УДК 519.95

# УПОРЯДОЧЕННЫЕ АВТОМАТЫ И ТОЛЕРАНТНЫЕ ОБРАЗЫ КДА

**И. П. Мангушева**

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дискретной математики и информационных технологий, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, MangushevaIP@info.sgu.ru

Рассматривается конечный детерминированный автомат (КДА), множества состояний, входных и выходных символов которого частично упорядочены (упорядоченный автомат). Определяется отображение КДА на упорядоченный автомат, названное $p$-морфизмом. Показано что так называемые толерантные образы, построенные по отношениям стабильной толерантности на множестве состояний КДА, являются частным случаем упорядоченных автоматов, связанных с исходным $p$-морфизмом. Определяются необходимые и достаточные условия, при которых упорядоченный автомат является толерантным образом заданного автомата.

*Ключевые слова:* конечный детерминированный автомат, толерантный образ, упорядоченный автомат, стабильная толерантность, покрытие, частичный порядок.

## 1. СТАБИЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ В АВТОМАТАХ. КВАЗИФАКТОРИЗАЦИЯ. МОРФИЗМЫ ПО ТОЛЕРАНТНОСТЯМ

В данном параграфе в краткой форме приведен материал из [1], на базе которого проводится исследование.

Пусть $S$ — непустое множество. Любое подмножество $\rho \subseteq S \times S$, где $S \times S$ — декартов квадрат множества $S$, называется *бинарным отношением* на множестве $S$.

Бинарное отношение $\rho$ на множестве $S$ называется:

1) *рефлексивным*, если $(\forall\ s \in S)\ ((s, s) \in \rho)$,

2) *симметричным*, если $(\forall\ s_1, s_2 \in S)\ ((s_1, s_2) \in \rho \to (s_2, s_1) \in \rho)$,

3) *транзитивным*, если $(\forall\ s_1, s_2, s_3 \in S)\ ((s_1, s_2) \in \rho \& (s_2, s_1) \in \rho \to (s_1, s_3) \in \rho)$.

Бинарное отношение, обладающее свойствами 1, 2 и 3 одновременно, называется *отношением эквивалентности* и обычно обозначается через $\varepsilon$. Если отношение обладает свойствами 1 и 2, то оно называется *отношением толерантности* и обычно обозначается через $\tau$.

Бинарное отношение $\rho \subseteq S \times S$ называется *антисимметричным*, если

$$(\forall\ s_1, s_2 \in S)\ ((s_1, s_2) \in \rho \& (s_2, s_1) \in \rho \to s_1 = s_2).$$

Отношение $\rho$ на множестве $S$ называется *отношением порядка*, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Отношение порядка на произвольном множестве $S$ обычно обозначается знаком $\leq$. Если $S$ — непустое множество, а $\leq$ — отношение порядка на нем, то пара $(S, \leq)$ называется *упорядоченным (или частично упорядоченным) множеством*.

Множество $S$ с заданным на нем отношением толерантности $\tau$ называется *пространством толерантности* и обозначается $\langle S, \tau \rangle$.

*Покрытием* множества $S$ называется совокупность непустых подмножеств этого множества, объединение которых совпадает с $S$.

Множество $L \subseteq S$ называется *предклассом* в $\langle S, \tau \rangle$ (или *$\tau$-предклассом*), если любые два его элемента $s$ и $t$ толерантны (т. е. находятся в отношении толерантности $\tau$).

Множество $B \subseteq S$ называется *классом толерантности* в $\langle S, \tau \rangle$ (или *$\tau$-классом*), если $B$ есть максимальный предкласс. Множество всех классов толерантности отношения толерантности $\tau$ образует покрытие базового множества. Далее покрытие множества S всеми классами толерантности $\tau$ будем обозначать $B_\tau$.

**Утверждение 1** [2]. *Пусть $\tau$ — отношение толерантности на множестве $S$. Тогда для любых двух элементов, находящихся в отношении $\tau$, существует, по крайней мере, один содержащий их $\tau$-класс.*

**Следствие.** *Пусть $B_1$, $B_2$, …, $B_m$ — всевозможные классы толерантности $\tau$. Тогда*

$$\tau = \bigcup_{i=1}^{m} (B_i \times B_i).$$

Через $T(S)$ будем обозначать множество всех толерантностей произвольного множества $S$.

Рассмотрим конечный детерминированный автомат Мили [2, 3] $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где $S$, $X$, $Y$ — конечные алфавиты состояний, входных и выходных символов соответственно, а $\delta : S \times X \to S$ — функция переходов, $\lambda : S \times X \to Y$ — функция выходов.

Отношение $\mu$ на множестве $S$ автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ назовем *стабильным*, если

$$(\forall\ s_1, s_2 \in S)\ (\forall\ x \in X)\ ((s_1, s_2) \in \mu \to (\delta(s_1, x), \delta(s_2, x)) \in \mu). \tag{1}$$

Особый интерес представляют отношения толерантности, обладающие свойствами стабильности. Они называются *стабильными толерантностями*.

С толерантностью $\tau$ однозначно связано покрытие множества $B_\tau = \{B_i\}$, где $B_i$ — классы покрытия $B_\tau$.

Это покрытие обладает свойством:

$$(\forall\ B_i)\ (\forall\ x \in X)\ (\exists\ B_j)\ (\{\delta(s, x)\}_{s \in B_i} \subseteq B_j). \tag{2}$$

Это означает, что функция переходов под действием любого входного символа переводит все элементы одного и того же класса покрытия целиком в другой класс.

Множество стабильных толерантностей автомата $A$ обозначается $ST(A)$.

Пусть $B_\tau$, $C_\rho$, $D_\xi$ — покрытия классами в пространствах толерантностей $\langle S, \tau\rangle$, $\langle X, \rho\rangle$, $\langle Y, \xi\rangle$ соответственно.

Рассмотрим процедуру построения автомата по заданной тройке толерантностей $(\tau, \rho, \xi)$ и покрытиям $B_\tau$, $C_\rho$, $D_\xi$.

Пусть $B_\tau = \{B_i\}$, $C_\rho = \{C_j\}$, $D_\xi = \{D_k\}$. Введем обозначения: $s_\tau = \bigcap\{B_i | s \in B_i\}$ — пересечение всех классов покрытия $B_\tau$, содержащих элемент $s$, $x_\rho = \bigcap\{C_j | x \in C_j\}$, $y_\xi = \bigcap\{D_k | y \in D_k\}$. Через $S/_\varepsilon$ будем обозначать множество классов покрытия $B_\tau$, построенного по толерантности $\tau$, и их всевозможных непустых пересечений. Аналогично через $X/_\rho$ обозначим классы и их всевозможные непустые пересечения из $C_\rho$, а через $Y/_\xi$ — классы и их непустые пересечения из $D_\xi$.

Рассмотрим три отображения:

$$\varphi'_\tau : S \to S/_\tau, \qquad \varphi'_\tau(s) = s_\tau, \tag{3}$$

$$\psi'_\rho : X \to X/_\rho, \qquad \psi'_\rho(x) = x_\rho, \tag{4}$$

$$\theta'_\xi : Y \to Y/_\xi, \qquad \theta'_\xi(y) = y_\xi. \tag{5}$$

Пусть $Q$ и $G$ обозначают элементы множества $S/_\tau$ и $X/_\rho$ соответственно, т. е. $Q = B_{i_1} \bigcap \ldots \bigcap B_{i_k}$, $G = C_{j_1} \bigcap \ldots \bigcap C_{j_l}$.

Определим функции $\delta'$, $\lambda'$ следующим образом:

$$\begin{gathered} \delta' : S/_\tau \times X/_\rho \to S/_\tau, \\ \delta'(Q, G) = \bigcap \left\{ B_i | B_i \supseteq \{\delta(s, x)\}_{\substack{s \in Q \\ x \in G}} \right\} = \left( \{\delta(s, x)\}_{\substack{s \in Q \\ x \in G}} \right)_\tau \end{gathered} \tag{6}$$

— пересечение всех классов покрытия $B_\tau$, содержащих множество $\{\delta(s, x)\}_{\substack{s \in Q \\ x \in G}}$;

$$\begin{gathered} \lambda' : S/_\tau \times X/_\rho \to Y/_\xi, \\ \lambda'(Q, G) = \left( \{\lambda(s, x)\}_{\substack{s \in Q \\ x \in G}} \right)_\xi . \end{gathered} \tag{7}$$

Элементами множеств $S/_\tau$, $X/_\rho$ и $Y/_\xi$ являются подмножества множеств $S$, $X$ и $Y$ соответственно, поэтому на $S/_\tau$, $X/_\rho$ и $Y/_\xi$ существует частичный порядок по включению.

Рассмотрим автомат $A' = (S/_\tau, X/_\rho, Y/_\xi, \delta', \lambda')$. Процедура его построения называется *квазифакторизацией*, а автомат $A'$ — *квазифактор-автоматом*. Его также обозначают $A_{\tau,\rho,\xi}$. Таким образом, содержательно квазифактор-автомат — это автомат, «работающий» на классах покрытий $B_\tau$, $C_\rho$, $D_\xi$ и их пересечениях.

Анализируя шаги процедуры квазифакторизации, следует выделить момент, заслуживающий особого внимания. При определении функций $\delta'$ и $\lambda'$ по формулам (6) и (7) может оказаться, что множество $\{\delta(s, x)\}_{\substack{s \in Q \\ x \in G}}$ или $\{\lambda(s, x)\}_{\substack{s \in Q \\ x \in G}}$ не покрывается целиком ни одним классом соответствующих покрытий. В результате получается, что функции $\delta'$ и $\lambda'$ не определены. Теорема 1 описывает условия корректности процедуры.

**Лемма 1.** *Для произвольного покрытия $B = \{B_i\}$ произвольного множества $Z$ и произвольных непустых подмножеств $Z_1, Z_2 \subseteq Z$, где $Z_1 \subseteq Z_2$, справедливо*

$$\bigcap\{B_i | B_i \supseteq Z_1\} \subseteq \bigcap\{B_i | B_i \supseteq Z_2\},$$

*если $Z_2$ покрывается хотя бы одним классом покрытия $B$.*

Пусть $\tau$ — стабильная толерантность на множестве $S$ автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, $\tau \in ST(A)$.

Построим отношение $\rho(\tau)$ на $X$ по заданной стабильной толерантности $\tau$ и отношение $\xi(\tau, \rho)$ на $Y$ по $\tau$ и заданному отношению толерантности $\rho$ на $X$ соответственно согласно (8), (9):

$$(x_1, x_2) \in \rho(\tau) \leftrightarrow (\forall\ s_1, s_2 \in S)\ ((s_1, s_2) \in \tau \to (\delta(s_1, x_1), \delta(s_2, x_2)) \in \tau), \tag{8}$$

$$(y_1, y_2) \in \xi(\tau, \rho) \leftrightarrow (\exists (s_1, s_2) \in \tau)(\exists\ (x_1, x_2) \in \rho)(y_1 = \lambda(s_1, x_1) \& y_2 = \lambda(s_2, x_2)). \tag{9}$$

В [1] показано, что $\rho(\tau)$ и $\xi(\tau, \rho)$ — толерантности.

**Теорема 1.** *Процедура квазифакторизации для автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ по заданным толерантностям $\tau$, $\rho$ и $\xi$ на множествах $S$, $X$ и $Y$ соответственно корректна (функции переходов и выходов квазифактор-автомата $A_{\tau,\rho,\xi}$ определены) тогда и только тогда, когда $\tau \in ST(A)$, $\rho \subseteq \rho(\tau)$, $\xi \supseteq \xi(\tau, \rho)$.*

Отображение $\theta : P \to Q$, где $P$, $Q$ — частично упорядоченные множества, называется *изотонным*, или сохраняющим порядок, если

$$(\forall\ x, y \in P)\ (x \le y \to \theta(x) \le \theta(y)). \tag{10}$$

Изотонное отображение, допускающее изотонное обратное отображение, называется *изоморфизмом.* Другими словами, изоморфизм между двумя частично упорядоченными множествами есть взаимно-однозначное соответствие между ними, которое удовлетворяет условию (10) и условию

$$(\forall\ x, y \in P)\ (\theta(x) \le \theta(y) \to x \le y). \tag{11}$$

Свойство (11) называется *обратной изотонностью* отображения $\theta$.

**Теорема 2.** *Пусть задан автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$. Для квазифактор-автомата $A_{\tau,\rho,\xi}$ автомата $A$, определяемого соотношениями* (3)–(7), *в котором $\tau$, $\rho$, $\xi$ удовлетворяют теореме* 1, *для любых $s \in S$ и $x \in X$ справедливо*

$$\varphi'(\delta(s, x)) \subseteq \delta'(\varphi'(s), \psi'(x)), \tag{12}$$

$$\theta'(\lambda(s, x)) \subseteq \lambda'(\varphi'(s), \psi'(x)). \tag{13}$$

**Теорема 3.** *Для произвольного автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ функции переходов и выходов его квазифактор-автомата $A_{\tau,\rho,\xi} = (S/_\tau, X/_\rho, Y/_\xi, \delta', \lambda')$ изотонны, т. е.*

$$(\forall\ Q_1, Q_2 \in S/_\tau)\ (\forall\ G_1, G_2 \in X/_\rho)\ (Q_1 \subseteq Q_2 \& G_1 \subseteq G_2 \to$$
$$\to \delta'(Q_1, G_1) \subseteq \delta'(Q_2, G_2) \& \lambda'(Q_1, G_1) \subseteq \lambda'(Q_2, G_2)).$$

Автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ будем называть *упорядоченным*, если каждое из множеств $S$, $X$, $Y$ частично упорядочено.

Пусть дан упорядоченный автомат $A = (S_A, X_A, Y_A, \delta_A, \lambda_A)$. Упорядоченный автомат $B = (S_B, X_B, Y_B, \delta_B, \lambda_B)$ назовем *изоморфным* автомату $A$, если существует тройка взаимно-однозначных сюръективных отображений $(\varphi, \psi, \theta)$, где $\varphi : S_A \to S_B$, $\psi : X_A \to X_B$, $\theta : Y_A \to Y_B$, такая, что для любых $s \in S$, $x \in X$

$$\varphi(\delta_A(s, x)) = \delta_B(\varphi(s), \psi(x)), \qquad \theta(\lambda_A(s, x)) = \lambda_B(\varphi(s), \psi(x)),$$

причем каждое из отображений $\varphi$, $\psi$, $\theta$ есть изоморфизм соответствующих частично упорядоченных множеств.

Пусть задан автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$. Упорядоченный автомат $\tilde{A} = (\tilde{S}, \tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{\delta}, \tilde{\lambda})$ назовем *толерантным образом* $A$, если он изоморфен некоторому квазифактор-автомату автомата $A$.

Пусть $(\varphi', \psi', \theta')$ — отображения, определяемые (3)–(5) в процедуре квазифакторизации, автомата $A$ в квазифактор-автомат $A'$, $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})$ — изоморфизм $A'$ на некоторый толерантный образ $\tilde{A}$. Тогда тройку отображений $(\varphi, \psi, \theta) = (\tilde{\varphi} \cdot \varphi', \tilde{\psi} \cdot \psi', \tilde{\theta} \cdot \theta')$, где $(\tilde{\varphi} \cdot \varphi')(s) = \tilde{\varphi}(\varphi'(s))$, $\psi(x) = \tilde{\psi}(\psi'(x))$, $\theta(y) = \tilde{\theta}(\theta'(y))$, назовем *морфизмом по стабильной толерантности* автомата $A$ в автомат $\tilde{A}$.

Следующие теоремы распространяют свойства квазифактор-автоматов на толерантные образы.

**Теорема 4.** *Пусть $(\varphi, \psi, \theta)$ — морфизм по стабильной толерантности автомата $A$ в автомат $\tilde{A}$, тогда для любых $s \in S$, $x \in X$*

$$\varphi(\delta(s, x)) \leq \tilde{\delta}(\varphi(s), \psi(x)), \qquad \theta(\lambda(s, x)) \leq \tilde{\lambda}(\varphi(s), \psi(x)).$$

**Теорема 5.** *Для произвольного автомата $A$ функции переходов и выходов его толерантного образа $\tilde{A} = (\tilde{S}, \tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{\delta}, \tilde{\lambda})$ изотонны, т. е.*

$$(\forall\ x, x' \in \tilde{X})\,(\forall\ s, s' \in \tilde{S})\ (s \leq s' \& x \leq x' \to \tilde{\delta}(s, x) \leq \tilde{\delta}(s', x') \& \tilde{\lambda}(s, x) \leq \tilde{\lambda}(s', x')).$$

## 2. $P$-МОРФИЗМЫ И ТОЛЕРАНТНЫЕ ОБРАЗЫ

Пусть $(Z, \leq)$ — частично упорядоченное множество, $z, z' \in Z$. Элемент $d \in Z$ называется нижней границей, или *пересечением*, или наибольшей нижней гранью $z$ и $z'$ (обозначение: $d = z \wedge z'$), если $d \leq z$, $d \leq z'$ и для любых $x \in Z$ из $x \leq z$ и $x \leq z'$ следует, что $x \leq d$.

Элемент $g \in Z$ называется *верхней границей*, или *объединением*, или наименьшей верхней гранью $z$ и $z'$ (обозначение: $g = z \vee z'$), если $z \leq g$, $z' \leq g$ и из $z \leq x$ и $z' \leq x$ следует, что $g \leq x$.

Понятия пересечения и объединения естественным образом могут быть распространены на любое множество элементов из $Z$.

Элемент $m \in Z$ называется *максимальным* в множестве $Z$, если не существует $z \in Z$ такого, что $m < z$. Соответственно элемент $m' \in Z$ *минимальный* в множестве $Z$, если не существует $z \in Z$ такого, что $z < m'$.

Пусть задан автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ и упорядоченный автомат $\bar{A} = (\bar{S}, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{\delta}, \bar{\lambda})$.

Тройку всюду определенных отображений $(\varphi, \psi, \theta)$, где $\varphi : S \to \bar{S}$, $\psi : X \to \bar{X}$, $\theta : Y \to \bar{Y}$, назовем *морфизмом по частичным порядкам*, или коротко *p-морфизмом* автомата $A$ в автомат $\bar{A}$, если для любых $s \in S$, $x \in X$

$$\varphi(\delta(s, x)) \leq \bar{\delta}(\varphi(s), \psi(x)), \tag{14}$$

$$\theta(\lambda(s, x)) \leq \bar{\lambda}(\varphi(s), \psi(x)). \tag{15}$$

Далее для произвольного отображения $\varphi$ через $\mathrm{Im}\,\varphi$ будем обозначать множество образов при отображении $\varphi$.

**Теорема 6.** *Пусть дан автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ и упорядоченный автомат $\bar{A} = (\bar{S}, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{\delta}, \bar{\lambda})$. Автомат $\bar{A}$ является толерантным образом автомата $A$ тогда и только тогда, когда*

1) *существует p-морфизм $(\varphi, \psi, \theta)$ автомата $A$ в автомат $\bar{A}$;*
2) *функции $\bar{\delta}$ и $\bar{\lambda}$ автомата $\bar{A}$ изотонны, т. е.*

$$(\forall\ s, s' \in \bar{S})\,(\forall\ x, x' \in \bar{X})\,(s \leq s' \& x \leq x' \to \bar{\delta}(s, x) \leq \bar{\delta}(s', x') \& \bar{\lambda}(s, x) \leq \bar{\lambda}(s', x')); \tag{16}$$

3) *для частично упорядоченных множеств $(\bar{S}, \leq)$ и $(\bar{Y}, \leq)$ выполняются следующие условия:*
   а) *всякий элемент $z$ частично упорядоченного множества $Z$ однозначно представим в виде пересечения множества максимальных элементов $z'$ таких, что $z' \geq z$, $Z = S, Y$;*
   б) *$\bar{S}_{\min} \subseteq \mathrm{Im}\,\varphi$, $\bar{Y}_{\min} \subseteq \mathrm{Im}\,\theta$, где $\bar{S}_{\min}$, $\bar{Y}_{\min}$ — множества минимальных элементов множеств $\bar{S}$, $\bar{Y}$ соответственно;*
   в) *каждый элемент $z$ частично упорядоченного множества $Z$ однозначно определяется множеством элементов $z'$ таких, что $z' \leq z$ и $z' \in \mathrm{Im}\,\zeta$, где $\zeta = \varphi$ для $Z = \bar{S}$и $\zeta = \theta$ для $Z = \bar{Y}$;*
4) $(\forall\ \bar{s} \in \bar{S})\,(\forall\ \bar{x} \in \bar{X})\,(\bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x}) = \bigvee\limits_{\substack{s:\varphi(s) \leq \bar{s} \\ x:\psi(x) \leq \bar{x}}} \varphi(\delta(s, x)) \& \bar{\lambda}(\bar{s}, \bar{x}) = \bigvee\limits_{\substack{s:\varphi(s) \leq \bar{s} \\ x:\psi(x) \leq \bar{x}}} \theta(\lambda(s, x))).$

**Доказательство.** *Достаточность.* Покажем, что $\bar{A}$ является толерантным образом $A$, т. е. $\bar{A}$ изоморфен квазифактор-автомату по некоторым толерантностям $\tau$, $\rho$, $\xi$ и покрытиям $B_\tau$, $C_\rho$, $D_\xi$, если для $\bar{A}$ выполняются условия 1)–4) теоремы.

Пусть $\bar{S}_{\max}, \bar{X}_{\max}, \bar{Y}_{\max}$ — множества максимальных элементов множеств $\bar{S}$, $\bar{X}$, $\bar{Y}$ соответственно. Для каждого $\bar{s}_i \in \bar{S}_{\max}$ определим $B_i = \bigcup\limits_{\substack{\bar{s}\le\bar{s}_i \\ \bar{s}\in \operatorname{Im}\varphi}} \varphi^{-1}(\bar{s})$, где $\varphi^{-1}(\bar{s}) = \{s \in S | \varphi(s) = \bar{s}\}$ — полный прообраз $\bar{s}$ при отображении $\varphi$, т. е. $\varphi^{-1} : \bar{S} \to P(S)$, где $P(S)$ — множество всех подмножеств множества $S$. Согласно п. 3), б) и в) теоремы каждое из множеств $B_i$ не пусто и $B_i \neq B_j$, если $i \neq j$.

Поскольку $\varphi$ — всюду определенное отображение, то из определения $B_i$ следует, что $\bigcup\limits_i \{B_i | \bar{s}_i \in \bar{S}_{\max}\} = S$, таким образом, совокупность всех $B_i$ образует покрытие множества $S$. По покрытию $\{B_i\}$ однозначно восстановим толерантность $\tau_0$ согласно следствию из утверждения 1.

Аналогичным образом построим покрытие $\{D_j\}$ на $Y$, $D_j = \bigcup\limits_{\substack{\bar{y}\le\bar{y}_j \\ \bar{y}\in \operatorname{Im}\theta}} \theta^{-1}(\bar{y})$, где $\bar{y}_j \in \bar{Y}_{\max}$, $\theta^{-1}(\bar{y}) = \{y \in Y | \theta(y) = \bar{y}\}$.

По системе $\{D_j\}$ однозначно восстанавливается толерантность $\xi_0$ на $Y$, $D_{\xi_0} = \{D_j\}$.

На $X$ аналогично получим покрытие $\{C_k\}$ : $C_k = \bigcup\limits_{\substack{\bar{x}\le\bar{x}_k \\ \bar{x}\in \operatorname{Im}\psi}} \psi^{-1}(\bar{x})$, где $\bar{x}_k \in \bar{X}_{\max}$, $\psi^{-1}(\bar{x}) = \{x \in X | \psi(x) = \bar{x}\}$. По системе $\{C_k\}$ однозначно восстанавливается толерантность $\rho_0$. Обозначим $C_{\rho_0} = \{C_k\}$.

Покажем, что *квазифактор-автомат* для заданного автомата $A$, толерантностей $\tau_0$, $\rho_0$, $\xi_0$ и покрытий $B_{\tau_0}$, $C_{\rho_0}$, $D_{\xi_0}$ *существует*, т. е. согласно теореме 1 $\tau_0 \in ST(A)$, $\rho_0 \subseteq \rho(\tau_0)$, $\xi_0 \supseteq \xi(\tau_0, \rho_0)$.

1. Покажем, что $\tau_0 \in ST(A)$, т. е. выполняется (1).

Из определения $\tau_0$ следует, что

$$(s_1, s_2) \in \tau_0 \leftrightarrow (\exists\ \bar{s}_0 \in \bar{S})\, (\varphi(s_1) \le \bar{s}_0 \& \varphi(s_2) \le \bar{s}_0). \tag{17}$$

Тогда, используя п. 2) теоремы, получаем:

$$(s_1, s_2) \in \tau_0 \to (\forall\ \bar{x} \in \bar{X})\, (\bar{\delta}(\varphi(s_1), \bar{x}) \le \bar{\delta}(\bar{s}_0, \bar{x}) \& \bar{\delta}(\varphi(s_2), \bar{x}) \le \bar{\delta}(\bar{s}_0, \bar{x})). \tag{18}$$

Тройка отображений $(\varphi, \psi, \theta)$ — $p$-морфизм $A$ в $\bar{A}$, поэтому из (14) следует

$$(x \in X)\, (\varphi(\delta(s_1, x)) \le \bar{\delta}(\varphi(s_1), \psi(x)) \overset{(18)}{\le} \bar{\delta}(\bar{s}_0, \psi(x)) \& \varphi(\delta(s_2, x)) \le \bar{\delta}(\varphi(s_2), \psi(x)) \le \bar{\delta}(\bar{s}_0, \psi(x))),$$

или

$$(\forall\ x \in X)\, (\varphi(\delta(s_1, x)) \le \bar{\delta}(\bar{s}_0, \psi(x)) \& \varphi(\delta(s_2, x)) \le \bar{\delta}(\bar{s}_0, \psi(x))).$$

Таким образом, на основании (17) можно утверждать, что

$$(s_1, s_2) \in \tau_0 \to (\forall\ x \in X)\, ((\delta(s_1, x), \delta(s_2, x)) \in \tau_0).$$

Тем самым показано, что $\tau_0 \in ST(A)$.

2. Покажем, что $\rho_0 \subseteq \rho(\tau_0)$, т. е. согласно (8)

$$(x_1, x_2) \in \rho_0 \to (\forall\ s_1, s_2 \in S)\, ((s_1, s_2) \in \tau_0 \to (\delta(s_1, x_1), \delta(s_2, x_2)) \in \tau_0).$$

По построению $\rho_0$

$$(x_1, x_2) \in \rho_0 \leftrightarrow (\exists\ \bar{x}_0 \in \bar{X})\, (\psi(x_1) \le \bar{x}_0 \& \psi(x_2) \le \bar{x}_0). \tag{19}$$

Пусть $(s_1, s_2) \in \tau_0$, тогда согласно (14)

$$\varphi(\delta(s_1, x_1)) \le \bar{\delta}(\varphi(s_1), \psi(x_1)) \overset{(19)}{\le} \bar{\delta}(\varphi(s_1), \bar{x}_0), \qquad \varphi(\delta(s_2, x_2)) \le \bar{\delta}(\varphi(s_2), \psi(x_2)) \le \bar{\delta}(\varphi(s_2), \bar{x}_0).$$

На основании (17) $(\delta(s_1, x_1), \delta(s_2, x_2)) \in \tau_0$.

3. Покажем, что $\xi_0 \supseteq \xi(\tau_0, \rho_0)$, т. е. согласно (9)

$$(s_1, s_2) \in \tau_0 \& (x_1, x_2) \in \rho_0 \to (\lambda(s_1, x_1), \lambda(s_2, x_2) \in \xi_0).$$

Аналогично (17) справедливо

$$(y_1, y_2) \in \xi_0 \leftrightarrow (\exists\ \bar{y}_0 \in \bar{Y})\,(\theta(y_1) \le \bar{y}_0 \& \theta(y_2) \le \bar{y}_0). \tag{20}$$

Пусть $(s_1, s_2) \in \tau_0$ и $(x_1, x_2) \in \rho_0$, тогда, так как $\bar{A}$ — образ $A$ при $p$-морфизме с изотонными функциями $\bar{\delta}$ и $\bar{\lambda}$, то из (17) и (19) следует

$$(\exists\ \bar{s}_0 \in \bar{S})\,(\exists\ \bar{x}_0 \in \bar{X})\,(\theta(\lambda(s_1, x_1)) \overset{(15)}{\le} \bar{\lambda}(\varphi(s_1), \psi(x_1)) \le \bar{\lambda}(\bar{s}_0, \bar{x}_0) \&$$
$$\& \theta(\lambda(s_2, x_2)) \overset{(15)}{\le} \bar{\lambda}(\varphi(s_2), \psi(x_2)) \le \bar{\lambda}(\bar{s}_0, \bar{x}_0)),$$

поскольку согласно п. 2) теоремы $\bar{\lambda}$ изотонна. Тогда на основании (20)) можно утверждать, что $(\lambda(s_1, x_1), \lambda(s_2, x_2)) \in \xi_0$.

Тем самым доказано, что $\xi_0 \supseteq \xi(\tau_0, \rho_0)$.

Теперь покажем, что *квазифактор-автомат$A'$*, построенный по толерантностям $\tau_0$, $\rho_0$, $\xi_0$ и покрытиям $B_{\tau_0}$, $C_{\rho_0}$, $D_{\xi_0}$ *изоморфен* $\bar{A}$, т. е. существует тройка взаимно-однозначных отображений $(\pi, \mu, \nu)$, где $\pi : \bar{S} \to S/_{\tau_0}$, $\mu : \bar{X} \to X/_{\rho_0}$, $\nu : \bar{Y} \to Y/_{\xi_0}$, такая, что для любых $\bar{s} \in \bar{S}$, $\bar{x} \in \bar{X}$

$$\pi(\bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x})) = \delta'(\pi(\bar{s}), \mu(\bar{x})), \tag{21}$$
$$\nu(\bar{\lambda}(\bar{s}, \bar{x})) = \bar{\lambda}(\pi(\bar{s}), \mu(\bar{x})). \tag{22}$$

Кроме того, согласно определению изоморфизма упорядоченных автоматов должно выполняться следующее:

$$(\forall\ \bar{s}_1, \bar{s}_2 \in S)\,(\bar{s}_1 \le \bar{s}_2 \to \pi(\bar{s}_1) \subseteq \pi(\bar{s}_2)), \tag{23}$$
$$(\forall\ \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \bar{X})\ (\bar{x}_1 \le \bar{x}_2 \to \mu(\bar{x}_1) \subseteq \mu(\bar{x}_2)), \tag{24}$$
$$(\forall\ \bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \bar{Y})\ (\bar{y}_1 \le \bar{y}_2 \to \nu(\bar{y}_1) \subseteq \nu(\bar{y}_2)), \tag{25}$$

т. е. каждое из отображений $\pi$, $\mu$, $\nu$ есть изоморфизм соответствующих упорядоченных множеств.

Рассмотрим следующее отображение $\pi : \bar{S} \to \mathrm{P}(S)$:

$$\pi(\bar{s}) = \bigcup_{\substack{\bar{s}' \le \bar{s} \\ \bar{s}' \in \operatorname{Im}\varphi}} \varphi^{-1}(\bar{s}') = \{s \in S | \varphi(s) \le \bar{s}\}. \tag{26}$$

Согласно определению $B_{\tau_0}$ отображение $\pi$ каждому элементу $\bar{s}$ из $\bar{S}$ однозначно ставит в соответствие либо класс, либо пересечение классов из $B_{\tau_0}$, что следует из п. 3) теоремы. Поясним это.

Непосредственно из определения $B_{\tau_0}$ и п. 3), в) теоремы следует, что $\pi$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством максимальных элементов множества $\bar{S}$ и множеством классов $B_i$ из $B_{\tau_0}$.

Пусть теперь $\bar{s} \notin \bar{S}_{\max}$. Согласно п. 3), а) теоремы всякий элемент $\bar{s} \in \bar{S}$ однозначным образом можно представить в виде $\bar{s} = \bar{s}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{s}_{i_k}$, где $\bar{s}_{i_j} \in \bar{S}_{\max}$, $1 \le j \le k$.

Покажем, что

$$\pi(\bar{s}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{s}_{i_k}) = \pi(\bar{s}_{i_1}) \bigcap \ldots \bigcap \pi(\bar{s}_{i_k}). \tag{27}$$

Пусть $s_0 \in \pi(\bar{s}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{s}_{i_k})$, тогда из (26)

$$\varphi(s_0) \le \bar{s}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{s}_{i_k}.$$

Отсюда $\varphi(s_0) \le \bar{s}_{i_1} \& \ldots \& \varphi(s_0) \le \bar{s}_{i_k}$, а поэтому $s_0 \in \pi(\bar{s}_{i_1}) \& \ldots \& s_0 \in \pi(\bar{s}_{i_k})$, т. е. $s_0 \in \in \pi(\bar{s}_{i_1}) \bigcap \ldots \bigcap \pi(\bar{s}_{i_k})$. С другой стороны, справедливо

$$s_0 \in \pi(\bar{s}_{i_1}) \bigcap \ldots \bigcap \pi(\bar{s}_{i_k}) \leftrightarrow s_0 \in \pi(\bar{s}_{i_1}) \& \ldots \& s_0 \in \pi(\bar{s}_{i_k}) \leftrightarrow \varphi(s_0) \le \bar{s}_{i_1} \& \ldots \& \varphi(s_0) \le \bar{s}_{i_k}.$$

Согласно определению операции пересечения «$\wedge$» $\varphi(s_0) \le \bar{s}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{s}_{i_k}$, но тогда $s_0 \in \pi(\bar{s}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{s}_{i_k})$. Тем самым (27) доказано. Поскольку $\bar{s}_{i_j} \in \bar{S}_{\max}$, $1 \le j \le k$, то $\pi(\bar{s}_{i_j})$ — классы покрытия $B_{\tau_0}$.

Построим обратное отображение $\pi^{-1} : S/_{\tau_0} \to \bar{S}$. По построению $\pi$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между максимальными элементами $\bar{S}$ и классами $B_{\tau_0}$, поэтому полагаем $\pi^{-1}(B_i) = \bar{s}_i$, где $B_i \in B_{\tau_0}$, а $\bar{s}_i \in \bar{S}_{\max}$ — соответствующий максимальный элемент множества $\bar{S}$.

Рассмотрим теперь произвольный элемент множества $S/_{\tau_0}$ :

$$B_{i_1} \bigcap \ldots \bigcap B_{i_k} = \pi(\bar{s}_{i_1}) \bigcap \ldots \bigcap \pi(\bar{s}_{i_k}) = \Big( \bigcup_{\substack{\bar{s} \leq \bar{s}_{i_1} \\ \bar{s} \in \operatorname{Im}\varphi}} \varphi^{-1}(\bar{s}) \Big) \bigcap \ldots$$

$$\ldots \bigcap \Big( \bigcup_{\substack{\bar{s} \leq \bar{s}_{i_k} \\ \bar{s} \in \operatorname{Im}\varphi}} \varphi^{-1}(\bar{s}) \Big) = \bigcup_{\substack{\bar{s} \leq \bar{s}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{s}_{i_k} \\ \bar{s} \in \operatorname{Im}\varphi}} \varphi^{-1}(\bar{s}) = \pi(\bar{s}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{s}_{i_k}).$$

Это позволяет доопределить $\pi^{-1}$ следующим образом:

$$\pi^{-1}(B_{i_1} \bigcap \ldots \bigcap B_{i_k}) = \pi^{-1}(B_{i_1}) \wedge \ldots \wedge \pi^{-1}(B_{i_k}) = \bar{s}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{s}_{i_k}.$$

По построению очевидно, что $\pi^{-1}\pi(\bar{s}) = \bar{s}$, $\bar{s} \in \bar{S}$.

Таким образом, $\pi$ — *взаимно-однозначное отображение* множества $\bar{S}$ автомата $\bar{A}$ на множество $S/_{\tau_0}$ классов и их непустых пересечений толерантности $\tau_0$ на множестве $S$.

Покажем, что выполняется (23). Пусть $\bar{s}_1, \bar{s}_2 \in \bar{S}$. Импликация $\bar{s}_1 \leq \bar{s}_2 \to \pi(\bar{s}_1) \subseteq \pi(\bar{s}_2)$ следует из (26). Пусть теперь справедливо $\pi(\bar{s}_1) \subseteq \pi(\bar{s}_2)$, т. е. $(\forall\ s \in S)\ (s \in \pi(\bar{s}_1) \to s \in \pi(\bar{s}_2))$. Отсюда согласно (26) $(\forall\ s \in S)\, (\varphi(s) \leq \bar{s}_1 \to \varphi(s) \leq \bar{s}_2)$. Но это означает, что $\bar{s}_1 \leq \bar{s}_2$. Тем самым (23) доказано.

Подобно тому, как это сделано для множества $\bar{S}$ автомата $\bar{A}$, можно построить отображения $\nu : \bar{Y} \to Y/_{\xi_0}$ и $\mu : \bar{X} \to X/_{\rho_0}$ по формулам $\nu(\bar{y}) = \bigcup\limits_{\substack{\bar{y}' \leq \bar{y} \\ \bar{y}' \in \operatorname{Im}\theta}} \theta^{-1}(\bar{y}')$ и $\mu(\bar{x}) = \bigcup\limits_{\substack{\bar{x}' \leq \bar{x} \\ \bar{x}' \in \operatorname{Im}\psi}} \psi^{-1}(\bar{x}')$ и доказать их взаимооднозначность и обратноизотонность.

Докажем теперь (21). Согласно определению функции $\delta'$ (формулы (6))

$$\delta'(\pi(\bar{s}), \mu(\bar{s})) = (\{\delta(s, x)\}_{\substack{s \in \pi(\bar{s}) \\ x \in \mu(\bar{x})}})_{\tau_0}.$$

Из (26) следует

$$(s \in \pi(\bar{s}) \leftrightarrow \varphi(s) \leq \bar{s}) \& (x \in \mu(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(x) \leq \bar{x}). \tag{28}$$

Поскольку $(\varphi, \psi, \theta)$ — $p$-морфизм, то, используя п. 2) теоремы (свойство изотонности функций $\bar{\delta}$ и $\bar{\lambda}$), получаем:

$$(\forall\ s \in \pi(\bar{s}))\, (\forall\ x \in \mu(\bar{x}))\, (\varphi(\delta(s, x)) \leq \bar{\delta}(\varphi(s), \psi(x)) \overset{(28)}{\leq} \bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x})).$$

Но тогда согласно (28) и определению отображения $\pi$ справедливо

$$(\forall\ s \in \pi(\bar{s}))\, (\forall\ x \in \mu(\bar{x}))\, (\delta(s, x) \in \pi(\bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x}))),$$

что равносильно

$$\{\delta(s, x)\}_{\substack{s \in \pi(\bar{s}) \\ x \in \mu(\bar{x})}} \subseteq \pi(\bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x})).$$

Отсюда на основании леммы 1

$$\delta'(\pi(\bar{s}), \mu(\bar{x})) \subseteq \pi(\bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x})), \tag{29}$$

Поскольку, как показано выше, $\pi(\bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x}))$ — класс или пересечение классов толерантности $\tau_0$, поэтому $(\pi(\bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x})))_{\tau_0} = \pi(\bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x}))$.

Покажем теперь обратное включение, т. е.

$$(\forall\ s^0 \in S)\, (s^0 \in \pi(\bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x})) \to s^0 \in \delta'(\pi(\bar{s}), \mu(\bar{x}))).$$

По определению $\pi$

$$s^0 \in \pi(\bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x})) \leftrightarrow \varphi(s^0) \leq \bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x}) \leftrightarrow (\exists\ \bar{s}' \in \operatorname{Im}\varphi)\, (\bar{s}' \leq \bar{\delta}(\bar{s}, \bar{x}) \& s^0 \in \varphi^{-1}(\bar{s}')). \tag{30}$$

Предположим, что $s^0 \notin \delta'(\pi(\bar{s}), \mu(\bar{x}))$.

Из определения $\delta'$ следует

$$s^0 \in \delta'(\pi(\bar{s}), \mu(\bar{x})) \leftrightarrow (\forall\ B_i \in B_{\tau_0})\,(B_i \supseteq \{\delta(s,x)\}_{\substack{s\in\pi(\bar{s})\\ x\in\mu(\bar{x})}} \to s^0 \in B_i).$$

Тогда

$$s^0 \notin \delta'(\pi(\bar{s}), \mu(\bar{x})) \leftrightarrow (\exists\ B_{i_0} \in B_{\tau_0})\,(B_{i_0} \supseteq \{\delta(s,x)\}_{\substack{s\in\pi(\bar{s})\\ x\in\mu(\bar{x})}} \& s^0 \notin B_{i_0}).$$

По построению $B_{\tau_0}$ для $B_{i_0}$ существует элемент $\bar{s}_{i_0} \in \bar{S}_{\max}$ такой, что

$$B_{i_0} = \bigcup_{\substack{\bar{s}'\leq \bar{s}_{i_0}\\ \bar{s}'\in \operatorname{Im}\varphi}} \varphi^{-1}(\bar{s}'),$$

тогда

$$s^0 \notin B_{i_0} \leftrightarrow \neg(\varphi(s^0) \leq \bar{s}_{i_0}). \tag{31}$$

Кроме того,

$$\{\delta(s,x)\}_{\substack{s\in\pi(\bar{s})\\ x\in\mu(\bar{x})}} \subseteq B_{i_0} \leftrightarrow (\forall\ s \in \pi(\bar{s}))\,(\forall\ x \in \mu(\bar{x}))\,(\varphi(\delta(s,x)) \leq \bar{s}_{i_0}) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall\ \varphi(s) \leq \bar{s})\,(\forall\ \psi(x) \leq \bar{x})\,(\varphi(\delta(s,x)) \leq \bar{s}_{i_0}).$$

Отсюда, используя п. 4) теоремы, получаем:

$$\bar{\bar{\delta}}(\bar{s},\bar{x}) = \bigvee_{\substack{s:\varphi(s)\leq\bar{s}\\ x:\varphi(x)\leq\bar{x}}} \varphi(\delta(s,x)) \leq \bar{s}_{i_0}, \quad \text{или} \quad \bar{\bar{\delta}}(\bar{s},\bar{x}) \leq \bar{s}_{i_0}. \tag{32}$$

Объединяя (30) и (32), получаем:

$$\varphi(s^0) \leq \bar{\bar{\delta}}(\bar{s},\bar{x}) \leq \bar{s}_{i_0} \leftrightarrow \varphi(s^0) \leq \bar{s}_{i_0}.$$

Таким образом, получено противоречие с (31). Тем самым доказано включение $\pi(\bar{\bar{\delta}}(\bar{s},\bar{x})) \subseteq$ $\subseteq \delta'(\pi(\bar{s}), \mu(\bar{x}))$, что вместе с (29) доказывает (21).

Равенство (22) доказывается аналогичным образом.

*Необходимость.* Надо показать, что для произвольного толерантного образа автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ выполняются условия 1)–4) теоремы. Для этого в силу изоморфизма достаточно проверить аналогичные свойства для произвольного квазифактор-автомата $A'$ автомата $A$.

Свойство 1) следует из теоремы 2, свойство 2) — из теоремы 3, свойство 3) — из определения квазифактор-автомата. Покажем, что выполняется 4), т. е.

$$\bigcup_{\substack{s:\varphi'(s)\subseteq Q\\ x:\psi'(x)\subseteq G}} \varphi'(\delta(s,x)) = \delta'(Q,G), \tag{33}$$

$$\bigcup_{\substack{s:\varphi'(s)\subseteq Q\\ x:\psi'(x)\subseteq G}} \theta'(\lambda(s,x)) = \lambda'(Q,G), \tag{34}$$

где $\varphi'$, $\psi'$, $\theta'$ определяются (3)–(5) для толерантностей $\tau_0$, $\rho_0$, $\xi_0$, по которым строится квазифактор-автомат $A'$, $Q \in S/_{\tau_0}$, $G \in X/_{\rho_0}$.

Докажем равенство (33) для функции переходов. Согласно (12) теоремы 2 и теореме 3 для любых $s : \varphi'(s) \subseteq Q$ и $x : \psi'(x) \subseteq G$ справедливо

$$\varphi'(\delta(s,x)) \subseteq \delta'(\varphi'(s), \psi'(x)) \subseteq \delta'(Q,G),$$

но тогда

$$\bigcup_{\substack{s:\varphi'(s)\subseteq Q\\ x:\psi'(x)\subseteq G}} \varphi'(\delta(s,x)) \subseteq \delta'(Q,G).$$

Докажем обратное включение. Пусть $s^0 \in \delta'(Q,G)$. Покажем, что

$$s^0 \in \bigcup_{\substack{s:\varphi'(s)\subseteq Q\\ x:\psi'(x)\subseteq G}} \varphi'(\delta(s,x))$$

методом от противного. Предположим, что $s^0 \notin \bigcup_{\substack{s:\varphi'(s)\subseteq Q\\ x:\psi'(x)\subseteq G}} \varphi'(\delta(s,x))$, тогда по определению функции $\varphi'$ отсюда следует

$$s^0 \notin \bigcup_{\substack{s:\varphi'(s)\subseteq Q\\ x:\psi'(x)\subseteq G}} \bigcap\{B_i|\delta(s,x)\in B_i\} = \bigcup_{\substack{s\in Q\\ x\in G}} \bigcap\{B_i|\delta(s,x)\in B_i\}.$$

Используя свойство дистрибутивности операции объединения относительно операции пересечения множеств, получим:

$$s^0 \notin \bigcap \bigcup_{\substack{s\in Q\\ x\in G}} \{B_i \mid \delta(s,x)\in B_i\} = \bigcap\{B_i \mid B_i \supseteq \{\delta(s,x)\}_{\substack{s\in Q\\ x\in G}}\}.$$

Или по определению функции $\delta'$ $s^0 \notin \delta'(Q,G)$. Мы получили противоречие условию. Тем самым (33) доказано полностью.

Равенство (34) доказывается аналогично. Теорема доказана.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В [1] показано, что понятие морфизма по толерантности является естественным обобщением понятия гомоморфизма. Теоремы 4–6 показывают, что морфизм по толерантности, в свою очередь, является частным видом $p$-морфизма, а именно такого, для которого выполняются условия 2)–4) теоремы 6. Однако морфизм по толерантности обладает таким несомненным достоинством, как конструктивность, и, следовательно, если возникает необходимость для заданного автомата в построении $p$-морфизма, то дает пример такого построения.

### Библиографический список

1. *Мангушева И. П.* Морфизмы по стабильным толерантностям конечных автоматов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, вып. 4. С. 80–90.
2. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М. : Наука, 1997. 368 с.
3. *Карпов Ю. Г.* Теория автоматов. СПб. : Питер, 2003. 208 с.

## Ordered Automata and Tolerant Images of FDA

**I. P. Mangusheva**

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya str., 83, MangushevaIP@info.sgu.ru

Finite deterministic automaton (FDA) with partially ordered (an ordered automaton) sets of states, input and output symbols is described in the article. The mapping of FDA on an ordered automaton, which is named «$p$-morphism» is defined. It is shown that so called tolerant images, which are constructed with the help of compatible tolerances on the set of states of FDA, are particular case of ordered automata, which are connected with the original automaton by a $p$-morphism. Necessary and sufficient conditions are defined, under which an ordered automaton is a tolerant image of the original one.

*Key words:* finite deterministic automaton, tolerant image, ordered automaton, compatible tolerance, covering, partial order.

### References

1. Mangusheva I. P. Morphismes based on compatible tolerances of finite automata. *Izv. Sarat. Universiteta. N. S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2008, vol. 8, iss. 4, pp. 80–90 (in Russian).
2. Bogomolov A. M., Saliy V. N. *Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem* [Algebraic foundations of the theory of discrete systems]. Moscow, Nauka, 1997. 368 p. (in Russian).
3. Karpov U. G. *Teoriia avtomatov* [Automata theory]. St. Petersburg, Piter, 2003, 208 p. (in Russian).