1. *Для того чтобы оценка фильтрации была несмещенной, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

$$F_t = A_t - U_t H_t, \qquad Z_0 = \mathbf{E}[X_0]. \tag{5}$$

Доказательство. *Необходимость.* Допустим, что оценка несмещенная, тогда $\mathbf{E}[\varepsilon_t] = 0, \forall\, t \in [0, T]$. Согласно [1] система уравнений (1)–(3) имеет сильное решение:

$$X_t = X_0 + \int_0^t A_t X_s \mathbf{d}s + \int_0^t b\mathbf{d}w_s,$$
$$Z_t = Z_0 + \int_0^t F_s Z_s \mathbf{d}s + \int_0^t U_s \mathbf{d}Y_s = Z_0 + \int_0^t (F_s Z_s + U_s H_s X_s)\mathbf{d}s + \int_0^t U_s B \mathbf{d}v_s.$$

Учитывая, что $\varepsilon_t = X_t - Z_t$, получим:

$$\varepsilon_t = X_0 - Z_0 + \int_0^t (A_s X_s - F_s X_s - U_s H_s X_s)\mathbf{d}s + \int_0^t F_s \varepsilon_s \mathbf{d}s + \int_0^t (b\mathbf{d}w_s - U_s B)\mathbf{d}v_s. \tag{6}$$

Переходя к математическому ожиданию, имеем:

$$\mathbf{E}[\varepsilon_t] = \mathbf{E}[X_0 - Z_0] + \int_0^t (A_s - F_s - U_s H_s)\mathbf{E}[X_s]\mathbf{d}s = 0.$$

Так как в общем случае $\mathbf{E}[X_t] \not\equiv 0$, то отсюда следует необходимость условий теоремы.

Достаточность. Предположим, что имеют место равенства из условий теоремы, тогда из уравнения (6) следует, что

$$\mathbf{E}[\varepsilon_t] = \mathbf{E}[\varepsilon_0] + \int_0^t F_s \mathbf{E}[\varepsilon_s]\mathbf{d}s.$$

Как известно, это интегральное уравнение имеет решение $\chi(t) = \mathbf{E}[\varepsilon_t]\Phi(t, t_0)\chi(0)$, где $\Phi(t, t_0)$ – фундаментальная матрица уравнения. Но $\chi(0) = \mathbf{E}[\varepsilon_0] = \mathbf{E}[X_0] - Z_0 \equiv 0$, следовательно, $\mathbf{E}[\varepsilon_t] = 0, \forall\, t \in [0,\ T]$. Достаточность доказана. □

Для решения задачи фильтрации в целом необходимо рассмотреть динамику матрицы n-ковариаций γ_t. Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма. *Матрица n-ковариаций γ_t является единственным, непрерывным решением обыкновенного матричного дифференциального уравнения:*

$$\dot{\gamma}_t = A_t \gamma_t + \gamma_t A_t^* - U_t H_t \gamma_t - \gamma_t H_t^* U_t^* + bb^* + U_t B B^* U_t^* \tag{7}$$

с начальным условием γ_0.

Доказательство. Из теоремы 1 следует:

$$\mathbf{d}\varepsilon_t = F_t \varepsilon_t \mathbf{d}t + b\mathbf{d}\omega_t - U_t B \mathbf{d}v_t.$$

К элементам матрицы $\mathbf{d}(\varepsilon_t \varepsilon_t^*)$ применим формулу замены переменных Ито (см. [1]):

$$\mathbf{d}(\varepsilon_t \varepsilon_t^*) = ((A_t - U_t H_t)\varepsilon_t \varepsilon_t^* + \varepsilon_t \varepsilon_t^* (A_t^* - H_t^* U_t^*) + bb^* + U_t B B^* U_t^*)\mathbf{d}t +$$
$$+ b(\mathbf{d}\omega_t)\varepsilon_t^* + \varepsilon_t (\mathbf{d}\omega_t)^* b^* - U_t B(\mathbf{d}v_t)\varepsilon_t^* - \varepsilon_t(\mathbf{d}v_t)^* B^* U_t^*.$$

Переходя к математическому ожиданию, получим равенство (7). Единственность решения доказывается аналогично теореме 12.3 из [1]. □

Замечание 2. Заметим, что дифференциальное уравнение (7) можно рассматривать как билинейную матричную квадратичную систему управления с критерием качества (4) и классом допустимых управлений в виде линейных по γ_t матричных функций U_t [2]. Тогда имеет место теорема 2.

Теорема 2. *Если существует такая постоянная матрица L размерности $[n \times n]$, что $|a_{ij}(t)| \le L_{ij}$ и $|H_{ij}(t)| \le L_{ij}$, то матрицы Z_t и γ_t являются единственными непрерывными решениями системы уравнений* (3) *и* (7). *При этом в классе допустимых управлений оптимальное по отношению к функционалу* (4) *управление существует и определяется формулой*

$$U_t^{opt} = (\gamma_t H_t^* - R^*)(BB^* + Q)^{-1}, \tag{8}$$

а оптимальное значение функционала $J(U_t)$ имеет вид

$$J(U_t^{opt}) = \boldsymbol{Sp}(\gamma_0 \Theta_0 + \varphi_0), \tag{9}$$

где Θ_t, φ_t — решения матричных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\Theta}_t = -\Theta_t A_t - (A_t^* + 2H_t^*(BB^* + Q)^{-1}R)\Theta_t - P, \tag{10}$$

$$\dot{\varphi}_t = (\gamma_t H_t^*(BB^* + Q)^{-1} H_t \gamma_t - bb^* + R^*(BB^* + Q)^{-1}R)\Theta_t, \tag{11}$$

вдоль движения уравнения (1) *с начальными условиями $\Theta(T) = \Theta_T$, $\varphi_T = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$V(t, \gamma_t) = \mathbf{Sp}(\gamma_t \Theta_t + \varphi_t),$$

где Θ_t, φ_t — матрицы вспомогательных переменных размерности $[n\times n]$. Предположим, что элементы этих матриц непрерывно-дифференцируемые по всем $t \in [0, T]$ функции, принимающие вещественные значения. Управление ищется оптимальным по отношению к демпфированию соответствующего функционала

$$V(t, \gamma_t) + \int_0^t f(\tau)\mathbf{d}\tau, \tag{12}$$

где $f(t)$ — след матрицы подынтегрального выражения, входящего в функционал (4). Тогда, как известно из [3], для того чтобы управление U_t было оптимальным, оно должно доставлять наименьшее значение производной W_t функционала (12) по времени вдоль движения системы управления $W_t = \mathbf{d}V(t, \gamma_t)/\mathbf{d}t + f(t)$ при $\partial W_t/\partial U_t = 0$, а вспомогательные переменные должны удовлетворять условиям $W_t = 0, \forall\, t \in [0, T]$ и $V(t, \gamma_t) = \mathbf{Sp}(\gamma_T \Theta_T)$. Дифференцируя V и подставляя значение правой части уравнения (7) вместе с подынтегральным выражением функционала (4), получим:

$$W_t = \mathbf{Sp}(\dot{\gamma}_t \Theta_t + \gamma_t \dot{\Theta}_t + \dot{\varphi}_t + f(t)) = \mathbf{Sp}(A_t \gamma_t \Theta_t + \gamma_t A_t^* \Theta_t - U_t H_t \gamma_t \Theta_t - \gamma_t H_t^* U_t^* \Theta_t + \\ + bb^* \Theta_t + U_t BB^* U_t^* \Theta_t + \gamma_t \dot{\Theta}_t + \dot{\varphi}_t + \gamma_t P + U_t Q U_t^* \Theta_t + 2U_t R \Theta_t) = 0. \tag{13}$$

Вычислим частные производные по U_t для следа от квадратных матриц этого выражения:

$$\frac{\partial}{\partial U_t}\mathbf{Sp}(U_t H_t \gamma_t \Theta_t) = \Theta_t^* \gamma_t^* H_t^*,$$

$$\frac{\partial}{\partial U_t}\mathbf{Sp}(U_t(BB^* + Q)U_t^* \Theta_t) = \Theta_t^* U_t(BB^* + Q) + \Theta_t U_t(BB^* + Q),$$

$$\frac{\partial}{\partial U_t}\mathbf{Sp}(\gamma_t H_t^* U_t^* \Theta_t) = \Theta_t^* \gamma_t^* H_t^*,$$

$$\frac{\partial}{\partial U_t}\mathbf{Sp}(U_t^* R \Theta_t) = \Theta_t^* R^* = \Theta_t R^*,$$

Учитывая, что γ_t, Q и Θ_t — симметрические матрицы, нетрудно вычислить $\partial W_t/\partial U_t = 0$:

$$\frac{\partial W_t}{\partial U_t} = 2\Theta_t(-\gamma_t H^* + U_t(BB^* + Q) + R^*) = 0.$$

Получаем систему линейных алгебраических уравнений размерности $[n \times \beta]$ для нахождения сигналов управления. Вследствие положительной определенности матрицы Q наилучшее приближенное решение (8) существует и единственно. Более того, оптимальное управление U_t^{opt} будет линейным по γ_t.

$$U_t^{opt} = (\gamma_t H_t^* - R^*)(BB^* + Q)^{-1} = \gamma_t \mu_t + \eta_t.$$

Обратная матрица $(BB^*+Q)^{-1}$ существует всегда в силу положительной определенности матрицы Q. Рассмотрим уравнение (13) для вычисления матриц Θ_t и φ_t. Заметим, что

$$\mathbf{Sp}(A\gamma_t\Theta_t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\psi_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \psi_{ji}a_{ij} = \mathbf{Sp}(\gamma_t\Theta_t A).$$

Используя условия управления объектом в конечное время действия (см. [3]) $W_t = 0,\ \forall\ t\ \in [0,T]$ и $V(T,\gamma_T) = \gamma_T\Theta_T$ для нахождения (9), в (13), посредством группировки слагаемых линейно зависящих от γ_t и остальных, получим матричные дифференциальные уравнения (10) для Θ_t и (11) для φ_t:

$$\dot{\Theta}_t = -\Theta_t(A_t - \eta_t H_t + \eta_t(BB^*+Q)\mu_t^*) - (A_t^* - H_t^*\eta_t^* + \mu_t(BB^*+Q)\eta_t^* + 2\mu_t R)\Theta_t - P,$$
$$\dot{\varphi}_t = (\gamma_t\mu_t H_t\gamma_t + \gamma_t H_t^*\mu_t^*\gamma_t - bb^* - \gamma_t\mu_t(BB^*+Q)\mu_t^*\gamma_t - \eta_t(BB^*+Q)\eta_t^* - 2\eta_t RQ)\Theta_t.$$

Здесь $\mu_t = H_t^*(BB^*+Q)^{-1}$, $\eta_t = -R^*(BB^*+Q)^{-1}$. Аналогично теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов [3] нетрудно показать, что оптимальное значение функционала (4) дается формулой (9). Доказательство единственности и непрерывности процесса γ_t следует проводить аналогично доказательству теоремы 12.7, которое подробно приведено в [1]. При этом вполне очевидно, что матричная функция управления (8) соответствует предположениям, сделанным при доказательстве теоремы 1. $\square$

3. ЗАДАЧА О БОКОВОМ ДВИЖЕНИИ ГРУППЫ САМОЛЕТОВ

Автопилот канала управления боковым движением самолета, предназначенный для стабилизации направления полета (курса), и угла крена [4]. Движение самолета по крену, рысканию и скольжению взаимосвязаны и образуют в совокупности так называемое боковое движение. Это движение почти не связано с изменениями угла тангажа и вертикальными перемещениями самолета, т. е. с его «продольным» движением. Возмущенное боковое движение самолета относительно установившегося горизонтального полета описывается системой уравнений пятого порядка:

$$\dot{\beta} = \omega_y + \frac{Z^\beta}{m_0V_0}\beta + \frac{g}{V_0}\gamma,$$
$$\dot{\omega}_x = \frac{I_{xy}}{I_x}\dot{\omega}_y + \frac{1}{I_x}\left(\frac{\partial M_x}{\partial\beta}\beta + \frac{\partial M_x}{\partial\omega_x}\omega_x + \frac{\partial M_x}{\partial\omega_y}\omega_y + \frac{\partial M_x}{\partial\delta_e}\delta_e\right),$$
$$\dot{\omega}_y = \frac{I_{xy}}{I_y}\dot{\omega}_x + \frac{1}{I_y}\left(\frac{\partial M_y}{\partial\beta}\beta + \frac{\partial M_y}{\partial\omega_x}\omega_x + \frac{\partial M_y}{\partial\omega_y}\omega_y + \frac{\partial M_y}{\partial\delta_n}\delta_n\right),$$
$$\dot{\gamma} = \omega_x,$$
$$\dot{\psi} = \omega_y,$$

где возмущенные переменные имеют следующий смысл: β — угол скольжения, ψ — угол рыскания (курса), ω_y — угловая скорость рыскания, γ — угол крена, ω_x — угловая скорость крена, δ_n — угол отклонения руля направления, δ_e — угол отклонения элеронов.

Для самолета, имеющего вес $G_0 = 45000$ кг, летящего на высоте $h_0 = 9000$ м со скоростью $V_0 = 800$ км/час, типичны следующие значения коэффициентов системы:

$$\frac{Z^\beta}{m_0V_0} = -0.0297, \qquad \frac{M_y^{\delta_n}}{I_y} = 0.379, \qquad \frac{M_x^{\delta_e}}{I_x} = 1.580,$$
$$\frac{M_x^\beta}{I_x} = -1.17, \qquad \frac{M_x^{\omega_x}}{I_x} = -0.790, \qquad \frac{M_x^{\omega_y}}{I_x} = 0.129,$$
$$\frac{M_y^\beta}{I_y} = 0.379, \qquad \frac{M_y^{\omega_x}}{I_y} = -0.0125, \qquad \frac{M_y^{\omega_y}}{I_y} = -0.0096,$$
$$\frac{g}{V_0} = 0.0438, \qquad \frac{I_{xy}}{I_y} = -0.0423, \qquad \frac{I_{xy}}{I_x} = -0.106.$$

Здесь M_x^y обозначает соответствующую частную производную $\dfrac{\partial M_x}{\partial y}$.

Представим рассматриваемую систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \dot\beta \\ \dot\omega_x \\ \dot\omega_y \\ \dot\gamma \\ \dot\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0297 & 0 & 1 & 0,0438 & 0 \\ -1,17 & -0,790 & 0,129 & 0 & 0 \\ 0,379 & -0,0125 & -0,0096 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \gamma \\ \psi \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ -0,106\dot\omega_y + 1,580\delta_e \\ -0,0423\dot\omega_x + 0,379\delta_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

В качестве стабилизирующего управления принимается следующее

$$\begin{pmatrix} \delta_n \\ \delta_e \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0,317 & 0,069 & 1,01 & 0,076 & 0,551 \\ 0,177 & 0,737 & 0,388 & 1,03 & 0,834 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (14) примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,106 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0423 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\beta \\ \dot\omega_x \\ \dot\omega_y \\ \dot\gamma \\ \dot\psi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0,0297 & 0 & 1 & 0,0438 & 0 \\ -1,4496 & -1,9544 & -0,4840 & -1,6274 & -1,3177 \\ 0,2589 & -0,0387 & -0,3924 & -0,0288 & -0,2088 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \gamma \\ \psi \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} \dot\beta \\ \dot\omega_x \\ \dot\omega_y \\ \dot\gamma \\ \dot\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0297 & 0 & 1 & 0,0438 & 0 \\ -1,4838 & -1,9592 & -0,4444 & -1,6316 & -1,3014 \\ 0,3216 & 0,0442 & -0,3735 & 0,0402 & -0,1538 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \gamma \\ \psi \end{pmatrix}.$$

Таким образом получена система дифференциальных уравнений, описывающая устойчивое боковое движение. На основе полученной системы поставим задачу фильтрации бокового движения группы самолетов. Рассмотрим боковое движение группы из 6-ти самолетов при наличии случайных возмущений. Движение рассматриваемого объекта может быть описано следующим матричным дифференциальным уравнением:

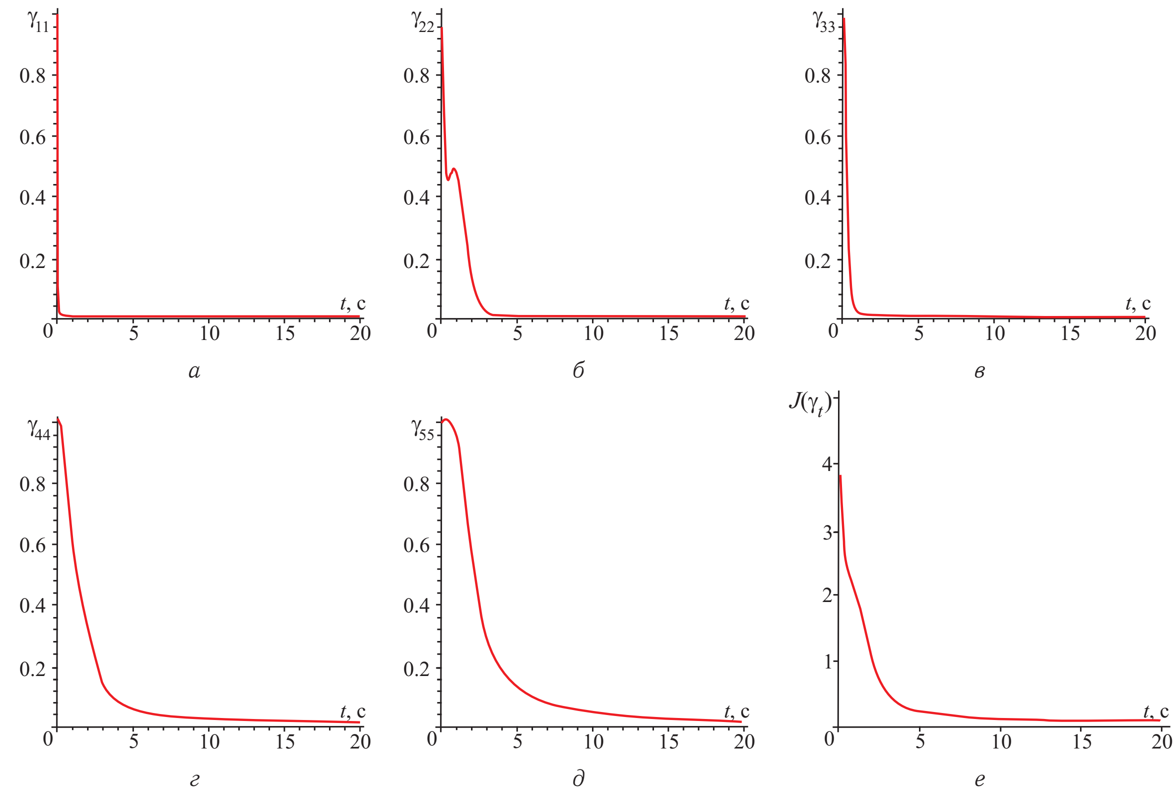
$$\mathbf{d}X_t = AX_t\mathbf{d}t + b\mathbf{d}w_t,$$

где X — $[5 \times 6]$, $A = \begin{pmatrix} -0,0297 & 0 & 1 & 0,0438 & 0 \\ -1,4838 & -1,9592 & -0,4444 & -1,6316 & -1,3014 \\ 0,3216 & 0,0442 & -0,3735 & 0,0402 & -0,1538 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix}$.

Матрицы, характеризующие наблюдение, полагаем известными (наблюдение ведется по первой строке матрицы X, т. е. по углу скольжения каждого самолета):

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,01 \\ 0,01 \\ 0,01 \end{pmatrix}.$$

В условии задачи никаких реальных данных по ограничениям на управление нет, поэтому рассматривать их не будем. При таких условиях будем минимизировать средний квадрат ошибки, т. е. следующий функционал $J(\gamma_t) = \mathbf{Sp}(\gamma_T)$. На рисунке, *а*–*е* приведены результаты, полученные после применения оптимального матричного фильтра указанного типа для подавления случайных воздействий. Они свидетельствуют о высоком качестве фильтрации.



Графики γ_{ii} $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ и $J(\gamma_t)$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Матричные подходы к фильтрации случайных воздействий позволяют проводить одновременную фильтрацию большого числа динамических объектов. Реализация матричных подходов позволяет существенно снизить вычислительные затраты в сравнении с решением аналогичных задач векторными подходами.

Одним из главных достоинств представленных фильтров является их физическая реализуемость (имеется возможность учета ограничений на управление, что, как правило, имеет место в технических задачах).

В дальнейших работах будут показаны более сложные матричные уравнения, характеризующие взаимодействие рассматриваемых объектов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 12-01-00752).

Библиографический список

1. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). Теория вероятностей и математическая статистика. Т. 15. М. : Наука, 1974. 696 с.
2. *Приставко В. Т.* Матричные модели управления / НИИ химии СПбГУ. СПб., 2001. 255 с.
3. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М. : Наука, 1975. 495 с.
4. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М. : Мир, 1972. 544 с.

Optimal Filtration of Matrix Gaussian Random Processes in Planes Lateral Motion Problem

A. Yu. Litvin, V. T. Pristavko

Saint-Petersburg State University, Russia, 199034, St. Petersburg, Universitetskaya nab., 7-9, alybey@mail.ru, pvt1@yandex.ru

In practice, observation problem is more complex because of random influences (noises): wind effects plane course, sensor errors distort object position view. In order to reduce noise filters are used. Proposed to carry out a simultaneous filtering of identical objects motion by defining problem in matrix variables. To achieve phisical realizability controlled matrix filter was proposed. Statements that allow to find the optimal solution was proved.

Key words: matrix filtration, n-covariance matrix, square-law functional.

References

1. Lipcer R. S., Sirjaev A. N. *Statistika sluchainykh protsessov (nelineinaya filtratsiya i smezhnye voprosy)* [Statistics of random processes (Nonlinear filtering and related problems)]. Probability Theory and Mathematical Statistics, vol. 15. Moscow, Nauka, 1974, 696 pp. (in Russian).

2. Pristavko V. T. *Matpichnye modeli uppavleniia* [Matrix control models]. St. Petersburg, 2001, 255 p. (in Russian).

3. Zubov V. I. Lektsii po teorii upravleniya [Lectures in control theory]. Moscow, Nauka, 1975. 495 pp. (in Russian).

4. Bryson A. E., Jr., Ho Yu-Chi. *Applied Optimal Control*. London, Waltham, Blaisdell Publ. Co., 1969. [Rus. ed.: Braison A., Kho Yu-Shi. *Prikladnaia teoriia optimal'nogo upravleniia*. Moscow, Mir, 1972, 544 p.]