УДК 519.17

Т-НЕПРИВОДИМОЕ РАСШИРЕНИЕ ДЛЯ ОБЪЕДИНЕНИЯ ЦЕПЕЙ И ЦИКЛОВ

Д. Ю. Осипов

Студент факультета компьютерных наук и информационных технологий, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. E-mail: st_hill@mail.ru

Расширением n-вершинного графа G называется граф H с $n+1$ вершинами такой, что граф G вкладывается в каждый максимальный подграф графа H. Тривиальное расширение графа G — соединение графа G с одноэлементным графом (т. е. к графу G добавляется вершина, которая соединяется ребром с каждой вершиной графа G). Т-неприводимым расширением графа G называется расширение графа G, получаемое из тривиального расширения данного графа удалением максимально возможного набора добавленных при построении тривиального расширения ребер. В данной работе описано одно из ТНР для произвольного объединения цепей и циклов.

Ключевые слова: граф, Т-неприводимое расширение, объединение цепей и циклов.

В данной статье все понятия и определения приводятся в соответствие с [1].

Неориентированным графом (далее графом) называется пара $G = (V, \alpha)$, где α (множество ребер) — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V. Ребро с концами $u, v \in V$ обозначим через uv. Подграфом графа $G = (V, \alpha)$ называется пара $G' = (V', \alpha')$, где $V' \in V$ и $\alpha' = (V' \times V') \cap \alpha$. Подграф по определению максимален, если он получается из исходного графа удалением одной вершины и всех связанных с нею ребер. Максимальный подграф графа G, полученный удалением вершины v, обозначим через $G - v$. Через $G - uv$ обозначается граф, получающийся из G удалением ребра uv.

Под вложением графа G в граф H понимается инъективное отображение множества вершин графа G в множество вершин графа H, сохраняющее свойство смежности (т. е. если вершины u, v смежны в G, то $\varphi(u), \varphi(v)$ смежны в H).

Расширением n-вершинного графа G называется граф H с $n+1$ вершинами такой, что граф G вкладывается в каждый максимальный подграф графа H. Простейшим примером расширения графа G будет его тривиальное расширение — соединение графа G с одноэлементным графом (т. е. к графу G добавляется вершина, которая соединяется ребром с каждой вершиной графа G).

Понятие расширения графа тесно связано с вопросами отказоустойчивости дискретных систем. Если граф G рассматривать как функциональную модель некоторого устройства Σ, то расширение H графа G можно воспринимать как схему отказоустойчивой реализации этого устройства: при отказе любого элемента (что истолковывается как удаление из H соответствующей вершины и всех связанных с нею ребер) в неповрежденной части обнаруживается работоспособная модель для Σ.

При таком подходе естественно возникает вопрос об оптимальности отказоустойчивой реализации для данной системы, т. е. о получении такого расширения H графа G, которое не содержало бы «лишних» ребер. Один из способов — конструкция минимального расширения графа [2, 3], другой — его Т-неприводимое расширение [4].

Минимальным расширением графа G называется его расширение с минимальным количеством ребер. В общем случае при построении минимального расширения возникает необходимость добавлять ребра в исходный граф, т. е. менять всю систему, моделируемую этим графом. Но иногда технически важно найти решение следующей задачи: построить оптимальное расширение данного графа, сохраняя его первоначальную конструкцию (т. е. не меняя связей внутри него). Существует следующая процедура:

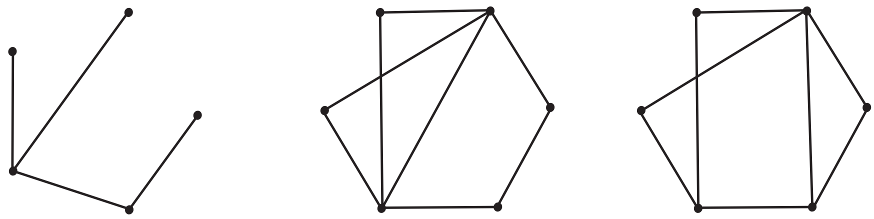
– построить тривиальное расширение исходного графа;

– удалять из полученного графа ребра до тех пор, пока будет выполняться свойство расширения.

Полученные графы назовем Т-неприводимыми расширениями (для краткости ТНР) графа G. Для произвольного графа количество неизоморфных ТНР неизвестно.

Покажем примеры ТНР для некоторых классов графов. Для n-вершинной цепи единственным ТНР является $(n+1)$-вершинный цикл. Для n-вершинного цикла единственным ТНР является тривиальное расширение исходного цикла.

У графа, представленного на рис. 1, *а* есть два неизоморфных ТНР, которые изображены на рис. 1, *б*, *в*.



а б в

Рис. 1

Известна следующая задача: зная ТНР для заданных графов, найти ТНР для их объединения. Некоторые частные случаи были рассмотрены в работах С. Г. Курносовой. Например, ею были найдены ТНР для объединений полных графов, объединений циклов, объединений цепей и для объединений колес, а также найдено одно из ТНР для объединения графа с его ТНР [5].

В теоремах 1 и 2 рассматривается частный случай: объединение цикла и нескольких цепей. В теореме 3 дается общее решение задачи о нахождении ТНР для произвольного объединения цепей и циклов. Результаты работы были анонсированы в [6].

Теорема 1. *Пусть граф G является объединением n-вершинного цикла и некоторого множества цепей произвольной длины, кроме $(n-1)$-вершинных цепей. Тогда одним из ТНР для G будет граф, получаемый из G добавлением новой вершины и ребер, соединяющих ее со всеми вершинами цикла и с концами всех цепей.*

Доказательство. Пусть граф G является объединением n-вершинного цикла и m цепей произвольной длины. Обозначим через $v_1, \ldots, v_n$ вершины цикла, а через $u_1^i, \ldots, u_{n_i}^i$ — вершины i-й цепи, состоящей из n_i вершин ($n_i \neq n, i = \overline{1,m}$). Пусть граф H построен в соответствии с условием теоремы. Добавленную вершину в графе H обозначим через w.

Докажем, что H — одно из ТНР для G.

1. Покажем, что граф H является расширением графа G. Удалим произвольную вершину v из H. Тогда эта вершина может быть добавленной вершиной w, одной из вершин цикла или одной из вершин произвольной цепи.

• $v = w$. Граф G естественным образом вкладывается в граф $H - v$.

• $v = v_j$. Из n-вершинного цикла удалена одна вершина, тогда удаленную вершину в цикле заменим вершиной w. Граф G вкладывается в граф $H - v$.

• $v = u_j^i (j = \overline{1,n_i}; i = \overline{1,m})$. Цепь $u_1^i, \ldots, u_{n_i}^i$ из графа G вкладывается в цепь $u_{j-1}^i, \ldots, u_1^i, w, u_{n_i}^i, \ldots, u_{j+1}^i$ графа $H - u_j^i (j = \overline{2, n_i - 1})$. Если $v = u_1^i$, цепь $u_1^i, \ldots, u_{n_i}^i$ из графа G вкладывается в цепь $u_2^i, \ldots, u_{n_i}^i, w$ графа $H - u_1^i$. Если $v = u_{n_i}^i$, цепь $u_1^i, \ldots, u_{n_i}^i$ из графа G вкладывается в цепь $w, u_1^i, \ldots, u_{n_{i-1}}^i$ графа $H - u_{n_i}^i$. Тогда граф G вкладывается в граф $H - v$.

Мы получили, что при удалении произвольной вершины v из графа H, граф G вкладывается в граф $H - v$, а значит, граф H является расширением графа G.

2. Докажем свойство неприводимости. Удалим произвольное ребро wv из H. Тогда этим ребром может быть ребро, соединяющее вершину w и одну из вершин цикла, либо ребро, соединяющее вершину w и один из концов произвольной цепи.

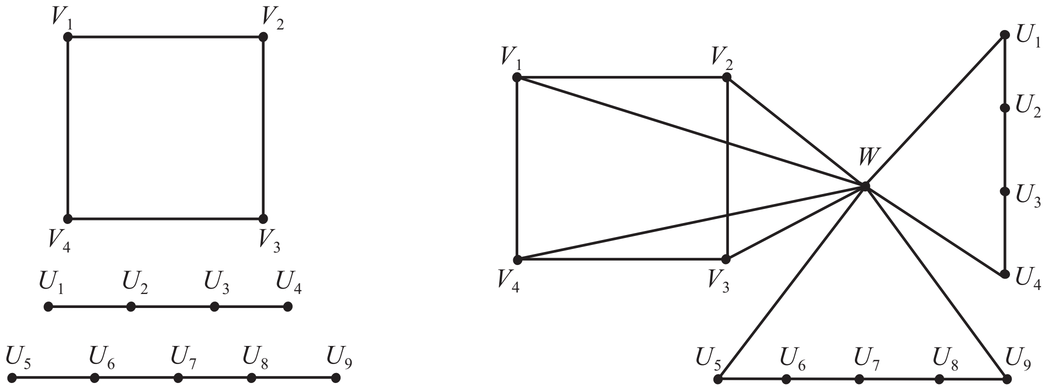
• $v = v_j$. Из графа $H - wv$ достаточно удалить вершину смежную с v_j, тогда степень вершины v_j будет равна 1, а следовательно, в полученный граф невозможно вложения n-вершинного цикла (так как все вершины в цикле имеют степень, равную 2). Граф $H - wv$ не является расширением для G.

• $v = u_j^i \quad (j = 1, n_i;\ i = \overline{1,m})$. Из графа $H - wv$ достаточно удалить вершину смежную с u_j^i, тогда вершина u_j^i будет изолированной вершиной, а следовательно, цепь $u_1^i, \ldots, u_{n_i}^i$ не вкладывается в полученный граф. Граф $H - wv$ не является расширением для G.

Мы получили, что никакой граф, полученный удалением из H одного ребра, не является расширением графа G, а следовательно, граф H будет ТНР для графа G. □

На рис. 2, *а* представлен граф, удовлетворяющий условию теоремы 1, а на рис. 2, *б* — одно из его ТНР, построенное в соответствии с теоремой 1.

Теорема 2. *Пусть граф G является объединением n-вершинного цикла и некоторого множества цепей, среди которых имеются $(n-1)$-вершинные цепи. Тогда одним из ТНР для G будет граф, получаемый из G добавлением новой вершины и ребер, соединяющих ее с концами всех цепей.*



а *б*

Рис. 2

Доказательство. Пусть граф G является объединением n-вершинного цикла и m цепей произвольной длины. Обозначим через $v_1, \ldots, v_n$ вершины цикла, а через $u_1^i, \ldots, u_{n_i}^i$ вершины i-й цепи, состоящей из n_i вершин $(\exists n_i = n, i = \overline{1,m})$. Пусть граф H построен в соответствии с условием теоремы. Добавленную вершину в графе H обозначим через w.

Докажем, что H — одно из ТНР для G.

1. Покажем, что граф H является расширением графа G. Удалим произвольную вершину v из H. Тогда эта вершина может быть добавленной вершиной w, одной из вершин цикла или одной из вершин произвольной цепи.

• $v = w$. Граф G естественным образом вкладывается в граф $H - v$.

• $v = v_j$. Пусть $u_1^i, \ldots, u_{n-1}^i$ — одна из цепей, состоящих из $(n\breve{\ }1)$-вершин, тогда $u_1^i, \ldots, u_{n-1}^i, w, u_1^i$ образуют n-вершинный цикл, а вершины $v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n$ в любом случае образуют $(n-1)$-вершинную цепь. Тогда граф G вкладывается в граф $H^{-}v$.

• $v = u_j^i$ $\;(j = \overline{1, n_i};\ i = \overline{1,m})$. Цепь $u_1^i, \ldots, u_{n_i}^i$ из графа G вкладывается в цепь $u_{j-1}^i, \ldots, u_1^i, w,$ $u_{n_i}^i, \ldots, u_{j+1}^i$ графа $H - u_j^i (j = \overline{2, n_i - 1})$. Если $v = u_1^i$, цепь $u_1^i, \ldots, u_{n_i}^i$ из графа G вкладывается в цепь $u_2^i, \ldots, u_{n_i}^i, w$ графа $H - u_1^i$. Если $v = u_{n_i}^i$, цепь $u_1^i, \ldots, u_{n_i}^i$ из графа G вкладывается в цепь $w, u_1^i, \ldots, u_{n_{i-1}}^i$ графа $H - u_{n_i}^i$. Тогда граф G вкладывается в граф $H - v$.

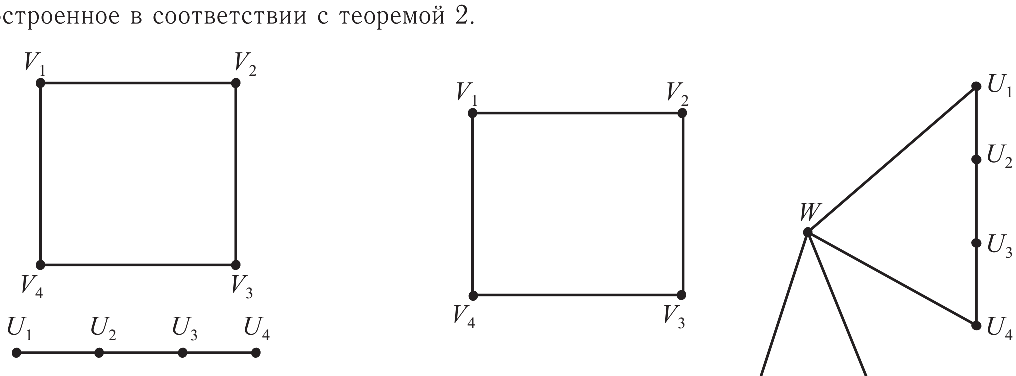
Мы получили, что при удалении произвольной вершины v из графа H граф G вкладывается в граф $H - v$, а значит, граф H является расширением графа G.

2. Докажем свойство неприводимости. Удалим произвольное ребро wv из H. Тогда этим ребром может быть ребро, соединяющее вершину w и один из концов произвольной цепи.

• $v = u_j^i$ $\;(j = 1, n_i;\ i = \overline{1,m})$. Из графа $H - wv$ достаточно удалить вершину, смежную с u_j^i, тогда вершина u_j^i будет изолированной вершиной, а следовательно, цепь $u_1^i, \ldots, u_{n_i}^i$ не вкладывается в полученный граф. Граф $H - wv$ не является расширением для G.

Мы получили, что никакой граф, полученный удалением из H одного ребра, не является расширением графа G, а следовательно, граф H будет ТНР для графа G. □

На рис. 3, *а* представлен граф, удовлетворяющий условию теоремы 2, а на рис. 3, *б* — одно из его ТНР, построенное в соответствии с теоремой 2.



а *б*

Рис. 3

Следующая теорема решает задачу о построении ТНР для графов, являющихся объединением произвольного количества цепей и циклов.

Теорема 3. *Пусть граф G является объединением n циклов и m цепей произвольной длины: $G = \bigcup_{i=1}^{n} C_i \cup \bigcup_{j=1}^{m} P_j$. Пусть $H_i = C_i \cup \bigcup_{j=1}^{m} P_j$, $1 \le i \le n$. Тогда одним из ТНР для графа G будет объединение ТНР, построенных в соответствии с теоремой 1 или теоремой 2 для графов H_i.*

Доказательство. Пусть граф G является объединением n циклов и m цепей произвольной длины: $G = \bigcup_{i=1}^{n} C_i \cup \bigcup_{j=1}^{m} P_j$. Пусть $H_i = C_i \cup \bigcup_{j=1}^{m} P_j$, $1 \le i \le n$. Можно заметить, что $G = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$. Тогда нужно доказать, что $H = \bigcup_{i=1}^{n} \mathit{THP}_{1,2}(H_i)$, где H — одно из ТНР для G, а $\mathit{THP}_{1,2}(H_i)$ — функция, которая строит ТНР для графов в соответствии с теоремой 1 или теоремой 2. Доказательство теоремы производится с помощью метода математической индукции. Индукция по n — число циклов в графе.

Базис индукции: $n = 1$.

Пусть G является объединением одного цикла и m цепей произвольной длины. Тогда $G = H_1$, а $H = \mathit{THP}_{1,2}(H_1)$ — одно из ТНР для графа G. Данный частный случай рассматривается и доказывается в теоремах 1 и 2.

Предположение индукции:

Предположим, что условие теоремы выполнено для всех $k < n$, т. е. условие выполнено для графа G, являющемся объединением $n-1$ циклов и m цепей произвольной длины. Тогда $G = \bigcup_{i=1}^{n-1} H_i$, а $H = \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathit{THP}_{1,2}(H_i)$ — одно из ТНР для графа G.

Шаг индукции:

Докажем, что условие теоремы выполняется для $k = n$. Таким образом, $G = \bigcup_{i=1}^{n} H_i = \bigcup_{i=1}^{n-1} H_i \cup H_n$. Положим $G' = \bigcup_{i=1}^{n-1} H_i$ и $G'' = H_n$. Получим, что $G = G' \cup G''$. Построим $H = \bigcup_{i=1}^{n} \mathit{THP}_{1,2}(H_i) = \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathit{THP}_{1,2}(H_i) \cup \mathit{THP}_{1,2}(H_n)$, тогда $H = H' \cup H''$, где H' и H'' — ТНР для графов G' и G'' соответственно. Докажем, что H — одно из ТНР для G.

1. Покажем, что граф H является расширением графа G. Удалим произвольную вершину v из H. Тогда вершина v принадлежит либо множеству вершин графа H', либо множеству вершин графа H'' (так как $H = H' \cup H''$).

• Если вершина v принадлежит множеству вершин графа H', то цикл C_n вкладывается в граф $H - v$ (так как удаленная вершина принадлежит множеству вершин графа H', а вершины цикла C_n не принадлежат), а циклы $C_1, \ldots, C_{n-1}$ и цепи $P_1, \ldots, P_m$ вкладываются в граф $H - v$, так как H' является расширением для графа G', являющегося объединением циклов $C_1, \ldots, C_{n-1}$, и цепей $P_1, \ldots, P_m$.

• Если вершина v принадлежит множеству вершин графа H'', то циклы $C_1, \ldots, C_{n-1}$ вкладываются в граф $H - v$ (так как удаленная вершина принадлежит множеству вершин графа H'', а вершины циклов $C_1, \ldots, C_{n-1}$ не принадлежат), а цикл C_n и цепи $P_1, \ldots, P_m$ вкладываются в граф $H - v$, так как H'' является расширением для графа G'', являющегося объединением цикла C_n и цепей $P_1, \ldots, P_m$.

Мы получили, что при удалении произвольной вершины v из графа H граф G вкладывается в граф $H - v$, а значит, граф H является расширением графа G.

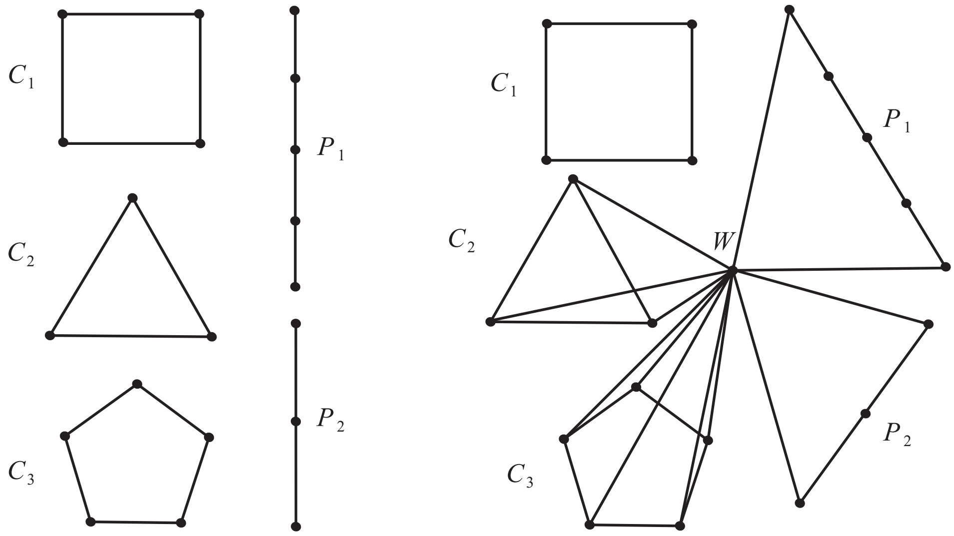
2. Докажем свойство неприводимости. Удалим произвольное ребро wv из H, где w — добавленная вершина. Тогда это ребро принадлежит либо множеству ребер графа H', либо множеству ребер графа H'' (так как $H = H' \cup H''$).

• Если ребро wv принадлежит множеству ребер графа H', то из графа $H - wv$ можно удалить такую вершину, принадлежащую множеству вершин графа H' (например, вершину, смежную с вершиной v), что граф $H - wv$ не являлся бы расширением для графа G. Это справедливо, так как граф H' является ТНР для графа G', являющегося объединением циклов $C_1, \ldots, C_{n-1}$, и цепей $P_1, \ldots, P_m$, а следовательно, при удалении произвольного ребра wv из графа H', граф $H' - wv$ не является расширением для G' и, значит, граф H не является расширением для G.

• Если ребро wv принадлежит множеству ребер графа H'', то из графа $H - wv$ можно удалить такую вершину, принадлежащую множеству вершин графа H'' (например, вершину, смежную с вершиной v), что граф $H - wv$ не являлся расширением для графа G. Это справедливо, так как граф H'' является ТНР для графа G'', являющегося объединением цикла C_n, и цепей $P_1, \ldots, P_m$, а следовательно, при удалении произвольного ребра wv из графа H'', граф $H'' - wv$ не является расширением для G'' и, значит, граф H не является расширением для G.

Мы получили, что никакой граф, полученный удалением из H одного ребра, не является расширением графа G, а следовательно, граф H будет ТНР для графа G. □

На рис. 4, *а* представлен граф, удовлетворяющий условию теоремы 3, а на рис. 4, *б* — одно из его ТНР, построенное в соответствии с теоремой 3.



а *б*

Рис. 4

Библиографический список

1. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М. : Наука, 1997. 368 с.
2. *Hayes P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. Vol. 25. P. 875–884.
3. *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения объединения некоторых графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 4. С. 3–11.
4. *Салий В. Н.* Доказательства с нулевым разглашением в задачах о расширениях графов // Вестн. Томск. гос. ун-та. 2001. Вып. 6. С. 63–65.
5. *Курносова С. Г.* Т-неприводимые расширения для некоторых классов графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 113–125.
6. *Осипов Д. Ю.* Т-неприводимые расширения для объединения цепей и циклов // Компьютерные науки и информационные технологии. Саратов : Издат. центр «Наука», 2012. С. 245–246.

T-irreducible Extension for Union of Paths and Cycles

D. U. Osipov

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, st_hill@mail.ru

A graph H with $n+1$ nodes is an extension of a graph G with n nodes if each maximal subgraph of H contains G. Trivial extension of a graph G is the connection of graph G and the singleton graph (i.e. we add one node to the graph G and this node join with each node of G). T-irreducible extension of graph G is an extension of the graph G which is obtained by removing maximal set of edges from the trivial extension of G. One of T-irreducible extensions is constructed for an arbitrary union of cycles and paths.

Key words: graph, T-irreducible extensions, union of paths and cycles.

References

1. Bogomolov A. M., Salii V. N. *Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem* [Algebraic foundations of the theory of discrete systems]. Moscow, Nauka, 1997, 368 p. (in Russian).
2. Hayes P. A graph model for fault-tolerant computing system. *IEEE Trans. Comput.*, 1976, vol. 25, pp. 875–884.
3. Abrosimov M. B. Minimal'nye rasshireniia ob"edineniia nekotorykh grafov [Minimal extensions for union of some graphs. *Teoreticheskie problemy informatiki i ee prilozhenii* [Theoretical Problems of Informatics and its applications]. Saratov, 2001, iss. 4, pp. 3–11 (in Russian).
4. Salii V. N. Zero knowledge proofs in problems on ex-

tensions of graphs. *Vestnik Tomskogo Gos. Univ.*, 2001, iss. 6, pp. 63–65 (in Russian).

5. Kurnosova S. G. T-neprivodimye rasshireniia dlia nekotorykh klassov grafov [T-irreducible extensions for some classes graphs]. *Teoreticheskie problemy informatiki i ee prilozhenii* [Theoretical Problems of Informatics and its applications]. Saratov, 2004, iss. 6, pp. 113–125 (in Russian).

6. Osipov D. Yu. T-neprivodimye rasshireniia dlia ob"edineniia tsepei i tsiklov [T-irreducible extensions for union of paths and cycles]. *Komp'iuternye nauki i informatsionnye tekhnologii*. Saratov, 2012, pp. 245–246 (in Russian).

УДК 519.7

ОБ ОЦЕНКЕ ДЛИНЫ СЛОВА, РАЗЛИЧАЮЩЕГО ДВЕ ВЕРШИНЫ ПОМЕЧЕННОГО НЕОРГРАФА

С. В. Сапунов

Кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, sapunov.sv@iamm.ac.donetsk.ua

Рассматривается задача различения вершин помеченного неорграфа по ассоциированным с ними языкам в алфавите меток. Показано, что верхняя оценка длины слова, различающего две вершины графа, равна половине от числа его вершин.

Ключевые слова: графы с помеченными вершинами, языки в алфавите меток вершин, различение вершин графа.

ВВЕДЕНИЕ

Основной проблемой теоретической кибернетики является проблема взаимодействия управляющей и управляемой систем (управляющего автомата и его операционной среды) [1, 2]. Взаимодействие таких систем зачастую представляется как процесс перемещения автомата по помеченному графу или лабиринту среды. Такое представление интенсивно развивается в работах В. Б. Кудрявцева и его школы [3]. Одной из центральных и актуальных как в теоретическом, так и в прикладном аспектах проблем, возникающих при исследованиях взаимодействия автоматов и графов, является проблема анализа или распознавания свойств графа при различной априорной информации и при различных способах взаимодействия автомата и графа. Один из подходов к решению проблемы анализа графа операционной среды основывается на том, что операционная среда рассматривается как граф с помеченными вершинами. Такие графы возникли первоначально как блок-схемы и схемы программ, а в настоящее время находят применение в задачах навигации роботов [4]. В монографии Ю. В. Капитоновой и А. А. Летичевского [2] с вершинами таких графов естественным образом связаны языки в алфавите меток вершин и показано, что эти языки регулярны и не содержат пустого слова.

В настоящей статье рассматривается задача различения вершин неориентированных графов с помеченными вершинами. Объектом анализа графа выбран язык, ассоциированный с вершиной, то есть множество всех последовательностей меток, соответствующих путям, исходящим из вершины. Ранее автором было найдена достижимая линейная оценка длины слова, различающего две вершины ориентированного помеченного графа, детерминированного по разметке окрестностей вершин [5]. В настоящей работе показано, что для неориентированного помеченного графа эта оценка может быть уменьшена вдвое.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Неопределяемые понятия общеизвестны и их можно найти, например, в [6].

Помеченным графом назовем конечный простой связный неориентированный граф с помеченными вершинами $G = (V, E, M, \mu)$, где V — множество вершин, $|V| = n$, E — множество ребер (т.е. неупорядоченных пар вершин), M — множество меток, $|M| = m$, $\mu : V \to M$ — сюръективная функция разметки вершин. Под окрестностью Γ_v вершины $v \in V$ будем понимать множество всех вершин, смежных с v. Путем в графе G назовем последовательность вершин $p = v_1 \ldots v_k$ такую, что $(v_i, v_{i+1}) \in E$, $i = 1, \ldots, k-1$. Число $k \in \mathbb{N}$ назовем длиной пути p. Меткой $\mu(p)$ пути p назовем слово $w = \mu(v_1) \ldots \mu(v_k)$ в алфавите меток M. Будем говорить, что слово w определяется вершиной v_1. Длину слова w будем обозначать через $d(w)$. Путь с меткой w, начинающейся в вершине v, будем обозначать $p(v, w)$. Инверсией слова $w = \mu(v_1) \ldots \mu(v_k)$ назовем слово $w^{-1} = \mu(v_k) \ldots \mu(v_1)$.

