



стых пологих оболочек при длительном нагружении // Вестн. ВолгГАСУ. Сер. Строительство и архитектура. 2006. Вып. 6 (21). С. 53–57.

6. Карпов В. В., Филатов В. Н. Закритические деформации гибких пластин в температурном поле с учетом изменения свойств материала от температуры // Тр.

VII Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. М., 1970. С. 276–279.

7. Карпов В. В., Петров В. В. Уточнение решений при исследовании шаговых методов в теории гибких пластин и оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 5. С. 189–191.

УДК 533.6

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ АЭРОУПРУГОСТИ КРЫЛА

Е. П. Лукашик

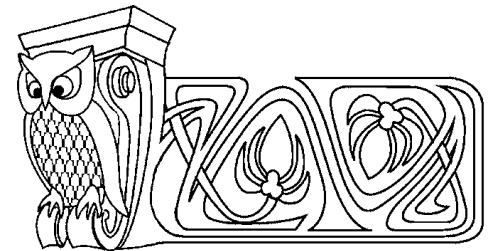
Кубанский государственный университет, Краснодар,
кафедра информационных технологий
E-mail: lep_9091@mail.ru

В настоящей работе рассматривается круг вопросов, связанных с анализом деформированного состояния тонкого упругого крыла при колебаниях в ограниченной акустической среде. В качестве аппарата математических исследований выбрана теория обобщенных функций. Результаты проведенного численного эксперимента подтвердили наличие в акустической среде демпфирующих сил и резонансных явлений, обусловленных гибкими свойствами крыла.

Ключевые слова: ограниченная акустическая среда, тонкое крыло, обобщенные функции, демпфирующие силы, динамическая неустойчивость.

В классической аэроупругости представлены исследования в основном по сравнительно жестким, слабо деформируемым крыльям. Однако в последнее время и в технике, и в научных разработках значительное внимание уделяется упругим несущим поверхностям. Увеличивается диапазон рабочих высот для летательных аппаратов, чаще используются малые высоты, где особенно существенно влияние турбулентности атмосферы. Задачи контроля и управления за реальными процессами аэроупругости становятся предметом обсуждения на международных научных школах, семинарах по гидродинамике больших скоростей, по моделям механики сплошной среды и др. Во многих работах ставится цель найти объективно существующие аналитические зависимости, которые могут представлять интерес с точки зрения управления аэродинамическими процессами [1]. Однако стремление учесть известные свойства материалов требует комплексных исследований явлений, зачастую с привлечением сведений из различных смежных областей.

Решение рассмотренной в данной работе контактной задачи аэроупругости поднимает две взаимно связанные проблемы. Первая из них касается определения внешних гидродинамических сил (при некотором заданном движении поверхности упругого тела), а вторая — оценки деформаций, возникающих в конструкции при уже «известной» нагрузке (выраженной через гидродинамические нагрузки и зависящей от параметров самой конструкции). Для связанной задачи аэродинамики рассмотрена математическая модель, основанная на волновом уравнении, описывающем малые колебания жидкости, и на линейном уравнении изгиба тонких пластин при наличии заданных постоянных усилий в срединной плоскости. Такое приближение позволяет несколько упростить анализ сложных механических явлений, обусловленных взаимодействием аэродинамических и упругих сил, в некоторых



Application of Generalized Functions in Dynamical Contact Problems of Wing Aeroelasticity

E. P. Lukaschik

Kuban State University, Krasnodar,
Chair of Information Technology
E-mail: lep_9091@mail.ru

The range of problems dealing with analysis of deformed state of thin elastic wing at the oscillations in limited acoustic medium is considered in this article. The theory of generalized functions was chosen as an instrument for the mathematical research. By results of performed numerical experiment the existence of damp forces in the acoustic medium and resonance effects caused by elastic properties of the wing was confirmed.

Key words: limited acoustic media, thin wing, generalized functions, damp forces, dynamical instability.



случаях получить результат в аналитическом виде, что облегчает качественный анализ, и в то же время сохранить основные особенности аэроупругих явлений.

Использование техники обобщенных функций [2–5] позволило математически корректно свести краевую задачу аэроупругости к сингулярному интегральному уравнению, решение которого производилось методом дискретных вихрей [6].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Моделируем крыло тонкой пластиной длиной $2a$, расположенной на расстоянии h от твердой границы. Начало декартовой системы координат расположим в центре пластины.

Распределение перепада давления вдоль упругой пластины, которое определяет ее гидроупругое поведение, формируется течением жидкости. Будем рассматривать безвихревое течение сжимаемой жидкости в линеаризованной постановке в предположении о слабой искривленности тонкой пластины и малости амплитуд волн, вызываемых колебаниями пластины.

Волновая картина в акустической среде описывается волновым уравнением для потенциала возмущенных скоростей $\varphi(x, z, t)$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где c — скорость звука.

На границе среды потребуем выполнения следующих условий:

условие непротекания крыла:

$$\varphi_z = v_z(x, t), \quad z = 0, \quad |x| \leq a.$$

Вертикальная скорость $v_z(x, t) = v_0(x, t) + f'_t(x, t)$ складывается из заданных возмущений $v_0(x, t)$ и составляющей, вызванной упругими деформациями поверхности крыла $f(x, t)$:

условие непротекания твердой границы:

$$\varphi_z = 0, \quad z = -h;$$

отсутствие возмущений на бесконечности:

$$|\varphi| \rightarrow 0, \quad r = \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty;$$

условие излучения возмущенных волн.

При $x \rightarrow \pm\infty$ $\varphi = C_{\pm} e^{\pm i\nu \cdot x}$ ($\nu > 0$). Волновое число ν определяется параметрами задачи.

При рассмотрении установившихся колебаний $v_0(x, t) = \tilde{v}_0(x) e^{-i\omega t}$ (ω — частота колебаний) в линейной постановке зависимость от времени для всех исследуемых величин будет выражаться гармоническими функциями. Так, для потенциала возмущенных скоростей и упругих перемещений при условии, что период деформации крыла совпадает с периодом его колебаний, используем следующие выражения в комплексном виде: $\varphi(x, z, t) = \tilde{\varphi}(x, z) e^{-i\omega t}$, $f(x, t) = \tilde{f}(x) e^{-i\omega t}$. В дальнейшем знак « \sim » в обозначениях комплексных амплитуд будем опускать.

Комплексная амплитуда потенциала $\varphi(x, z)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \varphi + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi = 0$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \varphi_z = v_z(x) = v_0(x) - i\omega f, \quad z = 0, \\ \varphi_z = 0, \quad z = -h, \\ |\varphi| \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2)$$

В качестве уравнения связи формы профиля с распределением давления вдоль его границ возьмем уравнение равновесия для случая цилиндрического изгиба пластины при наличии заданных постоянных усилий в срединной плоскости [7]:

$$-\rho_0 h_0 \omega^2 f + D \frac{d^4 f}{dx^4} = p(x), \quad (3)$$



где D — изгибная жесткость пластины, h_0 — толщина пластины, ρ_0 — плотность материала пластины, $p(x)$ — аэродинамическое давление.

Различные способы закрепления упругой пластины задают граничные условия для уравнения изгиба (3).

По известному распределению упругих перемещений можно определить динамические характеристики гибкого крыла, например, изгибающий момент $M(x)$ и перерезывающую силу $Q(x)$ [7]:

$$M(x) = -D \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \quad Q(x) = -D \frac{d^3 f(x)}{dx^3}. \quad (4)$$

Введем в рассмотрение функцию, характеризующую скачок касательных скоростей в точках пластины:

$$\gamma(x) = \frac{\partial \varphi_+}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_-}{\partial x}, \quad x \in [-a, a]. \quad (5)$$

Индексы «+» и «-» указывают величины, относящиеся соответственно к верхней и нижней поверхности пластинки.

С физической точки зрения функцию $\gamma(x)$ можно интерпретировать как интенсивность вихревого слоя, моделирующего влияние колебательных движений крыла на невозмущенное состояние акустической среды. Считая, что завихренность вне крыла отсутствует, продолжим функцию $\gamma(x)$ на всю действительную ось, определив ее значения за пределами отрезка $[-a, a]$ как нулевые.

Для установления аэродинамических сил необходимо узнать распределение аэродинамического давления $p(x)$ по поверхности крыла. Используя интеграл Коши – Лагранжа, выразим давление через потенциал возмущенных скоростей

$$p(x) = -i\rho\omega(\varphi_+ - \varphi_-) = -i\omega\rho \int_{-a}^x \gamma(\xi) d\xi, \quad (6)$$

где ρ — плотность акустической среды.

Требование ограниченности давления на краях профиля можно представить в виде

$$\int_{-a}^a \gamma(\xi) d\xi = 0. \quad (7)$$

Опираясь на физический смысл функции $\gamma(x)$ последнее равенство можно интерпретировать как условие бесциркуляционности возмущенного течения.

Аэродинамические подъемная сила N и момент M относительно центра крыла связаны с вихревой интенсивностью соотношениями:

$$N = i\omega\rho \int_{-a}^a \xi \cdot \gamma(\xi) d\xi, \quad M = \frac{i\omega\rho}{2} \int_{-a}^a \xi^2 \cdot \gamma(\xi) d\xi. \quad (8)$$

Таким образом, математическая модель колебательного движения тонкого гибкого крыла представляет собой связанную контактную задачу. Для решения поставленной задачи применим аэродинамический подход, согласно которому задача изгиба крылового профиля будет считаться вспомогательной для определения возмущений скорости точек крыла, формирующих аэродинамическое давление.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Рассмотрим колебания упругого свободного однородного крыла, присоединенного к фюзеляжу. Масса фюзеляжа равна $2m_F$. Данная модель упругого крыла рассматривалась в работе [8].

Симметричные возмущения, вызванные поступательными колебаниями, и, как видно из рис. 1, симметричные условия закрепления приводят к симметричному распределению поперечной нагрузки по крылу и симметричным деформациям. В силу симметрии можно рассматривать, например, только



левую половину системы, изображенной на рис. 1. Таким образом, упругие перемещения колеблющегося крыла определяются как решение уравнения

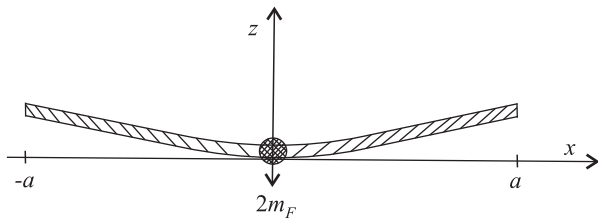


Рис. 1. Однородное крыло, прикрепленное к фюзеляжу

$$-\rho_0 h_0 \omega^2 f + D \frac{d^4 f}{dx^4} = -i \omega \rho \int_{-a}^x \gamma(s) ds$$

с граничными условиями для случая симметричного движения:

$$\begin{cases} f'(0) = 0, & f'''(0) = m_F \omega^2 f(0), \\ f''(-a) = 0, & f'''(-a) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Далее в работе будем использовать безразмерные величины: $f = \bar{f} \cdot a$, $x = \bar{x} \cdot a$, $z = \bar{z} \cdot a$, $h = \bar{h} \cdot a$, $\kappa = \frac{\rho a^3 c^2}{D}$ — параметр упругости, $\nu = \frac{\omega a}{c}$ — приведенная частота, $m = \frac{\rho_0 h_0}{\rho a}$ — относительная масса крыла, $\mu = \frac{m_F}{\rho_0 h_0 a}$ — относительная масса фюзеляжа.

В безразмерном виде задача изгиба однородного крыла под действием аэродинамической нагрузки выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} f^{IV}(x) - \beta^4 f &= -i \frac{\beta^4}{m} \int_{-1}^x \gamma(s) ds, & \beta^4 &= m \nu^2 \kappa, \\ f'(0) &= 0, & f'''(0) &= \mu \cdot \beta^4 \cdot f(0), \\ f''(-1) &= 0, & f'''(-1) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Решение данной задачи проведем методом функций Грина, что позволит получить зависимость упругих перемещений от произвольного распределения вихревой интенсивности вдоль профиля. При построении функции Грина используем балочные функции Крылова [9]:

$$\begin{aligned} S(x) &= 0.5(\operatorname{ch} x + \cos x), & U(x) &= 0.5(\operatorname{ch} x - \cos x), \\ V(x) &= 0.5(\operatorname{sh} x - \sin x), & T(x) &= 0.5(\operatorname{sh} x + \sin x), \end{aligned}$$

для которых выполняются соотношения:

$$S'(x) = V(x), \quad V'(x) = U(x), \quad U'(x) = T(x), \quad T'(x) = S(x).$$

В результате получим следующее выражение для упругих перемещений:

$$f(x) = \frac{i}{m} \left\{ \int_{-1}^x \gamma(s) [1 - S(\beta(x-s))] ds + A \cdot S(\beta(1+x)) + B \cdot T(\beta(1+x)) \right\}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 \gamma(s) \frac{S(\beta)[\mu\beta(1 - S(\beta s)) - T(\beta s)] + V(\beta s)[U(\beta) - \mu\beta T(\beta)]}{S(\beta)[T(\beta) - \mu\beta S(\beta)] - V(\beta)[U(\beta) - \mu\beta T(\beta)]} ds, \\ B &= - \int_{-1}^0 \gamma(s) \frac{V(\beta)[\mu\beta(1 - S(\beta s)) - T(\beta s)] + V(\beta s)[T(\beta) - \mu\beta S(\beta)]}{S(\beta)[T(\beta) - \mu\beta S(\beta)] - V(\beta)[U(\beta) - \mu\beta T(\beta)]} ds. \end{aligned}$$

В выражении (11) $-1 \leq x \leq 0$. Учитывая свойство симметрии картины возмущенного течения, запишем выражение для упругих перемещений в произвольной точке профиля крыла:

$$f(x) = \frac{i}{m} \int_{-1}^0 \gamma(s) G(-|x|, s) ds, \quad -1 < x < 1,$$

$$G(x, s) = \Theta(x-s) \cdot [1 - S(\beta(x-s))] + \frac{1}{S(\beta)[T(\beta) - \mu\beta S(\beta)] - V(\beta)[U(\beta) - \mu\beta T(\beta)]} \times$$



$$\begin{aligned} & \times \left\{ S(\beta(1+x)) \cdot [S(\beta) \cdot [\mu\beta(1-S(\beta s)) - T(\beta s)] + V(\beta s) \cdot [U(\beta) - \mu\beta T(\beta)]] - \right. \\ & \left. - T(\beta(1+x)) \cdot [V(\beta) \cdot [\mu\beta(1-S(\beta s)) - T(\beta s)] + V(\beta s) \cdot [T(\beta) - \mu\beta S(\beta)]] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\Theta(x)$ — функция Хэвисайда.

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ АЭРОДИНАМИКИ

Задача для потенциала возмущенных скоростей $\varphi(x, y)$ в безразмерном виде представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi + \nu^2\varphi &= 0, \\ \varphi_z = v_z(x) = v_0(x) - i\omega f, & \quad z = 0, \\ \varphi_z &= 0, \quad z = -h, \\ |\varphi| &\rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (13)$$

Потенциал $\varphi(x, y)$, как будет показано ниже, следует определять в пространстве обобщенных функций медленного роста [2]. Для решения поставленной задачи используем преобразование Фурье по переменной x , которое для обобщенных функций всегда существует [4]: $\Phi(\alpha, z) = F[\varphi(x, z)](\alpha)$.

В Фурье-образах задача (13) примет вид

$$\begin{aligned} \Phi_z''(\alpha, z) - \chi^2\Phi &= 0, \\ \Phi_z &= V(x), \quad z = 0, \\ \Phi_z &= 0, \quad z = -h, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\chi^2 = \alpha^2 - \nu^2$, $V(x) = F[v_z(x)]$.

Решение задачи (14) представим в виде пары функций

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi_+, & z \geq 0, \\ \Phi_-, & -h < z < 0, \end{cases}$$

для которых выполняется условие сопряжения при $z = 0$:

$$\Phi'_{+z} = \Phi'_{-z}. \quad (15)$$

Составляющие решения определяем в виде

$$\Phi_+ = Ae^{-\chi z} + Be^{\chi z}, \quad \Phi_- = Ce^{-\chi z} + De^{\chi z}.$$

Для однозначной разрешимости краевой задачи (14) необходимо определить ветвь радикалов $\chi(\alpha)$. При выборе ветви можно использовать физическую интерпретацию решения, чтобы обеспечить выполнение условий излучения и отсутствия возмущений на бесконечности. Для определенности при $|\alpha| > \nu$ примем $\text{Re } \chi(\alpha) > 0$. Тогда условие отсутствия возмущений на бесконечности потребует положить $B = 0$, что приведет к выражению: $\Phi_+ = Ae^{-\chi(\alpha)z}$. Применением обратного преобразования Фурье получим выражение для потенциала течения в области над крылом:

$$\varphi_+ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha) e^{-\chi(\alpha)z} e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Данное выражение при $|\alpha| > \nu$ представляет собой суперпозицию плоских неоднородных волн, распространяющихся вдоль оси Ox , амплитуда которых экспоненциально убывает по мере удаления вверх от крыла.

При $|\alpha| < \nu$ имеем суперпозицию однородных плоских волн, уравнение распространения которых имеет вид: $-\text{Im } \chi \cdot z - \alpha x - \omega t = \text{const}$. Фазовая скорость таких волн, распространяющихся вдоль оси Oz (x фиксировано), равна $\dot{z} = -\frac{\omega}{\text{Im } \chi}$. В соответствии с принципом излучения в решении должны



присутствовать только волны, идущие от источника возмущений, т. е. скорость волн, перемещающихся вверх от крыла, должна быть положительна. Для этого необходимо, чтобы $\text{Im } \chi(\alpha) < 0$.

Используя условие на твердой границе и условие сопряжения решений (15), получим следующие выражения для составляющих решения:

$$\Phi_+ = A \cdot e^{-\chi(\alpha)z}, \quad \Phi_- = -A \cdot e^{\chi(\alpha)z} \cdot \frac{(1 + e^{-2\chi(\alpha)(h+z)})}{(1 - e^{-2\chi(\alpha)h})}.$$

Учитывая связь вихревой интенсивности с потенциалом скорости ($\Gamma(\alpha) = -i\alpha(\Phi_+ - \Phi_-)$), приходим к соотношению

$$\Gamma(\alpha)(1 - e^{-2\chi h}) = -2i\alpha A, \tag{16}$$

которое можно рассматривать как уравнение относительно обобщенной функции $A(\alpha)$. Общее решение этого уравнения в пространстве обобщенных функций имеет вид [5]:

$$A(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)}{-2i} \left[(1 - e^{-2\chi(\alpha)h}) P \frac{1}{\alpha} + C\delta(\alpha) \right],$$

где $\delta(\alpha)$ — функция Дирака, $P \frac{1}{s}$ — обобщенная функция, действующая на основные функции по правилу:

$$\left(P \frac{1}{s}, f(s) \right) = Vp \int \frac{f(s)}{s} ds = \lim \left(\int_{+\varepsilon}^{-\varepsilon} + \int_{+\varepsilon} \right) \frac{f(s)}{s} ds.$$

Запишем выражение для Фурье-образа нормальной скорости при $z = 0$:

$$\Phi_{+z} = -\chi(\alpha)A(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)}{2i} \chi(\alpha)(1 - e^{-2\chi(\alpha)h}) P \frac{1}{\alpha} + C\Gamma(\alpha)\delta(\alpha).$$

Учитывая, что для обобщенной функции Дирака $\Gamma(\alpha)\delta(\alpha) = \Gamma(0)\delta(\alpha)$, а в силу бесциркуляционности возмущенного течения $\Gamma(0) = \int_{-1}^{+1} \gamma(s) ds = 0$, условие непротекания профиля представим в виде

$$\Gamma(\alpha) \cdot K(\alpha) = V(\alpha), \quad K(\alpha) = \frac{\chi(\alpha)}{2i} (1 - e^{-2\chi h}) P \frac{1}{\alpha}. \tag{17}$$

Отметим поведение функции $K(\alpha)$ на бесконечности:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} K(\alpha) = \frac{1}{2i} \text{sign}(\alpha) + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

Произведение обобщенной функции медленного роста $K(\alpha)$ и образа финитной функции $\Gamma(\alpha)$ является образом свертки их оригиналов [5]. Применением обратного преобразования Фурье к уравнению (17) приходим к сверточному уравнению: $(\gamma * k) = v_z(x)$.

С учетом финитности функции $\gamma(x)$ сверточное уравнение запишем в виде

$$\int_{-1}^{+1} \gamma(s)k(x-s) ds = v_z(x), \tag{18}$$

где $k(x) = F^{-1}(K(\alpha))(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\alpha)e^{-i\alpha x} d\alpha$.

Эффективность многих численных методов напрямую зависит от выбранной методики вычисления функции ядра. При выборе методики полезно учитывать поведение образа ядра $K(\alpha)$. Функция (17) неоднозначна при $\alpha = \pm i$, а также имеет полюс в точке $\alpha = 0$. Поведение на бесконечности указывает, что ядро $k(x)$ будет содержать сингулярное слагаемое, так как $F^{-1}\left(\frac{\text{sign } \alpha}{2i}\right) = -\frac{1}{2\pi} P \frac{1}{x}$, т. е. интеграл в (18) является сингулярным интегралом 1-го рода.



Преобразуем выражение (17) для $K(\alpha)$, выделив в виде отдельного слагаемого сингулярную составляющую. Для этого выполним следующие действия:

$$K(\alpha) = \left[\frac{\chi}{2i}(1 - e^{-2\chi h})P\frac{1}{\alpha} - \frac{\text{sign}[\alpha + \text{sign}(x) \cdot \nu]}{2i} \right] + \frac{\text{sign}[\alpha + \text{sign}(x) \cdot \nu]}{2i}.$$

Обозначив выражение в квадратных скобках как $R(\alpha)$ и учитывая, что

$$F^{-1} \left(\frac{\text{sign}[\alpha + \text{sign}(x) \cdot \nu]}{2i} \right) = -\frac{1}{2\pi} e^{i\nu|x|} P\frac{1}{x},$$

получим

$$k(x) = F^{-1}(R(\alpha)) - \frac{1}{2\pi} e^{i\nu|x|} P\frac{1}{x}. \quad (19)$$

Покажем, что $R(\alpha) \approx O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$ на бесконечности.

Так, для случая $x < 0$ имеем следующее выражение для функции $R(\alpha)$:

$$R(\alpha) = \begin{cases} \frac{\chi(\alpha)}{2i}(1 - e^{-2\chi h})P\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2i}, & \alpha < \nu, \\ \frac{\beta(\alpha)}{2i}(1 - e^{-2\chi h})P\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2i}, & \alpha > \nu. \end{cases}$$

При $\alpha \rightarrow +\infty$:

$$\frac{\chi(\alpha)}{2i}P\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2i} = \frac{|\alpha|}{2i\alpha} \left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2}\right)^{1/2} - \frac{1}{2i} = \frac{1}{2i} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\nu^2}{\alpha^2} + o\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)\right] - \frac{1}{2i} = \frac{-1}{4i} \frac{\nu^2}{\alpha^2} + o\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

При $\alpha \rightarrow -\infty$:

$$\frac{\chi(\alpha)}{2i}P\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2i} = \frac{|\alpha|}{2i\alpha} \left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2}\right)^{1/2} + \frac{1}{2i} = \frac{-1}{2i} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\nu^2}{\alpha^2} + o\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)\right] + \frac{1}{2i} = \frac{1}{4i} \frac{\nu^2}{\alpha^2} + o\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

Аналогичный порядок убывания на бесконечности имеет функция $R(\alpha)$ при $x > 0$.

Для таких функций преобразование Фурье можно понимать в классическом смысле, выделив в окрестности нуля интеграл в смысле главного значения.

Таким образом, определение ядра $k(x)$ сведено к вычислению интегралов:

$$F^{-1}(R(\alpha)) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{-\text{sign}(x) \cdot \nu} \left(\chi(\alpha) \cdot (1 - e^{-2\chi h})P\frac{1}{\alpha} + 1 \right) e^{-i\alpha x} dx + \frac{1}{4\pi i} \int_{-\text{sign}(x) \cdot \nu}^{+\infty} \left(\chi(\alpha) \cdot (1 - e^{-2\chi h})P\frac{1}{\alpha} - 1 \right) e^{-i\alpha x} dx. \quad (20)$$

Для вычисления интегралов Фурье аналитически продолжим функции $R(\alpha)$ в комплексную плоскость α . Аналогичный подход при решении динамических контактных задач теории упругости применяется в работе [10]. Выберем ветвь многолистной функции $R(\alpha)$ комплексного переменного $\alpha = \sigma + i\tau$, обеспечивающую выполнение на вещественной оси указанных требований для радикала: $\text{Re} \chi(\alpha) > 0$, $\text{Im} \chi(\alpha) < 0$. Для этого достаточно провести разрезы, целиком лежащие в 1 и 3 квадрантах комплексной плоскости α , и взять главную ветвь радикалов $\sqrt{1} = 1$.

В ходе численного эксперимента было получено, что более предпочтительным представляется использование не традиционных разрезов по вертикальным прямым, а ломаных разрезов (аналогичный вариант разреза предлагается в работе Б. Нобла [11]). В нашем случае разрезы строятся из отрезков действительной оси, четвертой окружности ($|\alpha| = \varepsilon$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ и $-\pi \leq \theta \leq -\frac{\pi}{2}$), лучей вдоль мнимой оси ($\pm i\varepsilon, \pm i\infty$).



Интегралы в (20) будем понимать как пределы при $r \rightarrow \infty$ интегралов по интервалам $-r < \alpha < -\text{sign}(x)\nu$ и $-\text{sign}(x)\nu < \alpha < r$. Деформируем контуры интегрирования так, чтобы при $x < 0$ полюс $\alpha = 0$ обойти сверху, а при $x > 0$ — снизу.

Более подробно изложим методику вычисления интегралов (20) для случая $x < 0$. Замкнем контуры интегрирования в верхней полуплоскости α . Учитывая разрез в верхней полуплоскости, получим два замкнутых контура, каждый из которых состоит из горизонтального участка вещественной

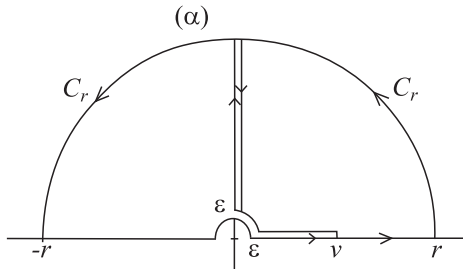


Рис. 2. Контур интегрирования при $x < 0$

оси, соответствующего берега разреза и дуги радиуса r (рис. 2). Внутри каждого контура подынтегральная функция голоморфна. Следовательно, по теореме Коши интеграл по замкнутому контуру равен нулю.

Применяя формулы Сохоцкого [1], имеем

$$\int_L \frac{f(\alpha)}{\alpha - \mu} d\alpha = \mp \pi i f(\mu) + Vp \int_L \frac{f(\alpha)}{\alpha - \mu} d\alpha,$$

где «-», если контур L обходит полюс сверху, и «+», если — снизу.

Для $\alpha = \sigma + i\tau$ в верхней полуплоскости $\tau > 0$, подынтегральная функция за счет множителя $e^{\tau x}$ экспоненциально убывает, в силу чего интеграл по дугам C_r при $r \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

На вещественном участке разреза $\alpha = \sigma < \nu$, на мнимой оси разреза $\alpha = i\tau$, т. е. на берегах разреза $\chi(\alpha)$ принимает чисто мнимые значения. Для выбранной ветви радикала на левом берегу разреза $\text{Im} \chi(\alpha) < 0$, а на правом берегу $\text{Im} \chi(\alpha) > 0$. Исходя из вышесказанного, получаем слева от разреза:

$$\begin{aligned} Vp \int_{-\infty}^{\nu} R(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha &= -\frac{\pi i \nu}{4} (1 - e^{2i\nu h}) - \int_{\epsilon}^{\nu} \left[\frac{\sqrt{\nu^2 - \sigma^2}}{2\sigma} (1 - e^{2ih\sqrt{\nu^2 - \sigma^2}}) - \frac{1}{2i} \right] e^{-i\sigma x} d\sigma + \\ &+ \int_{\epsilon}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{\nu^2 + \tau^2}}{2\tau} (1 - e^{2ih\sqrt{\nu^2 + \tau^2}}) - \frac{1}{2} \right] e^{\tau x} d\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

Справа от разреза имеем:

$$\begin{aligned} Vp \int_{\nu}^{\infty} R(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha &= -\frac{\pi i \nu}{4} (1 - e^{-2i\nu h}) - \int_{\epsilon}^{\nu} \left[\frac{\sqrt{\nu^2 - \sigma^2}}{2\sigma} (1 - e^{-2ih\sqrt{\nu^2 - \sigma^2}}) - \frac{1}{2i} \right] e^{-i\sigma x} d\sigma + \\ &+ \int_{\epsilon}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{\nu^2 + \tau^2}}{2\tau} (1 - e^{-2ih\sqrt{\nu^2 + \tau^2}}) - \frac{1}{2} \right] e^{\tau x} d\tau. \end{aligned} \quad (22)$$

Складывая (21) и (22), получим:

$$\begin{aligned} Vp \int_{-\infty}^{\infty} R(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha &= \frac{-\pi i \nu}{2} (1 - \cos(2h\nu)) - \int_{\epsilon}^{\nu} \frac{\sqrt{\nu^2 - \sigma^2}}{\sigma} (1 - \cos(2h\sqrt{\nu^2 - \sigma^2})) e^{-i\sigma x} d\sigma + \\ &+ \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\sqrt{\nu^2 + \tau^2}}{\tau} (1 - \cos(2h\sqrt{\nu^2 + \tau^2})) e^{\tau x} d\tau + \left\{ \frac{1}{i} \int_0^{\nu} e^{-i\sigma x} d\sigma - \int_0^{\infty} e^{\tau x} d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Учитывая, что $\int_0^{\infty} e^{x\tau} d\tau = -P \frac{1}{x}$, разность в фигурных скобках последнего выражения преобразуем к виду $e^{-ix\nu} P \frac{1}{x}$, что позволит после подстановки (23) в (19) сократить сингулярное слагаемое.

В результате для случая $x < 0$ получим выражение для ядра

$$k(x) = -\frac{i\nu}{4} (1 - \cos(2h\nu)) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\sqrt{\nu^2 + \tau^2}}{\tau} (1 - \cos(2h\sqrt{\nu^2 + \tau^2})) e^{\tau x} d\tau - \right.$$



$$- \int_{\varepsilon}^{\nu} \frac{\sqrt{\nu^2 - \sigma^2}}{\sigma} (1 - \cos(2h\sqrt{\nu^2 - \sigma^2})) e^{-i\sigma x} d\sigma \left. \right\}.$$

Замыкая контуры интегрирования интегралов (20) для $x > 0$ в нижней полуплоскости (α), аналогичными преобразованиями придем к результату:

$$k(x) = -\frac{i\nu}{4}(1 - \cos(2h\nu)) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\varepsilon}^{\nu} \frac{\sqrt{\nu^2 - \sigma^2}}{\sigma} (1 - \cos(2h\sqrt{\nu^2 - \sigma^2})) e^{i\sigma x} d\sigma - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sqrt{\nu^2 + \tau^2}}{\tau} (1 - \cos(2h\sqrt{\nu^2 + \tau^2})) e^{-\tau x} d\tau \right\}.$$

Окончательное выражение для функции ядра при $-1 < x < 1$ примет вид

$$k(x) = -\frac{i\nu}{4}(1 - \cos(2h\nu)) + k_0(x),$$

$$k_0(x) = \frac{\text{sign}(x)}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^{\nu} \frac{\sqrt{\nu^2 - \sigma^2}}{\sigma} (1 - \cos(2h\sqrt{\nu^2 - \sigma^2})) e^{i\sigma|x|} d\sigma - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sqrt{\nu^2 + \tau^2}}{\tau} (1 - \cos(2h\sqrt{\nu^2 + \tau^2})) e^{-\tau|x|} d\tau \right\}. \quad (24)$$

Подставим в левую часть уравнения (18) полученное выражение для $k(x)$, имеем:

$$\int_{-1}^{+1} \gamma(x)k(x-s) ds = \int_{-1}^{+1} \gamma(x)k_0(x-s) ds - \frac{i\nu}{4}(1 - \cos(2h\nu)) \cdot \Gamma(0).$$

Для бесциркуляционного течения $\Gamma(0) = 0$. В итоге приходим к интегральному уравнению гармонических колебаний тонкого профиля в акустической среде вблизи твердой границы:

$$\int_{-1}^{+1} \gamma(x)k_0(x-s) ds = v_z(x). \quad (25)$$

Ядро $k_0(x)$ задается выражением (24).

4. МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Выражение (12) для упругих перемещений используем при определении нормальной скорости $v_z(x)$ в правой части интегрального уравнения (25). В результате последнее преобразуется к виду

$$\int_{-1}^{+1} \gamma(s)K_0(x,s) ds = v_0(x). \quad (26)$$

$$K_0(x,s) = \begin{cases} k_0(x-s) + iG(-|x|,s), & -1 \leq x \leq 0, \\ k_0(x-s), & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Тип полученного уравнения определяет функция $k_0(x)$ (24), в силу чего интеграл в (26) понимается в смысле Коши.

При бесциркуляционном обтекании аэродинамическое давление пропорционально ускорению. Для коэффициентов присоединенной массы λ и присоединенного момента инерции I верны соотношения:

$$\lambda = \int_{-1}^{+1} s\gamma(s) ds, \quad I = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} s^2\gamma(s) ds. \quad (27)$$



Численное решение сингулярного интегрального уравнения (26) выполним методом дискретных вихрей [6], что приведет к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \gamma(s_j) K_0(x_i, s_j) = v_0(x_i), \\ \sum_{j=1}^N \gamma(s_j) = 0, \end{cases} \quad (28)$$

где $x_i = -1 + \frac{4i-1}{2N-1}$, $i = \overline{1, N-1}$, $s_j = -1 + \frac{4j-3}{2N-1}$, $j = \overline{1, N}$.

Последнее уравнение системы (28) выражает требование бесциркуляционности течения. Выбор узлов и точек коллокации обеспечивает нахождение решения сингулярного уравнения в классе функций, неограниченных на обоих концах, что характерно для данного типа течения.

Определив интенсивность точечных вихрей $\gamma(s_j)$, $j = \overline{1, N}$, можно вычислить действующие на крыло аэродинамические силы, вызванные этими силами упругие деформации поверхности крыла, а также обусловленные упругостью крыла изгибающий момент и перерезывающую силу.

5. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сравнение результатов расчетов гидродинамических сил для акустической среды с соответствующим решением для несжимаемой жидкости показывает, что в случае сжимаемой жидкости, кроме сил, находящихся в фазе с ускорением и считающихся проявлением так называемых «присоединенных масс» газа, появляются демпфирующие силы в фазе со скоростью. Последнее обстоятельство означает, что колебания частиц газа, вызванные гармоническими колебаниями пластинки, являются затухающими. При этом коэффициент присоединенных масс зависит от частоты колебаний, и зависимость эта не монотонна, а имеет счетное множество резонансных пиков, выраженных достаточно слабо вследствие влияния значительных демпфирующих сил.

Проведенные расчеты свидетельствуют о том, что при удалении от экрана резонансные пики встречаются чаще, но сами пики становятся все более пологими. Зависимости, представленные на рис. 3 для крыла малой гибкости, соответствуют закономерностям, полученным в работе [12] для колебаний жесткого крыла в акустической среде.

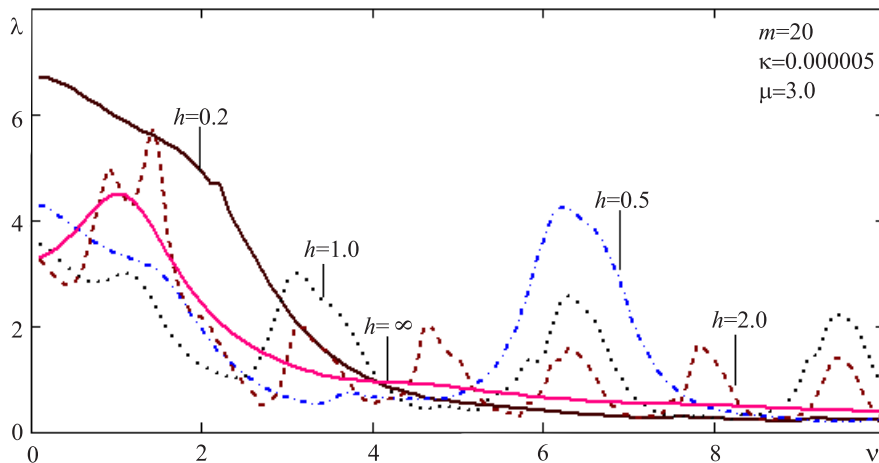


Рис. 3. Зависимости присоединенной массы от частоты для достаточно жесткого крыла на различных отстояниях от экрана

В случае крыла умеренной гибкости при определенных значениях частоты происходит резкое изменение аэродинамического давления (рис. 4). Аналогичные резонансные явления наблюдаются для давления и при изменении жесткости крыла (рис. 5).

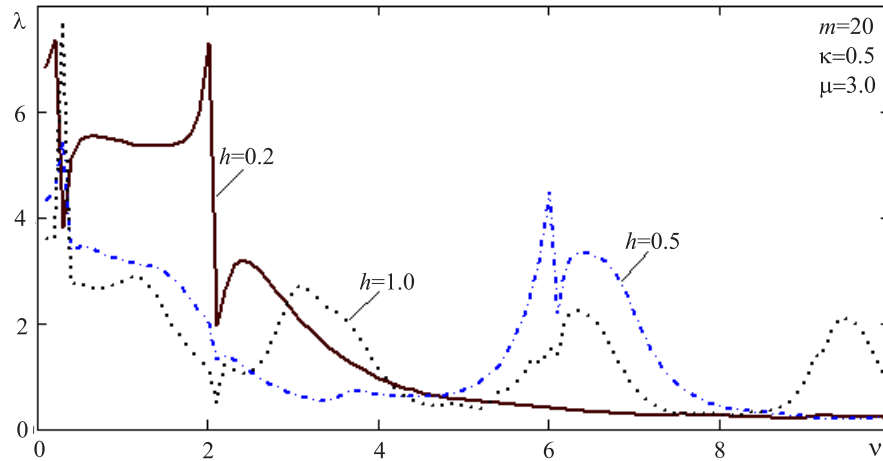


Рис. 4. Зависимость подъемной силы от частоты колебаний для гибкого крыла (критические точки: $\nu_1 = 0.4$ ($\beta_1 = 1.871$), $\nu_2 = 2.1$ ($\beta_2 = 4.583$), $\nu_3 = 6.13$ ($\beta_3 = 7.81$))

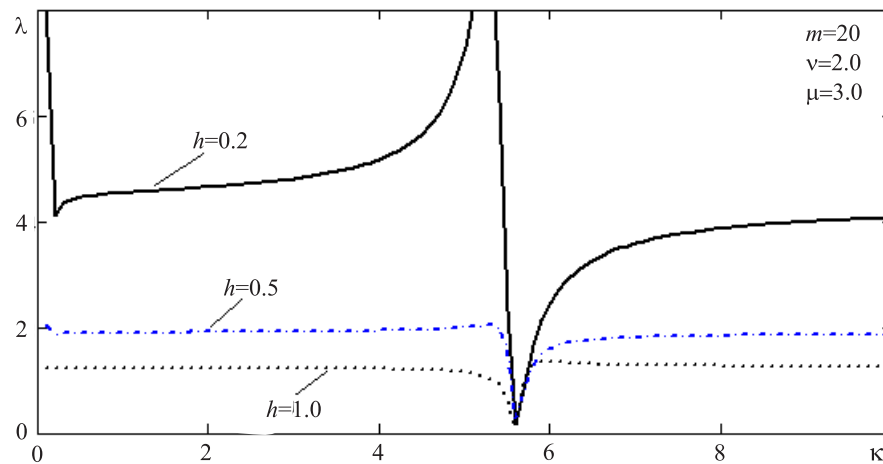


Рис. 5. Влияние упругих свойств крыла на аэродинамическую силу (критические точки: $\kappa_1 = 0.12$, $\kappa_2 = 5.65$)

Результаты численных расчетов показали, что значения критических точек зависят от частоты колебаний, упругих свойств крыла и его массы. Эти точки соответствуют собственным числам задачи изгиба крыла (13), которые приближенно можно определить как решения частотного уравнения:

$$\mu\beta(1 + \operatorname{ch}\beta \cdot \cos\beta) = \operatorname{sh}\beta \cdot \cos\beta + \operatorname{ch}\beta \cdot \sin\beta, \quad \beta = \sqrt[4]{m\kappa\nu^2}.$$

Первые три ненулевых решения этого трансцендентного уравнения для $\mu = 3.0$, $\kappa = 5.0$, $m = 20$ приближенно равны: $\beta_1 = 1.754$, $\beta_2 = 4.613$, $\beta_3 = 7.81$, что совпадает с данными работы [8]. Критические точки ν_n и κ_n , наблюдаемые на рис. 2 и рис. 3 соответственно, подтверждаются приведенными выше решениями указанного частотного уравнения.

На рис. 6 представлено распределение упругих деформаций на половине профиля крыла при значениях κ , близких к критическим. Качественно эти кривые согласуются с первой и второй собственными формами, представленными в работе [8].

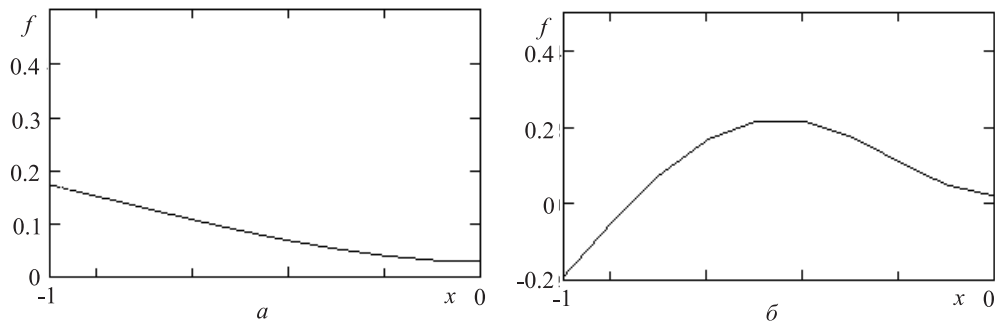


Рис. 6. Распределение упругих деформаций вблизи точек динамической неустойчивости ($m = 20$, $\mu = 3.0$, $h = 0.2$, $\nu = 2.0$, $\kappa = 0.12$ (а), $\kappa = 5.8$ (б))

Библиографический список

1. Белоцерковский С. М., Кочетков Ю. А., Красовский А. А., Новицкий В. В. Введение в аэроавтоупругость. М.: Наука, 1980. 384 с.
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.
3. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. Сенквенциальный подход. М.: Мир, 1976. 312 с.
4. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 288 с.
5. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
6. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 768 с.
7. Тимошенко С. П., Войновски-Кригер С. А. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1963. 636 с.
8. Бисплингофф Р. Л., Эшли Х., Халфмен Р. Л. Аэроупругость. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 800 с.
9. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.
10. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
11. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
12. Ефремов И. И., Лукащук Е. П., Грибашев С. А. Гармонические колебания пластинки вблизи твердой границы сжимаемой жидкости // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: тр. междунар. шк.-семинаров. Орел, 2008. Вып. 6. С. 38–45.

УДК 539.374: 517.958

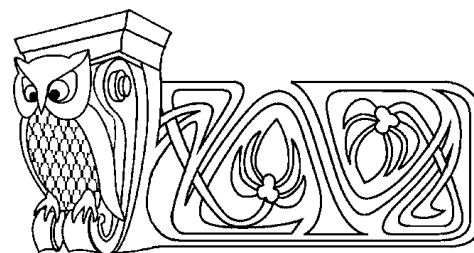
ТЕЧЕНИЕ МАТЕРИАЛА СЛИБАРА – ПАСЛЯЯ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Н. А. Окулов

Филиал Российского государственного социального университета, Наро-Фоминск, кафедра педагогики, психологии и информационных технологий
E-mail: okulovna@rambler.ru

Рассматривается вопрос о численном моделировании неустановившегося течения вязкопластического материала в плоском канале. Определяющие соотношения принимаются в форме Слибара – Пасляя. Задача решается в напряжениях. Доказана теорема о слабом разрыве на границах раздела жестких и вязкопластических зон. Предложен оригинальный численный метод решения задачи. Приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: вязкопластическая среда, материал Слибара – Пасляя, численное моделирование.



Flow of Slibar – Paslay Material in a Flat Channel

N. A. Okulov

Branch of Russian State Social University, Naro-Fominsk, Chair of Pedagogy, Psychology and Information Technologies
E-mail: okulovna@rambler.ru

The question of the numerical simulation of unstable flow of a viscoplastic material in a flat channel is considered. Defining relations are taken in the form of Slibar – Paslay. The problem is solved in stresses. Theorem about the weak discontinuity at the interfaces between rigid and viscoplastic zones is proved. The original numerical method for solving the problem is offered. Numerical simulation results are presented.

Key words: viscoplastic fluid, material of Slibar – Paslay, numerical simulation.