Библиографический список

1. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М. : Наука, 1982. 256 с.

2. *Смирнова Д. С.* Модели многокритериальной оптимизации с частично упорядоченным множеством критериев // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы междунар. науч. конф. Саратов : Издат. центр «Наука», 2012. С. 293.

3. *Розен В. В.* Математические модели многокритериальной оптимизации по качественным критериям // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы междунар. науч. конф. Саратов : Издат. центр «Наука», 2012. С. 266.

Models of Multi-criteria Optimization with Quality Criteria

V. V. Rozen, D. S. Smirnova

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, Rozenvv@info.sgu.ru, smirnova@okean-kv.ru

We consider mathematical models of multi-criteria optimization with quality criteria. The main problem is a construction of preference relations on the set of alternatives and an investigation of its mathematical properties. Two methods for contraction of Pareto-optimal set are proposed. The first method is based on introduction of a partial order relation on the set of criteria and the second leans selection of the most important groups of criteria.

Key words: model of multi-criteria optimization, preference relation, Pareto-optimality, winning coalition of criteria.

References

1. Podinovskiy V. V., Noghin V. D. *Pareto-optimal'nye resheniia mnogokriterial'nykh zadach* [Pareto-optimal decisions of multi-criteria problems]. Moscow, Nauka, 1982, 256 p. (in Russian).
2. Smirnova D. S. Modeli mnogokriterial'noi optimizatsii s chastichno uporiadochennym mnozhestvom kriteriev [Models of multi-criteria optimizations with partially ordered set of criteria]. *Komp'iuternye nauki i informatsionnye tekhnologii : materialy mezhdunar. nauch. konf.*, Saratov, 2012, pp. 293 (in Russian).
3. Rozen V. V. Matematicheskie modeli mnogokriterial'noi optimizatsii po kachestvennym kriteriiam [Mathematical models of multi-criteria optimization under quality criteria]. *Komp'iuternye nauki i informatsionnye tekhnologii : materialy mezhdunar. nauch. konf.* Saratov, 2012. pp. 266 (in Russian).

УДК 519.17

УПОРЯДОЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО СВЯЗНЫХ ЧАСТЕЙ МНОГОУГОЛЬНОГО ГРАФА

В. Н. Салий

Кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, профессор, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, SaliiVN@info.sgu.ru

Под многоугольным графом понимается ориентированный граф, полученный из цикла путем некоторой ориентации его ребер. Множество абстрактных (т. е. рассматриваемых с точностью до изоморфизма) связных частей многоугольного графа упорядочивается отношением вложимости графов. Получено описание многоугольных графов, для которых это упорядоченное множество является решеткой.

Ключевые слова: многоугольный граф, линейный граф, двоичный вектор, двойственность, упорядоченное множество, решетка.

Под *графом* понимается пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество и $\alpha \subseteq V \times V$ — отношение на нем. Элементы множества V называются *вершинами* графа, а пары, входящие в отношение смежности α, — *дугами*.

Если $V' \subseteq V$ и $\alpha' \subseteq \alpha$, то граф $G' = (V', \alpha')$ называется *частью графа* G. В случае, когда $\alpha' = \alpha \cap (V' \times V')$, говорят, что G' является *подграфом* графа G.

Пусть $G = (V, \alpha)$ и $H = (U, \beta)$ — некоторые графы. *Вложение графа G в граф H* — это такое инъективное отображение $\varphi : V \to U$, что $(\forall\ v, v' \in V)((v, v') \in \alpha \implies (\varphi(v), \varphi(v')) \in \beta)$. Если

$(\forall\, v, v' \in V)((v, v') \in \alpha \iff (\varphi(v), \varphi(v')) \in \beta)$, то говорят, что φ — *сильное вложение G в H*. Биективное сильное вложение (фактически наложение) $\varphi : V \to U$ по определению является изоморфизмом графа G на граф H. С абстрактной точки зрения изоморфные графы не различаются, их интерпретируют как различные реализации одного и того же объекта. Если граф G вкладывается в граф H, то G изоморфен некоторой части графа H, а при сильном вложении — некоторому его подграфу.

Вершины v, v' графа G называются *связанными*, если $(\exists\; v_1, v_2, \ldots, v_k \in V)((v, v_1) \in \alpha \cup \alpha^{-1} \,\&\, (v_1, v_2) \in \alpha \cup \alpha^{-1} \,\&\, \ldots \,\&\, (v_k, v') \in \alpha \cup \alpha^{-1})$. Граф, в котором любые две вершины связаны, по определению является связным.

Маршрутом с началом v и концом v' называется последовательность примыкающих дуг (v, v_1), $(v_1, v_2), \ldots, (v_k, v')$. Маршрут можно представить в виде перечисления проходимых вдоль него вершин: $vv_1v_2 \ldots v_kv'$. *Цепь* — это маршрут, в котором все вершины разные. Цепь, состоящую из n дуг, обозначим через P_n и будем использовать ее стандартную запись $P_n = v_0v_1 \ldots v_n$. Если «склеить» концы цепи, получим n-звенный (n-вершинный) контур, который будем записывать в виде $C_n = v_1v_2 \ldots v_{n-1}v_1$, считая v_1 выбранной начальной вершиной.

Под *линейным графом* длины n понимается всякий граф L, полученный переориентацией некоторых дуг цепи P_n. *Многоугольным графом* порядка n называется всякий граф M, полученный переориентацией некоторых дуг контура C_n (см. [1]).

Очевидно, что все связные части линейного графа являются его подграфами. В многоугольном графе M порядка n все связные собственные части с $\leq n-1$ вершинами будут линейными подграфами в M, если же из M удалить какую-нибудь дугу, то получится линейный граф, являющийся частью, но не подграфом графа M.

Для многоугольного графа M через $\mathrm{ASubc}\, M$ обозначим класс всех связных графов, допускающих вложение в M. Если $\mathbf{L} \in \mathrm{ASubc}\, M$, то это означает, что все графы из $\mathbf{L}$ изоморфны некоторой линейной части графа M или самому графу M. Класс $\mathrm{ASubc}\, M$ упорядочивается отношением вложимости: если $\mathbf{L}'$ и $\mathbf{L}''$ определяются соответственно линейными частями L' и L'' графа M, то $\mathbf{L}' \leq \mathbf{L}''$ по определению означает, что L' вкладывается в L''.

Нашей задачей будет выяснение вопроса о том, для каких многоугольных графов M упорядоченное множество $\mathrm{ASubc}\, M$ будет решеткой.

Для неориентированных (т. е. с симметричным и антирефлексивным отношением смежности) графов G близкие вопросы рассматривались различными авторами. Так, в [2] установлены некоторые общие свойства упорядоченных множеств вида $\mathrm{ASubc}\, G$. В [3] показано, что не для всякого G упорядоченное множество связных абстрактных подграфов будет шпернеровым. В [4] дана абстрактная характеризация упорядоченных множеств рассматриваемого вида. В [5] изучаются решеточные упорядочения на множестве $\mathrm{ASubc}\, G$. В других работах (см., например, [6, 7]) авторы отказываются от условия связности и исследуют упорядоченное множество всех вообще абстрактных подграфов данного неориентированного графа. В частности, в [7] доказано, что упорядоченное множество всех абстрактных подграфов неориентированного графа тогда и только тогда будет решеткой, когда либо сам этот граф, либо его дополнение представляет собой полный многодольный граф. В [8] автором были охарактеризованы линейные графы L, для которых упорядоченное множество $\mathrm{ASubc}\, L$ является решеткой. Настоящая работа существенно опирается на идеи и методы, предложенные в [8].

Пусть $\mathbf{b}$ — некоторый двоичный вектор. Двойственным для него называется вектор $\mathbf{b}^\delta$, получаемый из $\mathbf{b}$, если компоненты вектора $\mathbf{b}$ записать в обратном порядке, а затем взаимно заменить в компонентах нули и единицы, т. е. осуществить преобразование $\mathbf{b} \mapsto (\mathbf{b}^{-1})'$. Например, для $\mathbf{b} = 011100$ будет $\mathbf{b}^\delta = 110001$. Понятно, что $\mathbf{b}^{\delta\delta} = \mathbf{b}$.

Под отрезками вектора понимаются блоки, состоящие из подряд идущих компонент этого вектора. Через $\mathrm{ASubc}\, \mathbf{b}$ обозначим совокупность всех попарно не двойственных отрезков двоичного вектора $\mathbf{b}$. На множестве $\mathrm{ASubc}\, \mathbf{b}$ вводится порядок: $\mathbf{b}' \leq \mathbf{b}''$, если $\mathbf{b}'$ является отрезком в $\mathbf{b}''$ или в $\mathbf{b}''^\delta$.

Двоичными векторами естественным образом кодируются линейные и многоугольные графы. Линейному графу L длины n соотносится двоичный n-мерный вектор $\mathbf{b} = \mathbf{b}(L)$ путем сопоставления каждой дуге графа символа 1, если при переориентации цепи $P_n = v_0v_1 \ldots v_n$ в граф L эта дуга оказалась направленной от v_0 к v_n, и символа 0 в противном случае. Например, для $L = v_0 \leftarrow v_1 \leftarrow v_2 \to v_3 \to v_4 \leftarrow v_5$ будет $\mathbf{b}(L) = 00110$. С другой стороны, каждому n-мерному двоичному вектору $\mathbf{b}$ соответствует линейный граф $L = L(\mathbf{b})$ длины n, получающийся из цепи P_n переориентацией ее дуг, согласованной в вышеуказанном смысле со значениями компонент вектора $\mathbf{b}$. Так, для $\mathbf{b} = 1011$ будет $L(\mathbf{b}) = v_0 \to v_1 \leftarrow v_2 \to v_3 \to v_4$. Двоичным кодом для связного подграфа линейного графа L, очевидно, является отрезок вектора $\mathbf{b}(L)$ или двойственного. Заметим, что двойственные векторы являются кодами изоморфных линейных графов. Будем считать, что $\mathbf{b}(L)$ является лексикографически меньшим из них.

Пусть M — многоугольный граф, полученный из контура C_n переориентацией некоторых дуг. Выберем в C_n в качестве начальной вершины вершину v_1 и построим n-мерный двоичный вектор $\mathbf{b}^1$, полагая $\mathbf{b}^1_i = 1$, если $(v_i, v_{i+1}) \in \alpha$ в M, и $\mathbf{b}^1_i = 0$, если $(v_{i+1}, v_i) \in \alpha$ в M (сложение в индексах — по модулю n). Аналогично построим вектор $\mathbf{b}^2$, считая начальной вершиной v_2 и т.д. Выбрав из векторов $\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \ldots, \mathbf{b}^n$ лексикографически минимальный, сопоставим его графу M и обозначим через $\mathbf{b}(M)$. Например, для четырехугольного графа $M = v_1 \to v_2 \leftarrow v_3 \leftarrow v_4 \to v_1$ получим $\mathbf{b}^1 = 1001, \mathbf{b}^2 = 0011, \mathbf{b}^3 = 0110, \mathbf{b}^4 = 1100$, и значит, $\mathbf{b}(M) = 0011$. С другой стороны, каждому n-мерному вектору $\mathbf{b}$ соответствует n-угольный граф $M = M(\mathbf{b})$, получающийся из контура C_n переориентацией некоторых его дуг, согласованной в вышеуказанном смысле со значениями компонент вектора $\mathbf{b}$. Например, для $\mathbf{b} = 01001$ будет $M(\mathbf{b}) = v_1 \leftarrow v_2 \to v_3 \leftarrow v_4 \leftarrow v_5 \to v_1$.

Лемма. *Если M — многоугольный граф и $\mathbf{b}$ — соответствующий ему двоичный вектор, то упорядоченные множества ASubc M и ASubc $\mathbf{b}$ изоморфны.*

Доказательство. Между множествами ASubc M и ASubc $\mathbf{b}$ устанавливается взаимно однозначное соответствие $L \mapsto \mathbf{b}(L)$, $\mathbf{b} \mapsto L(\mathbf{b})$. Пусть $\mathbf{L}', \mathbf{L}'' \in$ ASubc M и $\mathbf{L}' \le \mathbf{L}''$. Это означает, что линейный граф L' допускает вложение в L''. Но тогда в векторе $\mathbf{b}(L'')$ или его двойственном $\mathbf{b}(L'')^\delta$ в качестве отрезка содержится вектор $\mathbf{b}(L')$, т. е. $\mathbf{b}(L') \le \mathbf{b}(L'')$. Аналогично, если $\mathbf{b}' \le \mathbf{b}''$ для некоторых $\mathbf{b}', \mathbf{b}'' \in$ ASubc $\mathbf{b}$, то $L(\mathbf{b}')$ вкладывается в $L(\mathbf{b}'')$, т. е. $L(\mathbf{b}') \le L(\mathbf{b}'')$. □

Из леммы следует, что упорядоченное множество ASubc M абстрактных связных частей многоугольного графа M тогда и только тогда будет решеткой, когда решеткой будет упорядоченное множество ASubc $\mathbf{b}$ попарно не двойственных отрезков двоичного вектора $\mathbf{b}$, кодирующего граф M.

На рис. 1 и 2 приведены диаграммы упорядоченных множеств ASubc $\mathbf{b}$ соответственно для случаев $\mathbf{b} = 0001$ и $\mathbf{b} = 00001$. Как видим, первое из этих упорядоченных множеств является решеткой, а второе — нет: в нем не определена, например, точная нижняя грань для элементов 0010 и 100.

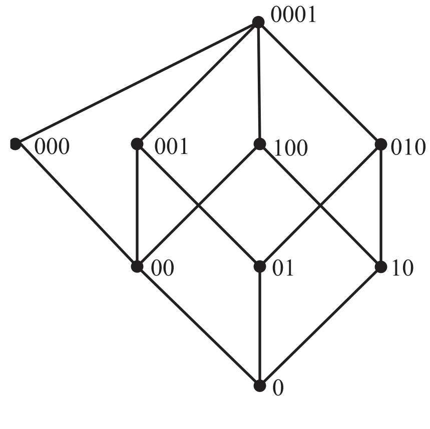

Рис. 1. Диаграмма упорядоченного множества ASubc $\mathbf{b}$ для $\mathbf{b} = 0001$

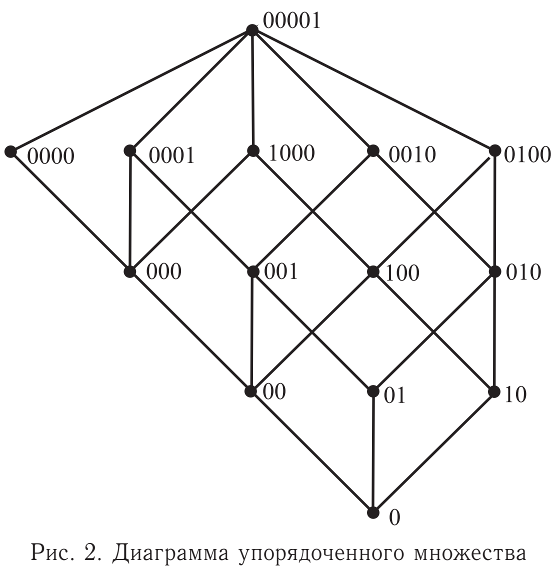

Рис. 2. Диаграмма упорядоченного множества ASubc $\mathbf{b}$ для $\mathbf{b} = 00001$

В дальнейшем при записи двоичных векторов будем группировать в них одинаковые компоненты и использовать экспоненциальную запись: $01100110010 = 0(1^2 0^2)^2 10$ и т. п.

Теорема. *Пусть M — многоугольный граф с n вершинами. Упорядоченное множество ASubc M его абстрактных связных частей тогда и только тогда будет решеткой, когда вектор $\mathbf{b} = \mathbf{b}(M)$*

имеет один из следующих видов: 1) 0^n*; 2)* $0^{n-1}1$, $n \leq 4$*; 3)* $0^{n-2}1^2$*; 4)* $(0^k1^k)^l$ *при* $k \geq 1$, $l \geq 1$, $2kl = n$.

Доказательство. *Необходимость.* От противного. Пусть ASubc M, а значит, и ASubc $\mathbf{b}$ является решеткой, но при этом не выполнено ни одно из условий 1)–4). Запишем вектор $\mathbf{b}$ в стандартном виде:

$$\mathbf{b} = 0^{a_1}1^{b_1}0^{a_2}1^{b_2}\ldots 0^{a_s}1^{b_s}, \quad a_i \geq 1, \quad b_i \geq 1, \quad 1 \leq i \leq s, \quad \sum_{i=1}^{s}(a_i + b_i) = n.$$

Если в составе $\mathbf{b}$ есть блок длины n, то $\mathbf{b} = 0^n$, а это означает выполнение запрещенного условия 1). Если в $\mathbf{b}$ есть блок длины $n-1$, то можно записать $\mathbf{b} = 0^{n-1}1$. При $n \leq 4$ это означает выполнения условия 2), так что $n \geq 5$. Но тогда в составе вектора $\mathbf{b}$ есть отрезки 0010 и 100, общими нижними гранями которых в ASubc $\mathbf{b}$ будут 0, 00, 01, 10 и среди них нет наибольшей, так что $\inf(0010, 100)$ не существует, и, значит, ASubc $\mathbf{b}$ — не решетка, что противоречит предположению. Блоков длины $n-2$ в составе $\mathbf{b}$ не может быть из-за отклонения условия 3). Значит, в вышеприведенной стандартной записи вектора $\mathbf{b}$ не все показатели кратности одинаковы и все они не превосходят $n-3$.

Здесь могут представиться следующие ситуации. I) $a_i < a_j$ для некоторых i, j. Так как $a_i \leq n-3$ и $a_j \leq n-3$, то в составе вектора $\mathbf{b}$ имеются отрезки $10^{a_i}1$ и $10^{a_j}1$. Их общими нижними гранями в ASub$\mathbf{b}$ будут отрезки $0, \ldots, 0^{a_i}, 10, \ldots, 10^{a_i}, 01, \ldots, 0^{a_i}1$, среди которых нет наибольшего, так что $\inf(10^{a_i}1, 10^{a_j}1)$ не существует. II) $a_i < b_j$ для некоторых i, j. Так как $a_i \leq n-3, b_j \leq n-3$, в составе вектора $\mathbf{b}$ имеются отрезки $10^{a_i}1$ и $01^{b_j}0$. Двойственным для последнего является $10^{b_j}1$, и мы попадаем в I. Наконец, III) $b_i < b_j$ для некоторых i, j. Так как $b_i \leq n-3$, $b_j \leq n-3$, в составе вектора $\mathbf{b}$ имеются отрезки $01^{b_i}0$ и $01^{b_j}0$. Двойственными для них будут $10^{b_i}1$ и $10^{b_j}1$, и снова получается I.

Достаточность. Пусть для n-мерного двоичного вектора $\mathbf{b}$ выполняется одно из условий 1–4. Покажем, что в каждом из этих случаев упорядоченное множество ASubc $\mathbf{b}$ является решеткой.

1. $\mathbf{b} = 0^n$. В этом случае ASubc$\mathbf{b}$ представляет собой n-элементную цепь $0 < 0^2 < \cdots < 0^{n-1} < 0^n$.

2. $\mathbf{b} = 0^{n-1}1, n \leq 4$. Для $\mathbf{b} = 0001$ диаграмма решетки ASubc $\mathbf{b}$ изображена на рис. 1. Для $\mathbf{b} = 001$ получаем пятиэлементную трехатомную решетку M_3. Если $\mathbf{b} = 01$, то ASubc$\mathbf{b}$ — двухэлементная цепь. Наконец, при $n = 1$, т. е. $\mathbf{b} = 1$, в ASubc$\mathbf{b}$ один элемент.

3. $\mathbf{b} = 0^{n-2}1^2$. Возможными отрезками в $\mathbf{b}$ являются следующие: 1) $0^a, a \leq n-2$; 2) 0^a1^b, $a \leq n-2$, $b \leq 2$, $a+b < n$; 3) 0^a110^b, $a+b \leq n-3$; 4) 1^a, $a \leq 2$; 5) 1^a0^b, $a \leq 2$, $b \leq n-2$, $a+b < n$. Покажем, что у любых двух отрезков есть точная нижняя грань. В п. i, j) указывается точная нижняя грань для отрезков i и j, $1 \leq i \leq j \leq 5$. Заметим еще, что $\inf((\mathbf{b}')^\delta, (\mathbf{b}'')^\delta) = (\inf(\mathbf{b}', \mathbf{b}''))^\delta$ для любых отрезков $\mathbf{b}', \mathbf{b}''$ вектора $\mathbf{b}$.

В пп. 1,1)–1,5) (здесь i, j) вариант для отрезка вида i и отрезка вида j) результаты вполне очевидны.

1,1) $\inf(0^a, 0^b) = 0^{\min(a,b)}$;

1,2) $\inf(0^a, 0^b1^c) = 0^{\min(a,b)}$, так как можно считать, что $b \geq c$;

1,3) $\inf(0^a, 0^b110^c) = 0^{\min(a,\max(b,c,2))}$;

1,4) $\inf(0^a, 1^b) = 0^{\min(a,b)}$;

1,5) $\inf(0^a, 1^b0^c) = 0^{\min(a,c)}$, так как можно считать, что $b \leq c$;

2,2) $\inf(0^a1^b, 0^c1^d) = 0^{\min(a,c)}1^{\min(b,d)}$

(в самом деле, ввиду лексикографической минимальности в записи векторов, $a \geq b$ и $c \geq d$. Не нарушая общности, можно считать, что $a \geq c$. Общими максимальными отрезками у 0^a1^b с 0^c1^d и двойственным 0^d1^c будут соответственно $0^{\min(a,c)}1^{\min(b,d)} = 0^c1^{\min(b,d)}$ и $0^{\min(a,d)}1^{\min(b,c)}$. Если $b \leq d (\leq c)$, то получаем из них $0^c1^b \geq 0^d1^b$. Если же $b \geq d$, то получаем $0^c1^d \geq 0^{\min(b,c)}1^d = (0^d1^{\min(b,c)})^\delta$. Так что $\inf = 0^{\min(a,c)}1^{\min(b,d)}$);

2,3) $\inf(0^a1^b, 0^c110^d)$= (1) $0^{\min(a,c)}1^b$ при $c \geq 2$, (2) $0^{\min(a,2)}1$ при $c = 1$

(в силу соглашения о записи векторов, $b \leq a$. Кроме того, $b \leq 2$. Общими максимальными отрезками у 0^a1^b с 0^c110^d и двойственным 1^d001^c будут соответственно $0^{\min(a,c)}1^b$ и $0^{\min(a,2)}1^{\min(b,c)}$. Если (1)

$c \geq 2$, это будут $0^{\min(a,c)}1^b \geq 0^{\min(a,2)}1^b$. Если же (2) $c = 1$, то получаем 01^b и $0^{\min(a,2)}1 = (01^{\min(a,2)})^\delta$. Так как $b \leq \min(a,2)$, то $\inf = 0^{\min(a,2)}1$);

2,4) $\inf(0^a1^b, 1^c) = 0^{\min(\max(a,b),c)}$;

2,5) $\inf(0^a1^b, 1^c0^d) = 0^{\min(\max(a,b),\max(c,d))}$;

3,3) $\inf(0^a110^b, 0^c110^d) = 0^{\min(a,c)}110^{\min(b,d)}$;

3,4) $\inf(0^a110^b, 1^c) = 0^{\min(\max(a,b,2),c)}$;

3,5) $\inf(1^a0^b, 0^c110^d)$= (1) $1^a0^{\min(b,d)}$ при $d \geq 2$, (2) $10^{\min(b,2)}$ при $d = 1$;

4,4) $\inf(1^a, 1^b) = 0^{\min(a,b)}$;

4,5) $\inf(1^a, 1^b0^c) = 0^{\min(a,\max(b,c))}$;

5,5) $\inf(1^a0^b, 1^c0^d) = 1^{\min(a,c)}0^{\min(b,d)}$

(здесь считается, что $a \leq b$, $c \leq d$. Не нарушая общности, положим $a \leq c$. Максимальными общими отрезками у 1^a0^b с 1^c0^d и двойственным 1^d0^c соответственно будут $1^{\min(a,c)}0^{\min(b,d)} = 1^a0^{\min(b,d)}$ и $1^{\min(a,d)}0^{\min(b,c)} = 1^a0^{\min(b,c)}$. Так как $\min(b,d) \geq \min(b,c)$, то $\inf = 1^a0^{\min(b,d)}$).

Таким образом, в случае 3. $\mathbf{b} = 0^{n-2}1^2$ упорядоченное множество ASubc $\mathbf{b}$ будет нижней полурешеткой с наибольшим элементом $\mathbf{b}$, т. е. будет решеткой.

4. $\mathbf{b} = (0^k1^k)^l, k \geq 1, l \geq 1, 2kl = n$.

Каждый отрезок вектора $\mathbf{b}$ имеет один из следующих десяти видов: 1) 0^a, 2) 0^a1^b, $a \geq b$, 3) $0^a1^k0^b$, $a \geq b$, 4) $0^a1^k0^k1^b$, $a \geq b$, 5) $0^a1^k0^k1^k0^b$, $a \geq b$, 6) $0^a(1^k0^k)^\lambda 1^b$, $a \geq b$, $\lambda > 1$, 7) $0^a(1^k0^k)^\lambda 1^k0^b$, $\lambda > 1$, 8) 1^a0^b, $a \leq b$, 9) $1^a0^k1^k0^b$, $a \leq b$, 10) $1^a(0^k1^k)^\lambda 0^b$, $a \leq b, \lambda > 1$.

Покажем, что у любых двух отрезков имеется наибольшая в смысле порядка в ASubc $\mathbf{b}$ общая часть. В п. i,j) указывается точная нижняя грань для отрезка вида i и отрезка вида j, $1 \leq i \leq j \leq 10$. Подробно рассматриваются характерные нетривиальные случаи.

1,1) $\inf(0^a, 0^b) = 0^{\min(a,b)}$;

1,2) $\inf(0^a, 0^b1^c) = 0^{\min(a,\max(b,c)}$.

В 1,3)–1,10) следует учитывать, что $a \leq k$.

1,3) $\inf(0^a, 0^b1^k0^c) = 0^a$;

1,4) $\inf(0^a, 0^b1^k0^k1^c) = 0^a$;

1,5) $\inf(0^a, 0^b1^k0^k1^k0^c) = 0^a$;

1,6) $\inf(0^a, 0^b(1^k0^k)^\lambda 1^k) = 0^a$;

1,7) $\inf(0^a, 0^b(1^k0^k)^\lambda 1^k0^c) = 0^a$;

1,8) $\inf(0^a, 1^b0^c) = 0^{\max(\min((a,b),\min(a,c)))}$;

1,9) $\inf(0^a, 1^b0^k1^k0^c) = 0^a$;

1,10) $\inf(0^a, 1^b(0^k1^k)^\lambda 0^c) = 0^a$;

2,2) $\inf(0^a1^b, 0^c1^d) = 0^{\min(a,c)}1^{\min(b,d)}$

(по правилам записи векторов, $a \geq b, c \geq d$. Не нарушая общности, будем считать, что $a \geq c$. Максимальными общими отрезками у 0^a1^b с 0^c1^d и двойственным 0^d1^c будут соответственно $0^{\min(a,c)}1^{\min(b,d)}$ и $0^{\min(a,d)}1^{\min(b,c)}$. Если $b \geq d$, то $0^{\min(a,d)}1^{\min(b,c)} \leq 0^d1^c = (0^c1^d)^\delta = (0^{\min(a,c)}1^{\min(b,d)})^\delta$. Если же $b \leq d$, то $0^{\min(a,d)}1^{\min(b,c)} = 0^d1^b \leq 0^c1^b = 0^{\min(a,c)}1^{\min(b,d)}$);

2,3) $\inf(0^a1^b, 0^c1^k0^d) = 0^a1^{\min(b,c)}$;

2,4) $\inf(0^a1^b, 0^c1^k0^k1^d) = 0^a1^{\min(b,c)}$;

2,5) $\inf(0^a1^b, 0^c1^k0^k1^k0^d) = 0^a1^b$;

2,6) $\inf(0^a1^b, 0^c(1^k0^k)^\lambda 1^d) = 0^a1^b$;

2,7) $\inf(0^a1^b, 0^c(1^k0^k)^\lambda 1^k0^d) = 0^a1^b$;

2,8) $\inf(0^a1^b, 1^c0^d) = 0^{\min(\max(a,b),\max(c,d))}$;

2,9) $\inf(0^a1^b, 1^c0^k1^k0^d) = 0^a1^b$;

2,10) $\inf(0^a1^b, 1^c(0^k1^k)^\lambda 0^d) = 0^a1^b$;

3,3) $\inf(0^a1^k0^b, 0^c1^k0^d) = 0^{\min(a,c)}1^k0^{\min(b,d)}$;

3,4) $\inf(0^a1^k0^b, 0^c1^k0^k1^d) = 0^{\min(a,c)}1^k0^b$;

3,5) $\inf(0^a1^k0^b, 0^c1^k0^k1^k0^d) = 0^a1^k0^b$;

3,6) $\inf(0^a1^k0^b, 0^c(1^k0^k)^\lambda 1^d) = 0^a1^k0^b$;

3,7) $\inf(0^a1^k0^b, 0^c(1^k0^k)^\lambda 1^k0^d) = 0^a1^k0^b$;

3,8) $\inf(0^a1^k0^b, 1^c0^d) = 1^{\min(b,c)}0^d$;

3,9) $\inf(0^a1^k0^b, 1^c0^k1^k0^d) = 0^a1^k0^{\min(b,d)}$;

3,10) $\inf(0^a1^k0^b, 1^c(0^k1^k)^\lambda 0^d) = 0^a1^k0^b$;

4,4) $\inf(0^a1^k0^k1^b, 0^c1^k0^k1^d) = 0^{\min(a,c)}1^k0^k1^{\min(b,d)}$

(здесь $a \geq b, c \geq d$. Не нарушая общности, будем считать, что $a \geq c$. Максимальными общими отрезками у $0^a1^k0^k1^b$ с $0^c1^k0^k1^d$ и двойственным $0^d1^k0^k1^c$ будут соответственно $0^{\min(a,c)}1^k0^k1^{\min(b,d)}$ и $0^{\min(a,d)}1^k0^k1^{\min(b,c)}$, что после приведения дает $0^c1^k0^k1^{\min(b,d)}$ и $0^{\min(a,d)}1^k0^k1^{\min(b,c)}$. Если $b \geq d$, то получаем $0^c1^k0^k1^d$ и $0^d1^k0^k1^{\min(b,c)}$. Так как $c \geq \min(b,c)$, то $0^d1^k0^k1^c \geq 0^d1^k0^k1^{\min(b,c)}$, так что $\inf = 0^{\min(a,c)}1^k0^k1^{\min(b,d)}$. Если же $b \leq d$. то получим $0^c1^k0^k1^b$ и $0^{\min(a,d)}1^k0^k1^b$. Так как $\min(a,d) \leq d \leq c$, то $0^c1^k0^k1^b \geq 0^{\min(a,d)}1^k0^k1^b$, так что и здесь $\inf = 0^{\min(a,c)}1^k0^k1^{\min(b,d)}$);

4,5) $\inf(0^a1^k0^k1^b, 0^c1^k0^k1^k0^d) = 0^a1^k0^k1^{\min(b,c)}$;

4,6) $\inf(0^a1^k0^k1^b, 0^c(1^k0^k)^\lambda 1^d) =$ (1) $0^a1^k0^k1^{\min(b,c)}$ при $\lambda = 2$, (2) $0^a1^k0^k1^b$ при $\lambda > 2$

(здесь $a \geq b$, $c \geq d$, $\lambda \geq 2$. Пусть (1) $\lambda = 2$. Максимальными общими отрезками у $0^a1^k0^k1^b$ с $0^c1^k0^k1^k0^k1^d$ и двойственным $0^d1^k0^k1^k0^k1^c$ будут соответственно $0^{\min(a,c)}1^k0^k1^b, 0^a1^k0^k1^{\min(b,d)}$ и $0^{\min(a,d)}1^k0^k1^b, 0^a1^k0^k1^{\min(b,c)}$. Заметим, что так как $c \geq d$, то первый из этих отрезков больше третьего, а второй меньше четвертого. Так что для сравнения остаются первый и четвертый. Если $b \geq c$, то $0^{\min(a,c)}1^k0^k1^b \leq 0^c1^k0^k1^a = (0^a1^k0^k1^{\min(b,c)})^\delta$. Если же $b \leq c$, то $0^{\min(a,c)}1^k0^k1^b \leq 0^a1^k0^k1^b = 0^a1^k0^k1^{\min(b,c)}$, так что в обоих случаях четвертый отрезок больше первого, он и дает inf.

При (2) $\lambda > 2$ в составе $0^c(1^k0^k)^\lambda 1^d$ есть отрезок $0^k1^k0^k1^k$, в который вкладывается $0^a1^k0^k1^b$);

4,7) $\inf(0^a1^k0^k1^b, 0^c(1^k0^k)^\lambda 1^k0^d) = 0^a1^k0^k1^b$;

4,8) $\inf(0^a1^k0^k1^b, 1^c0^d) = 1^c0^d$;

4,9) $\inf(0^a1^k0^k1^b, 1^c0^k1^k0^d) = 0^a1^k0^d$;

4,10) $\inf(0^a1^k0^k1^b, 0^c(0^k1^k)^\lambda 0^k1^d) = 0^a1^k0^k1^b$;

5,5) $\inf(0^a1^k0^k1^k0^b, 0^c1^k0^k1^k0^d) = 0^{\min(a,c)}1^k0^k1^k0^{\min(b,d)}$;

5,6) $\inf(0^a1^k0^k1^k0^b, 0^c(1^k0^k)^\lambda 1^d)=$ (1) $0^{\min(a,c)}1^k0^k1^k0^b$ при $\lambda = 2$, (2) $0^a1^k0^k1^k0^b$ при $\lambda \geq 3$;

5,7) $\inf(0^a1^k0^k1^k0^b, 0^c(1^k0^k)^\lambda 1^k0^d) = 0^a1^k0^k1^k0^b$;

5,8) $\inf(0^a1^k0^k1^k0^b, 1^c0^d) = 1^c0^d$;

5,9) (в форме 9,5) $\inf(1^a0^k1^k0^b, 0^c1^k0^k1^k0^d) = 1^{\min(a,d)}0^k1^k0^b$

(здесь $a \leq b, c \geq d$. Максимальными общими отрезками у $1^a0^k1^k0^b$ с $0^c1^k0^k1^k0^d$ и двойственным $1^d0^k1^k0^k1^c$ будут соответственно $1^a0^k1^k0^{\min(b,d)}$ и $1^{\min(a,d)}0^k1^k0^b$. Если $a \leq d$, то $1^a0^k1^k0^{\min(b,d)} \leq 1^a0^k1^k0^b = 1^{\min(a,d)}0^k1^k0^b$. Если же $a \geq d$, то $1^a0^k1^k0^{\min(b,d)} = 1^a0^k1^k0^d \leq 1^b0^k1^k0^d = (1^d0^k1^k0^b)^\delta = (1^{\min(a,d)}0^k1^k0^b)^\delta$, так что и здесь $\inf = 1^{\min(a,d)}0^k1^k0^b$);

5,10) $\inf 0^a1^k0^k1^k0^b, 1^c(0^k1^k)^\lambda 0^k1^d) = 0^a1^k0^k1^k0^b$;

6,6) $\inf(0^a(1^k0^k)^\lambda 1^b, 0^c(1^k0^k)^\mu 1^d)=$ (1) $0^{\min(a,c)}(1^k0^k)^\lambda 1^{\min(b,d)}$ при $\mu = \lambda$, (2) $0^a(1^k0^k)^\lambda 1^{\min(b,c)}$ при $\mu = \lambda + 1$, (3) $0^a(1^k0^k)^\lambda 1^b$ при $\mu \geq \lambda + 2$

(здесь $\lambda \leq \mu, a \geq b, c \geq d, a \geq c$.

Если (1) $\mu = \lambda$, то максимальными общими отрезками у $0^a(1^k0^k)^\lambda 1^b$ с $0^c(1^k0^k)^\lambda 1^d$ и двойственным $0^d(1^k0^k)^\lambda 1^c$ являются соответственно $0^{\min(a,c)}(1^k0^k)^\lambda 1^{\min(b,d)}$ и $0^{\min(a,d)}(1^k0^k)^\lambda 1^{\min(b,c)}$. При $b \geq d$ получаем: $0^{\min(a,c)}(1^k0^k)^\lambda 1^{\min(b,d)} \geq 0^{\min(b,c)}(1^k0^k)^\lambda 1^d = (0^{\min(a,d)}(1^k0^k)^\lambda 1^{\min(b,c)})^\delta$. При $b \leq d$ будет $0^{\min(a,c)}(1^k0^k)^\lambda 1^{\min(b,d)} \geq 0^{\min(a,d)}(1^k0^k)^\lambda 1^{\min(b,c)}$, так что $\inf = 0^{\min(a,c)}(1^k0^k)^\lambda 1^{\min(b,d)}$.

Если (2) $\mu = \lambda + 1$, то максимальными общими отрезками у $0^a(1^k0^k)^\lambda 1^b$ с $0^c(1^k0^k)^\lambda(1^k0^k)1^d$ будут $0^{\min(a,c)}(1^k0^k)^\lambda 1^b$ и $0^a(1^k0^k)^\lambda 1^{\min(b,d)}$, а с двойственным $0^d(1^k0^k)^\lambda 1^k0^k1^c$ получаются $0^{\min(a,d)}(1^k0^k)^\lambda 1^b$ и $0^a(1^k0^k)^\lambda 1^{\min(b,c)}$. Так как $c \geq d$, то первый из этих отрезков больше третьего, а четвертый больше второго. Так что для сравнения остаются $0^{\min(a,c)}(1^k0^k)^\lambda 1^b$ и $0^a(1^k0^k)^\lambda 1^{\min(b,c)} = (0^{\min(b,c)}(1^k0^k)^\lambda 1^a)^\delta$. Если $b \leq c$, то получаем: $0^{\min(a,c)}(1^k0^k)^\lambda 1^b \leq 0^a(1^k0^k)^\lambda 1^b = 0^a(1^k0^k)^\lambda 1^{\min(b,c)}$. Если же $b \geq c$, то будет $0^{\min(a,c)}(1^k0^k)^\lambda 1^b \leq 0^c(1^k0^k)^\lambda 1^a = (0^a(1^k0^k)^\lambda 1^c)^\delta = (0^a(1^k0^k)^\lambda 1^{\min(b,c)})^\delta$. Таким образом, $\inf = 0^a(1^k0^k)^\lambda 1^{\min(b,c)}$.

Если (3) $\mu \geq \lambda + 2$, то в составе $0^c(1^k0^k)^\mu 1^d$ есть отрезок $0^k(1^k0^k)^\lambda 1^k$, в который вкладывается $0^a(1^k0^k)^\lambda 1^b$);

6,7) $\inf(0^a(1^k0^k)^\lambda 1^b, 0^c(1^k0^k)^\mu 1^k0^d)$= (1) $0^a(1^k0^k)^\lambda 1^{\min(b,c)}$ при $\mu=\lambda$, (2) $0^a(1^k0^k)^\lambda 1^b$ при $\mu>\lambda$;

6,8) $\inf(0^a(1^k0^k)^\lambda 1^b, 1^c0^d) = 1^c0^d$;

6,9) $\inf(0^a(1^k0^k)^\lambda 1^b, 1^c0^k1^k0^d) = 1^c0^k1^k0^d$;

6,10) $\inf(0^a(1^k0^k)^\lambda 1^b, 1^c(0^k1^k)^\mu 0^d)$ = (1) $0^a(1^k0^k)^{\lambda-1}1^k0^d$ при $\mu=\lambda$, (2) $0^a(1^k0^k)^\lambda 1^b$ при $\mu>\lambda$;

7,7) $\inf(0^a(1^k0^k)^\lambda 1^k0^b, 0^c(1^k0^k)^\mu 1^k0^d)$ = (1) $0^{\min(a,c)}(1^k0^k)^\lambda 1^k0^{\min(b,d)}$ при $\mu=\lambda$, (2) $0^a(1^k0^k)^\lambda 1^k0^b$ при $\mu>\lambda$;

7,8) $\inf(0^a(1^k0^k)^\lambda 1^k0^b, 1^c0^d) = 1^c0^d$;

7,9) $\inf(0^a(1^k0^k)^\lambda 1^k0^b, 1^c0^k1^k0^d) = 1^c0^k1^k0^d$;

7,10) $\inf(0^a(1^k0^k)^\lambda 1^k0^b, 1^c(0^k1^k)^\mu 0^d)$ = (1) $1^d(0^k1^k)^\lambda 0^{\min(b,c)}$ при $\mu=\lambda$, (2) $0^a(1^k0^k)^\lambda 0^{\min(b,d)}$ при $\mu=\lambda+1$, (3) $0^a(1^k0^k)^\lambda 1^k0^b$ при $\mu\ge\lambda+2$

(если (1) $\mu=\lambda$, то максимальными общими отрезками у $0^a(1^k0^k)^\lambda 1^k0^b = 0^a1^k(0^k1^k)^\lambda 0^b$ с $1^c(0^k1^k)^\lambda 0^d$ и двойственным $1^d(0^k1^k)^\lambda 0^c$ соответственно будут $1^c(0^k1^k)^\lambda 0^{\min(b,d)}$ и $1^d(0^k1^k)^\lambda 0^{\min(b,c)}$. Так как $c\le d$, то возможны три случая: $b\le c\le d$, $c\le b\le d$, $c\le d\le b$. В первом случае $1^c(0^k1^k)^\lambda 0^{\min(b,d)} \le 1^d(0^k1^k)^\lambda 0^b = 1^d(0^k1^k)^\lambda 0^{\min(b,c)}$, во втором $1^c(0^k1^k)^\lambda 0^{\min(b,d)} = 1^c(0^k1^k)^\lambda 0^b = 1^{\min(b,c)}(0^k1^k)^\lambda 0^b \le 1^{\min(b,c)}(0^k1^k)^\lambda 0^d = (1^d(0^k1^k)^\lambda 0^{\min(b,c)})^\delta$, в третьем $1^c(0^k1^k)^\lambda 0^{\min(b,d)} = 1^c(0^k1^k)^\lambda 0^d = (1^d(0^k1^k)^\lambda 0^{\min(b,c)})^\delta$, так что $\inf = 1^d(0^k1^k)^\lambda 0^{\min(b,c)}$.

Если (2) $\mu=\lambda+1$, то максимальными общими отрезками у $0^a(1^k0^k)^\lambda 1^k0^b$ с $1^c(0^k1^k)^{\lambda+1}0^d = 1^c0^k(1^k0^k)^\lambda 1^k0^d$ и двойственным $1^d(0^k1^k)^{\lambda+1}0^c = 1^d0^k(1^k0^k)^\lambda 1^k0^c$ будут соответственно $0^a(1^k0^k)^\lambda 0^{\min(b,d)}$ и $0^a(1^k0^k)^\lambda 0^{\min(b,c)}$. Так как $c\le d$, то первый больше второго.

Если (3) $\mu\ge\lambda+2$, то $1^c(0^k1^k)^\mu 0^d \ge 1^c(0^k1^k)^{\lambda+2}0^d = 1^c0^k(1^k0^k)^\lambda 1^k0^k1^k0^d \ge 0^a(1^k0^k)^\lambda 1^k0^b$, так что $\inf = 0^a(1^k0^k)^\lambda 1^k0^b$);

8,8) $\inf(1^a0^b, 1^c0^d) = 1^{\min(a,c)}0^{\min(b,d)}$;

8,9) $\inf(1^a0^b, 1^c0^k1^k0^d) = 1^{\min(a,d)}0^b$;

8, 10) $\inf(1^a0^b, 1^c(0^k1^k)^\lambda 0^d) = 1^a0^b$;

9,9) $\inf(1^a0^k1^k0^b, 1^c0^k1^k0^d) = 1^{\min(a,c)}0^k1^k0^{\min(b,d)}$;

9,10) $\inf(1^a0^k1^k0^b, 1^c(0^k1^k)^\lambda 0^d$ = (1) $1^{\min(a,d)}0^k1^k0^b$ при $\lambda=2$, (2) $1^a0^k1^k0^b$ при $\lambda>2$

(здесь $a\le b, c\le d$.

Если (1) $\lambda=2$, то максимальными общими отрезками у $1^a0^k1^k0^b$ с $1^c0^k1^k0^k1^k0^d$ будут $1^{\min(a,c)}0^k1^k0^b$ и $1^a0^k1^k0^{\min(b,d)}$, а с двойственным $1^d0^k1^k0^k1^k0^c$ будут $1^{\min(a,d)}0^k1^k0^b$ и $1^a0^k1^k0^{\min(b,c)}$. При этом первый отрезок меньше третьего, а четвертый меньше второго. Так что для сравнения остаются $1^a0^k1^k0^{\min(b,d)}$ и $1^{\min(a,d)}0^k1^k0^b$. При $a\le d$ получаем: $1^a0^k1^k0^{\min(b,d)} \le 1^a0^k1^k0^b = 1^{\min(a,d)}0^k1^k0^b$. Если же $a\ge d$, то $1^a0^k1^k0^{\min(b,d)} \le 1^b0^k1^k0^d = (1^{\min(a,d)}0^k1^k0^b)^\delta$. Так что $\inf = 1^{\min(a,d)}0^k1^k0^b$.

Если (2) $\lambda>2$, то в составе $1^c(0^k1^k)^\lambda 0^d$ имеется отрезок $0^k1^k0^k1^k0^k1^k$, в который вкладывается $1^a0^k1^k0^b$);

10,10) $\inf(1^a(0^k1^k)^\lambda 0^b, 1^c(0^k1^k)^\mu 0^d)$ = (1) $1^{\min(a,c)}(0^k1^k)^\lambda 0^{\min(b,d)}$ при $\mu=\lambda$, (2) $1^{\min(a,d)}(0^k1^k)^\lambda 0^b$ при $\mu=\lambda+1$, (3) $1^a(0^k1^k)^\lambda 0^b$ при $\mu\ge\lambda+2$.

Рассмотрев все случаи, приходим к выводу, что $\mathrm{ASubc}\,\mathbf{b}$ является нижней полурешеткой. Так как в ней есть наибольший элемент $\mathbf{b}$, то получается решетка. □

Библиографический список

1. *Салий В. Н.* Минимальные примитивные расширения ориентированных графов // Прикладная дискретная математика. 2008. № 1(1). С. 116–119.

2. *Trotter W. T., Moore J. I.* Some theorems on graphs and posets // Discrete Math. 1976. Vol. 15, № 1. P. 79–84.

3. *Jacobson M. S., Kézdy F. E., Seif S.* The poset of connected induced subgraphs of a graph need not be Sperner // Order. 1995. Vol. 12, № 3. P. 315–318.

4. *Kézdy A. E., Seif S.* When is a poset isomorphic to the poset of connected induced subgraphs of a graph? // Southwest J. Pure Appl. Math. 1996. Vol. 1. P. 42–50 (Electronic).

5. *Nieminen J.* The lattice of connected subgraphs of a connected graph // Comment. Math. Prace Mat. 1980. Vol. 21, № 1. P. 187–193.

6. *Adams P., Eggleton R. B., MacDougall J. A.* Degree sequences and poset structure of order 9 graphs // Proc. XXXV Southeast Conf. Comb., Graph Theory and Computing. Boca Raton, FL, USA, 2004. Vol. 166. P. 83–95.

7. *Leach D., Walsh M.* A characterization of lattice-ordered graphs // Proc. Integers Conf. 2005. N. Y. : Gruyter, 2007. P. 327–332.

8. *Салий В. Н.* Система абстрактных связных подграфов линейного графа // Прикладная дискретная математика. 2012. № 2(16). С. 90–94.

The Ordered Set of Connected Parts of a Polygonal Graph

V. N. Salii

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, SaliiVN@info.sgu.ru

Under a polygonal graph is meant an oriented graph obtained from a cycle by some orientation of its edges. The set of all abstract (i. e. pairwise non-isomorphic) connected parts of a polygonal graph is ordered by graph embedding. Polygonal graphs are characterized for which this ordered set is a lattice.

Key words: polygonal graph, linear graph, binary vector, duality, ordered set, lattice.

References

1. Salii V. N. Minimal primitive extensions of oriented graphs. *Prikladnaya diskretnaya matematika*, 2008, no. 1(1), pp. 116–119 (in Russian).

2. Trotter W. T., Moore J. I. Some theorems on graphs and posets. *Discrete Math.*, 1976, vol. 15, no. 1, pp. 79–84.

3. Jacobson M. S., Kézdy F. E., Seif S. The poset of connected induced subgraphs of a graph need not be Sperner. *Order*, 1995, vol. 12, no. 3, pp. 315–318.

4. Kézdy A. E., Seif S. When is a poset isomorphic to the poset of connected induced subgraphs of a graph? *Southwest J. Pure Appl. Math.*, 1996, vol. 1, pp. 42–50. Available at: http://rattler.cameron.edu/swjpam.html (Accessed 28, September, 2012).

5. Nieminen J. The lattice of connected subgraphs of a connected graph. *Comment. Math. Prace Mat.*, 1980, vol. 21, no. 1, pp. 187–193.

6. Adams P., Eggleton R. B., MacDougall J. A. Degree sequences and poset structure of order 9 graphs. *Proc. XXXV Southeast Conf. Comb., Graph Theory and Computing*. Boca Raton, FL, USA, 2004, vol. 166, pp. 83–95.

7. Leach D., Walsh M. A characterization of lattice-ordered graphs. *Proc. Integers Conf.*, 2005. New York, Gruyter, 2007, pp. 327–332.

8. Salii V. N. The system of abstract connected subgraphs of a linear graph. *Prikladnaya diskretnaya matematika*, 2012, no. 2(16), pp. 90–94 (in Russian).

УДК 004.021

СОВМЕСТНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФА ДЕ БРЁЙНА, ГРАФА ПЕРЕКРЫТИЙ И МИКРОСБОРКИ ДЛЯ *DE NOVO* СБОРКИ ГЕНОМА

А. А. Сергушичев[1], А. В. Александров[2], С. В. Казаков[3], Ф. Н. Царев[4], А. А. Шалыто[5]

[1]Магистрант кафедры компьютерных технологий, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, alserg@rain.ifmo.ru

[2]Магистрант кафедры компьютерных технологий, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, alexanrdov@rain.ifmo.ru

[3]Магистрант кафедры компьютерных технологий, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, svkazakov@rain.ifmo.ru

[4]Кандидат технических наук, ассистент кафедры программной инженерии и верификации программ, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, tsarev@rain.ifmo.ru

[5]Доктор технических наук, заведующий кафедрой технологий программирования, профессор, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, shalyto@mail.ifmo.ru

В работе предлагается метод сборки контигов геномных последовательностей из парных чтений. Особенностью этого метода является разбиение процесса сборки контигов на три этапа: сборка квазиконтигов из чтений, сборка контигов из квазиконтигов и микросборка. На первом из этапов используется граф де Брёйна, на втором — граф перекрытий. Описываются результаты экспериментального исследования разработанного метода на чтениях геномов бактерии *E. Coli* (размер генома — 4.5 миллиона нуклеотидов) и рыбы *Maylandia zebra* (размер генома — миллиард нуклеотидов). Преимущество разработанного метода состоит в том, что для его работы требуется существенно меньше оперативной памяти по сравнению с существующими программными средствами для сборки генома.

Ключевые слова: сборка генома, контиги, граф де Брёйна, граф перекрытий, микросборка.