16. Bause F., Boucherie R. J., Buchholz P. Norton's theorem for batch routing queueing networks. *Stochastic Models*, 2001, vol. 17, pp. 39–60.
17. Mitrophanov Yu. I., Rogachko E. S., Stankevich E. P. Analysis of heterogeneous queueing networks with batch movements of customers. *Izv. Sarat. Univ. N. S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 3, pt. 1, pp. 41–46 (in Russian).

УДК 519.713.2, 512.534

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПЛАНАРНЫХ АВТОМАТОВ АВТОНОМНЫМИ ВХОДНЫМИ СИГНАЛАМИ

В. А. Молчанов

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, v.molchanov@inbox.ru

Универсальные планарные автоматы являются универсальными притягивающими объектами в категории автоматов, у которых множества состояний и выходных сигналов наделены структурами плоскостей. Основной результат работы показывает, что любой универсальный планарный автомат изоморфен многосортной алгебраической системе, канонически построенной из автономных входных сигналов исходного автомата.

Ключевые слова: автоматы, полугруппы, плоскости, многосортные алгебраические системы.

ВВЕДЕНИЕ

Теория автоматов является одним из основных разделов математической кибернетики, в котором изучаются устройства преобразования информации, естественно возникающие в многочисленных задачах теории управления, теории связи и многих других. В общем случае такое устройство может находиться в различных состояниях, которые изменяются под влиянием определенных внешних воздействий (входных сигналов) и, в свою очередь, сами воздействуют на внешнюю среду (с помощью выходных сигналов). Математической моделью такого устройства является многосортная алгебраическая система, называемая автоматом и представляющая собой алгебру $\mathbf{A} = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ с тремя основными множествами X, S, Y и двумя бинарными операциями $\delta : X \times S \to X$, $\lambda : X \times S \to Y$. При этом X называется множеством состояний автомата, S — множеством входных сигналов, Y — множеством выходных сигналов, δ — функцией переходов и λ — выходной функцией автомата. Функция переходов δ для каждого входного сигнала $s \in S$ определяет состояние $\delta(x, s)$, в которое переходит автомат из состояния $x \in X$ под действием сигнала s. Аналогично выходная функция λ для каждого входного сигнала $s \in S$ определяет выходной сигнал $\lambda(x, s)$, который выдает автомат под действием сигнала s.

Таким образом, для каждого входного сигнала $s \in S$ автомат $\mathbf{A}$ определяет функцию переходов $\delta_s : X \to X$ и выходную функцию $\lambda_s : X \to Y$ по формулам: $\delta_s(x) = \delta(x, s)$ и $\lambda_s(x) = \lambda(x, s)$. Для элементов $s, t \in S$ последовательное действие функций переходов δ_s, δ_t так определяет ассоциативное умножение входных сигналов $s \cdot t$, что $\delta_{s \cdot t} = \delta_s \delta_t$. Поэтому обычно предполагается, что множество входных сигналов S является полугруппой, которая обозначается символом $\mathrm{Inp}(\mathbf{A})$ и при любых значениях $x \in X,\ s, t \in S$, удовлетворяет условиям $\delta(x, s \cdot t) = \delta\left(\delta(x, s), t\right)$, $\lambda(x, s \cdot t) = \lambda\left(\delta(x, s), t\right)$.

Входной сигнал $a \in S$ автомата $\mathbf{A} = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ называется автономным, если его действие не зависит от состояний этого автомата, т. е. найдутся такое состояние автомата, обозначаемое a_1, и такой выходной сигнал автомата, обозначаемый a_2, что $\delta(x, a) = a_1$, $\lambda(x, a) = a_2$ для всех состояний автомата $x \in X$.

В зависимости от специфики рассматриваемых задач математической кибернетики устройство преобразования информации может моделироваться автоматом, у которого множества состояний X и выходных сигналов Y наделены дополнительной математической структурой (например, структурой линейного пространства, упорядоченного множества, топологического пространства и др.), которая сохраняется функциями переходов и выходными функциями этого автомата (см., например, [1]). Так, известные конкретные задачи математической кибернетики приводят к понятиям линейных, упорядоченных и топологических автоматов, которые изучались в работах [1–4]. При таком подходе один из основных объектов математической кибернетики — автомат — представляет собой предмет научного интереса и актуальных исследований алгебраической теории автоматов, которая, с одной стороны, является важным разделом универсальной алгебры и, с другой стороны, имеет разнообразные приложения к комбинаторным исследованиям автоматов, связанным с их поведением, анализом и синтезом, к теории языков и алгоритмов и ко многим другим разделам математической кибернетики [1, 5].

В настоящей работе продолжаются исследования этого направления: здесь изучаются алгебраические свойства так называемых планарных автоматов, т. е. автоматов, у которых множества состояний и выходных сигналов наделены дополнительной алгебраической структурой плоскости. Следуя [6] под плоскостью в работе понимается алгебраическая система вида $\Pi = (X, L)$, где X — непустое множество точек и L — семейство его подмножеств, именуемых прямыми, удовлетворяющее следующим аксиомам: (A_1) через любые две точки проходит одна и только одна прямая; (A_2) каждая прямая содержит, по крайней мере, три точки; (A_3) в множестве X есть три точки, не лежащие на одной прямой. В частности, плоскость Π является проективной, если любые две ее прямые имеют общую точку, и аффинной, если для любой прямой $l \in L$ и любой точки $x \in X \setminus l$ существует такая единственная прямая l', что $x \in l'$ и $l \cap l' = \emptyset$.

Напомним, что точки плоскости, лежащие на одной ее прямой, называются коллинеарными. Гомоморфизмом плоскости $\Pi = (X, L)$ в плоскость $\Pi' = (X', L')$ называется отображение $\varphi : X \to X'$, которое коллинеарные точки плоскости Π отображает в коллинеарные точки плоскости Π'. Множество всех гомоморфизмов Π в Π' обозначается как $\mathrm{Hom}(\Pi, \Pi')$. Гомоморфизм плоскости Π в себя называется эндоморфизмом этой плоскости. Множество всех эндоморфизмов плоскости Π с операцией композиции образует полугруппу $\mathrm{End}(\Pi)$.

С алгебраической точки зрения плоскость $\Pi = (X, L)$ представляет собой двухсортную алгебраическую систему $\Pi = (X, L, \rho)$ с двумя базисными множествами X, L и бинарным отношением $\rho \subset X \times L$, которое для элементов $x \in X, l \in L$ определяется по формуле $(x, l) \in \rho \iff x \in l$ и удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned}
&(A_1') && (\forall\, x, y \in X)\,(x \neq y \Longrightarrow (\exists!\, l \in L)\,((x,l) \in \rho \wedge (y,l) \in \rho))\,,\\
&(A_2') && (\forall\, l \in L)\,(\exists\, x_1, x_2, x_3 \in X)\,(\bigwedge_{1 \le i \neq j \le 3} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{1 \le i \le 3} (x_i, l) \in \rho),\\
&(A_3') && (\exists\, x_1, x_2, x_3 \in X)\,(\forall\, l \in L)\,\neg(\bigwedge_{1 \le i \le 3} (x_i, l) \in \rho).
\end{aligned}$$

Изоморфизмом таких алгебраических систем $\Pi = (X, L, \rho)$, $\Pi' = (X', L', \rho')$ является упорядоченная пара $\pi = (\varphi, \psi)$ биекций $\varphi : X \to X'$, $\psi : L \to L'$, сохраняющая отношения этих систем, т. е. для любых $x \in X$, $l \in L$ выполняется условие $(x, l) \in \rho \iff (\varphi(x), \psi(l)) \in \rho'$.

По определению [1] планарные автоматы являются структуризованными автоматами $\mathbf{A} = (X_1, S, X_2, \delta, \lambda)$ с множеством состояний X_1 и множеством выходных сигналов X_2, наделенными структурами плоскостей $\Pi_1 = (X_1, L_1)$ и $\Pi_2 = (X_2, L_2)$, полугруппой входных сигналов S, функцией переходов $\delta : X_1 \times S \to X_1$ и выходной функцией $\lambda : X_1 \times S \to X_2$, для которых при каждом фиксированном $s \in S$ преобразование $\delta_s : X_1 \to X_1$ является эндоморфизмом плоскости Π_1 и отображение $\lambda_s : X_1 \to X_2$ вляется гомоморфизмом плоскости Π_1 в плоскость Π_2. Такие автоматы обозначаются символом $\mathbf{A} = (\Pi_1, S, \Pi_2, \delta, \lambda)$.

Изоморфизмом планарных автоматов $\mathbf{A} = (\Pi_1, S, \Pi_2, \delta, \lambda)$, $\mathbf{A}' = (\Pi_1', S', \Pi_2', \delta', \lambda')$ является упорядоченная тройка $\theta = (\pi_1, \gamma, \pi_2)$ изоморфизмов плоскостей $\pi_1 = (\varphi_1, \psi_1) : \Pi_1 \to \Pi_1'$, $\pi_2 = (\varphi_2, \psi_2) : \Pi_2 \to \Pi_2'$ и полугрупп $\gamma : S \to S'$, сохраняющая функции переходов и выходные функции этих автоматов, т. е. для любых $x \in X_1, s \in S$ выполняется условие

$$\varphi_1\,(\delta(x, s)) = \delta'\,(\varphi_1(x), \gamma(s))\,, \quad \varphi_2\,(\lambda(x, s)) = \lambda'\,(\varphi_1(x), \gamma(s))\,.$$

Главное внимание в наших исследованиях уделяется так называемым универсальным планарным автоматам, подавтоматы которых охватывают все гомоморфные образы рассматриваемых планарных автоматов. Такой универсальный автомат для любых плоскостей Π_1 и Π_2 определяется как автомат $\mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2) = (\Pi_1, S, \Pi_2, \delta, \lambda)$ с полугруппой входных сигналов S, состоящей из всех пар $s = (\varphi, \psi)$

эндоморфизмов φ плоскости Π_1 и гомоморфизмов ψ плоскости Π_1 в плоскость Π_2, функцией переходов $\delta(x, s) = \varphi(x)$ и выходной функцией $\lambda(x, s) = \psi(x)$ (здесь $x \in X_1$, $s = (\varphi, \psi) \in S$). Напомним [1], что умножение таких входных сигналов $s = (\varphi, \psi)$, $s_1 = (\varphi_1, \psi_1)$ определяется по формуле $s \cdot s_1 = (\varphi\varphi_1, \varphi\psi_1)$.

В таком контексте алгебраическая теория планарных автоматов имеет непосредственное отношение к одному из основных разделов современной алгебры — обобщенной теории Галуа, начало которой было положено в исследованиях Э. Галуа и которая посвящается изучению математических объектов путем исследования некоторых производных алгебр отображений, специальным образом связанных с исходными объектами. В нашем случае изучаемым математическим объектом является универсальный планарный автомат $\mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ и производной алгеброй отображений — его полугруппа входных сигналов $S = \mathrm{End}(\Pi_1) \times \mathrm{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$. Следовательно, алгебраическая теория планарных автоматов тесным образом связана с общеизвестной задачей определяемости математических объектов их автоморфизмами и эндоморфизмами, которая сформулирована в числе прочих актуальных математических проблем в известной книге С.Улама [7].

Проводимые автором исследования пларных автоматов следуют сложившемуся традиционному набору вопросов обобщенной теории Галуа: принципиальное значение имеет задача о том, насколько хорошо производная алгебра отображений определяет исходный объект; затем исследуется, какими свойствами характеризуется такая производная алгебра отображений; наконец, с помощью полученных результатов изучаются взаимосвязи свойств исходного объекта и его производной алгебры отображений. Такие вопросы для групп автоморфизмов алгебраических систем, полугрупп эндоморфизмов графов, колец линейных преобразований векторных пространств и других алгебр преобразований весьма успешно решались Б. И. Плоткиным [1], Л. М. Глускиным [8] и другими авторами. Принципиальным отличием проводимого исследования пларных автоматов является положенное в его основу решение гораздо более сложной проблемы обобщенной теории Галуа о конкретной характеристике производных алгебр отображений [9], т. е. проблемы описания таких условий, при которых алгебра отображений равна производной алгебре изучаемого объекта. Примером такого рода задачи является известная и до сих пор не решенная проблема Д.Кенига [10] о группе автоморфизмов графа. В этом направлении отдельные продвижения были сделаны М. Краснером [11], Б. Йонсоном [10] и другими авторами для полугрупп эндоморфизмов релятивов и групп автоморфизмов универсальных алгебр.

Основной результат работы [12] показывает, что универсальные планарные автоматы полностью определяются (с точностью до изоморфизма) своими полугруппами входных сигналов. Решение задачи конкретной характеризации универсальных планарных автоматов приводится в работе [13]. Центральный результат настоящей работы описывает представление универсального планарного автомата в виде многосортной алгебраической системы, канонически построенной из автономных входных сигналов этого автомата. Эта конструкция является одним из основных инструментов доказательства относительно элементарной определимости рассматриваемых универсальных планарных автоматов в классе полугрупп, которая позволяет последовательно проанализировать взаимосвязь элементарных свойств универсальных планарных автоматов и их полугрупп входных сигналов.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Далее рассматривается универсальный планарный автомат $\mathbf{A} = \mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ для некоторых плоскостей $\Pi_1 = (X_1, L_1)$ и $\Pi_2 = (X_2, L_2)$. Для такого автомата естественно определяются следующие канонические отношения:

1) множество C всех автономных входных сигналов автомата $\mathbf{A}$;
2) бинарное отношение ε_1 на множестве C, которое состоит из таких упорядоченных пар (a, b) автономных входных сигналов $a, b \in C$, действия которых одинаково преобразуют состояния автомата $\mathbf{A}$, т. е. по определению $(a, b) \in \varepsilon_1 \iff a_1 = b_1$;
3) бинарное отношение ε_2 на множестве C, которое состоит из таких упорядоченных пар (a, b) автономных входных сигналов $a, b \in C$, при действии которых автоматом $\mathbf{A}$ выдаются одинаковые выходные сигналы, т. е. по определению $(a, b) \in \varepsilon_2 \iff a_2 = b_2$;
4) бинарное отношение η_i на множестве C^2 $(i = 1, 2)$, которое состоит из таких упорядоченных пар (α, β) элементов $\alpha = (a, b)$ и $\beta = (c, d)$ с автономными входными сигналами $a, b, c, d \in C$,

при действии которых состояния автомата $\mathbf{A}$ отображаются в коллинеарные точки a_i, b_i, c_i, d_i соответствующей плоскости Π_i, т. е. по определению

$$(\alpha,\beta)\in\eta_i \iff \text{точки } a_i,\ b_i,\ c_i,\ d_i \text{ колинеарны в плоскости } \Pi_i.$$

Лемма. *Для любых плоскостей $\Pi_1=(X_1,L_1)$, $\Pi_2=(X_2,L_2)$ канонические отношения универсального планарного автомата $\mathbf{A}=\mathrm{Atm}(\Pi_1,\Pi_2)$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) *для любого состояния (соответственно выходного сигнала) x автомата $\mathbf{A}$ найдется такой автономный входной сигнал этого автомата, обозначаемый $\widetilde{x}$, при действии которого все состояния автомата переходят в состояние x (соответственно отображаются в выходной сигнал x), т. е. выполняется равенство $\widetilde{x}_1=x$ (соответственно $\widetilde{x}_2=x$);*
2) *для каждого $i=1,2$ отношение ε_i является эквивалентностью на множестве C и отображение $\varphi_i: X_i\to C/\varepsilon_i$, определяемое для элементов $x\in X_i$ по формуле $\varphi_i(x)=\varepsilon_i(\widetilde{x})$, является биекцией X_i на фактор-множество C/ε_i;*
3) *для каждого $i=1,2$ ограничение отношения η_i на множестве $D_i=C^2\setminus\varepsilon_i$ является эквивалентностью такой, что отображение $\psi_i: L_i\to D_i/\eta_i$, определяемое для элементов $l\in L_i$ по формуле $\psi_i(l)=\eta_i(\widetilde{x},\widetilde{y})$ для произвольных различных точек $x,y\in l$, является биекцией L_i на фактор-множество D_i/η_i.*

Доказательство. Из свойства (A_1) плоскостей Π_1, Π_2 следует, что для любого состояния x и любого выходного сигнала y автомата $\mathbf{A}$ постоянные отображения $\varphi: X_1\to\{x\}$ и $\psi: X_1\to\{y\}$ являются соответственно эндоморфизмом плоскости Π_1 и гомоморфизмом плоскости Π_1 в плоскость Π_2. Тогда пара отображений $a=(\varphi,\psi)$ является автономным входным сигналом автомата $\mathbf{A}$, для которого выполняются условия $a_1=x$, $a_2=y$. Следовательно, справедливо утверждение 1) леммы.

Справедливость утверждения 2) леммы очевидна.

Рассмотрим ограничение отношения η_1 на множестве $D_1=C^2\setminus\varepsilon_1$. Тогда отношение η_1 рефлексивно, так как для любых автономных входных сигналов $a,b\in C$, $a\not\equiv b(\varepsilon_1)$ точки $a_1,b_1\in X_1$ различны и, значит, по свойству (A_1) плоскости Π_1 принадлежат некоторой прямой, т. е. выполняется $((a,b),(a,b))\in\eta_1$. Из определения отношения η_1 легко видеть, что это отношение симметрично. Для доказательства транзитивности рассмотрим автономные входные сигналы $a,b,c,d,e,f\in C$, удовлетворяющие условиям: $((a,b),(c,d))\in\eta_1$, $((c,d),(e,f))\in\eta_1$. Тогда точки $a_1,b_1,c_1,d_1\in X_1$ принадлежат одной прямой $l\in L_1$, точки $c_1,d_1,e_1,f_1\in X_1$ принадлежат одной прямой $l'\in L_1$ и выполняется условие $c\not\equiv d(\varepsilon_1)$, т. е. $c_1\neq d_1$. Значит, по свойству (A_1) плоскости Π_1 прямые l,l' совпадают и все точки a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1 принадлежат одной и той же прямой l. Следовательно, $((a,b),(e,f))\in\eta_1$ и отношение η_1 транзитивно. Таким образом, η_1 является эквивалентностью на множестве D_1, которая определяет фактор-множество D_1/η_1. Для любой прямой $l\in L_1$ по свойству (A_2) плоскости Π_1 найдутся, по крайней мере, две такие различные точки $x,y\in X_1$, что $x,y\in l$. Как уже показано выше, в автомате $\mathbf{A}$ найдутся такие автономные входные сигналы $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$, что $\widetilde{x}_1=x$, $\widetilde{y}_1=y$. Так как $x\neq y$, то $\widetilde{x}\not\equiv\widetilde{y}(\varepsilon_1)$, упорядоченная пара $\alpha=(\widetilde{x},\widetilde{y})$ принадлежит множеству D_1 и определяет класс эквивалентности $\eta_1(\alpha)$. Положим по определению $\psi_1(l)=\eta_1(\widetilde{x},\widetilde{y})$ и покажем, что такое соответствие определяет биекцию ψ_1 множества L_1 на фактор-множество D_1/η_1. Так как для любых различных точек $u,v\in l$ по свойству (A_1) плоскости Π_1 автономные входные сигналы $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$, $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$ определяют коллинеарные точки $\widetilde{x}_1=x$, $\widetilde{y}_1=y$, $\widetilde{u}_1=u$, $\widetilde{v}_1=v$ плоскости Π_1, то выполняется $(\widetilde{x},\widetilde{y})\equiv(\widetilde{u},\widetilde{v})\,(\eta_1)$ и, значит, определение значения $\psi_1(l)$ корректно. Далее, для любого класса эквивалентности $\eta_1(a,b)$, определяющегося упорядоченной парой $(a,b)\in D_1$, выполняется $a,b\in C$ и $a\not\equiv b(\varepsilon_1)$. Значит, точки $a_1,b_1\in X_1$ различны и по свойству (A_1) плоскости Π_1 принадлежат некоторой прямой $l\in L_1$. Тогда по определению $\psi_1(l)=\eta_1(\widetilde{a_1},\widetilde{b_1})=\eta_1(a,b)$, т. е. ψ_1 отображает множество L_1 на фактор-множество D_1/η_1. С другой стороны, для любых двух различных прямых $l,l'\in L_1$ по свойствам (A_1), (A_2) плоскости Π_1 найдутся такие попарно различные точки $x,y,u,v\in X_1$, что $x,y\in l$, $u,v\in l'$, и, по крайней мере, одна из точек u,v не лежит на прямой l. Тогда упорядоченные пары автономных входных сигналов $\alpha=(\widetilde{x},\widetilde{y})$, $\beta=(\widetilde{u},\widetilde{v})$ удовлетворяют условиям $\alpha,\beta\in D_1$ и $\alpha\not\equiv\beta(\eta_1)$, поскольку точки $\widetilde{x}_1=x$, $\widetilde{y}_1=y$, $\widetilde{u}_1=u$, $\widetilde{v}_1=v$ по свойству (A_1) плоскости Π_1 не могут лежать на одной прямой этой плоскости. Так как по определению $\psi_1(l)=\eta_1(\widetilde{x},\widetilde{y})=\eta_1(\alpha)$ и $\psi_1(l')=\eta_1(\widetilde{u},\widetilde{v})=\eta_1(\beta)$, то

$\psi_1(l) \neq \psi_1(l')$ и отображение ψ_1 взаимно однозначно. Таким образом, ψ_1 является биекцией множества L_1 на фактор-множество D_1/η_1.

Аналогично доказывается, что отображение ψ_2 также является биекцией множества L_2 на фактор-множество D_2/η_2. Следовательно, справедливо утверждение 3) леммы. Лемма доказана.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть $\mathbf{A} = \mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ — универсальный планарный автомат для некоторых плоскостей $\Pi_1 = (X_1, L_1)$ и $\Pi_2 = (X_2, L_2)$. С помощью канонических отношений этого автомата введем следующие понятия:

1) для каждого $i = 1, 2$ определим двухсортную алгебраическую систему $\overline{\Pi}_i = \left(\overline{X}_i, \overline{L}_i, \overline{\rho}_i\right)$ с базисными множествами $\overline{X}_i = C/\varepsilon_i$, $\overline{L}_i = D_i/\eta_i$ и бинарным отношением $\overline{\rho}_i \subset \overline{X}_i \times \overline{L}_i$, которое для элементов $a, b, c \in C$, $b \not\equiv c(\varepsilon_i)$ задается по формуле

$$(\varepsilon_i(a), \eta_i(b,c)) \in \overline{\rho}_i \iff \text{точки } a_i,\ b_i,\ c_i \text{ коллинеарны в плоскости } \Pi_i;$$

2) определим два отображения $\overline{\delta} : \overline{X}_1 \times S \to \overline{X}_1$, $\overline{\lambda} : \overline{X}_1 \times S \to \overline{X}_2$, которые для элементов $a \in C, s \in S$ задаются по формулам

$$\overline{\delta}\,(\varepsilon_1(a), s) = \varepsilon_1(a \cdot s), \quad \overline{\lambda}\,(\varepsilon_1(a), s) = \varepsilon_2(a \cdot s).$$

Теорема. *Пусть $\mathbf{A} = \mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ — универсальный планарный автомат для некоторых плоскостей $\Pi_1 = (X_1, L_1)$, $\Pi_2 = (X_2, L_2)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *для каждого $i = 1, 2$ плоскость Π_i изоморфна алгебраической системе $\overline{\Pi}_i = \left(\overline{X}_i, \overline{L}_i, \overline{\rho}_i\right)$;*
2) *автомат $\mathbf{A} = \mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ изоморфен планарному автомату $\overline{\mathbf{A}} = \left(\overline{\Pi}_1, S, \overline{\Pi}_2, \overline{\delta}, \overline{\lambda}\right)$ с плоскостью состояний $\overline{\Pi}_1$, полугруппой входных сигналов $S = \mathrm{Inp}(\mathbf{A})$, плоскостью выходных сгналов $\overline{\Pi}_2$, функцией переходов $\overline{\delta} : \overline{X}_1 \times S \to \overline{X}_1$ и выходной функцией $\overline{\lambda} : \overline{X}_1 \times S \to \overline{X}_2$.*

Доказательство. Рассмотрим двухсортную алгебраическую систему $\overline{\Pi}_1 = \left(\overline{X}_1, \overline{L}_1, \rho_1\right)$ с базисными множествами $\overline{X}_1 = C/\varepsilon_1$, $\overline{L}_1 = D_1/\eta_1$ и бинарным отношением $\rho_1 \subset \overline{X}_1 \times \overline{L}_1$, которое для элементов $a, b, c \in C$, $b \not\equiv c(\varepsilon_1)$ определяется по формуле

$$(\varepsilon_1(a), \eta_1(b,c)) \in \overline{\rho}_1 \iff \text{точки } a_1,\ b_1,\ c_1 \text{ коллинеарны в плоскости } \Pi_1.$$

В силу п. 2) леммы отображение $\varphi_1 : X_1 \to \overline{X}_1$, определяющееся для элементов $x \in X_1$ по формуле $\varphi_1(x) = \varepsilon_1(\widetilde{x})$, является биекцией множества X_1 на множество $\overline{X}_1$. В силу п. 3) леммы отображение $\psi_1 : L_1 \to \overline{L}_1$, пределяемое для элементов $l \in L_1$ по формуле $\psi_1(l) = \eta_1(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ для произвольных различных точек $x, y \in l$, является биекцией множества L_1 на множество $\overline{L}_1$.

Пусть в плоскости Π_1 точка $x \in X_1$ лежит на прямой $l \in L_1$. По свойству (A_2) плоскости Π_1 найдутся, по крайней мере, две такие различные точки $y, z \in X_1$, что $y, z \in l$. Как уже показано выше, в автомате $\mathbf{A}$ найдутся такие автономные входные сигналы $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$, $\widetilde{z}$, что $\widetilde{x}_1 = x$, $\widetilde{y}_1 = y$, $\widetilde{z}_1 = z$. Тогда $\varphi_1(x) = \varepsilon_1(\widetilde{x})$, $\psi_1(l) = \eta_1\left(\widetilde{y}, \widetilde{z}\right)$ и по определению $(\varphi_1(x), \psi_1(l)) \in \overline{\rho}_1$, так как точки $\widetilde{x}_1, \widetilde{y}_1, \widetilde{z}_1$ коллинеарны в плоскости Π_1. С другой стороны, если для некоторых элементов $x \in X_1$, $l \in L_1$ выполняется условие $(\varphi_1(x), \psi_1(l)) \in \overline{\rho}_1$, то $\varphi_1(x) = \varepsilon_1(\widetilde{x})$, $\psi_1(l) = \eta_1(\widetilde{y}, \widetilde{z})$ для некоторых различных точек $y, z \in l$ и $(\varepsilon_1(\widetilde{x}), \eta_1(\widetilde{y}, \widetilde{z})) \in \overline{\rho}_1$. По определению отношения $\overline{\rho}_1$ последнее условие означает, что точки $\widetilde{x}_1 = x$, $\widetilde{y}_1 = y$, $\widetilde{z}_1 = z$ лежат на одной прямой l' плоскости Π_1. Так как по свойству (A_1) плоскости Π_1 пара различных точек y, z принадлежит единственной прямой этой плоскости, то $l = l'$, и, следовательно, $x \in l$. Таким образом, $\pi_1 = (\varphi_1, \psi_1)$ является изоморфизмом плоскости Π_1 на двухсортную алгебраическую систему $\overline{\Pi}_1$.

Аналогично доказывается, что упорядоченная пара отображений $\pi_2 = (\varphi_2, \psi_2)$ является изоморфизмом плоскости Π_2 на двухсортную алгебраическую систему $\overline{\Pi}_2$. Следовательно, справедливо утверждение 1) теоремы.

В силу доказанного алгебраические системы $\overline{\Pi}_i = \left(\overline{X}_i, \overline{L}_i, \overline{\rho}_i\right)$ $(i = 1, 2)$ удовлетворяют условиям $(A'_1) - (A'_3)$ и, значит, являются плоскостями. Следовательно, алгебраическая система $\overline{\mathbf{A}} = \left(\overline{\Pi}_1, S, \overline{\Pi}_2, \overline{\delta}, \overline{\lambda}\right)$ является планарным автоматом. Покажем, что упорядоченная тройка

$\theta = (\pi_1, \Delta_S, \pi_2)$ с тождественным отображением $\Delta_S : S \to S$ является изоморфизмом универсального планарного автомата $\mathbf{A} = \mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ на планарный автомат $\overline{\mathbf{A}}$. Для этого достаточно показать, что компоненты упорядоченной тройки θ сохраняют функции переходов и выходные функции этих автоматов, т. е. для любых $x \in X_1, s \in S$ выполняется условие

$$\varphi_1\left(\delta(x,s)\right) = \overline{\delta}\left(\varphi_1(x), s\right), \quad \varphi_2\left(\lambda(x,s)\right) = \overline{\lambda}\left(\varphi_1(x), s\right).$$

Для любого состояния автомата $x \in X_1$ значение $\widetilde{x}$ является автономным входным сигналом, под действием которого автомат переходит в состояние x, т. е. выполняется равенство $\widetilde{x}_1 = x$. Легко видеть, что для любого входного сигнала $s \in S$ произведение $\widetilde{x} \cdot s$ также является автономным входным сигналом автомата $\mathbf{A}$, под действием которого этот автомат переходит в состояние $\delta(x,s)$ и выдает выходной сигнал $\lambda(x,s)$, т. е. выполняются равенства: $(\widetilde{x} \cdot s)_1 = \delta(x,s)$, $(\widetilde{x} \cdot s)_2 = \lambda(x,s)$. Значит, по определению $\widetilde{\delta(x,s)} = \widetilde{x} \cdot s$ и выполняются равенства:

$$\varphi_1\left(\delta(x,s)\right) = \varepsilon_1\left(\widetilde{\delta(x,s)}\right) = \varepsilon_1\left(\widetilde{x} \cdot s\right) = \overline{\delta}\left(\varepsilon_1\left(\widetilde{x}\right), s\right) = \overline{\delta}\left(\varphi_1(x), s\right).$$

Аналогично по определению $\widetilde{\lambda(x,s)} = \widetilde{x} \cdot s$ и выполняются равенства:

$$\varphi_2\left(\lambda(x,s)\right) = \varepsilon_2\left(\widetilde{\lambda(x,s)}\right) = \varepsilon_2\left(\widetilde{x} \cdot s\right) = \overline{\lambda}\left(\varepsilon_1\left(\widetilde{x}\right), s\right) = \overline{\lambda}\left(\varphi_1(x), s\right).$$

Следовательно, $\theta = (\pi_1, \Delta_S, \pi_2)$ является изоморфизмом универсального планарного автомата $\mathbf{A} = \mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ на планарный автомат $\overline{\mathbf{A}}$. Теорема доказана.

Можно показать [14], что все рассмотренные выше канонические отношения универсального планарного автомата определяются в его полугруппе входных сигналов формулами элементарной теории полугрупп. Это позволяет доказать относительно элементарную определимость [15] рассматриваемых универсальных планарных автоматов в классе полугрупп и проанализировать взаимосвязь важных свойств элементарных теорий классов планарных автоматов и элементарных теорий классов полугрупп, таких как проблема элементарной определимости универсальных планарных автоматов их полугруппами входных сигналов, проблема алгоритмической разрешимости элементарных теорий классов универсальных планарных автоматов и др.

Библиографический список

1. *Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А.* Элементы алгебраической теории автоматов. М. : Высш. шк., 1994. 192 с.

2. *Simovici Dan A.* On the theory of reduction of semilatticial automata // An. Sti. ale Univ. «Al. l. Cuza» Din Iasi. (Ser. Nouä). Sec. 1a. 1976. Vol. 22, № 1. P. 107–110.

3. *Гечег Ф.* О произведениях упорядоченных автоматов. I // Acta Sci. Math. 1963. Vol. 24, № 3–4. P. 244–250.

4. *Гечег Ф.* О произведениях упорядоченных автоматов. II // Acta Sci. Math. 1964. Vol. 25, № 1–2. P. 124–128.

5. *Eilenberg S.* Automata, languages and machines. Vol. B. N. Y.; San Francisco; London : Academic Press, 1976. 451 p.

6. *Картеси Ф.* Введение в конечные геометрии. М. : Наука, 1980. 320 с.

7. *Улам С.* Нерешенные математические задачи. М. : Наука, 1964. 168 с.

8. *Глускин Л. М.* Полугруппы и кольца эндоморфизмов линейных пространств // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23. С. 841–870.

9. *Jonson B.* Topics in Universal Algebras. Lecture Notes in Mathematics. Berlin; Heidelberg; N. Y. : Springer Verlag, 1972. 220 p.

10. *Konig D.* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig : Acad. Verlag M.B.H., 1936. 258 p.

11. *Krasner M.* Endotheorie de Galois abstraita // Semin. Dubriel, Dubriel-Jacotin, Lesieur et Pisot. Fac. sci. Paris. 1968–1969(1970). Vol. 22, no 1. P. 6/01-6/19.

12. *Molchanov V. A.* A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols // Semigroup Forum. 2011. Vol. 82. P. 1–9.

13. *Молчанов В. А.* Конкретная характеристика универсальных планарных автоматов // Математика, механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 67–69.

14. *Молчанов В. А.* Об относительно элементарной определимости класса универсальных планарных автоматов в классе всех полугрупп // Алгебра и математическая логика : тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения В. В. Морозова. Казань : Изд-во Казанского (Приволжского) федерального ун-та, 2011. С. 145–147.

15. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М. : Наука, 1980. 416 с.

Representation of Universal Planar Automata by Autonomous Input Signals

V. A. Molchanov

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, v.molchanov@inbox.ru

Universal planar automata are universally attracted objects in the category of automata, whose sets of states and output signals are endowed with structures of planes. The main result of the paper shows that any universal planar automaton is isomorphic to a many-sorted algebraic system canonically constructed from autonomous input signals of the automaton.

Key words: automata, semigroups, planes, many-sorted algebraic systems.

References

1. Plotkin B. I., Greenglaz L. Ja., Gvaramija A. A. *Algebraic structures in automata and databases theory*. Singapore, River Edge, NJ, World Scientific, 1992. (Rus. ed.: Plotkin B. I., Gringlaz L. Ia., Gvaramiia A. A. *Elementy algebraicheskoi teorii avtomatov*. Moscow, Vysshaia shkola, 1994, 192 p.)
2. Simovici Dan A. On the theory of reduction of semi-latticial automata. *An. Sti. ale Univ. «Al. l. Cuza» Din Iasi. (Ser. Nouă). Sec. 1a.*, 1976, vol. 22, no. 1, pp. 107–110.
3. Gécseg F. O proizvedeniiakh uporiadochennykh avtomatov. I [On products of ordered automata. I]. *Acta Sci. Math.*, 1963, vol. 24, no. 3–4, pp. 244–250 (in Russian).
4. Gécseg F. O proizvedeniah uporadochennyh avtomatov. II [On products of ordered automata. II]. *Acta Sci. Math.*, 1964, vol. 25, no. 1–2, pp. 124–128 (in Russian).
5. Eilenberg S. *Automata, languages and machines*. Vol. B. New York, San Francisco, London, Academic Press, 1976, 451 p.
6. Introduction to finite geometries. Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1976. (Russ. ed.: Kartesi F. *Vvedenie v konechnye geometrii*. Moscow, Nauka, 1980, 320 p.)
7. Ulam S. M. *A Collection of Mathematical Problems*. New Mexico, Los Alamos Scientific Laboratories, 1960. (Rus. ed.: Ulam S. *Nereshennye matematicheskie zadachi*. Moscow, Nauka, 1964, 168 p.)
8. Gluskin L. M. Polugruppy i kol'tsa endomorfizmov lineinykh prostranstv [Semigroups and rings of endomorphisms of linear spaces]. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1959, vol. 23, pp. 841–870 (in Russian).
9. Jonson B. *Topics in Universal Algebras. Lecture Notes in Mathematics*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag, 1972, 220 p.
10. Konig D. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Leipzig, Acad. Verlag M. B. H., 1936, 258 p.
11. Krasner M. Endotheorie de Galois abstraita. *Semin. Dubriel, Dubriel-Jacotin, Lesieur et Pisot. Fac. sci. Paris*, 1968–1969(1970), vol. 22, no 1, pp. 6/01-6/19.
12. Molchanov V. A. A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols. *Semigroup Forum*, 2011, vol. 82, pp. 1–9.
13. Molchanov V. A. Konkretnaia kharakteristika universal'nykh planarnykh avtomatov [On concrete characterization of universal planar automata]. *Matematika. Mehanika* [Mathematics. Mechanics]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2011, iss. 13, pp. 67–69 (in Russian).
14. Molchanov V. A. On relatively elementary definability of the class of universal planar automata in the class of all semigroups. *Algebra i matematicheskaia logika : tez. dokl. Mezhdunar. konf., posviashch. 100-letiiu so dnia rozhdeniia V. V. Morozova* [Proc. of the international conference dedicated to 100-th anniversary of V. V. Morozov and youth school-conf. «Modern Problems of Algebra & Mathematical Logic»]. Kazan, 2011, pp. 145–147 (in Russian).
15. Ershov Yu. L. *Problemy razreshimosti i konstruktivnye modeli* [Problems of decidability and constructive models]. Moscow, Nauka, 1980, 416 p. (in Russian).

УДК 519.83

МОДЕЛИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПО КАЧЕСТВЕННЫМ КРИТЕРИЯМ

В. В. Розен[1], Д. С. Смирнова[2]

[1]Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой геометрии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Rozenvv@info.sgu.ru

[2]Аспирантка кафедры геометрии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, smirnova@okean-kv.ru

Рассматриваются математические модели принятия решений по многим качественным критериям. Основная задача состоит в построении отношения предпочтения на множестве допустимых альтернатив и исследовании его математических свойств. Предложено два метода сужения паретовского оптимума: задание отношения частичного порядка на множестве критериев и выделение важнейших групп критериев.

Ключевые слова: модель многокритериальной оптимизации, отношение предпочтения, оптимальность по Парето, выигрывающая коалиция критериев.