References

1. Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M. P-adic multidimensional wavelets and their application to p-adic pseudo-differential operators. *Preprint*, 2006. Available at: http://arxiv.org/abs/math-ph/0612049 (accessed 28 September 2012).

2. Shelkovich V. M., Skopina M. A. P-adic Haar multiresolution analysis and pseudo-differential operators. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2009, vol. 15, no. 3, pp. 366–393.

3. Novikov I. Ya., Protasov V. Yu., Skopina M. A. *Wavelet Theory*. Translations Mathematical Monographs, vol. 239. New York, Amer. Math. Soc., 2011, 506 p.

4. King E. J., Skopina M. A. Quincunx Multiresolution Analysis for $L_2(\mathbb{Q}_2^2)$. *P-adic Numbers. Ultrametric Analysis and Applications*, 2010, vol. 2, no. 3, pp. 222–231.

5. Lukomskii S. F. Multiresolution analysis on product of zero-dimensional Abelian groups. *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, vol. 385, pp. 1162–1178.

6. Lukomskii S. F. Haar System on a product of zero-dimensional compact group. *Centr. Eur. J. Math.*, 2011, vol. 9, no. 3, pp. 627–639.

7. Agaev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzafarli G. M., Rubinstein A. I. *Mul'tiplikativnye sistemy funktsii i garmonicheskii analiz na nul'mernykh gruppakh* [Multiplicative Systems of Functions and Harmonic Analysis on Zero-Dimensional Groups]. Baku, Elm, 1981. 180 p. (in Russian).

8. Kargapolov M. I., Merzljakov Ju. I. *Fundamentajs of the Theory of Groups*. New York, Springer-Verlag, 1979, 203 p. (Russ. ed.: Kargapolov M. I., Merzljakov Ju. I. *Osnovy teorii grupp*. Moscow, Nauka, 1982. 288 p.)

9. Lukomskii S. F. Haar system on the product of groups of p-adic integer. *Math. Notes*, 2011, vol. 90, iss. 4, pp. 517–532.

УДК 517.927.25

О ДВУКРАТНОЙ ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СИЛЬНО НЕРЕГУЛЯРНОГО КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

О. В. Парфилова

Старший преподаватель кафедры информатики, Саратовская государственная юридическая академия,
Oksana_Parfilova@mail.ru

Рассматривается класс сильно нерегулярных пучков обыкновенных дифференциальных операторов 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Предполагается, что корни характеристического уравнения пучков этого класса лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, по разные стороны от него. Найден точный отрезок, на котором система собственных функций 2-кратно полна в пространстве суммируемых с квадратом функций.

Ключевые слова: квадратичный пучок, пучок второго порядка, пучок обыкновенных дифференциальных операторов, двухточечные краевые условия, однородное дифференциальное выражение с постоянными коэффициентами, кратная полнота системы собственных функций, кратная неполнота системы собственных функций.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный на конечном отрезке $[0,1]$ дифференциальным выражением:

$$l(y,\lambda) := y^{(2)} + \lambda p_1 y^{(1)} + \lambda^2 p_2 y$$

и двухточечными одородными краевыми условиями:

$$U_\nu(y,\lambda) := U_{\nu 0}(y,\lambda) + U_{\nu 1}(y,\lambda) := (\alpha_{\nu 1} y^{(1)}(0) + \lambda \alpha_{\nu 2} y(0)) + \\ + (\beta_{\nu 1} y^{(1)}(1) + \lambda \beta_{\nu 2} y(1)) = 0, \qquad \nu = 1,2, \tag{1}$$

где p_j, $\alpha_{\nu j}$, $\beta_{\nu j} \in \mathbb{C}$. В случае $\alpha_{\nu 1} = \beta_{\nu 1} = 0$ считаем, что краевое условие имеет вид

$$\alpha_{\nu 2} y(0) + \beta_{\nu 2} y(1) = 0.$$

Обозначим через ω_1, ω_2 корни характеристического уравнения $\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$ и предположим, что всюду далее выполняется основное предположение: корни ω_1, ω_2 различны, отличны от нуля и лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, по разные стороны от этого начала. Не нарушая общности, можно считать, что выполняется условие

1. $\omega_2 < 0 < \omega_1$.

Далее будет использоваться обозначение $\tau := |\omega_2|/\omega_1$. Ясно, что $\tau > 0$. Введем функции $y_1(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_1 x)$, $y_2(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_2 x)$. При $\lambda \neq 0$ эти функции являются линейно независимыми решениями уравнения $l(y,\lambda) = 0$.

Для определенности считаем, что в (1) $\alpha_{\nu 1} \neq 0$ или $\beta_{\nu 1} \neq 0$, $\nu = 1, 2$. В остальных случаях рассуждения принципиально не отличаются.

Введем следующие обозначения: $v_{\nu j} = U_{\nu 0}(y_j,\lambda)/\lambda = \alpha_{\nu 1}\omega_j + \alpha_{\nu 2}$, $w_{\nu j} = \exp(-\lambda\omega_j) \times \times U_{\nu 1}(y_j,\lambda)/\lambda = \beta_{\nu 1}\omega_j + \beta_{\nu 2}$ $(\nu, j = 1, 2)$, и $V_j = (v_{1j}, v_{2j})^T$, $W_j = (w_{1j}, w_{2j})^T$ $(j = 1, 2)$. Пусть $a_{sk} = \det(W_s, W_k)$, $a_{\overline{s}k} = \det(V_s, W_k)$, $a_{s\overline{k}} = \det(W_s, V_k)$, $a_{\overline{s}\overline{k}} = \det(V_s, V_k)$.

Характеристический определитель пучка имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1,\lambda) & U_1(y_2,\lambda) \\ U_2(y_1,\lambda) & U_2(y_2,\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} v_{11} + e^{\lambda\omega_1} w_{11} & v_{12} + e^{\lambda\omega_2} w_{12} \\ v_{21} + e^{\lambda\omega_1} w_{21} & v_{22} + e^{\lambda\omega_2} w_{22} \end{vmatrix} =$$
$$= \lambda^2 \left(a_{\overline{1}\overline{2}} + e^{\lambda\omega_1} a_{1\overline{2}} + e^{\lambda\omega_2} a_{\overline{1}2} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)} a_{12} \right) = \lambda^2 \Delta_0(\lambda).$$

Предположим, что всюду в дальнейшем выполняется условие

2. $a_{12} \neq 0$, $a_{\overline{1}\overline{2}} \neq 0$, $a_{\overline{1}2} = a_{1\overline{2}} = 0$.

При этом условии получим:

$$\Delta_0(\lambda) = a_{\overline{1}\overline{2}} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)} a_{12}. \tag{2}$$

Следовательно, рассматриваемый пучок не является нормальным по терминологии А. А. Шкаликова [1]. Такие пучки называются сильно нерегулярными. Для таких пучков актуальной является задача нахождения условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует 2-кратная полнота системы собственных функций (с. ф.) пучка $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,1]$. При отсутствии такой полноты естественно ставить вопрос о 2-кратной полноте в пространствах $L_2[0,\sigma]$ при $0 < \sigma < 1$ или об однократной полноте в пространстве $L_2[0,1]$, а также в пространствах $L_2[0,\sigma]$ при $0 < \sigma < 1$. В данной статье найден точный отрезок $[0,\widehat{\sigma}]$, на котором имеет место 2-кратная полнота в пространстве $L_2[0,\widehat{\sigma}]$.

Отметим, что в случае $0 < \omega_1 < \omega_2$ при условии $a_{1\overline{2}} \neq 0$, $a_{\overline{1}2} \neq 0$, $a_{\overline{1}\overline{2}} = a_{12} = 0$ свойства с. ф. детально исследовались в статье [2], а при условии $a_{\overline{1}\overline{2}} \neq 0$, $a_{1\overline{2}} \neq 0$, $a_{\overline{1}2} = a_{12} = 0$ — в [3]. В случае же $\omega_2 < 0 < \omega_1$ и выполнении условия $a_{\overline{1}\overline{2}} \neq 0$, $a_{1\overline{2}} \neq 0$, $a_{\overline{1}2} = a_{12} = 0$ двукратная полнота системы с. ф. пучка $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,\sigma]$ детально исследовалась в [4] и анонсировалась в [5].

Из (2) следует, что уравнение $\Delta_0(\lambda) = 0$ имеет счетное число корней, которые выражаются следующим образом:

$$\lambda_k = (2k\pi i + d_0)/(\omega_1 + \omega_2), \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

где $d_0 = \ln_0 c_0$ ($\ln_0$ есть фиксированная ветвь натурального логарифма, такая, что $\ln_0 1 = 0$), $c_0 := -a_{\overline{1}\overline{2}}/a_{12}$. Обозначим $\Lambda := \{\lambda_k : k \in \mathbb{Z}\}$. Очевидно, $\Lambda \setminus \{0\}$ есть множество ненулевых собственных значений (с. з.) пучка $L(\lambda)$, которые являются простыми. Точка $\lambda = 0$ может быть с. з., а может и не быть, даже если $0 \in \Lambda$. Имеет место равенство

$$e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)} = c_0, \qquad \lambda \in \Lambda. \tag{4}$$

Далее будет использоваться понятие порождающей функции для системы с. ф. пучка $L(\lambda)$, соответствующих ненулевым с. з. В случае простых с. з. (а именно этот случай рассматривается далее) будем называть функцию $y(x,\lambda)$ *порождающей* для системы с. ф. пучка $L(\lambda)$, если функции $y(x,\lambda_k)$, где λ_k есть ненулевое с. з., являются с. ф. пучка $L(\lambda)$.

Лемма 1. *Если выполняются условия* 1, 2, *то функция*

$$y(x,\lambda) = e^{\lambda\omega_1 x} + b_0 e^{\lambda(\omega_2 x + \omega_1)}, \tag{5}$$

где $b_0 = a_{12}/a_{\overline{2}\overline{2}} \neq 0$, *является порождающей для системы с. ф. пучка* $L(\lambda)$, *соответствующих ненулевым с. з.*

Доказательство. Будем брать в качестве порождающих функций для системы с. ф. пучка $L(\lambda)$ функции, рассмотренные в [6]:

$$\gamma(x,\lambda,\Gamma) = \begin{vmatrix} 0 & y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) \\ -\Gamma & V_1 + e^{\lambda\omega_1}W_1 & V_2 + e^{\lambda\omega_2}W_2 \end{vmatrix}, \quad \lambda \neq 0, \tag{6}$$

где вектор $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)^T \neq 0$ является параметром. Используем в качестве Γ векторы V_1, V_2, W_1, W_2, как предложено в [6].

Распишем (6), раскладывая определитель по первой строке:

$$\gamma(x,\lambda,\Gamma) = -y_1(x,\lambda)|-\Gamma, V_2 + e^{\lambda\omega_2}W_2| + y_2(x,\lambda)\left|-\Gamma, V_1 + e^{\lambda\omega_1}W_1\right| = e^{\lambda\omega_1 x}|\Gamma, V_2| +$$
$$+ e^{\lambda\omega_1 x}\left|\Gamma, e^{\lambda\omega_2}W_2\right| + e^{\lambda\omega_2 x}|-\Gamma, V_1| + e^{\lambda\omega_2 x}\left|-\Gamma, e^{\lambda\omega_1}W_1\right| = e^{\lambda\omega_1 x}|\Gamma, V_2| + e^{\lambda(\omega_1 x + \omega_2)}|\Gamma, W_2| +$$
$$+ e^{\lambda\omega_2 x}|V_1, \Gamma| + e^{\lambda(\omega_2 x + \omega_1)}|W_1, \Gamma|. \tag{7}$$

Возьмем, например, $\Gamma = W_2$. Тогда получим:

$$\gamma(x,\lambda,W_2) = e^{\lambda\omega_1 x}|W_2, V_2| + e^{\lambda(\omega_1 x + \omega_2)}|W_2, W_2| + e^{\lambda\omega_2 x}|V_1, W_2| + e^{\lambda(\omega_2 x + \omega_1)}|W_1, W_2| =$$
$$= e^{\lambda\omega_1 x}|W_2, V_2| + e^{\lambda(\omega_2 x + \omega_1)}|W_1, W_2| = e^{\lambda\omega_1 x}a_{2\overline{2}} + e^{\lambda(\omega_2 x + \omega_1)}a_{12}. \tag{8}$$

Покажем, что $a_{2\overline{2}} \neq 0$. Так как в силу 2 имеем $a_{\overline{1}2} = 0$ или, что то же самое, $|V_1 W_2| = 0$, то существует $(\gamma_1, \gamma_2) \neq (0,0)$ такие, что $\gamma_1 V_1 + \gamma_2 W_2 = 0$. Если бы $\gamma_1 = 0$, то тогда $\gamma_2 \neq 0$ (иначе $(\gamma_1, \gamma_2) = (0,0)$) и получили бы, что $W_2 = 0$. Но это противоречит условию 2, так как получили бы $a_{12} = |W_1 W_2| = 0$. Таким образом, $\gamma_1 \neq 0$ и, следовательно, $V_1 = cW_2$, где $c = -\gamma_2/\gamma_1$. Так как в силу 2 имеем $a_{\overline{1}\overline{2}} = |V_1 V_2| \neq 0$, то с учетом этого получим $0 \neq |V_1 V_2| = c|W_2 V_2| = c a_{2\overline{2}}$. Отсюда следует, что $a_{2\overline{2}} \neq 0$.

Разделим обе части (8) на $a_{2\overline{2}}$. Таким образом, получим, что функция

$$y(x,\lambda) = \frac{1}{a_{2\overline{2}}}\gamma(x,\lambda,W_2) = e^{\lambda\omega_1 x} + b_0 e^{\lambda(\omega_2 x + \omega_1)},$$

где $b_0 = a_{12}/a_{2\overline{2}} \neq 0$, является порождающей для системы с. ф. рассматриваемого класса пучков. Лемма доказана.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ 2-КРАТНОЙ ПОЛНОТЫ

Пусть $Y_\Lambda = \{y(x,\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$. Если $\lambda = 0 \notin \Lambda$, то система Y_Λ совпадает с системой с. ф. пучка $L(\lambda)$, соответствующих ненулевым с. з. Исследуем 2-кратную полноту системы Y_Λ в пространстве $L_2[0,\sigma]$, $\sigma > 0$. Скалярное произведение в пространстве $L_2^2[0,\sigma] := L_2[0,\sigma] \oplus L_2[0,\sigma]$ будем обозначать $\langle \widehat{g}, \widehat{h}\rangle_2 := \langle g_1, h_1\rangle + \langle g_2, h_2\rangle$, где $\widehat{g} = (g_1, g_2)$, $\widehat{h} = (h_1, h_2)$, $\langle g_j, h_j\rangle := \int\limits_0^\sigma g_j(x)\overline{h_j(x)}dx$, $j = 1, 2$.

Пусть $\widehat{y}(x,\lambda) := (y(x,\lambda), \lambda y(x,\lambda))$, где $y(x,\lambda)$ определяется формулой (5), а $\widehat{f}(x) := (\overline{f_1}, \overline{f_2})$, где $f_1, f_2 \in L_2[0,\sigma]$. Справедлива лемма.

Лемма 2. *Если выполняются условия* 1, 2, $\tau > 1$, *то для всех* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *имеет место соотношение*

$$\langle \widehat{y}(\cdot,\lambda), \widehat{f}\rangle_2 = \left(e^{\lambda\omega_1\sigma} + b_0 e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2\sigma)}\right)\widetilde{f}_1(\sigma) + \lambda\left(\int\limits_{\frac{\sigma}{1-\tau}}^{0} e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)x}(\tau - 1)F_1((1-\tau)x)\,dx + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{\frac{1}{1-\tau}}^{\frac{1-\sigma\tau}{1-\tau}} b_0 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)x}\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)F_2\left(\frac{1+(\tau-1)x}{\tau}\right)dx\right), \tag{9}$$

где $\widetilde{f}_1(x) := \int\limits_0^x f_1(\xi)d\xi$, $F_1(x) := f_2(x) - \omega_1\widetilde{f}_1(x)$, $F_2(x) := f_2(x) - \omega_2\widetilde{f}_1(x)$.

Доказательство. Интегрируя по частям один раз члены, не содержащие множителя λ, получим при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$\langle \widehat{y}(\cdot,\lambda), \widehat{f}\rangle_2 = \int\limits_0^\sigma \left(e^{\lambda\omega_1 x} + b_0 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2 x)}\right) f_1(x)\,dx + \lambda \int\limits_0^\sigma \left(e^{\lambda\omega_1 x} + b_0 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2 x)}\right) f_2(x)\,dx =$$

$$= \left(e^{\lambda\omega_1 \sigma} + b_0 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2 \sigma)}\right) \widetilde{f}_1(\sigma) - \lambda \int\limits_0^\sigma \left(\omega_1 e^{\lambda\omega_1 x} + b_0\omega_2 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2 x)}\right) \widetilde{f}_1(x)\,dx +$$

$$+\lambda \int\limits_0^\sigma \left(e^{\lambda\omega_1 x} + b_0 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2 x)}\right) f_2(x) dx = \left(e^{\lambda\omega_1 \sigma} + b_0 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2 \sigma)}\right) \widetilde{f}_1(\sigma) +$$

$$+\lambda \left(\int\limits_0^\sigma e^{\lambda\omega_1 x} F_1(x) dx + \int\limits_0^\sigma e^{\lambda(\omega_1+\omega_2 x)} b_0 F_2(x) dx \right).$$

Учитывая предположение леммы о том, что $\tau > 1$, т.е. $0 < \omega_1 < |\omega_2|$, в интегралах справа делаем следующие замены переменных:

1) $\omega_1 x = (\omega_1+\omega_2)\xi$; $\xi = \dfrac{\omega_1 x}{\omega_1+\omega_2} = \dfrac{x}{1-\tau}$; $x \in [0,\sigma] \Rightarrow \xi \in \left[\dfrac{\sigma}{1-\tau}, 0\right]$.

2) $\omega_1 + \omega_2 x = (\omega_1+\omega_2)\xi$; $\xi = \dfrac{\omega_1+\omega_2 x}{(\omega_1+\omega_2)} = \dfrac{1-\tau x}{1-\tau}$; $x = \dfrac{1-(1-\tau)\xi}{\tau}$; $x \in [0,\sigma] \Rightarrow$ $\Rightarrow \xi \in \left[\dfrac{1-\tau\sigma}{1-\tau}, \dfrac{1}{1-\tau}\right]$.

Тогда

$$\langle \widehat{y}(\cdot,\lambda), \widehat{f}\rangle_2 = (e^{\lambda\omega_1\sigma} + b_0 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2\sigma)}) \widetilde{f}_1(\sigma) + \lambda \Bigg(\int\limits_0^{\frac{\sigma}{1-\tau}} e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)x} F_1((1-\tau)x)(1-\tau) dx +$$

$$+ \int\limits_{\frac{1}{1-\tau}}^{\frac{1-\sigma\tau}{1-\tau}} \frac{(\tau-1)}{\tau} b_0 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)x} F_2\left(\frac{1-(1-\tau)x}{\tau}\right) dx \Bigg) = (e^{\lambda\omega_1\sigma} + b_0 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2\sigma)}) \widetilde{f}_1(\sigma) +$$

$$+\lambda \Bigg(\int\limits_0^{\frac{\sigma}{1-\tau}} e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)x} F_1((1-\tau)x)(1-\tau) dx + \int\limits_{\frac{1}{1-\tau}}^{\frac{1-\sigma\tau}{1-\tau}} \frac{(\tau-1)}{\tau} b_0 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)x} F_2\left(\frac{1+(\tau-1)x}{\tau}\right) dx \Bigg) =$$

$$= (e^{\lambda\omega_1\sigma} + b_0 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2\sigma)}) \widetilde{f}_1(\sigma) + \lambda \Bigg(\int\limits_{\frac{\sigma}{1-\tau}}^{0} e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)x} F_1((1-\tau)x)(\tau-1) dx +$$

$$+ \int\limits_{\frac{1}{1-\tau}}^{\frac{1-\sigma\tau}{1-\tau}} \frac{(\tau-1)}{\tau} b_0 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)x} F_2\left(\frac{1+(\tau-1)x}{\tau}\right) dx \Bigg)$$

и лемма доказана.

Теорема 1. *Предположим, что выполняются условия* 1, 2 *и* $\tau \geq 2$. *Тогда при* $\sigma = \widehat{\sigma} := \dfrac{1}{1+\tau}$ *система* Y_Λ *двукратно полна в пространстве* $L_2[0,\widehat{\sigma}]$ *с возможным дефектом, не превосходящим* 1.

Доказательство. При доказательстве будем пользоваться леммой 2. Система функций $\{e^{2k\pi i x}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ полна на любом единичном отрезке, в частности, на отрезке $[-1,0]$.

Покажем, что при $\tau \geq 2$ и $\sigma \leq \dfrac{1}{1+\tau}$ выполняются включения $\left[\dfrac{\sigma}{1-\tau}, 0\right] \subset [-1,0]$ и $\left[\dfrac{1}{1-\tau}, \dfrac{1-\sigma\tau}{1-\tau}\right] \subset [-1,0]$. В самом деле, условие $\dfrac{\sigma}{1-\tau} > -1$ равносильно $\dfrac{\tau-(\sigma+1)}{\tau-1} > 0$. Далее, условие $\dfrac{1}{1-\tau} \geq -1$ равносильно тому, что $\dfrac{\tau-2}{\tau-1} \geq 0$. Таким образом, условие выполняется при $\tau \geq 2$. При $\tau \geq 2$ условие $\sigma \leq \dfrac{1}{1+\tau}$ обеспечивает непересечение интервалов $\left[\dfrac{\sigma}{1-\tau}, 0\right]$ и $\left[\dfrac{1}{1-\tau}, \dfrac{1-\sigma\tau}{1-\tau}\right]$. При $\sigma = \widehat{\sigma}$ имеем $\dfrac{1-\widehat{\sigma}\tau}{1-\tau} = \dfrac{\widehat{\sigma}}{1-\tau} =: \widetilde{\sigma}$.

Предположим, что $\widehat{f} \in L_2^2[0,\sigma]$ такова, что $\langle \widehat{y}(\cdot,\lambda), \widehat{f}\rangle_2 = 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$. В частности, если $0 \in \Lambda$, имеем $\widehat{y}(\cdot, 0) = (1+b_0, 0)$ и, значит, $(1+b_0)\int\limits_0^\sigma f_1(x)dx = 0$. Отсюда в случае $1+b_0 \neq 0$ получим $\int\limits_0^\sigma f_1(x)dx = \widetilde{f}_1(\sigma) = 0$.

Потребовав дополнительно выполнения условия $\langle \widehat{e_1}, \widehat{f}\rangle_2 = \int\limits_0^\sigma f_1(x)dx = 0$, где $\widehat{e_1} = (1,0)$, в случае $0 \notin \Lambda$ или в случае $0 \in \Lambda$, но когда $1 + b_0 = 0$ (это условие дает для системы Y_Λ дефект не больше 1), на основании леммы 2 получим:

$$\int\limits_{\widetilde{\sigma}}^{0} e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)x}(\tau-1)F_1((1-\tau)x)\,dx +$$
$$+ \int\limits_{\frac{1}{1-\tau}}^{\widetilde{\sigma}} b_0 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)x}\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)F_2\left(\frac{1+(\tau-1)x}{\tau}\right)dx = 0, \qquad \forall\ \lambda \in \Lambda \setminus \{0\},$$

или

$$\int\limits_{\frac{1}{1-\tau}}^{0} e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)\xi}F(\xi)d\xi = 0, \qquad \forall\ \lambda \in \Lambda \setminus \{0\}, \tag{10}$$

где

$$F(x) = \begin{cases} F_1((1-\tau)x)(\tau-1), & x \in [\widetilde{\sigma}, 0]\,, \\ b_0 F_2\left(\dfrac{1+(\tau-1)x}{\tau}\right)\left(\dfrac{\tau-1}{\tau}\right) & x \in \left[\dfrac{1}{1-\tau}, \widetilde{\sigma}\right]. \end{cases} \tag{11}$$

Пусть $0 \notin \Lambda$. Тогда $\Lambda = \Lambda\backslash\{0\}$ и так как система $\{e^{\lambda_k(\omega_1+\omega_2)x}\}$ полна на $[-1, 0]$, то $F(x) = 0$ для п.в. $x \in \left[\dfrac{1}{1-\tau}, 0\right]$. С учетом (11) и $(\tau-1) \neq 0$, $\dfrac{\tau-1}{\tau} \neq 0$ имеем:

$$\begin{cases} F_1((1-\tau)x) = 0, & x \in [\widetilde{\sigma}, 0]\,, \\ F_2\left(\dfrac{1+(\tau-1)x}{\tau}\right) = 0, & x \in \left[\dfrac{1}{1-\tau}, \widetilde{\sigma}\right]. \end{cases}$$

Делаем соответствующие замены в F_1 и F_2, получим:

$$\begin{cases} F_1(x) = 0, & x \in [0,\sigma], \\ F_2(x) = 0, & x \in [0,\sigma]. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} f_2(x) - \omega_1\widetilde{f}_1(x) = 0, & x \in [0,\sigma], \\ f_2(x) - \omega_2\widetilde{f}_1(x) = 0, & x \in [0,\sigma]. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} f_2(x) = 0, & x \in [0,\sigma], \\ \widetilde{f}_1(x) = 0, & x \in [0,\sigma] \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f_2(x) = 0, & x \in [0,\sigma], \\ f_1(x) = 0, & x \in [0,\sigma]. \end{cases}$$

Следовательно, есть 2-кратная полнота с дефектом, не превосходящим 1. В этом случае теорема доказана.

Предположим $0 \in \Lambda$. Это, в частности, означает, что $c_0 = 1$, $d_0 = 0$. Тогда $\Lambda\backslash\{0\} \neq \Lambda$, т. е. система $\{e^{\lambda_k(\omega_1+\omega_2)x} : \lambda_k \in \Lambda\backslash\{0\}\}$ не полна в $L_2[0,1]$.

Потребуем, чтобы $\int\limits_0^1 F(x)dx = 0$, что соответствует выполнению условия (10) при $\lambda = 0$. Будем иметь:

$$0 = \int\limits_{\frac{1}{1-\tau}}^{0} F(\xi)d\xi = \int\limits_{\widetilde{\sigma}}^{0} (\tau-1)F_1((1-\tau)\xi)\,d\xi + \int\limits_{\frac{1}{1-\tau}}^{\widetilde{\sigma}} b_0\frac{(\tau-1)}{\tau}F_2\left(\frac{1+(\tau-1)\xi}{\tau}\right)\,d\xi =$$

$$= \int\limits_0^{\sigma} F_1(x)dx + \int\limits_0^{\sigma} b_0F_2(x)\,dx = \int\limits_0^{\sigma} (f_2(x) - \omega_1\widetilde{f}_1(x))\,dx + \int\limits_0^{\sigma} b_0(f_2(x) - \omega_2\widetilde{f}_1(x))\,dx =$$

$$= (1+b_0)\int\limits_0^{\sigma} f_2(x)\,dx + (\omega_1 + b_0\omega_2)(1-\sigma)\int\limits_0^{\sigma} f_1(x)\,dx. \tag{12}$$

В случае $1 + b_0 = 0$ мы потребовали дополнительно выполнения условия $\int\limits_0^{\sigma} f_1(x)dx = 0$, и, таким образом, из (11) следует, что условие $\int\limits_{\frac{1}{1-\tau}}^{0} F(x)dx = 0$ выполняется в этом случае автоматически. Если же $1 + b_0 \neq 0$, то тогда автоматически выполняется условие $\int\limits_0^1 f_1(x)dx = 0$ и, следовательно, для выполнения (12) нужно потребовать дополнительно выполнения условия $\langle \widehat{e_2}, \widehat{f}\rangle_2 = \int\limits_0^{\sigma} f_2(x)dx = 0$, где $\widehat{e_2} = (0, 1)$. Таким образом, условие (10) будет иметь место $\forall\lambda \in \Lambda$, что приводит к соотношениям $f_1(x) = f_2(x) = 0$ для п.в. $x \in [0, \sigma]$. Аналогично обстоит дело и в случае, когда 0 не принадлежит Λ. При этом система Y_Λ может иметь дефект, не превосходящий 1. Тем самым, и в этом случае утверждение теоремы доказано.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия 1, 2 и* $\tau > 2$. *Тогда при* $\sigma > \dfrac{1}{1+\tau}$ *система* Y_Λ *двукратно неполна в пространстве* $L_2[0,\sigma]$ *и имеет в этом пространстве бесконечный дефект относительно двукратной полноты.*

Доказательство. Построим бесконечномерное подпространство функций $\widehat{f} = (\overline{f_1}, \overline{f_2}) \in L_2^2[0,\sigma]$, таких, что $\langle \widehat{y}(\cdot,\lambda), \widehat{f}\rangle_2 = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Так как $\Lambda \in \mathbb{C}$, то тем самым теорема будет доказана.

Не уменьшая общности, можно считать, $\dfrac{1}{1+\tau} < \sigma < \dfrac{1}{\tau}$ или $0 > \dfrac{1-\tau\sigma}{1-\tau} > \dfrac{\sigma}{1-\tau}$, так как из неполноты системы функций в $L_2[0,\sigma]$ следует неполнота этой системы в $L_2[0,\widetilde{\sigma}]$ для любого $\widetilde{\sigma} > \sigma$.

Предполагая $\widetilde{f}_1(\sigma) = 0$, из (9) получаем:

$$\langle \widehat{y}(\cdot,\lambda), \widehat{f}\rangle_2 = \lambda\left(\int\limits_{\frac{\sigma}{1-\tau}}^{0} e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)x}(\tau-1)F_1((1-\tau)x)\,dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\frac{1}{1-\tau}}^{\frac{1-\sigma\tau}{1-\tau}} b_0 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)x}\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)F_2\left(\frac{1+(\tau-1)x}{\tau}\right)\,dx\right) =$$

$$= \lambda\left(\int\limits_{\frac{1}{1-\tau}}^{\frac{\sigma}{1-\tau}} b_0\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)x}F_2\left(\frac{1+(\tau-1)x}{\tau}\right)\,dx + \right.$$

$$+ \int\limits_{\frac{\sigma}{1-\tau}}^{\frac{1-\sigma\tau}{1-\tau}} b_0\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)x}F_2\left(\frac{1+(\tau-1)x}{\tau}\right)\,dx +$$

$$+\int\limits_{\frac{\sigma}{1-\tau}}^{\frac{1-\tau\sigma}{1-\tau}} e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)x}(\tau-1)F_1((1-\tau)x)\,dx+\int\limits_{\frac{1-\tau\sigma}{1-\tau}}^{0} e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)x}(\tau-1)F_1((1-\tau)x)\,dx\Bigg). \qquad (13)$$

Для того чтобы $\langle\widehat{y}(\cdot,\lambda),\widehat{f}\rangle_2=0$ для всех $\lambda\in\mathbb{C}$, достаточно обеспечить выполнение равенств:

$$F_1((1-\tau)x)=0, \qquad x\in\left[\frac{1-\sigma\tau}{1-\tau},0\right], \qquad (14)$$

$$F_1((1-\tau)x)+b_0\frac{1}{\tau}F_2\left(\frac{1+(\tau-1)x}{\tau}\right)=0, \qquad x\in\left[\frac{\sigma}{1-\tau},\frac{1-\sigma\tau}{1-\tau}\right], \qquad (15)$$

$$F_2\left(\frac{1+(\tau-1)x}{\tau}\right)=0, \qquad x\in\left[\frac{1}{1-\tau},\frac{\sigma}{1-\tau}\right]. \qquad (16)$$

Сделаем замену переменных $x_1=(1-\tau)x$:

$$F_1(x_1)=0, \qquad x_1\in[0,1-\sigma\tau], \qquad (17)$$

$$F_1(x_1)+b_0\frac{1}{\tau}F_2\left(\frac{1-x_1}{\tau}\right)=0, \qquad x_1\in(1-\sigma\tau,\sigma], \qquad (18)$$

$$F_2\left(\frac{1-x_1}{\tau}\right)=0, \qquad x_1\in(\sigma,1]. \qquad (19)$$

Построим функции $f_1,f_2\in L_2[0,\sigma]$, для которых справедливы равенства (14)–(16). Обозначим $\sigma_1:=1-\tau\sigma$, $\sigma_2:=(1-\sigma)/\tau$. Для $\tau>2$ справедливо соотношение

$$\sigma_2-\sigma_1=\frac{1-\sigma}{\tau}-(1-\tau\sigma)=\frac{1-\sigma}{\tau}-\frac{(\tau-\tau^2\sigma)}{\tau}=\frac{1-\sigma-\tau+\tau^2\sigma}{\tau}=\frac{1}{\tau}(\tau^2\sigma-\tau+(1-\sigma))=$$
$$=\frac{1}{\tau}((1-\tau)+\sigma(\tau^2-1))=\frac{1}{\tau}(\tau^2-1)\left(-\frac{1}{(1+\tau)}+\sigma\right)=\frac{1}{\tau}(\tau^2-1)\left(\sigma-\frac{1}{1+\tau}\right)>0,$$

т. е. в этом случае выполняются неравенства $\sigma_1<\sigma_2<\sigma$.

Пусть $h\in C^1[\sigma_2,\sigma]$ есть произвольная функция, такая, что

$$h(\sigma_2+0)=h'(\sigma_2+0)=h(\sigma-0)=h'(\sigma-0)=0.$$

Положим $h_1(x):=h(x)$ при $x\in[\sigma_2,\sigma]$, $H(x):=0$ при $x\in[\sigma_1,\sigma_2]\cup[\sigma,1]$ и $H(x):=h(x)$ при $x\in(\sigma_2,\sigma]$, $h_2(x):=-\dfrac{\tau}{b_0}H(1-\tau x)$ при $x\in[\sigma_2,\sigma]$.

Определим теперь функции f_1 и f_2 формулами

$$f_1(x)\equiv f_2(x)\equiv 0, \quad x\in[0,\sigma_2],$$
$$f_1(x)=\frac{h_2'(x)-h_1'(x)}{\omega_1-\omega_2}, \qquad f_2(x)=\frac{\omega_1h_2(x)-\omega_2h_1(x)}{\omega_1-\omega_2}, \qquad x\in(\sigma_2,\sigma]. \qquad (20)$$

Очевидно, множество вектор-функций $\widehat{f}=(\overline{f_1},\overline{f_2})$ образует бесконечномерное подпространство. Покажем, что так построенные вектор-функции $\widehat{f}$ — искомые. Очевидно, для функции $\widetilde{f}_1(x):=\int\limits_0^x f_1(\xi)d\xi$ справедливы тождества

$$\widetilde{f}_1(x)\equiv 0, \qquad x\in[0,\sigma_2], \qquad \widetilde{f}_1(x)\equiv\frac{h_2(x)-h_1(x)}{\omega_1-\omega_2}, \qquad x\in(\sigma_2,\sigma]. \qquad (21)$$

Следовательно,

$$\widetilde{f}_1(\sigma)=\frac{h_2(\sigma)-h_1(\sigma)}{\omega_1-\omega_2}=\frac{1}{\omega_1-\omega_2}\left(-\frac{\tau}{b_0}H(\sigma_1)-h(\sigma)\right)=0.$$

Проверим справедливость равенств (17)–(19). Обозначим для краткости $\xi=(1-x)/\tau$, откуда $x=1-\tau\xi$. Пусть $x\in[0,\sigma_1]$, тогда в силу (20) и (21) $F_1(x)=f_2(x)-\omega_1\widetilde{f}_1(x)=0$, т. е. равенство (19) выполняется.

При $x \in (\sigma_1, \sigma_2]$, что эквивалентно $\xi \in [(1-\sigma_2)/\tau) \subset [\sigma_2, \sigma]$, в силу (20) и (21) получаем:

$$F_1(x) + \frac{1}{\tau} b_0 F_2(\xi) = (f_2(x) - \omega_1 \widetilde{f}_1(x)) + \frac{1}{\tau} b_0 (f_2(\xi) - \omega_2 \widetilde{f}_1(\xi)) = \frac{1}{\tau} b_0 (f_2(\xi) - \omega_2 \widetilde{f}_1(\xi)) = \\ = \frac{1}{\tau} b_0 h_2(\xi) = -H(x) = 0.$$

При $x \in (\sigma_2, \sigma]$, что эквивалентно $\xi \in [\sigma_2, (1-\sigma_2)/\tau)$, имеем аналогично

$$F_1(x) + \frac{1}{\tau} b_0 F_2(\xi) = (f_2(x) - \omega_1 \widetilde{f}_1(x)) + \frac{1}{\tau} b_0 (f_2(\xi) - \omega_2 \widetilde{f}_1(\xi)) = \\ = \left(\frac{\omega_1 h_2(x) - \omega_2 h_1(x)}{\omega_1 - \omega_2} - \omega_1 \frac{h_2(x) - h_1(x)}{\omega_1 - \omega_2} \right) + \\ + \frac{1}{\tau} b_0 h_2(\xi) = h_1(x) + \frac{1}{\tau} b_0 h_2(\xi) = h(x) - H(x) = h(x) - h(x) = 0.$$

Таким образом, равенство (18) также выполняется. Наконец, при $x \in (\sigma, 1]$, что эквивалентно $\xi \in [0, \sigma_2]$, в силу (20) и (21) имеем:

$$F_2(\xi) = f_2(\xi) - \omega_2 \widetilde{f}_1(\xi) = 0,$$

тем самым, (19) доказано. Теорема доказана.

3. ПРИМЕР

Теорема 1 применима, например, для следующего пучка:

$$y^{(2)} + \lambda p_1 y^{(1)} + \lambda^2 p_2 y,$$
$$\begin{cases} y'(0) + y'(1) = 0, \\ 2\lambda y(0) + y'(1) - 2\lambda y(1) = 0. \end{cases}$$

В этом случае $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = -2$ и, следовательно, выполняется условие 1, при этом $\tau = 2$. Так как в рассматриваемом примере $\alpha_{11} = \beta_{11} = \beta_{21} = 1$, $\alpha_{12} = \alpha_{21} = \beta_{12} = 0$, $\alpha_{22} = 2$, $\beta_{22} = -2$, то характеристический определитель пучка примет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1, \lambda) & U_1(y_2, \lambda) \\ U_2(y_1, \lambda) & U_2(y_2, \lambda) \end{vmatrix} = 2\lambda^2 \begin{vmatrix} 1 + e^{\lambda} & -1 - e^{-2\lambda} \\ 2 - e^{\lambda} & 1 - 2e^{-2\lambda} \end{vmatrix} = \\ = 2\lambda^2 \left((1 + e^{\lambda})(1 - 2e^{-2\lambda}) + (1 + e^{2\lambda})(2 - e^{\lambda}) \right) = 2\lambda^2 (3 - 3e^{-\lambda}),$$

т. е. выполняется условие 2. Имеем $\widehat{\sigma} = 1/3$. Тогда по теореме 1 система Y_Λ двукратно полна в пространстве $L_2[0, 1/3]$. А в случае $\sigma > 1/3$ по теореме 2 система Y_Λ двукратно не полна в пространстве $L_2[0, \sigma]$ с бесконечным дефектом относительно двукратной полноты.

Библиографический список

1. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1983. Вып. 9. С. 190–229.

2. *Рыхлов В. С.* О полноте собственных функций квадратичных пучков обыкновенных дифференциальных операторов // Изв. вузов. Математика. 1992. Т. 36, № 3. С. 35–44.

3. *Рыхлов В. С.* О свойствах собственных функций обыкновенного дифференциального квадратичного пучка второго порядка // Интегральные преобразования и специальные функции. Информ. бюл. 2001. Т. 2, № 1. С. 85–103.

4. *Рыхлов В. С.* О двукратной полноте собственных функций одного квадратичного пучка дифференциальных операторов второго порядка // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. 2009. Т. 6, № 1. С. 237–249.

5. *Рыхлов В. С.* О полноте собственных функций дифференциального пучка второго порядка, корни характеристического уравнения которого лежат на одной прямой // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 88–91.

6. *Rykhlov V. S.* On completeness of eigenfunctions for pencils of differential operators // Spectral and Evolutional Problems : Proc. of the Seventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Simferopol, 1997. Vol. 7. P. 70–73.

On 2-fold Completeness of the Eigenfunctions for the Strongly Irregular Quadratic Pencil of Differential Operators of Second Order

O. V. Parfilova

Saratov State Law Academy, Russia, 410056, Saratov, Volskaya st., 1, Oksana_Parfilova@mail.ru

A class of strongly irregular pencils of ordinary differential operators of second order with constant coefficients is considered. The roots of the characteristic equation of the pencils from this class are supposed to lie on a straight line coming through the origin and on the both side of the origin. Exact interval on which the system of eigenfunctions is 2-fold complete in the space of square summable functions is finded.

Key words: quadratic pencil, second order pencil, pencil of ordinary differential operators, two-point boundary conditions, homogeneous differential expression with constant coefficients, completeness of the system of eigenfunctions, non-completeness of the system of eigenfunctions.

References

1. Shkalikov A. A. Boundary value problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions *J. of Math. Sciences*, 1986, vol. 33, iss. 6, pp. 1311–1342.

2. Rykhlov V. S. On completeness of eigenfunctions of quadratic penciles of ordinary differential operators. *Russian Math.* [Izv. VUZ. Matematika], 1992, vol. 36, no. 3, pp. 33–42.

3. Rykhlov V. S. On properties of eigenfunctions of ordinary differential quadratic pencil of the second order. *Integral Transforms and Special Functions. Inform. Byulleten*, 2001, vol. 2, no. 1, pp. 85–103 (in Russian).

4. Rykhlov V. S. Double completeness of eigenfunctions of a quadratic pencil of second order differential operators. *Zbirnik prats' In-tu matematiki NAN Ukraini*, 2009, vol. 6, no. 1, pp. 237–249 (in Russian).

5. Rykhlov V. S. O polnote sobstvennykh funktsii differentsial'nogo puchka vtorogo poriadka, korni kharakteristicheskogo uravneniia kotorogo lezhat na odnoi priamoi [On completeness of eigenfunctions of a differential pencil of the second order the roots of the characteristic equation of which lie on a straight line]. *Matematika. Mehanika*. Saratov, 2007, iss. 9, pp. 88–91 (in Russian).

6. Rykhlov V. S. On completeness of eigenfunctions for pencils of differential operators. *Spectral and Evolutional Problems : Proc. of the Seventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium*. Simferopol, 1997, vol. 7, pp. 70–73 (in Russian).

УДК 517.9

О СТРУКТУРЕ ОПЕРАТОРА, ОБРАТНОГО К ИНТЕГРАЛЬНОМУ ОПЕРАТОРУ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

В. Е. Струков

Аспирант кафедры математических методов исследования операций, Воронежский государственный университет, sv.post.of.chaos@gmail.com

В статье рассматривается алгебра с единицей, порожденная интегральными операторами, действующими в пространствах непрерывных периодических функций. Доказывается наполненность этой подалгебры в алгебре всех линейных ограниченных операторов.

Ключевые слова: банахово пространство, интегральный оператор, теорема Бохнера–Филлипса, ряд Фурье оператора, наполненность подалгебры, винеровская пара алгебр.

Пусть $l^1(\mathbb{Z})$ — банахово пространство двусторонних суммируемых последовательностей $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ с нормой $\|a\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a(k)| < \infty$.

Символом $C(\mathbb{T})$ будем обозначать банахово пространство комплексных непрерывных функций, определенных на окружности $\mathbb{T} = \{\theta \in \mathbb{C} : |\theta| = 1\}$.

Будем говорить, что функция $f \in C(\mathbb{T})$ обладает *абсолютно сходящимся рядом Фурье*, если она может быть представлена в виде ряда $f(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(k)\theta^k$, $\theta \in \mathbb{T}$, где $a \in l^1(\mathbb{Z})$. Совокупность всех таких функций обозначим через $AC(\mathbb{T})$. Заметим, что $AC(\mathbb{T})$ является банаховой алгеброй с поточечным умножением и нормой

$$\|f\|_{AC} = \|a\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a(k)|.$$