он содержит конечное подмножество экспериментов, соответствующих τ-неприводимым максимально различающим словам. Так как число таких элементов в τ-неприводимом тупиковом эксперименте из $C(A)$ конечно, то и всех идентифицирующих следов для заданного автомата A также конечно.

Таким образом, если в качестве «не избыточных» следов из $C(A)$ рассматривать τ-неприводимые тупиковые следы из $C(A)$, то в $C(A)$ существует конечное множество таких следов.

Библиографический список

1. *Льюинг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя : пер. с англ. М. : Наука, 1991. 432 с.
2. *Богомолов С. А.* О синтезе автоматов по конечному множеству экспериментов // ДАН СССР. 1985. Т. 281, № 1. С. 20–22.
3. *Богомолов С. А.* О восстановлении автомата по экспериментам // Дискретная математика. 1989. Т. 1, № 1. С. 135–146.
4. *Гилл А.* Введение в теорию конечных автоматов. М. : Наука, 1966. 272 с.
5. *Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С.* Элементы теории автоматов. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. 216 с.
6. *Мур Э. Ф.* Умозрительные эксперименты с последовательностными машинами // Автоматы / под ред. К. Э. Шеннона, Дж. Маккарти. М. : Изд-во иностр. лит., 1956. С. 179–210.

Identification of a State Machine Structure with Finites Fragment of Behavior

S. A. Bogomolov

Saratov State Socio-Economic University, Russia, 410003, Saratov, Radishcheva st., 89, Alexbogomolov@ya.ru

Identification of a state machine structure with finite fragments of behavior is discussed. The state machine behavior is a set of various finite-sequential (f.-s.) functions realized in a state machine, and under a finite fragment of behavior we mean traces of f.-s. functions and state machines. The concept of an identifying trace for a state machine irredundant over its realization is introduced. The approach is suggested that enables to separate and descript in the set of traces identifying a state machine the finite set of irredundant traces consisting of only essential information for identification of a state machine.

Key words: state machine, experiments with a state machine, subexperiment of experiment, trace of f.-s. function and state machine, identifying trace of state machine, operation of trace reduction, irredundant identifying trace of state machine.

References

1. Ljung L. *System Identification : Theory for the User*. University of Linkoping Sweden, 1987. 432 p.
2. Bogomolov S. A. On the synthesis of automata from a finite set experiments. *Dokl. Acad. Sci. USSR*, 1985, vol. 281, no. 1, pp. 20–22.
3. Bogomolov S. A. Reconstruction of an automaton from experiments. *Discrete Mathematics and Applications*, 1991, vol. 1, no 2, pp. 117–128.
4. Gill A. *Introduction to the Theory of Finite-state Machines*. McGraw-Hill, 1962. 272 pp.
5. Kudryavtsev V. B., Aleshin S. V., Podkolzin A. S. *Elementy teorii avtomatov* [Topics of Automata Theory]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1978. 216 pp. (in Russian).
6. Moor E. F. *Speculative experiments with sequential machines*. In Automata Studies, eds. C. E. Shennon, J. McCarthy. Princeton, Princeton Univ. Press, 1956, pp. 129–153.

УДК 519.872

СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ ТРЕБОВАНИЙ, БЛОКИРОВКАМИ И КЛАСТЕРАМИ

Ю. И. Митрофанов[1], В. И. Долгов[2], Е. С. Рогачко[3], Е. П. Станкевич[4]

[1]Доктор технических наук, заведующий кафедрой системного анализа и автоматического управления, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, MitrophanovYuI@info.sgu.ru

[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и автоматического управления, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, www@vidolgov.ru

[3]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и автоматического управления, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, RogachkoES@info.sgu.ru

[4]Старший преподаватель кафедры системного анализа и автоматического управления, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, StankevichElena@mail.ru

© Митрофанов Ю. И., Долгов В. И., Рогачко Е. С., Станкевич Е. П., 2013

Исследуется два типа сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований — сети с блокировками и сети с кластерами. Получено стационарное распределение в мультипликативной форме для сетей с блокировками переходов в состояния, в которых число требований в системах превышает заданные ограничения. Для сетей обслуживания с непересекающимися кластерами систем решается задача анализа и находится стационарное распределение в мультипликативной форме. Приводятся примеры анализа сети с блокировками и сети с кластерами.

Ключевые слова: сети массового обслуживания, групповые переходы требований, блокировки, кластеры, анализ сетей массового обслуживания.

ВВЕДЕНИЕ

Сети массового обслуживания с блокировками относятся к классу сетей, в которых переходы требований между системами зависят от ограничений, наложенных на значения некоторых параметров сетей. Часто в таких сетях ограничивается число мест для ожидания в очередях систем обслуживания, входящих в состав сетей. В сетях с такими ограничениями при отсутствии в некоторой системе свободных мест для ожидания в очереди поступление требований в эту систему из других систем и внешнего источника требований прекращается. Обзор различных способов блокировки и методов вычисления стационарного распределения в мультипликативной форме сетей массового обслуживания с блокировками дан в [1].

Возможность блокировки переходов требований в сетях существенно затрудняет анализ сетей этого класса точными методами. Поэтому значительное внимание уделяется развитию и разработке приближенных методов анализа [2–6], включающих, в частности, весьма эффективные методы анализа, основанные на использовании методов декомпозиции и агрегирования.

Значительный интерес в теоретическом и прикладном отношении представляет класс сетей массового обслуживания, в которых системы массового обслуживания разделены на группы — кластеры. Достаточно полное представление о задачах, возникающих при анализе таких сетей, и методах их решения, дают, например, работы [7–9].

В настоящее время в качестве математических моделей коммуникационных и вычислительных систем и сетей широко используются сети массового обслуживания с групповыми переходами требований и групповым обслуживанием. Особую важность в этом отношении представляет класс сетей массового обслуживания, стационарное распределение которых имеет мультипликативную форму, так как стационарные характеристики сетей этого класса могут быть вычислены достаточно просто. Теория и методы анализа сетей обслуживания этого класса интенсивно развиваются последние два десятилетия. Опубликованные в работах [10, 11] результаты о мультипликативной форме стационарного распределения и предложенный в [10] метод анализа неоднородных сетей массового обслуживания с непрерывным и дискретным временем, групповыми переходами и групповым обслуживанием требований получили дальнейшее развитие в [12, 13]. Значительное внимание в работах [12, 13] уделяется рассмотрению способов блокировки переходов групп требований в сетях и методов анализа сетей обслуживания с блокировками и кластерами.

Как правило, результаты теоретических исследований сетей массового обслуживания с непрерывным и дискретным временем, групповыми переходами и групповым обслуживанием существенно расширяют возможности разработки эффективных методов анализа сетей обслуживания этого класса; в качестве примера можно привести работы [14–16]. Как показано в [14], для сетей массового обслуживания с групповыми переходами и блокировками, обусловленными ограничениями на число требований в системах массового обслуживания, стационарное распределение в мультипликативной форме существует, если только отменять переход всей группы в случае невозможности хотя бы одного требования из группы осуществить требуемый переход и в соответствии с алгоритмом маршрутизации повторно определять системы обслуживания, в которые должны быть направлены требования данной группы. В работе [15] для сетей массового обслуживания с групповыми переходами и групповым обслуживанием вводится понятие структурной обратимости, использование которого упрощает вывод уравнений трафика. Методы агрегирования и декомпозиции, основанные на использовании теоремы Нортона для сетей массового обслуживания, могут применяться, как показано в работе [16], для широкого класса сетей массового обслуживания с групповыми переходами и мультипликативной формой стационарного распределения.

В данной статье рассматриваются замкнутые однородные сети массового обслуживания с непрерывным временем и групповыми переходами; приводятся описание, модель эволюции и мультипликативная форма стационарного распределения сетей. Исследуются сети этого класса двух типов — сети с блокировками и сети с кластерами, при этом используются результаты работ [13, 17]. Для сетей с блокировками переходов сети в состояния, в которых число требований в системах превышает заданные ограничения, получено стационарное распределение в мультипликативной форме. Для сети с непересекающимися кластерами решается задача управления потоками. Целью управления является обеспечение такого распределения требований между кластерами сети, при котором число требований в определенном кластере существенно не превосходило бы некоторого заданного числа. Управление реализуется посредством изменения интенсивностей обслуживания в других кластерах. Получено стационарное распределение в мультипликативной форме сетей обслуживания с кластерами.

1. СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С БЛОКИРОВКАМИ

Пусть замкнутая сеть массового обслуживания N^e с непрерывным временем и групповыми переходами содержит L систем массового обслуживания S_i, $i = 1, \dots, L$, и H требований одного класса. Предположим, что в сети N^e возможны блокировки переходов между системами групп требований. Переходы требований между системами определяются маршрутной матрицей $\Theta = (\theta_{ij})$, $i, j = 1, \dots, L$, где θ_{ij} — вероятность того, что требование после обслуживания в системе S_i поступает в систему S_j; при групповых переходах требований в сети реализована независимая маршрутизация требований. Система S_i, $i = 1, \dots, L$, включает H одинаковых обслуживающих приборов. Длительность обслуживания требований в системе S_i имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_i, $0 < \mu_i < 1$, $i = 1, \dots, L$ (данные ограничения на значения μ_i не влияют на общность полученных результатов); производится одновременное обслуживание всех пребывающих в системе требований; случайное число требований, обслуживание которых завершается одновременно в системе S_i, имеет биномиальное распределение с параметром μ_i. Состояние сети N^e определяется вектором $s = (s_i)$, $i = 1, \dots, L$, где s_i — число требований, находящихся в системе S_i. Множество состояний сети обозначим через X. Изменение состояния сети происходит вследствие переходов между системами групп требований.

При переходе сети из состояния s в состояние s', обусловленного тем, что d_i требований покинули систему S_i, d'_i требований поступили в систему S_i и b_i требований оставались в системе S_i, $s = b + d$ и $s' = b + d'$, где $b = (b_i)$, $i = 1, \dots, L$, — вектор оставшихся требований, а $d = (d_i)$ и $d' = (d'_i)$ — векторы, представляющие соответственно уходящие и поступающие требования. Векторы d и d' назовем векторами перемещений, а множество всех векторов перемещений обозначим как D. Интенсивность частного перехода сети между состояниями s и s' обозначим через $q_{dd',b}$. Алгоритм перехода сети N^e из состояния s в состояние s' более подробно описан в работе [17].

Обозначим через $q_{ss'}$, $s, s' \in X$, интенсивность перехода сети из состояния s в состояние s', а через $\pi = (\pi_s)$, $s \in X$, — стационарное распределение сети.

Интенсивность перехода из состояния s в состояние s' определяется выражением

$$q_{ss'} = \sum_{\{d,d',b:\ b+d=s,\ b+d'=s'\}} q_{dd',b}. \tag{1}$$

Так как распределение π является стационарным, для всех $s, s' \in X$ удовлетворяются уравнения глобального равновесия:

$$\pi_s \sum_{s' \neq s} q_{ss'} = \sum_{s' \neq s} \pi_{s'} q_{s's}. \tag{2}$$

Подставляя (1) в (2) и меняя порядок суммирования, получим, что распределение π является стационарным, если для всех $s, s' \in X$

$$\pi_s \sum_{\{d,b: b+d=s\}} \sum_{d' \neq d} q_{dd',b} = \sum_{\{d,b: b+d=s\}} \sum_{d' \neq d} \pi_{b+d'} q_{d'd,b}.$$

Эволюция сети N^e может быть описана эргодической цепью Маркова $\hat{\nu}$ с непрерывным временем, конечным множеством состояний X и стационарным распределением π.

Пусть для фиксированного b X_b является множеством состояний цепи Маркова $\hat{\nu}$, которому соответствует множество $D_b \subset D$ векторов перемещений $d \in D_b$, и пусть $X_{b,m}$, $m = 1, \ldots, h_b$, — неприводимые множества в X_b по отношению к цепи Маркова $\hat{\nu}$. Назовем X_b локальным множеством состояний, а $X_{b,m}$ — локальными подмножествами. Заметим, что состояние s может быть элементом различных локальных множеств X_b. Это делает возможным переходы из одного локального множества состояний в другое, так как в общем случае для $b \neq b'$ имеем $X_b \cap X_{b'} \neq \emptyset$.

Для сети N^e интенсивности перехода $q_{dd',b}$ могут быть представлены в виде произведения двух функций:

$$q_{dd',b} = u_{d,b+d} v_{dd',b}.$$

Здесь функция $u_{(\cdot)}$ отображает характеристики обслуживания, т. е. дисциплины и интенсивности обслуживания в системах, а функция $v_{(\cdot)}$ — характеристики маршрутизации, т. е. маршрутные вероятности и вероятности блокировки переходов требований между системами обслуживания; обе функции заданы с точностью до постоянного множителя. Функция $u_{(\cdot)}$ может быть выражена через произвольные заданные функции $\Psi_{(\cdot)}$ и $\Phi_{(\cdot)}$ в следующем виде [13]:

$$u_{d,s} = \frac{\Psi_{s-d}}{\Phi_s}, \tag{3}$$

где функция $\Phi_{(\cdot)}$ предполагается строго положительной на X, а функция $\Psi_{(\cdot)}$ — неотрицательной. Функция, отображающая характеристики обслуживания, также может быть представлена в виде $u^*_{d,s} = \Psi_{s-d}/\Phi_s \epsilon_d$, где $\epsilon_d = \prod\limits_{i=1}^{L} d_i!$. В этом случае $v^*_{dd',b} = v_{dd',b}\epsilon_d$ и $q_{dd',b} = u^*_{d,b+d} v^*_{dd',b}$.

Предположим, что для любого фиксированного b, для которого $X_b \neq \emptyset$, $X_b = \bigcup_{m=1}^{h_b} X_{b,m}$ и $m \in \{1, \ldots, h_b\}$, система уравнений

$$y_{d,b} \sum_{d' \neq d} v_{dd',b} = \sum_{d' \neq d} y_{d',b} v_{d'd,b}, \qquad b + d \in X_{b,m}, \tag{4}$$

имеет единственное положительное решение $\{y_{d,b} | \, b + d \in X_{b,m}\}$, с точностью до постоянного множителя.

Определим на множестве X цепь Маркова $\hat{\chi}$ с интенсивностями перехода w, которые удовлетворяют следующим соотношениям: для любых b, $m = 1, \ldots, h_b$ и $b + d, b + d' \in X_{b,m}$ $\dfrac{w_{dd',b}}{w_{d'd,b}} = \dfrac{y_{d',b}}{y_{d,b}}$, иначе $w_{dd',b} = 0$.

Обозначим через $\sigma = (\sigma_s)$, $s \in X$, стационарное распределение цепи $\hat{\chi}$, тогда [13]

$$\pi_s = G \Phi_s \sigma_s, \qquad s \in X, \tag{5}$$

где G — нормализующая константа.

Предположим, что функция $u_{(\cdot)}$ имеет мультипликативную форму, в которой каждый множитель $u_{i,(\cdot)}$ связан с соответствующей системой массового обслуживания S_i, тогда

$$u_{d,s} = \prod_{i=1}^{L} u_{i,(d_i,s_i)} = \prod_{i=1}^{L} \frac{\Psi_{i,(s_i-d_i)}}{\Phi_{i,s_i}}.$$

Здесь функция $u_{i,(\cdot)}$ отображает характеристики обслуживания в системе S_i, когда в системе производится обслуживание всей группы требований. Учитывая, что $u_{i,(d_i,s_i)} = u^*_{i,(d_i,s_i)} d_i!$, и

$$u^*_{i,(d_i,s_i)} = \binom{s_i}{d_i} \mu_i^{d_i} (1 - \mu_i)^{s_i - d_i},$$

функция $u_{d,s}$ удовлетворяет (3), если положить

$$\Psi_{s-d} = \prod_{i=1}^{L} \frac{1}{(s_i - d_i)!} \left(\frac{1 - \mu_i}{\mu_i} \right)^{s_i - d_i},$$

$$\Phi_s = \prod_{i=1}^{L} \frac{1}{s_i!} \left(\frac{1}{\mu_i}\right)^{s_i}. \tag{6}$$

Предположим, что для сети N^e функция $\upsilon_{dd',b}$ имеет вид

$$\upsilon_{dd',b} = \upsilon_{dd'} \kappa_{dd',b}, \tag{7}$$

где $\upsilon_{(\cdot)}$ — маршрутные вероятности переходов между системами групп требований, $\kappa_{(\cdot)}$ — функция блокировки [13].

Положим $\kappa_{dd',b} = 1$ для всех d, d' и b, т. е. блокировок переходов групп требований в сети N^e не происходит, и пусть существует положительное решение y_d уравнений группового трафика:

$$y_d \sum_{d' \neq d} \upsilon_{dd'} = \sum_{d' \neq d} y_{d'} \upsilon_{d'd}. \tag{8}$$

Тогда для всех b таких, что $b + d \in X$, решением системы (4) является $y_{d,b} = y_d$. Если существует функция $\Gamma_{(\cdot)}$ такая, что для всех b, m и всех $b + d, b + d' \in X_{b,m}$

$$\frac{\Gamma_{b+d}}{\Gamma_{b+d'}} = \frac{y_{d,b}}{y_{d',b}}, \tag{9}$$

то $\sigma_{(\cdot)}$ в выражении (5) определяется равенством [13] $\sigma_s = \Gamma_s$, $s \in X$.

При $\kappa_{dd',b} = 1$ для всех d, d' и b, т. е. при отсутствии блокировок переходов групп требований, и независимой маршрутизации требований в сети N^e маршрутные вероятности переходов групп требований имеют вид

$$\upsilon_{dd'} = \sum_{d_{ij} \in A} \prod_{i=1}^{L} \binom{d_i}{d_{i1}, \ldots, d_{iL}} \prod_{j=1}^{L} \theta_{ij}^{d_{ij}}, \tag{10}$$

где $A = \left\{ d_{ij},\ i,j = 1, \ldots, L:\ d_{ij} \geq 0,\ d_{ij} = 0,\ \text{если}\ \theta_{ij} = 0,\ \sum\limits_{j=1}^{L} d_{ij} = d_i,\ \sum\limits_{i=1}^{L} d_{ij} = d'_j \right\}$, d_{ij} представляет число требований, осуществляющих переход из системы S_i в систему S_j. Здесь учитываются все возможные переходы требований между системами обслуживания в сети.

Если существует положительное решение ω_j, $j = 1, \ldots, L$, маршрутных уравнений $\omega_j = \sum\limits_{i=1}^{L} \omega_i \theta_{ij}$, то решением уравнений группового трафика (8) является

$$y_d = \prod_{i=1}^{L} \omega_i^{d_i}, \tag{11}$$

и функция $\Gamma_{b+d} = \prod\limits_{i=1}^{L} \omega_i^{b_i + d_i}$ удовлетворяет (9). Вероятности $\sigma_{(\cdot)}$, входящие в (5), тогда определяются выражением $\sigma_s = \prod\limits_{i=1}^{L} \omega_i^{s_i}$, $s \in X$.

Теперь предположим, что для некоторых d, d' и b функция $\kappa_{dd',b} \neq 1$, т. е. в сети N^e возможны блокировки переходов групп требований.

Метод блокировки переходов в сети N^e включает действия по проверке условий возможности перехода сформированных групп требований между системами и действия по восстановлению состояния, в котором пребывала сеть до формирования групп требований. Как правило, в случае невыполнения условий перехода все требования, завершившие обслуживание в некоторых системах и готовые перейти в другие системы, возвращаются в свои исходные системы и начинают обслуживаться повторно.

Переход сети N^e из состояния s в состояние s' обусловлен тем, что из требований, завершивших обслуживание в некоторых системах и входящих в определенные вектором d группы, алгоритмом маршрутизации были сформированы представляющие компоненты вектора d' группы требований, поступивших в соответствующие системы. Поэтому реализация блокировки переходов групп требований в сети возможна или запрещением формирования векторов перемещений d некоторых типов, или запрещением формирования для векторов перемещений d некоторых типов соответствующих векторов d', или запрещением поступления требований, определенных векторами перемещений d' некоторых типов, в соответствующие системы обслуживания. В первом случае для запрещения формирования, например вектора перемещения $\tilde{d}$, очевидно, должна быть равна нулю интенсивность формирования $\tilde{d}$ при пребывании сети в состоянии s. Во втором случае должны быть равны нулю соответствующие интенсивности $q_{\tilde{d}d',b}$, а в третьем случае должно быть запрещено поступление в соответствующие системы требований, определенных вектором d', сформированным из вектора $\tilde{d}$. Например, если для заданного $\tilde{d}$ положить $q_{\tilde{d}d',b} = q_{d'\tilde{d},b} = 0$ для всех d, d', b, то определенным вектором $\tilde{d}$ группам требований запрещается принимать участие в переходах. Если для заданного числа, например K, положить $q_{dd',b} = 0$, когда $\sum\limits_{i=1}^{L} d_i = K$ или $\sum\limits_{i=1}^{L} d'_i = K$, то запрещаются переходы групп требований, когда общее число уходящих и/или поступающих требований равно K.

Рассмотрим случай, когда для каждой системы массового обслуживания задано максимальное число требований, которым разрешено находиться в системе, например, для системы S_i должно быть $s_i \le M_i$, $1 \le i \le L$; при этом функция $\upsilon_{dd',b}$ имеет вид (7), где $\kappa_{dd',b} = \mathbf{1}(b + d' \le M)$. Здесь $M = (M_i)$, $i = 1, \ldots, L$, а $\mathbf{1}(A)$ обозначает индикатор события A, т. е. $\mathbf{1}(A) = 1$, если событие A происходит и $\mathbf{1}(A) = 0$ в противном случае. Таким образом, проверка условия возможности перехода групп требований производится для всех систем, но в случае невыполнения этого условия хотя бы для одной системы обслуживания запрещаются переходы всех групп уходящих требований, требования возвращаются в свои исходные системы и начинают обслуживаться повторно.

При независимой маршрутизации требований в сети N^e с блокировками переходов требований маршрутные вероятности $\upsilon_{(\cdot)}$ имеют вид (10).

Предположим, что групповая маршрутизация является обратимой, т. е. решение $y_{(\cdot)}$ системы уравнений группового трафика (8) удовлетворяет равенству $y_d \upsilon_{dd'} = y_{d'} \upsilon_{d'd}$. Тогда

$$y_{d,b} = y_d \mathbf{1}(b + d \le M) \tag{12}$$

является решением системы (4), и с функцией $\Gamma_{(\cdot)}$, удовлетворяющей равенству (9), σ_s в выражении (5) определяется равенством

$$\sigma_s = \Gamma_s, \qquad s \le M. \tag{13}$$

Теорема 1. *Для сети N^e с блокировками стационарные вероятности состояний имеют вид*

$$\pi_s = \prod_{i=1}^{L} \frac{1}{s_i!} \left(\frac{\omega_i}{\mu_i}\right)^{s_i} \mathbf{1}(s_i \le M_i) \Bigg/ \sum_{\substack{s: s \in X \\ \& s \le M}} \prod_{i=1}^{L} \frac{1}{s_i!} \left(\frac{\omega_i}{\mu_i}\right)^{s_i}, \qquad s \in X.$$

Доказательство. Подставляя (11) в (12), имеем:

$$y_{d,b} = \prod_{i=1}^{L} \omega_i^{d_i} \mathbf{1}(b_i + d_i \le M_i).$$

Учитывая, что $s = b + d$ и $s' = b + d'$, получим:

$$\frac{y_{d,b}}{y_{d',b}} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{L} \omega_i^{d_i} \mathbf{1}(b_i + d_i \le M_i)}{\prod\limits_{i=1}^{L} \omega_i^{d'_i} \mathbf{1}(b_i + d'_i \le M_i)} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{L} \omega_i^{s_i - b_i} \mathbf{1}(s_i \le M_i)}{\prod\limits_{i=1}^{L} \omega_i^{s'_i - b_i} \mathbf{1}(s'_i \le M_i)} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{L} \omega_i^{s_i} \mathbf{1}(s_i \le M_i)}{\prod\limits_{i=1}^{L} \omega_i^{s'_i} \mathbf{1}(s'_i \le M_i)}.$$

Тогда из отношения (9) следует, что

$$\Gamma_s = \prod_{i=1}^{L} \omega_i^{s_i} \mathbf{1}(s_i \le M_i).$$

С учетом выражений (6), (13) и (5) получим:

$$\pi_s = G \prod_{i=1}^{L} \frac{1}{s_i!} \left(\frac{\omega_i}{\mu_i}\right)^{s_i} \mathbf{1}(s_i \le M_i), \qquad s \in X,$$

где

$$G = \left(\sum_{\substack{s: s\in X \\ \& s \le M}} \prod_{i=1}^{L} \frac{1}{s_i!} \left(\frac{\omega_i}{\mu_i}\right)^{s_i} \right)^{-1}. \qquad \square$$

2. СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С КЛАСТЕРАМИ

Рассмотрим сеть массового обслуживания N^c с групповыми переходами требований. Сеть содержит L систем массового обслуживания S_i, $i = 1, \ldots, L$, и H требований одного класса. Вероятности перехода требований между системами сети определяются маршрутной матрицей $\Theta = (\theta_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, L$. Система S_i, $i = 1, \ldots, L$, включает H одинаковых обслуживающих приборов. Системы обслуживания принадлежат одному из R непересекающихся кластеров (групп систем). С каждым из кластеров N_r^c, $r = 1, \ldots, R$, связано множество C_r номеров систем. Интенсивности обслуживания в системах одного кластера одинаковы и равны $\hat{\mu}_r$, $0 < \hat{\mu}_r < 1$, $r = 1, \ldots, R$ (данные ограничения на значения $\hat{\mu}_r$ не влияют на общность полученных результатов). Длительность обслуживания требований в системе S_i, $i \in C_r$, имеет экспоненциальное распределение с параметром $\hat{\mu}_r$. Состояние сети N^c определяется вектором $s = (s_i)$, $i = 1, \ldots, L$, где s_i — число требований, находящихся в системе S_i; X — множество состояний сети.

Обозначим через $n(s) = (n_r(s))$, $r = 1, \ldots, R$, вектор числа требований, находящихся в кластерах; а через $m(d) = (m_r(d))$ — вектор числа требований, уходящих из кластеров, т. е.

$$n_r(s) = \sum_{i\in C_r} s_i, \qquad m_r(d) = \sum_{i \in C_r} d_i.$$

Вектор $n(s)$ определяет способ распределения H требований между R кластерами при пребывании сети N^c в состоянии s. Пусть Q — общее число способов распределения H требований между R кластерами. Вектор $n^{(q)} = (n_r^{(q)})$, $r = 1, \ldots, R$, $q \in \{1, \ldots, Q\}$, где $n_r^{(q)}$ — число требований в кластере N_r^c при q-м способе распределения требований, назовем макросостоянием сети N^c; число макросостояний сети N^c равно Q. Макросостоянию $n^{(q)}$ соответствует множество состояний X_q, т. е. $n(s) = n^{(q)}$ для всех $s \in X_q$. Очевидно, $X = \bigcup_{q=1}^{Q} X_q$.

Сеть N^c может рассматриваться как частный случай сети N^e, когда отсутствуют блокировки переходов групп требований, т. е. $\kappa_{dd',b} = 1$ для всех d, d' и b, и $\mu_i = \hat{\mu}_r$, $i \in C_r$, $r = 1, \ldots, R$. Таким образом, для сети N^c функция $u^*_{d,s}$ может быть найдена из выражения, полученного для сети N^e:

$$u^*_{d,s} = \prod_{r=1}^{R} \prod_{i\in C_r} \binom{s_i}{d_i} \hat{\mu}_r^{m_r(d)} (1-\hat{\mu}_r)^{n_r(s)-m_r(d)}.$$

Тогда функция $u_{d,s}$ удовлетворяет (3), если положить

$$\Psi_{s-d} = \prod_{r=1}^{R} \prod_{i\in C_r} \frac{1}{(s_i-d_i)!} \left(\frac{1-\hat{\mu}_r}{\hat{\mu}_r}\right)^{n_r(s)-m_r(d)}, \tag{14}$$

$$\Phi_s = \prod_{r=1}^{R} \prod_{i\in C_r} \frac{1}{s_i!} \left(\frac{1}{\hat{\mu}_r}\right)^{n_r(s)}. \tag{15}$$

Теорема 2. *Для сети N^c стационарные вероятности состояний имеют вид*

$$\pi_s = \frac{1}{G} \prod_{r=1}^{R} \left(\frac{1}{\hat{\mu}_r}\right)^{n_r(s)} \prod_{i\in C_r} \frac{\omega_i^{s_i}}{s_i!}, \qquad s \in X, \tag{16}$$

где

$$G = \sum_{s\in X} \prod_{r=1}^{R} \left(\frac{1}{\hat{\mu}_r}\right)^{n_r(s)} \prod_{i\in C_r} \frac{\omega_i^{s_i}}{s_i!}.$$

Доказательство. Так как в сети N^c маршрутизация требований такая же, как и в сети N^e, без блокировок переходов групп требований, имеем $\sigma_s = \prod_{i=1}^{L} \omega_i^{s_i}$, $s \in X$, или

$$\sigma_s = \prod_{r=1}^{R} \prod_{i \in C_r} \omega_i^{s_i}, \qquad s \in X. \tag{17}$$

Подставляя (15) и (17) в (5), получим (16), где G — нормализующая константа. □

Математическое ожидание (м. о.) числа требований $\bar{s}_i$ в системе S_i, $i = 1, \ldots, L$, вычисляется по формуле

$$\bar{s}_i = \sum_{k=1}^{H} k \sum_{\substack{s:\, s \in X \\ \& s_i = k}} \pi_s.$$

Для кластера N_r^c, $r = 1, \ldots, R$, м. о. числа требований $\bar{n}_r = \sum_{i \in C_r} \bar{s}_i$.

Предположим, что требуется, чтобы число требований в кластере N_1^c существенно не превосходило некоторого фиксированного числа $\hat{M}_1$. Этого можно достичь замедлением обслуживания в других кластерах посредством использования множителя α_r в кластере N_r^c, $r = 2, \ldots, R$, когда $n_1(s) > \hat{M}_1$, $s \in X$. Таким образом, получим обслуживание в сети, учитывающее взаимную зависимость кластеров [13]. Тогда

$$u_{d,s} = \begin{cases} \dfrac{\Psi_{s-d}}{\Phi_s}, & n_1(s) \le \hat{M}_1, \\ \dfrac{\Psi_{s-d}}{\Phi_s \prod_{r=2}^{R} \alpha_r}, & n_1(s) > \hat{M}_1, \end{cases}$$

функция Ψ_{s-d} определяется выражением (14), а функция Φ_s имеет вид

$$\Phi_s = \left[\prod_{r=2}^{R} \alpha_r - \left(\prod_{r=2}^{R} \alpha_r - 1\right) \mathbf{1}(n_1(s) \le \hat{M}_1)\right] \prod_{r=1}^{R} \prod_{i \in C_r} \frac{1}{s_i!} \left(\frac{1}{\hat{\mu}_r}\right)^{n_r(s)}. \tag{18}$$

Теорема 3. *Для сети N^c с взаимозависимыми кластерами, если требуется, чтобы $n_1(s) \le \hat{M}_1$, стационарные вероятности состояний имеют вид*

$$\pi_s = \frac{1}{G} \left[\prod_{r=2}^{R} \alpha_r - \left(\prod_{r=2}^{R} \alpha_r - 1\right) \mathbf{1}(n_1(s) \le \hat{M}_1)\right] \prod_{r=1}^{R} \left(\frac{1}{\hat{\mu}_r}\right)^{n_r(s)} \prod_{i \in C_r} \frac{\omega_i^{s_i}}{s_i!}, \qquad s \in X,$$

где

$$G = \sum_{s \in X} \left[\prod_{r=2}^{R} \alpha_r - \left(\prod_{r=2}^{R} \alpha_r - 1\right) \mathbf{1}(n_1(s) \le \hat{M}_1)\right] \prod_{r=1}^{R} \left(\frac{1}{\hat{\mu}_r}\right)^{n_r(s)} \prod_{i \in C_r} \frac{\omega_i^{s_i}}{s_i!}.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2 при замене выражения (15) на (18). □

3. ПРИМЕРЫ

Пример 1 (сеть с блокировками). Рассмотрим сеть массового обслуживания N^e с параметрами: $L = 4$, $H = 10$, $\mu = (0,4; 0,3; 0,1; 0,2)$,

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,4 & 0 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Для сети N^e при различных значениях вектора M вычислим стационарные вероятности состояний сети и м. о. числа требований в системах $\bar{s} = (\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3, \bar{s}_4)$. Для сети без блокировок, т. е. когда $M = (10, 10, 10, 10)$, $\bar{s} = (0,938; 1,512; 5,614; 1,936)$. Для сети с блокировками при векторе ограничений $M = (6, 6, 6, 6)$ имеем $\bar{s} = (1,104; 1,777; 4,847; 2,272)$, при $M = (5, 5, 5, 5)$ $\bar{s} = (1,243; 1,987; 4,264; 2,506)$, а при $M = (4, 4, 4, 4)$ $\bar{s} = (1,495; 2,259; 3,592; 2,654)$. Из приведенных результатов видно, что при уменьшении значений компонент вектора M во всех случаях выполняется условие $\bar{s} < M$, что объясняется увеличением стационарных вероятностей пребывания сети N^e в состояниях, удовлетворяющих ограничению $s \leq M$, за счет блокировки переходов сети в такие состояния, когда $s > M$. Метод блокировки может использоваться для перераспределения требований между системами обслуживания в сети N^e. Например, чтобы уменьшить $\bar{s}_3$, которое в сети без блокировок существенно превосходит м. о. числа требований в остальных системах, наложим соответствующее ограничение: если $M = (10, 10, 5, 10)$, то $\bar{s} = (1,232; 1,985; 4,240; 2,543)$; если $M = (10, 10, 4, 10)$, то $\bar{s} = (1,388; 2,236; 3,511; 2,865)$; если $M = (10, 10, 3, 10)$, то $\bar{s} = (1,562; 2,516; 2,698; 3,224)$.

Пример 2 (сеть с кластерами). Рассмотрим сеть массового обслуживания N^c, состоящую из $R = 2$ кластеров N_1^c и N_2^c, с параметрами: $L = 4$, $H = 4$, $C_1 = \{1, 2\}$, $C_2 = \{3, 4\}$, $\hat{\mu} = (0,1; 0,9)$, матрица Θ имеет вид (19).

Определим макросостояния сети: $n^{(1)} = (2, 2)$, $n^{(2)} = (3, 1)$, $n^{(3)} = (1, 3)$, $n^{(4)} = (4, 0)$, $n^{(5)} = (0, 4)$. По формуле $\pi_{n^{(q)}} = \sum\limits_{s \in X_q} \pi_s$, $q = 1, \ldots, 5$, вычислим стационарные вероятности макросостояний: $\pi_{n^{(1)}} = 0,060$, $\pi_{n^{(2)}} = 0,315$, $\pi_{n^{(3)}} = 0,005$, $\pi_{n^{(4)}} = 0,619$, $\pi_{n^{(5)}} = 0,001$. Вычислим м. о. числа требований в системах сети $\bar{s} = (\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3, \bar{s}_4)$ и м. о. числа требований в кластерах $\bar{n} = (\bar{n}_1, \bar{n}_2)$: $\bar{s} = (1,607; 1,942; 0,267; 0,184)$, $\bar{n} = (3,549; 0,451)$.

Далее рассмотрим сеть N'^c, которая отличается от сети N^c тем, что при выполнении условия $n_1^{(\cdot)} > \hat{M}_1$, где $\hat{M}_1$ — заданное число требований в кластере N_1^c, в кластере N_2^c осуществляется изменение интенсивности обслуживания посредством использования множителя α_2. Стационарные вероятности макросостояний сети N'^c при различных значениях α_2 и $\hat{M}_1 = 2$ приведены в табл. 1. Также в табл. 1 приведена стационарная вероятность $\pi_{\{n_1^{(\cdot)} > \hat{M}_1\}}$ пребывания сети N'^c в макросостояниях, удовлетворяющих условию $n_1^{(\cdot)} > \hat{M}_1$, например, при $\hat{M}_1 = 1$ $\pi_{\{n_1^{(\cdot)} > \hat{M}_1\}} = \pi_{n^{(1)}} + \pi_{n^{(2)}} + \pi_{n^{(4)}}$, при $\hat{M}_1 = 2$ $\pi_{\{n_1^{(\cdot)} > \hat{M}_1\}} = \pi_{n^{(2)}} + \pi_{n^{(4)}}$, при $\hat{M}_1 = 3$ $\pi_{\{n_1^{(\cdot)} > \hat{M}_1\}} = \pi_{n^{(4)}}$.

Таблица 1

Стационарные вероятности макросостояний сети N'^c

α_2	5	2	1	0,9	0,5	0,2	0,1	0,05	0,01
$\hat{M}_1 = 2$									
$\pi_{n^{(1)}}$	0,013	0,031	0,060	0,066	0,113	0,238	0,379	0,536	0,804
$\pi_{n^{(2)}}$	0,332	0,326	0,315	0,313	0,296	0,250	0,198	0,141	0,042
$\pi_{n^{(3)}}$	0,001	0,003	0,005	0,006	0,010	0,020	0,032	0,045	0,068
$\pi_{n^{(4)}}$	0,654	0,640	0,620	0,615	0,581	0,491	0,390	0,276	0,083
$\pi_{n^{(5)}}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,002	0,003
$\pi_{\{n_1^{(\cdot)} > \hat{M}_1\}}$	0,986	0,966	0,935	0,928	0,877	0,741	0,588	0,417	0,125
$\hat{M}_1 = 1$									
$\pi_{\{n_1^{(\cdot)} > \hat{M}_1\}}$	0,999	0,997	0,995	0,994	0,990	0,974	0,950	0,904	0,654
$\hat{M}_1 = 3$									
$\pi_{\{n_1^{(\cdot)} > \hat{M}_1\}}$	0,891	0,765	0,619	0,594	0,449	0,246	0,140	0,075	0,016

Из табл. 1 видно, что при всех значениях $\hat{M}_1$ и $\alpha_2 > 1$ при увеличении α_2 вероятность $\pi_{\{n_1^{(\cdot)} > \hat{M}_1\}}$ возрастает, т. е. возрастает вероятность «неблагоприятных» состояний (например, при $\hat{M}_1 = 2$ увеличиваются вероятности макросостояний $n^{(2)}$ и $n^{(4)}$), а при $\alpha_2 < 1$ и уменьшении α_2 вероятность $\pi_{\{n_1^{(\cdot)} > \hat{M}_1\}}$ уменьшается, т. е. уменьшается вероятность «неблагоприятных» состояний. Значению $\alpha_2 = 1$ соответствуют результаты, полученные для сети N^c.

В табл. 2 приведены м. о. числа требований в системах и кластерах сети N'^c при $\hat{M}_1 = 2$ и различных значениях $\alpha_2 < 1$.

Таблица 2

Математические ожидания числа требований в системах и кластерах сети N'^c при $\hat{M}_1 = 2$

Математические ожидания	α_2					
	0,9	0,5	0,2	0,1	0,01	0,001
$\bar{s}'_1$	1,602	1,561	1,454	1,333	0,967	0,879
$\bar{s}'_2$	1,935	1,887	1,756	1,611	1,168	1,063
$\bar{s}'_3$	0,274	0,326	0,467	0,625	1,104	1,218
$\bar{s}'_4$	0,189	0,226	0,323	0,431	0,761	0,840
$\bar{n}'_1$	3,537	3,448	3,210	2,944	2,135	1,942
$\bar{n}'_2$	0,463	0,552	0,790	1,056	1,865	2,058

Из табл. 2 видно, что при уменьшении α_2 м. о. числа требований в системах и кластерах сети изменяются так, чтобы при некотором значении α_2 выполнялось условие $\bar{n}'_1 \leq \hat{M}_1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сети массового обслуживания с групповыми переходами требований широко применяются в качестве математических моделей вычислительных и информационных систем, вычислительных и коммуникационных сетей, производственных систем. Для моделирования систем с ограниченными ресурсами эффективно используются сети обслуживания с блокировками. Сети обслуживания с кластерами применяются при исследовании стохастических информационных систем, когда необходимо оценивать степень влияния на эволюцию системы ее отдельных подсистем, а также при анализе систем методами декомпозиции. Особую важность представляет класс сетей массового обслуживания, стационарное распределение которых имеет мультипликативную форму, так как в этом случае существенно упрощается вычисление стационарных характеристик исследуемых сетей. К данному классу относятся рассмотренные в этой работе сети обслуживания. Они могут найти практическое применение при исследовании сетевых стохастических систем, в моделях которых — сетях массового обслуживания — размеры поступающих в системы групп требований не превосходят числа обслуживающих приборов в системах. В противном случае можно применить один из способов блокировки переходов групп требований, тогда стационарные характеристики исследуемых сетей будут приближенными и их точность будет зависеть от значений вероятностей событий, связанных с блокировками переходов. Предположение об экспоненциальном распределении длительностей обслуживания требований при практическом использовании рассмотренных в статье сетей массового обслуживания в качестве моделей дискретных стохастических систем часто не является ограничивающим. Распределения длительностей обслуживания в общем случае могут быть произвольными, если при использовании этих распределений ошибки определения стационарных характеристик модельных сетей обслуживания не превышают допустимых значений.

Библиографический список

1. *Balsamo S., Nitto Persone V.* A survey of product form queueing networks with blocking and their equivalences // Ann. Oper. Res. 1994. Vol. 48. P. 31–61.

2. *Boxma O. J., Konheim A. G.* Approximate analysis of exponential queueing systems with blocking // Acta Informatica. 1981. Vol. 15. P. 19–66.

3. *Clo M. C.* MVA for product-form cyclic queueing networks with blocking // Ann. Oper. Res. 1998. Vol. 79. P. 83–96.

4. *Balsamo S., Clo M. C.* A convolution algorithm for product-form queueing networks with blocking // Ann. Oper. Res. 1998. Vol. 79. P. 97–117.

5. *Liu X., Buzacott J. A.* A decomposition-related throughput property of tandem queueing networks with blocking // Queueing Systems. 1993. Vol. 13. P. 361–383.

6. *Strelen J. C., Bark B., Becker J., Jonas V.* Analysis of queueing networks with blocking using a new aggregation technique // Ann. Oper. Res. 1998. Vol. 79. P. 121–142.

7. *Boucherie R. J., Dijk N. M.* A generalization of Norton's theorem for queueing networks // Queueing Systems. 1993. Vol. 13. P. 251–289.

8. *Dijk N. M., Sluis E.* Simple product-form bounds for queueing networks with finite clusters // Ann. Oper. Res. 2002. Vol. 113. P. 175–195.

9. *Boucherie R. J., Dijk N. M.* Queueing networks :

a fundamental approach. N. Y.; Heidelberg; London : Springer Science+Business Media, LLC, 2011. 823 p.
10. *Henderson W., Taylor P. G.* Product form in networks of queues with batch arrivals and batch services // Queueing Systems. 1990. Vol. 6. P. 71–88.
11. *Henderson W., Pearce C. E. M., Taylor P. G., Dijk N. M.* Closed queueing networks with batch services // Queueing Systems. 1990. Vol. 6. P. 59–70.
12. *Boucherie R. J., Dijk N. M.* Spatial birth-dearth processes with multiple changes and applications to batch service networks and clustering processes // Adv. Appl. Prob. 1991. Vol. 22. P. 433–455.
13. *Boucherie R. J., Dijk N. M.* Product forms for queueing networks with state-dependent multiple job transitions // Adv. Appl. Prob. 1991. Vol. 23, № 1. P. 152–187.
14. *Boucherie R. J.* Batch routing queueing networks with jump-over blocking // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 1996. Vol. 10. P. 287–297.
15. *Miyazawa M.* Structure-reversibility and departure functions of queueing networks with batch movements and state dependent routing // Queueing Systems. 1997. Vol. 25. P. 45–75.
16. *Bause F., Boucherie R. J., Buchholz P.* Norton's theorem for batch routing queueing networks // Stochastic Models. 2001. Vol. 17. P. 39–60.
17. *Митрофанов Ю. И., Рогачко Е. С., Станкевич Е. П.* Анализ неоднородных сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Серия Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 3, ч. 1. С. 41–46.

Queueing Networks with Batch Movements of Customers, Blocking and Clusters

Yu. I. Mitrophanov, V. I. Dolgov, E. S. Rogachko, E. P. Stankevich

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, MitrophanovYuI@info.sgu.ru, www@vidolgov.ru, RogachkoES@info.sgu.ru, StankevichElena@mail.ru

Two types queueing networks with batch movements of customers –- networks with blocking and networks with clusters are investigated. Product form stationary distribution for networks with blocking of transitions in states, in which the number of customers in queueing systems exceeds given values, is derived. For queueing networks with disjoint clusters of systems the problem of analyzing is solved and the product form stationary distribution is found. Examples of analysis of the network with blocking and the network with clusters are presented.

Key words: queueing networks, batch movements of customers, blocking, clusters, analysis of queueing networks.

References

1. Balsamo S., Nitto Persone V. A survey of product form queueing networks with blocking and their equivalences. *Ann. Oper. Res.*, 1994, vol. 48, pp. 31–61.

2. Boxma O. J., Konheim A. G. Approximate analysis of exponential queueing systems with blocking. *Acta Informatica*, 1981, vol. 15, pp. 19–66.

3. Clo M. C. MVA for product-form cyclic queueing networks with blocking. *Ann. Oper. Res.*, 1998, vol. 79, pp. 83–96.

4. Balsamo S., Clo M. C. A convolution algorithm for product-form queueing networks with blocking. *Ann. Oper. Res.*, 1998, vol. 79, pp. 97–117.

5. Liu X., Buzacott J. A. A decomposition-related throughput property of tandem queueing networks with blocking. *Queueing Systems*, 1993, vol. 13, pp. 361–383.

6. Strelen J. C., Bark B., Becker J., Jonas V. Analysis of queueing networks with blocking using a new aggregation technique. *Ann. Oper. Res.*, 1998, vol. 79, pp. 121–142.

7. Boucherie R. J., Dijk N. M. A generalization of Norton's theorem for queueing networks. *Queueing Systems*, 1993, vol. 13, pp. 251–289.

8. Dijk N. M., Sluis E. Simple product-form bounds for queueing networks with finite clusters. *Ann. Oper. Res.*, 2002, vol. 113, pp. 175–195.

9. Boucherie R. J., Dijk N. M. *Queueing networks: a fundamental approach*. New York, Heidelberg, London, Springer Science+Business Media, LLC, 2011, 823 p.

10. Henderson W., Taylor P. G. Product form in networks of queues with batch arrivals and batch services. *Queueing Systems*, 1990, vol. 6, pp. 71–88.

11. Henderson W., Pearce C. E. M., Taylor P. G., Dijk N. M. Closed queueing networks with batch services. *Queueing Systems*, 1990, vol. 6, pp. 59–70.

12. Boucherie R. J., Dijk N. M. Spatial birth-dearth processes with multiple changes and applications to batch service networks and clustering processes. *Adv. Appl. Prob.*, 1991, vol. 22, pp. 433–455.

13. Boucherie R. J., Dijk N. M. Product forms for queueing networks with state-dependent multiple job transitions. *Adv. Appl. Prob.*, 1991, vol. 23, no. 1, pp. 152–187.

14. Boucherie R. J. Batch routing queueing networks with jump-over blocking. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 1996, vol. 10, pp. 287–297.

15. Miyazawa M. Structure-reversibility and departure functions of queueing networks with batch movements and state dependent routing. *Queueing Systems*, 1997, vol. 25, pp. 45–75.

16. Bause F., Boucherie R. J., Buchholz P. Norton's theorem for batch routing queueing networks. *Stochastic Models*, 2001, vol. 17, pp. 39–60.
17. Mitrophanov Yu. I., Rogachko E. S., Stankevich E. P. Analysis of heterogeneous queueing networks with batch movements of customers. *Izv. Sarat. Univ. N. S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 3, pt. 1, pp. 41–46 (in Russian).

УДК 519.713.2, 512.534

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПЛАНАРНЫХ АВТОМАТОВ АВТОНОМНЫМИ ВХОДНЫМИ СИГНАЛАМИ

В. А. Молчанов

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, v.molchanov@inbox.ru

Универсальные планарные автоматы являются универсальными притягивающими объектами в категории автоматов, у которых множества состояний и выходных сигналов наделены структурами плоскостей. Основной результат работы показывает, что любой универсальный планарный автомат изоморфен многосортной алгебраической системе, канонически построенной из автономных входных сигналов исходного автомата.

Ключевые слова: автоматы, полугруппы, плоскости, многосортные алгебраические системы.

ВВЕДЕНИЕ

Теория автоматов является одним из основных разделов математической кибернетики, в котором изучаются устройства преобразования информации, естественно возникающие в многочисленных задачах теории управления, теории связи и многих других. В общем случае такое устройство может находиться в различных состояниях, которые изменяются под влиянием определенных внешних воздействий (входных сигналов) и, в свою очередь, сами воздействуют на внешнюю среду (с помощью выходных сигналов). Математической моделью такого устройства является многосортная алгебраическая система, называемая автоматом и представляющая собой алгебру $\mathbf{A} = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ с тремя основными множествами X, S, Y и двумя бинарными операциями $\delta : X \times S \to X$, $\lambda : X \times S \to Y$. При этом X называется множеством состояний автомата, S — множеством входных сигналов, Y — множеством выходных сигналов, δ — функцией переходов и λ — выходной функцией автомата. Функция переходов δ для каждого входного сигнала $s \in S$ определяет состояние $\delta(x, s)$, в которое переходит автомат из состояния $x \in X$ под действием сигнала s. Аналогично выходная функция λ для каждого входного сигнала $s \in S$ определяет выходной сигнал $\lambda(x, s)$, который выдает автомат под действием сигнала s.

Таким образом, для каждого входного сигнала $s \in S$ автомат $\mathbf{A}$ определяет функцию переходов $\delta_s : X \to X$ и выходную функцию $\lambda_s : X \to Y$ по формулам: $\delta_s(x) = \delta(x, s)$ и $\lambda_s(x) = \lambda(x, s)$. Для элементов $s, t \in S$ последовательное действие функций переходов δ_s, δ_t так определяет ассоциативное умножение входных сигналов $s \cdot t$, что $\delta_{s \cdot t} = \delta_s \delta_t$. Поэтому обычно предполагается, что множество входных сигналов S является полугруппой, которая обозначается символом $\mathrm{Inp}(\mathbf{A})$ и при любых значениях $x \in X$, $s, t \in S$, удовлетворяет условиям $\delta(x, s \cdot t) = \delta\left(\delta(x, s), t\right)$, $\lambda(x, s \cdot t) = \lambda\left(\delta(x, s), t\right)$.

Входной сигнал $a \in S$ автомата $\mathbf{A} = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ называется автономным, если его действие не зависит от состояний этого автомата, т. е. найдутся такое состояние автомата, обозначаемое a_1, и такой выходной сигнал автомата, обозначаемый a_2, что $\delta(x, a) = a_1$, $\lambda(x, a) = a_2$ для всех состояний автомата $x \in X$.

В зависимости от специфики рассматриваемых задач математической кибернетики устройство преобразования информации может моделироваться автоматом, у которого множества состояний X и выходных сигналов Y наделены дополнительной математической структурой (например, структурой линейного пространства, упорядоченного множества, топологического пространства и др.), которая сохраняется функциями переходов и выходными функциями этого автомата (см., например, [1]). Так, известные конкретные задачи математической кибернетики приводят к понятиям линейных, упорядоченных и топологических автоматов, которые изучались в работах [1–4]. При таком подходе один из

© Молчанов В. А., 2013