References

1. Pokornyi Yu. V., Bakhtina Zh. I., Zvereva M. B., Shabrov S. A. *Ostsilliatsionnyi metod Shturma v spektral'nykh zadach* [Sturm oscillation method in spectral problems]. Moscow, Fizmatlit, 2009, 192 p. (in Russian).
2. Shabrov S. A. On a necessary condition of at least one quadratic functional with an integral Stieltjes. *Izv. Sarat. Univ. N. S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 1. pp. 52–55 (in Russian).
3. Shabrov S. A. O μ-reguliarizatsii funktsii s konechnym izmeneniem [About μ-regularization of function of finite variation] *Sb. statei aspirantov i studentov matematicheskogo fakul'teta VGU*. Voronezh, 1999, pp. 166–169 (in Russian).
4. Pokornyi Yu. V. The Stieltjes integral and derivatives with respect to the measure in ordinary differential equations. *Dokl. Math.*, 1999, vol. 59, no. 1, pp. 34–37.

УДК 517.518.34, 517.518.36, 517.986.62

МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА РАСТЯЖЕНИЯ В ПРОИЗВЕДЕНИИ ЛОКАЛЬНО-КОМПАКТНЫХ НУЛЬ-МЕРНЫХ ГРУПП

С. Ф. Лукомский

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, LukomskiiSF@info.sgu.ru

В действительном вейвлет-анализе d-мерный оператор растяжения может быть записан с помощью действительной $d \times d$ матрицы. В настоящей работе найден явный вид оператора растяжения в произведении локально-компактных нуль-мерных абелевых групп.

Ключевые слова: нуль-мерные группы, оператор растяжения, кратномасштабный анализ.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы активно изучаются всплесковые базисы на группах Виленкина G_V и полях $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел, а также кратномасштабный анализ (КМА), позволяющий строить такие базисы. В значительной мере это связано с тем, что всплесковые базисы на G_V и $\mathbb{Q}_p$, которые получаются в рамках соответствующего КМА, состоят из ступенчатых функций и, значит, могут быть использованы в цифровой обработке дискретной информации. Поэтому особый интерес вызывают всплесковые базисы на произведениях G_V^d и $\mathbb{Q}_p^d$. Первая попытка получить всплесковые базисы в $L_2(\mathbb{Q}_p^d)$ была предпринята в работе А. Хренникова и В. Шелковича [1], где многомерные всплесковые базисы были получены как произведение одномерных. В. Шелкович и М. Скопина [2] в 2009 г. построили многомерные 2-адические базисы Хаара в $L_2(\mathbb{Q}_2^d)$, используя тензорное произведение одномерных КМА. При построении всплесковых базисов и КМА основную роль играет наличие операторов растяжения и сдвига. Так, в работе [2] в качестве d-мерного оператора растяжения A_d использовался оператор покомпонентного растяжения, т. е. $A_d(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)}) = (A_1x^{(1)}, A_1x^{(2)}, \dots, A_1x^{(d)})$, где A_1 — одномерный оператор растяжения. В классическом случае [3] d-мерный оператор растяжения может быть определен с помощью целочисленной матрицы $\mathscr{A}_{d\times d}$ равенством $A_d(X) = \mathscr{A}X$. Э. Кинг и М. Скопина [4] в 2010 г. выяснили, что при построении КМА в $L_2(\mathbb{Q}_2^2)$ в качестве $\mathscr{A}$ можно взять шахматную матрицу $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Поле $\mathbb{Q}_p$ является частными случаями нуль-мерной группы, а их произведение $\mathbb{Q}_p^d$ также будет нуль-мерной группой. Поэтому естественно рассмотреть более общий вопрос: какой вид имеет оператор растяжения в произведении нуль-мерных групп. В работах [5, 6], учитывая тот факт, что произведение нуль-мерных групп снова нуль-мерная группа, была предложена конструкция построения оператора растяжения на произведении компактных нуль-мерных групп, однако этот оператор не удалось записать в виде $A_d(X) = \mathscr{A}X$. В настоящей работе мы покажем, что оператор растяжения, рассмотренный в работах [5, 6], может быть записан в виде $A_d(X) = \mathscr{A}E_A\mathscr{A}^{-1}X$, где $\mathscr{A} = \mathscr{A}_{d\times d}$ — невырожденная матрица над полем вычетов по простому модулю p, и E_A матрица, в которой на диагонали, ниже главной, стоят 1, в правом верхнем углу — одномерный оператор растяжения A_1, и остальные элементы равны нулю.

1. ЛОКАЛЬНО-КОМПАКТНЫЕ НУЛЬ-МЕРНЫЕ ГРУППЫ, ТОПОЛОГИЯ, ХАРАКТЕРЫ

Приведем основные понятия и факты, связанные с анализом на нуль-мерных группах. Более подробную информацию можно найти в [7]. Пусть $(G, \dot{+})$ — локально-компактная абелева группа, топология в которой задана счетной системой открытых подгрупп:

$$\supset G_{-n} \supset \cdots \supset G_{-1} \supset G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n \supset \ldots,$$

таких, что $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty} G_n = G$, $\bigcap\limits_{n=-\infty}^{+\infty} G_n = \{0\}$, $(G_n/G_{n+1})^\sharp = p_n$, где p_n — простые числа. Через μ обозначим меру Хаара на G нормированную условием $\mu G_0 = 1$, а через $\int\limits_G f(x) d\,\mu(x)$ — абсолютно сходящийся интеграл, порожденный мерой μ.

При каждом $n \in \mathbb{Z}$ выберем элементы $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ и зафиксируем их. Тогда любой элемент $x \in G$ единственным образом представим в виде

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n \qquad (a_n = \overline{0, p_n - 1}), \tag{1}$$

причем в сумме (1) слагаемых с отрицательными номерами конечное число. Систему элементов (g_n) будем называть базисной. Пусть далее X — совокупность характеров группы G, которая является группой относительно операции умножения, $G_n^\perp$ — аннулятор группы G_n, т. е. $G_n^\perp = \{\chi \in X : \forall\, x \in G_n,\ \chi(x) = 1\}$.

Каждый аннулятор $G_n^\perp$ есть группа относительно умножения, $G_n^\perp$ образуют возрастающую последовательность:

$$\cdots \subset G_{-n}^\perp \subset \cdots \subset G_0^\perp \subset G_1^\perp \subset \cdots \subset G_n^\perp \subset \ldots,$$

такую, что

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^\perp = X, \qquad \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^\perp = \{1\},$$

причем фактор-группа $G_{n+1}^\perp / G_n^\perp$ имеет порядок p_n.

При каждом $n \in \mathbb{Z}$ выберем элементы $r_n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$ и зафиксируем их. Тогда любой элемент $\chi \in X$ единственным образом представим в виде

$$\chi = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} r_n^{\alpha_n} \qquad (\alpha_n = \overline{0, p_n - 1}),$$

причем в произведении множителей с положительными номерами конечное число. Характеры r_n будем называть *функциями Радемахера*.

2. ОПЕРАТОР РАСТЯЖЕНИЯ В НУЛЬ-МЕРНОЙ ГРУППЕ И ГРУППЕ ЕЕ ХАРАКТЕРОВ

В этом и следующем параграфе мы будем рассматривать локально-компактную группу $(G, \dot{+})$ с основной цепочкой подгрупп

$$\cdots \subset G_n \subset \cdots \subset G_1 \subset G_0 \subset G_{-1} \subset \cdots \subset G_{-n} \subset \ldots,$$

в которой $(G_n/G_{n+1})^\sharp = p$ при всех $n \in \mathbb{Z}$ (символом $X^\sharp$ обозначено количество элементов множества X). Будем также предполагать, что операция $\dot{+}$ в группе G удовлетворяет условию

$$pg_n = \alpha_1 g_{n+1} \dot{+} \alpha_2 g_{n+2} \dot{+} \ldots \dot{+} \alpha_s g_{n+s} \tag{2}$$

при некоторых фиксированных числах $\alpha_j = \overline{0, p-1}$ $(j = \overline{1, s})$.

Отметим, что если $pg_n = 0$, то группа G есть группа Виленкина, если $pg_n = g_{n+1}$ — группа всех p-адических чисел.

Определение. Определим оператор $A :\ G \to G$ равенством

$$Ax = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g_{n-1}$$

при $x = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} a_n g_n$. Если оператор A аддитивен, то будем называть его *оператором растяжения*.

Отметим, что оператор A будет аддитивным, если операция $\dot{+}$ удовлетворяет условию (2), которое выполняется в наиболее важных группах: группах Виленкина с условием $pg_n = 0$ и группах p-адических чисел ($pg_n = g_{n+1}$).

Лемма 1. *Если A — оператор растяжения, то $AG_n = G_{n-1}$, $A^{-1}G_n = G_{n+1}$.*

Доказательство. Равенство $AG_n = G_{n-1}$, очевидно, следует из представления

$$G_n = \{x \in G : x = a_n g_n \dot{+} a_{n+1} g_{n+1} \dot{+} \dots\}. \qquad \square$$

Обозначим

$$H_0 = \{x \in G: \ x = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} a_{-N}g_{-N}, \ N \in \mathbb{N}, \ a_{-j} = \overline{0, p-1}\}.$$

Множество H_0 играет роль натуральных чисел.

3. ОПЕРАТОР РАСТЯЖЕНИЯ В ПРОИЗВЕДЕНИИ НУЛЬ-МЕРНЫХ ГРУПП

Пусть $(\mathfrak{G}, \dot{+})$ — локально-компактная нуль-мерная абелева группа с основной цепочкой:

$$\dots \subset \mathfrak{G}_n \subset \dots \subset \mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_{-1} \subset \dots \subset \mathfrak{G}_{-n} \subset \dots, \qquad (\mathfrak{G}_n / \mathfrak{G}_{n+1})^\sharp = p,$$

$(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — базисная система, т. е. $g_n \in \mathfrak{G}_n \setminus \mathfrak{G}_{n+1}$. Пусть $G = \mathfrak{G}^d$ — произведение d экземпляров группы $\mathfrak{G}$ с топологией произведения. Базу этой топологии образуют всевозможные смежные классы $\mathfrak{G}_{n_1} \times \mathfrak{G}_{n_2} \times \dots \times \mathfrak{G}_{n_d} \dot{+} (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)})$. С этой топологией $\mathfrak{G}^d$ есть нуль-мерная группа и подгруппы

$$\dots \subset \mathfrak{G}_n^d \subset \dots \subset \mathfrak{G}_1^d \subset \mathfrak{G}_0^d \subset \mathfrak{G}_{-1}^d \subset \dots \subset \mathfrak{G}_{-n}^d \subset \dots$$

образуют цепочку подгрупп, которая не является базисной. Обозначим $G_{nd} = \mathfrak{G}_n^d$. Цепочку $(G_{nd})_{n\in\mathbb{Z}}$ по теореме Силова можно дополнить до основной цепочки $(G_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ так, что $(G_n/G_{n+1})^\sharp = p$. Пусть $\mathbf{g}_n \in G_n \setminus G_{n+1}$, произвольные пока векторы $\mathbf{g}_n = (g^{(n_1)}, g^{(n_2)}, \dots, g^{(n_d)})$, которые образуют базисную систему в $G = \mathfrak{G}^d$. По этой системе можно определить оператор A_d равенством

$$A_d\mathbf{x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \mathbf{g}_{n-1} \quad \text{если} \quad \mathbf{x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \mathbf{g}_n.$$

Если он аддитивен, то, согласно определению, он является оператором растяжения. Мы хотим записать оператор A_d в виде

$$(A_d\mathbf{x})^T = \mathscr{A}\mathbf{x}^T,$$

где $\mathscr{A}$ — некоторая матрица размерности $d \times d$, $\mathbf{x}^T$ — вектор-столбец $\left(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)}\right)^T$.

Через Z_p обозначим поле вычетов по модулю p, т. е. $Z_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ с операцией $m \dot{+} n = (m+n) \bmod \mathrm{p}$ и операцией умножения $m \cdot n = \underbrace{m \dot{+} m \dot{+} \dots \dot{+} m}_{n}$. Через $\mathscr{A} = \mathscr{A}_{d\times d} = (a_{i,j})$ обозначим матрицу, элементы которой $a_{i,j} \in Z_p$, через E_A — матрицу

$$E_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где A есть одномерный оператор растяжения в группе $(\mathfrak{G}, \dot{+})$. По матрице $\mathscr{A}$ определим подгруппы $G_{(n+1)d-l}$ и векторы $\mathbf{g}_{(n+1)d-l}$ равенствами

$$\mathbf{g}_{(n+1)d-l} = (a_{1,l}g_n, a_{2,l}g_n, \dots, a_{d,l}g_n), \qquad l = \overline{1, d},$$

$$G_{(n+1)d-l} = \bigsqcup_{j=0}^{p-1} (G_{(n+1)d-l+1} \dot{+} j\mathbf{g}_{(n+1)d-l}).$$

Лемма 2. *Пусть $\mathscr{A}$ — невырожденная матрица над полем Z_p. Справедливы следующие утверждения:*

1) $G_{(n+1)d} \subset G_{(n+1)d-1} \subset \dots \subset G_{(n+1)d-d+1} \subset G_{nd}$;

2) *при каждом $l = \overline{1, d}$ множества $G_{(n+1)d-l}$ есть подгруппы;*

3) $(G_{(n+1)d-l}/G_{(n+1)d-l+1})^\sharp = p$;

4) $\mathbf{g}_{(n+1)d-l} \in G_{(n+1)d-l} \setminus G_{(n+1)d-l+1}$;

5) *оператор A_d, определенный равенством*

$$A_d\left(\sum_{n,l} a_{(n+1)d-l}\mathbf{g}_{(n+1)d-l}\right)=\sum_{n,l} a_{(n+1)d-l}\mathbf{g}_{(n+1)d-l-1},$$

аддитивен.

6) *если $X=(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(d)})^T=\mathbf{x}^T$, то $(A_d(\mathbf{x}))^T=\mathscr{A}E_A\mathscr{A}^{-1}X$.*

Доказательство. 1)–4). Множества

$$G_{(n+1)d}\dot{+}j(a_{1,1}g_n,a_{2,1}g_n,\ldots,a_{d,1}g_n)\qquad(j=\overline{0,p-1})\tag{3}$$

являются смежными классами по подгруппе $G_{(n+1)d}$ и так как матрица $\mathscr{A}$ невырождена, то $(a_{1,1}, a_{2,1},\ldots,a_{d,1})\neq(0,0,\ldots,0)$. Поэтому $p(a_{1,1}g_n,a_{2,1}g_n,\ldots,a_{d,1}g_n)\in G_{(n+1)d}$ и, значит,

$$G_{(n+1)d}\dot{+}p(a_{1,1}g_n,a_{2,1}g_n,\ldots,a_{d,1}g_n)=G_{(n+1)d}.$$

Отсюда делаем вывод, что смежные классы (3) образуют циклическую группу порядка p. Поэтому множество

$$G_{(n+1)d-l}=\bigsqcup_{j=0}^{p-1}(G_{(n+1)d}\dot{+}j(a_{1,1}g_n,a_{2,1}g_n,\ldots,a_{d,1}g_n)$$

есть подгруппа, такая, что

$$G_{(n+1)d}\subset G_{(n+1)d-1}\subset G_{nd},(G_{(n+1)d-1}/G_{(n+1)d})^\sharp=p,(G_{nd}/G_{(n+1)d-1})^\sharp=p^{d-1}.$$

Так как матрица $\mathscr{A}$ невырождена, то

$$\mathbf{g}_{(n+1)d-2}=(a_{1,2}g_n,a_{2,2}g_n,\ldots,a_{d,2}g_n)\in G_{nd}\setminus G_{(n+1)d-1}$$

и, аналогично предыдущему, множество

$$G_{(n+1)d-2}=\bigsqcup_{j=0}^{p-1}(G_{(n+1)d-1}\dot{+}j\mathbf{g}_{(n+1)d-2})$$

есть подгруппа такая, что

$$G_{(n+1)d}\subset G_{(n+1)d-1}\subset G_{(n+1)d-2}\subset G_{nd},\quad (G_{(n+1)d-2}/G_{(n+1)d-1})^\sharp=p,\quad (G_{nd}/G_{(n+1)d-2})^\sharp=p^{d-2}.$$

Продолжая эти рассуждения, получаем, что утверждения 1)–4) леммы 2 выполнены.

5) Для доказательства аддитивности оператора A_d достаточно проверить справедливость равенства

$$p\mathbf{g}_n=\gamma_1\mathbf{g}_{n+1}\dot{+}\gamma_2\mathbf{g}_{n+2}\dot{+}\ldots\dot{+}\gamma_{sd}\mathbf{g}_{n+sd}.$$

6) Покажем, что для оператора A_d справедливо равенство

$$(A_d(\mathbf{x}))^T=\mathscr{A}E_A\mathscr{A}^{-1}X\qquad(X=(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(d)})^T).$$

Пусть $\mathbf{x}=(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(d)})$. Тогда

$$\mathbf{x}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{l=1}^{d}\alpha_{(n+1)d-l}\mathbf{g}_{(n+1)d-l}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{l=1}^{d}\alpha_{(n+1)d-l}(a_{1,l}g_n,a_{2,l}g_n,\ldots,a_{d,l}g_n,).$$

Отсюда находим

$$x^{(j)}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}g_n\sum_{l=1}^{d}\alpha_{(n+1)d-l}a_{j,l}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}g_n\beta_n^{(j)},\quad j=1,2,\ldots,d,$$

т. е.

$$\mathscr{A}(\alpha_{(n+1)d-1},\alpha_{(n+1)d-2},\ldots,\alpha_{nd})^T=(\beta_n^{(1)},\beta_n^{(2)},\ldots,\beta_n^{(d)})^T,$$

или

$$(\alpha_{(n+1)d-1},\alpha_{(n+1)d-2},\ldots,\alpha_{nd})^T=\mathscr{A}^{-1}(\beta_n^{(1)},\beta_n^{(2)},\ldots,\beta_n^{(d)})^T.$$

Обозначим для удобства $\mathscr{A}^{-1} = (b_{i,j})_{d\times d}$. По определению оператора растяжения

$$A_d\mathbf{x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{l=0}^{d-1}\alpha_{(n+1)d-l}\mathbf{g}_{(n+1)d-l-1} =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(\alpha_{(n+1)d-0}\mathbf{g}_{(n+1)d-1}\dot{+}\alpha_{(n+1)d-1}\mathbf{g}_{(n+1)d-2}\dot{+}\ldots\dot{+}\alpha_{(n+1)d-(d-1)}\mathbf{g}_{(n+1)d-d}) =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(\alpha_{(n+1)d-0}(a_{1,1}g_n, a_{2,1}g_n,\ldots,a_{d,1}g_n)\dot{+}\alpha_{(n+1)d-1}(a_{1,2}g_n, a_{2,2}g_n,\ldots,a_{d,2}g_n)\dot{+}$$
$$\dot{+}\ldots\dot{+}\alpha_{(n+1)d-(d-1)}(a_{1,d}g_n, a_{2,d}g_n,\ldots,a_{d,d}g_n)). \qquad (4)$$

Обозначим $A_d\mathbf{x} = \mathbf{y} = (y^{(1)}, y^{(2)},\ldots,y^{(d)})$. Из (4) находим выражения для компонент вектора $\mathbf{y}$

$$y^{(i)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n \sum_{l=1}^{d} a_{i,l}\alpha_{(n+1)d-(l-1)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde{\beta}_n^{(i)}g_n, \quad i = 1,2,\ldots,d.$$

Отсюда получаем:

$$(\tilde{\beta}_n^{(1)}, \tilde{\beta}_n^{(2)},\ldots,\tilde{\beta}_n^{(d)})^T = \mathscr{A}(\alpha_{(n+1)d}, \alpha_{(n+1)d-1},\ldots,\alpha_{(n+1)d-(d-1)})^T.$$

Запишем выражение для $y^{(i)}$ в виде

$$y^{(i)} = \sum_{l=1}^{d} a_{i,l}\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n\alpha_{(n+1)d-(l-1)} = a_{i,1}\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n\alpha_{(n+1)d-0}\dot{+}a_{i,2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n\alpha_{(n+1)d-1}\dot{+}\ldots\dot{+}$$
$$\dot{+}a_{i,d}\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n\alpha_{(n+1)d-(d-1)} = a_{i,1}\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n\left(\sum_{j=1}^{d} b_{d,j}\beta_{n+1}^{(j)}\right)\dot{+}a_{i,2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n\left(\sum_{j=1}^{d} b_{1,j}\beta_n^{(j)}\right)\dot{+}\ldots\dot{+}$$
$$\dot{+}a_{i,d}\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n\left(\sum_{j=1}^{d} b_{d-1,j}\beta_n^{(j)}\right) = a_{i,1}\sum_{j=1}^{d} b_{d,j}\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n\beta_{n+1}^{(j)}\dot{+}a_{i,2}\sum_{j=1}^{d} b_{1,j}\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n\beta_n^{(j)}\dot{+}\ldots\dot{+}$$
$$\dot{+}a_{i,d}\sum_{j=1}^{d} b_{d-1,j}\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n\beta_n^{(j)} = a_{i,1}\sum_{j=1}^{d} b_{d,j}Ax^{(j)}\dot{+}a_{i,2}\sum_{j=1}^{d} b_{1,j}x^{(j)}\dot{+}\ldots\dot{+}a_{i,d}\sum_{j=1}^{d} b_{d-1,j}x^{(j)},$$

где A — одномерный оператор растяжения в G. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(d)} \end{pmatrix} = \mathscr{A}\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{d} b_{d,j}x^{(j)} \\ \sum\limits_{j=1}^{d} b_{1,j}x^{(j)} \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{d} b_{d-1,j}x^{(j)} \end{pmatrix} = \mathscr{A}\cdot\begin{pmatrix} b_{d,1}A & \ldots & b_{d,d}A \\ b_{1,1} & \ldots & b_{1,d} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{d-1,1} & \ldots & b_{d-1,d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ x^{(d)} \end{pmatrix} =$$
$$= \mathscr{A}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & A \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathscr{A}^{-1}\cdot(x^{(1)}, x^{(2)},\ldots,x^{(d)})^T = \mathscr{A}E_A\mathscr{A}^{-1}(x^{(1)}, x^{(2)},\ldots,x^{(d)})^T,$$

и лемма доказана. □

Из леммы 2 сразу получаем следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть A — одномерный оператор растяжения в $(G,\dot{+})$. Для любой невырожденной матрицы $\mathscr{A} = \mathscr{A}_{d\times d}$ над полем вычетов по модулю p равенство*

$$(A_d(\mathbf{x}))^T = \mathscr{A}E_A\mathscr{A}^{-1}\mathbf{x}^T$$

определяет оператор растяжения в G^d.

Теорема 2. *Пусть p — простое и*

$$E_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{p} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— матрица размерности $d \times d$ $(d \geq 2)$. Тогда равенство

$$(A_d(\mathbf{x}))^T = \mathscr{A} E_p \mathscr{A}^{-1} \mathbf{x}^T$$

определяет оператор растяжения в $\mathbb{Q}_p^d$.

Если $\mathfrak{G}$ есть группа всех p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, то в $\mathbb{Q}_p^2$ можно указать другой вид оператора растяжения.

Теорема 3 [9]. *Определим базисную последовательность в $\mathbb{Q}_p^2$ равенствами $\mathbf{g}_{2n+1} = (g_n, \nu g_n)$, $\mathbf{g}_{2n} = (g_n, g_{n+1})$, где $\nu|(p-1)$. Обозначим $p-1 = \nu\alpha$. Тогда соответствующий оператор растяжения A_2 задается равенством*

$$A_2(x^{(1)}, x^{(2)}) = (Ax^{(1)} \dot{+} \alpha Ax^{(2)}, \nu Ax^{(1)} \dot{-} Ax^{(2)}),$$

или в матричной форме $A_2 \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \alpha A \\ \nu A & \dot{-}A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix}$, *где A — одномерный оператор растяжения $Ax = \dfrac{x}{p}$.*

При доказательстве последнего равенства существенно используется тот факт, что в группе p-адических чисел операция $\dot{+}$ удовлетворяет условию $pg_n = g_{n+1}$. При $p = 2$ получаем оператор растяжения из работы [4].

Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ (*проект* 13-01-00102-а).

Библиографический список

1. *Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M. P*-adic multidimensional wavelets and their application to p-adic pseudo-differential operators. Preprint. 2006. URL: http://arxiv.org/abs/math-ph/0612049 (дата обращения 28.09.2012).

2. *Shelkovich V. M., Skopina M. A. P*-adic Haar multiresolution analysis and pseudo-differential operators // J. Fourier Anal. Appl. 2009. Vol. 15, № 3. P. 366–393.

3. *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. М. : Физматлит, 2005. 616 с.

4. *King E. J., Skopina M. A.* Quincunx Multiresolution Analysis for $L_2(\mathbb{Q}_2^2)$ // *P*-adic Numbers. Ultrametric Analysis and Applications. 2010. Vol. 2, № 3. P. 222–231.

5. *Lukomskii S. F.* Multiresolution analysis on product of zero-dimensional Abelian groups // J. Math. Anal. Appl. 2012. Vol. 385. P. 1162–1178.

6. *Lukomskii S. F.* Haar System on a product of zero-dimensional compact group // Centr. Eur. J. Math. 2011. Vol. 9, № 3. P. 627–639.

7. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : Элм, 1981. 180 с.

8. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М. : Наука, 1982. 288 с.

9. *Лукомский С. Ф.* О системе Хаара на произведении групп целых p-адических чисел // Мат. заметки. 2011. Т. 9, вып. 4. С. 541–557.

Matrix Representation of Dilation Operator on the Product of Zero-Dimensional Locally Compact Abelian Groups

S. F. Lukomskii

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, LukomskiiSF@info.sgu.ru

In the real wavelet analysis d-dimensional dilation operator may be written with the help of an integer-valued $d \times d$ matrix. We find the matrix representation of the dilation operator on the product of zero-dimensional locally compact Abelian groups.

Key words: zero-dimensional group, delation operator, multiresolution analysis.

References

1. Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M. P-adic multidimensional wavelets and their application to p-adic pseudo-differential operators. *Preprint*, 2006. Available at: http://arxiv.org/abs/math-ph/0612049 (accessed 28 September 2012).

2. Shelkovich V. M., Skopina M. A. P-adic Haar multiresolution analysis and pseudo-differential operators. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2009, vol. 15, no. 3, pp. 366–393.

3. Novikov I. Ya., Protasov V. Yu., Skopina M. A. *Wavelet Theory*. Translations Mathematical Monographs, vol. 239. New York, Amer. Math. Soc., 2011, 506 p.

4. King E. J., Skopina M. A. Quincunx Multiresolution Analysis for $L_2(\mathbb{Q}_2^2)$. *P-adic Numbers. Ultrametric Analysis and Applications*, 2010, vol. 2, no. 3, pp. 222–231.

5. Lukomskii S. F. Multiresolution analysis on product of zero-dimensional Abelian groups. *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, vol. 385, pp. 1162–1178.

6. Lukomskii S. F. Haar System on a product of zero-dimensional compact group. *Centr. Eur. J. Math.*, 2011, vol. 9, no. 3, pp. 627–639.

7. Agaev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzafarli G. M., Rubinstein A. I. *Mul'tiplikativnye sistemy funktsii i garmonicheskii analiz na nul'mernykh gruppakh* [Multiplicative Systems of Functions and Harmonic Analysis on Zero-Dimensional Groups]. Baku, Elm, 1981. 180 p. (in Russian).

8. Kargapolov M. I., Merzljakov Ju. I. *Fundamentajs of the Theory of Groups*. New York, Springer-Verlag, 1979, 203 p. (Russ. ed.: Kargapolov M. I., Merzljakov Ju. I. *Osnovy teorii grupp*. Moscow, Nauka, 1982. 288 p.)

9. Lukomskii S. F. Haar system on the product of groups of p-adic integer. *Math. Notes*, 2011, vol. 90, iss. 4, pp. 517–532.

УДК 517.927.25

О ДВУКРАТНОЙ ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СИЛЬНО НЕРЕГУЛЯРНОГО КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

О. В. Парфилова

Старший преподаватель кафедры информатики, Саратовская государственная юридическая академия,
Oksana_Parfilova@mail.ru

Рассматривается класс сильно нерегулярных пучков обыкновенных дифференциальных операторов 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Предполагается, что корни характеристического уравнения пучков этого класса лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, по разные стороны от него. Найден точный отрезок, на котором система собственных функций 2-кратно полна в пространстве суммируемых с квадратом функций.

Ключевые слова: квадратичный пучок, пучок второго порядка, пучок обыкновенных дифференциальных операторов, двухточечные краевые условия, однородное дифференциальное выражение с постоянными коэффициентами, кратная полнота системы собственных функций, кратная неполнота системы собственных функций.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный на конечном отрезке $[0,1]$ дифференциальным выражением:

$$l(y,\lambda) := y^{(2)} + \lambda p_1 y^{(1)} + \lambda^2 p_2 y$$

и двухточечными одородными краевыми условиями:

$$\begin{gathered} U_\nu(y,\lambda) := U_{\nu 0}(y,\lambda) + U_{\nu 1}(y,\lambda) := (\alpha_{\nu 1} y^{(1)}(0) + \lambda \alpha_{\nu 2} y(0)) + \\ +(\beta_{\nu 1} y^{(1)}(1) + \lambda \beta_{\nu 2} y(1)) = 0, \qquad \nu = 1,2, \end{gathered} \tag{1}$$

где p_j, $\alpha_{\nu j}$, $\beta_{\nu j} \in \mathbb{C}$. В случае $\alpha_{\nu 1} = \beta_{\nu 1} = 0$ считаем, что краевое условие имеет вид

$$\alpha_{\nu 2} y(0) + \beta_{\nu 2} y(1) = 0.$$

Обозначим через ω_1, ω_2 корни характеристического уравнения $\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$ и предположим, что всюду далее выполняется основное предположение: корни ω_1, ω_2 различны, отличны от нуля и