tensions of graphs. *Vestnik Tomskogo Gos. Univ.*, 2001, iss. 6, pp. 63–65 (in Russian).

5. Kurnosova S. G. T-neprivodimye rasshireniia dlia nekotorykh klassov grafov [T-irreducible extensions for some classes graphs]. *Teoreticheskie problemy informatiki i ee prilozhenii* [Theoretical Problems of Informatics and its applications]. Saratov, 2004, iss. 6, pp. 113–125 (in Russian).

6. Osipov D. Yu. T-neprivodimye rasshireniia dlia ob"edineniia tsepei i tsiklov [T-irreducible extensions for union of paths and cycles]. *Komp'iuternye nauki i informatsionnye tekhnologii*. Saratov, 2012, pp. 245–246 (in Russian).

УДК 519.7

ОБ ОЦЕНКЕ ДЛИНЫ СЛОВА, РАЗЛИЧАЮЩЕГО ДВЕ ВЕРШИНЫ ПОМЕЧЕННОГО НЕОРГРАФА

С. В. Сапунов

Кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, sapunov.sv@iamm.ac.donetsk.ua

Рассматривается задача различения вершин помеченного неорграфа по ассоциированным с ними языкам в алфавите меток. Показано, что верхняя оценка длины слова, различающего две вершины графа, равна половине от числа его вершин.

Ключевые слова: графы с помеченными вершинами, языки в алфавите меток вершин, различение вершин графа.

ВВЕДЕНИЕ

Основной проблемой теоретической кибернетики является проблема взаимодействия управляющей и управляемой систем (управляющего автомата и его операционной среды) [1, 2]. Взаимодействие таких систем зачастую представляется как процесс перемещения автомата по помеченному графу или лабиринту среды. Такое представление интенсивно развивается в работах В. Б. Кудрявцева и его школы [3]. Одной из центральных и актуальных как в теоретическом, так и в прикладном аспектах проблем, возникающих при исследованиях взаимодействия автоматов и графов, является проблема анализа или распознавания свойств графа при различной априорной информации и при различных способах взаимодействия автомата и графа. Один из подходов к решению проблемы анализа графа операционной среды основывается на том, что операционная среда рассматривается как граф с помеченными вершинами. Такие графы возникли первоначально как блок-схемы и схемы программ, а в настоящее время находят применение в задачах навигации роботов [4]. В монографии Ю. В. Капитоновой и А. А. Летичевского [2] с вершинами таких графов естественным образом связаны языки в алфавите меток вершин и показано, что эти языки регулярны и не содержат пустого слова.

В настоящей статье рассматривается задача различения вершин неориентированных графов с помеченными вершинами. Объектом анализа графа выбран язык, ассоциированный с вершиной, то есть множество всех последовательностей меток, соответствующих путям, исходящим из вершины. Ранее автором было найдена достижимая линейная оценка длины слова, различающего две вершины ориентированного помеченного графа, детерминированного по разметке окрестностей вершин [5]. В настоящей работе показано, что для неориентированного помеченного графа эта оценка может быть уменьшена вдвое.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Неопределяемые понятия общеизвестны и их можно найти, например, в [6].

Помеченным графом назовем конечный простой связный неориентированный граф с помеченными вершинами $G = (V, E, M, \mu)$, где V — множество вершин, $|V| = n$, E — множество ребер (т.е. неупорядоченных пар вершин), M — множество меток, $|M| = m$, $\mu : V \to M$ — сюръективная функция разметки вершин. Под окрестностью Γ_v вершины $v \in V$ будем понимать множество всех вершин, смежных с v. Путем в графе G назовем последовательность вершин $p = v_1 \dots v_k$ такую, что $(v_i, v_{i+1}) \in E$, $i = 1, \dots, k-1$. Число $k \in \mathbb{N}$ назовем длиной пути p. Меткой $\mu(p)$ пути p назовем слово $w = \mu(v_1) \dots \mu(v_k)$ в алфавите меток M. Будем говорить, что слово w определяется вершиной v_1. Длину слова w будем обозначать через $d(w)$. Путь с меткой w, начинающейся в вершине v, будем обозначать $p(v, w)$. Инверсией слова $w = \mu(v_1) \dots \mu(v_k)$ назовем слово $w^{-1} = \mu(v_k) \dots \mu(v_1)$.

Множество L_v всех слов $w \in M^+$, определяемых вершиной v, будем называть языком этой вершины. Граф G будем называть приведенным, если для любых вершин $v_1, v_2 \in V$ из $v_1 \neq v_2$ следует $L_{v_1} \neq L_{v_2}$.

Определим на M^+ частичную операцию $\circ$ композиции слов. Пусть $x, y \in M$, $w_1, w_2 \in M^*$, тогда $w_1 x \circ x w_2 = w_1 x w_2$ и $w_1 x \circ y w_2$ не определено, если $x \neq y$. Композицию k экземпляров слова w будем обозначать w^k.

Введем операцию $\star : V \times M^+ \to 2^V$ соотношением: для любой вершины $v \in V$ и любого слова $w \in M^+$ через $v \star w$ обозначим множество всех вершин $h \in V$ таких, что существует путь p, соединяющий вершины v и h, и $\mu(p) = w$. Ясно, что если слово $w \in L_v$, то $|v \star w| > 0$ и $|v \star w| = 0$ — в противном случае.

Слово w' называется подсловом слова w, если существуют слова w_1 и w_2 (возможно, однобуквенные) такие, что $w = w_1 \circ w' \circ w_2$. Если $d(w_1) = 1$ ($d(w_2) = 1$), то слово w' называется начальным отрезком (финальным отрезком) слова w.

2. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

Функцию разметки $\mu : V \to M$ будем называть детерминированной или Д-разметкой, если для любой вершины $v \in V$ и любых вершин $g, h \in \Gamma_(v)$ из $g \neq h$ следует $\mu(g) \neq \mu(h)$. Помеченный граф G с детерминированной функцией разметки будем называть детерминированным, или Д-графом.

В [7] было показано, что из определения Д-графа вытекают следующие его свойства:

1) помеченный граф G является Д-графом тогда и только тогда, когда для любой вершины $v \in V$ и любого слова $w \in M^+$ выполняется $|v \star w| \leqslant 1$, причем $|v \star w| = 1$, если $w \in L_v$ и $|v \star w| = 0$ — в противном случае;

2) для любых различных вершин $v_1, v_2 \in V$ и любого слова $w \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$ расстояние между вершинами $v_1 \star w$ и $v_2 \star w$ не меньше 4.

3. РАЗЛИЧЕНИЕ ВЕРШИН

Будем говорить, что вершины $v_1, v_2 \in V$ неотличимы, если $L_{v_1} = L_{v_2}$. В противном случае будем называть эти вершины отличимыми.

Следующая теорема дает оценку длины слова, различающего две вершины связного Д-графа.

Теорема 1. *Пусть G является связным приведенным СД-графом. Тогда для любых вершин $v_1, v_2 \in V$, $v_1 \neq v_2$, длина кратчайшего слова из $L_{v_1} \oplus L_{v_2}$ не превосходит $n/2$.*

Доказательство. Если $\mu(v_1) \neq \mu(v_2)$, то однобуквенное слово $w = \mu(v_1)$ (или $w = \mu(v_2)$) является кратчайшим словом из $L_{v_1} \oplus L_{v_2}$ и $d(w) \leqslant n/2$.

Пусть $\mu(v_1) = \mu(v_2)$. Так как граф G приведенный и связный, то $L_{v_1} \setminus L_{v_2} \neq \varnothing$, $L_{v_2} \setminus L_{v_1} \neq \varnothing$ и, следовательно, $L_{v_1} \oplus L_{v_2} \neq \varnothing$.

Пусть слово u является меткой некоторого кратчайшего пути из v_1 в v_2. Ясно, что $4 \leqslant d(u) \leqslant n$. Действительно, ограничение $d(u)$ снизу вытекает из определения Д-графа, а ограничение сверху определяется числом вершин графа.

Предположим, что $d(u) = n$. По определению Д-графа слово u не может быть палиндромом, следовательно, $u \notin L_{v_2}$. Определим максимальную возможную длину слова $w \in L_{v_1} \oplus L v_2$. Представим слово u в виде композиции его подслов: $u = u_1 \circ u_2 \circ u_3$.

Рассмотрим граф на рис. 1. Здесь стрелкой обозначается направление прохождения пути в соответствии с чтением его метки слева направо.

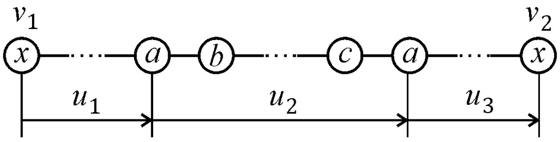

Рис. 1

Из определения Д-графа следует, что $d(u_2) \geqslant 4$. Легко видеть, что максимальное значение $d(w)$ достигается при условии, что $u_3 = u_1^{-1}$ и $d(u_2) = 4$. Действительно, слово $u_1 b \in L_{v_1} \setminus L_{v_2}$, слово $u_1 c \in L_{v_2} \setminus L_{v_1}$ и любое из этих слов может быть выбрано в качестве слова w. Оценим длину слова w. В данном случае $n = 2d(u_1) + 2$. Отсюда $d(u_1) = n/2 - 1$. Следовательно, $d(w) = n/2$. Пусть $d(u) < n$. Если $u \in L_{v_1} \oplus L_{v_2}$, то, рассуждая аналогично вышеизложенному, получим, что длина кратчайшего слова из $L_{v_1} \oplus L_{v_2}$ не превосходит $n/2$.

Пусть для некоторого натурального k выполняется $\{(u^{-1})^k, u^k\} \subseteq L_{v_1} \cap L_{v_2}$. Пусть, далее, существует кратчайший начальный отрезок u_1^{-1} слова u^{-1} такой, что $(u^{-1})^k \circ u_1^{-1} \in L_{v_2} \setminus L_{v_1}$ и $2 \leqslant d(u_1) \leqslant d(u)$. Положим, что существует начальный отрезок u_2 слова u такой, что $u^k \circ u_2 \in L_{v_2}$ и $d(u_1) \leqslant d(u_2) \leqslant d(u)$.

Рассмотрим граф на рис. 2. Здесь $1 \leqslant d(u_3) \leqslant d(u) - 1$. По построению слово $w = (u^{-1})^k \circ$ $\circ\, u_1^{-1}$ является кратчайшим словом из $L_{v_1} \oplus L_{v_2}$. Оценим длину слова w. В данном случае $n \geqslant (2k+1)d(u) + 2d(u_1) - 2k - 3$ и $d(w) \leqslant kd(u) + d(u_1) - k$. Отсюда $d(w) \leqslant \dfrac{kn - d(u_1)}{2k+1} \leqslant n/2$ для любого $k \geqslant 1$.

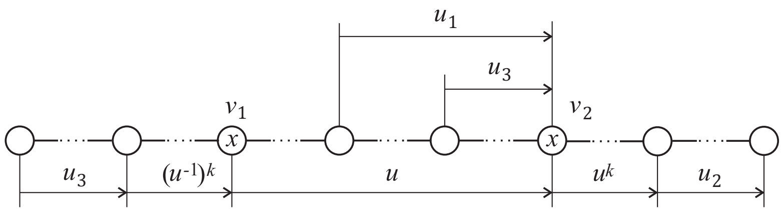

Рис. 2

Пусть для любого натурального k слово $u^k \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$. Так как граф G конечен, то для некоторого $l \leqslant k$ выполняется $v_1 \star u^l = v_1$. Обозначим через w кратчайшее слово из $L_{v_1} \oplus L_{v_2}$ и положим для определенности, что $w \in L_{v_2}$. Пусть $w = w'y$, где $y \in M$.

Предположим, что пути $p(v_1, w')$ и $p(v_2, w)$ являются простыми (рис. 3).

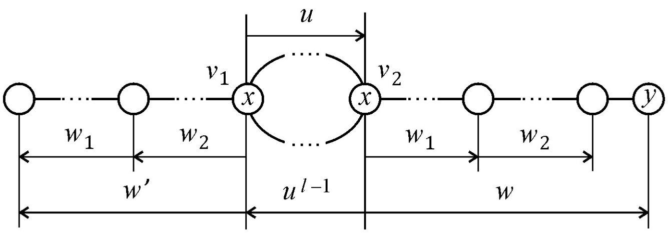

Рис. 3

Пусть пути $p(v_2, w)$ и $p(v_1, w')$ не имеют общих вершин с путем $p(v_1, u^l)$, кроме вершин v_1 и v_2. Если $d(u) \geqslant d(w)$, то $d(w) < n/2$. Действительно, пути $p(v_1, w')$ и $p(v_1, u^l)$ содержат в сумме больше вершин, чем путь $p(v_2, w)$.

Пусть $d(w) > d(u)$ и $d(w') = d(u^k \circ u_1)$, где $u = u_1 \circ u_2$. Ясно, что $d(w') \geqslant 4$. Тогда существует начальный отрезок w'_u слова w' такой, что $d(w'_u) = d(u^{k-1} \circ u_1)$ и $u \circ w'_u \in L_{v_1}$. Следовательно, $u \circ w'_u \in L_{v_2}$ и существует путь $p(v_2, u \circ w'_u)$. Тогда существует начальный отрезок w'_{u^2} слова w' такой, что $d(w'_{u^2}) = d(u^{k-2} \circ u_1)$ и $u^2 \circ w'_{u^2} \in L_{v_1}$. Следовательно, $u^2 \circ w'_{u^2} \in L_{v_2}$ и существует путь $p(v_2, u^2 \circ w'_{u^2})$. Рассуждая далее по индукции, получим, что существуют пути $p(v_2, u^3 \circ w'_{u^3})$, $\ldots$, $p(v_2, u^{k-1} \circ w'_{u^{k-1}})$. Наконец, существует начальный отрезок w'_{u_1} слова w' такой, что $d(w'_{u_1}) = d(u_1)$ и $u^k w'_{u_1} \in L_{v_1}$. Тогда $u^k \circ w'_{u_1} \in L_{v_2}$ и существует путь $p(v_2, u^k \circ w'_{u_1})$.

С другой стороны, слово $u^{-1} \circ w'_u \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$. Следовательно, существует путь $p(v_1, u^{-1} \circ w'_u)$. Тогда слово $(u^{-1})^2 \circ w'_{u^2} \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$. Следовательно, существует путь $p(v_1, (u^{-1})^2 \circ w'_{u^2})$. Рассуждая далее по индукции, получим, что существуют пути $p(v_1, (u^{-1})^3 \circ w'_{u^3})$, $\ldots$, $p(v_1, (u^{-1})^{k-1} \circ w'_{u^{k-1}})$. Наконец, существует слово $(u^{-1})^k \circ w'_{u_1} \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$ и существует путь $p(v_1, (u^{-1})^k \circ w'_{u_1})$ (рис. 4).

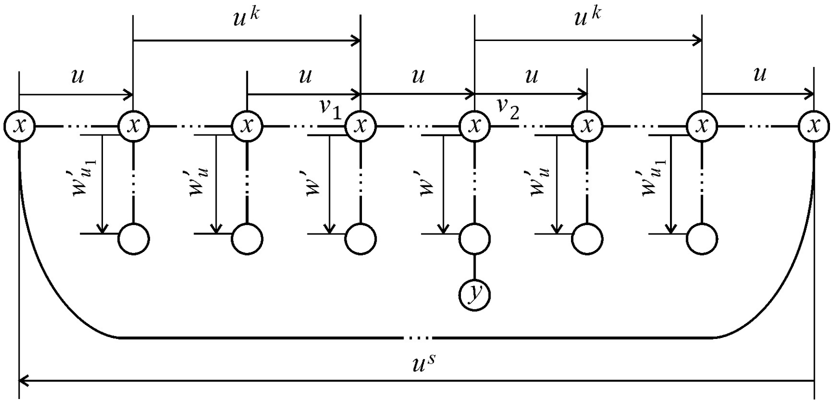

Рис. 4

Оценим длину слова w. В данном случае $n \geqslant ld(u) - l + 2d(w) - 3 + A$, где $A = (k+1)kd(u) +$ $+\, 2(k+1)d(u_1) - (k+1)k - 2k$. Тогда $d(w) \leqslant \dfrac{n}{2} - \dfrac{l}{2}d(u) + \dfrac{1}{2}(l-3) - \dfrac{A}{2}$. Следовательно, $d(w) < n/2$ при любых допустимых значениях l и $d(u)$.

Пусть слово w_1 совпадает с собственным начальным отрезком слова u^{l-1}. Легко видеть, что в этом случае, по крайней мере, последняя вершина пути $p(v_2, w)$ не принадлежит пути $p(v_2, u^{l-1})$.

Рассмотрим граф на рис. 5. Здесь $w = w_1 \circ w_2 y$, $u = w_1 \circ u_1$, и слово w_2' является начальным отрезком слова w_2.

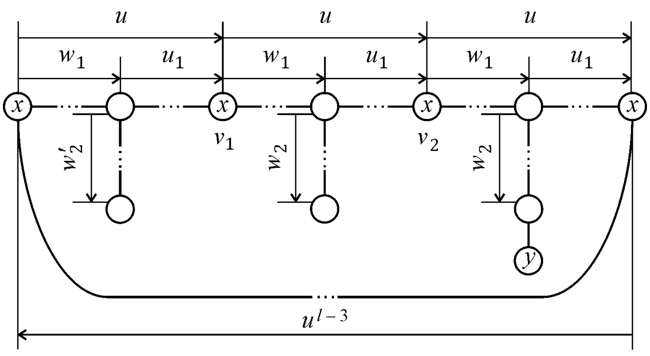

Рис. 5

Оценим длину слова w. Если $l > 2$, то $n \geqslant ld(u) - l + 2d(w_1) - 1$. Подставим в это неравенство выражения $d(w_2) = d(w) - d(w_1) + 1$ и $d(w_1) = d(u) - d(u_1) + 1$. Тогда $n \geqslant (l-2)d(u) + 2d(w) + 2d(u_1) - l - 1$. Отсюда $d(w) \leqslant \dfrac{n}{2} - \dfrac{1}{2}((l-2)d(u) + 2d(u_1) + l + 1)$.

Так как вычитаемое в правой части неравенства больше 0 при $l > 2$, то $d(w) < n/2$.

Пусть $l = 2$. Если $d(u_1) < d(w_1)$, то $d(u_1^{-1} \circ w_2 y) < d(w_1 \circ w_2 y)$ и $u_1^{-1} \circ w_2 y \in L_{v_1} \setminus L_{v_2}$, что невозможно. Следовательно, $d(u_1) \geqslant d(w_1)$. Оценим длину слова w. В данном случае $n \geqslant 2d(u) + 2d(w_2) - 3$. Подставим в это неравенство выражения $d(w_2) = d(w) - d(w_1) + 1$ и $d(w_1) = d(u) - d(u_1) + 1$. Тогда $n \geqslant 2d(w) + 2d(u_1) - 3$. Отсюда $d(w) \leqslant \dfrac{n}{2} - \left(d(u_1) - \dfrac{3}{2}\right)$. Вычитаемое в правой части всегда больше 0, так как $d(u_1) > 1$. Следовательно, $d(w) < n/2$.

Пусть $w = u^k \circ u_1 \circ w_2 y$, где $y \in M$, $u = u_1 \circ u_2$. Здесь $k \leqslant (l-1)/2$. Действительно, в противном случае слово $u^{k-1} \circ w_2 y \in L_{v_1} \setminus L_{v_2}$, что невозможно.

Так как w является кратчайшим словом из $L_{v_1} \oplus L_{v_2}$, то слово $u^k \circ u_1 \circ w_2 \in L_{v_1}$ и существует путь $p(v_1, u^k \circ u_1 \circ w_2)$. Тогда слово $u^{k-1} \circ u_1 \circ w_2 \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$ и существует путь $p(v_1, u^{k-1} \circ u_1 \circ w_2)$. Рассуждая по индукции, получаем, что существуют пути $p(v_1, u^{k-2} \circ u_1 \circ w_2), \ldots, p(v_1, u \circ u_1 \circ w_2)$ и $p(v_1, u_1 \circ w_2)$. Из последнего следует, что слово $u_2^{-1} \circ w_2 \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$ и существует путь $p(v_1, u_2^{-1} \circ w_2)$. Тогда слово $u^{-1} \circ u_2^{-1} \circ w_2 \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$ и существует путь $p(v_1, u^{-1} \circ u_2^{-1} \circ w_2)$. Следовательно, слово $(u^{-1})^2 \circ u_2^{-1} \circ w_2 \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$ и существует путь $p(v_1, (u^{-1})^2 \circ u_2^{-1} \circ w_2)$. Рассуждая по индукции, получаем, что существуют пути $p(v_1, (u^{-1})^3 \circ u_2^{-1} \circ w_2), \ldots, p(v_1, (u^{-1})^{k-1} \circ u_2^{-1} \circ w_2)$. Таким образом, в графе G существует, по крайней мере, $((2k-2)d(w_2) - (2k-2))$ вершин, не принадлежащих пути $p(v_2, w)$ (рис. 6).

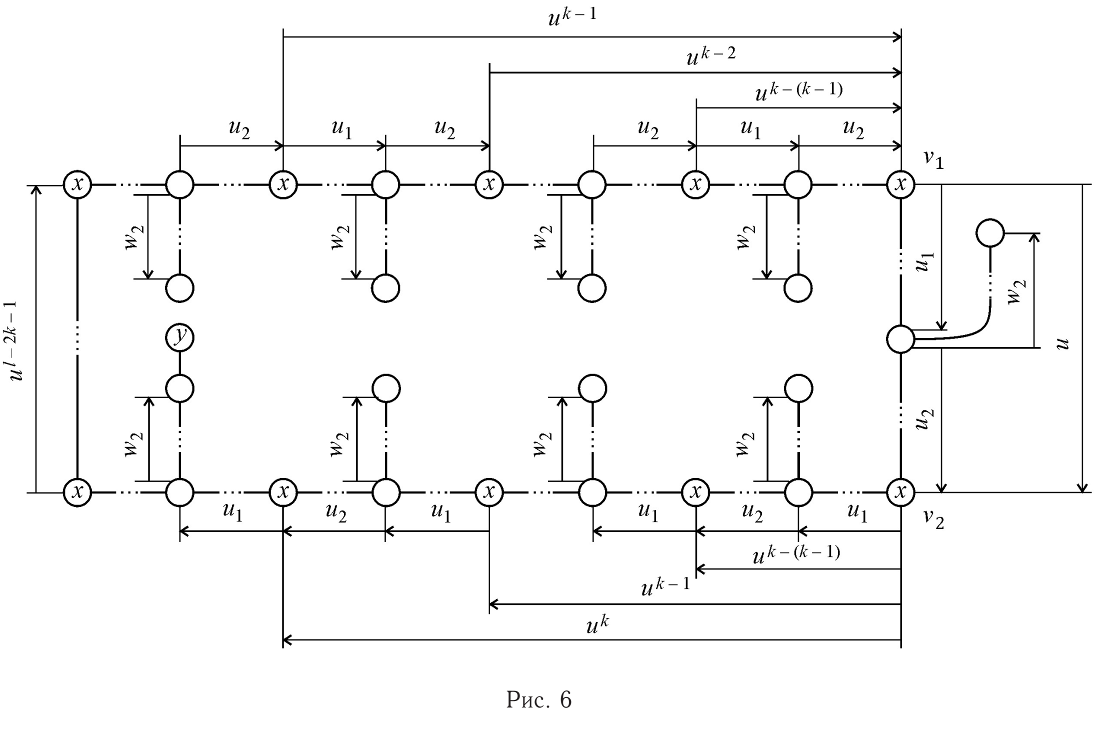

Рис. 6

Оценим длину слова u. В данном случае $n \geqslant ld(u) - l + d(w_2) + A$, где $A = (2k-2)d(w_2) - (2k-2)$. Отсюда, $d(u) \leqslant \dfrac{n}{l} + 1 - \dfrac{1}{l}d(w_2) - A$. Ясно, что $d(u)$ тем больше, чем меньше A. Следовательно, отвеличины A зависит и величина $d(w)$. Значение A обращается в 0, если $d(w_2) = 1$. Следовательно, в этом случае $d(w)$ достигает максимума при прочих равных условиях.

Пусть $d(w_2) = 1$. Рассмотрим граф на рис. 7. Здесь $u_1 \circ u_2 = u$, $u^k \circ u_1 y = w$. Если $d(u^k \circ u_1) < d((u^{-1})^{l-k-1} \circ u_2^{-1})$, то $(u^{-1})^{l-k-1} \circ u_2^{-1} y \in L_{v_1} \setminus L_{v_2}$ и $d((u^{-1})^{l-k-1} \circ u_2^{-1} y) < d(w)$, что невозможно. Следовательно, $k \leqslant (l-1)/2$ и $d(u_1) \leqslant d(u)/2$. Оценим длину слова w. В данном случае $n \geqslant ld(u) - l + 1$. Отсюда $d(u) \leqslant (n + l - 1)/l$. Так как $d(w) = d(u^k \circ u_1 y) = kd(u) - k + d(u_1)$, то $d(w) \leqslant (kn + kl - k)/l + d(u_1) - k$. Так как $d(u_1) \leqslant d(u)/2$ и $k \leqslant (l-1)/2$, то $d(w) \leqslant n/2$.

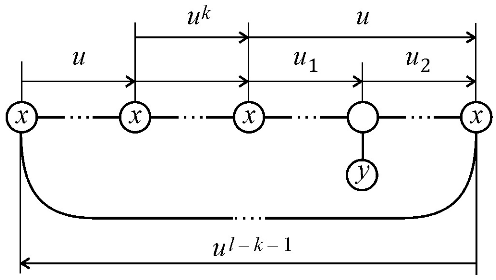

Рис. 7

Предположим, что путь $p(v_2, w)$ содержит цикл, например, $p(v_2 \star w_1, w_2 \circ w_3)$ (рис. 8). Здесь G' обозначает неориентированное дерево с корнем в вершине v_1, ветви которого помечены всеми начальными отрезками слова w. Принципы выделения подграфа G' из графа G будут объяснены ниже.

Пусть путь $p(v_1, w')$ содержит цикл $p(v_1 \star w_1, w_2 \circ w_3)$. По определению Д-графа путь $p(v_1, w_1 \circ w_2 \circ w_4)$ определен единственным образом. Тогда слово $w_1 \circ w_2 \circ w_4 \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$, а слово $w_1 \circ w_2 \circ w_4 y \in L_{v_2} \setminus L_{v_1}$. Легко видеть, что $d(w_1 \circ w_2 \circ w_4 y) < d(w)$. Следовательно, $w_1 \circ w_2 \circ w_4 y$ является кратчайшим словом из $L_{v_1} \oplus L_{v_2}$, что невозможно.

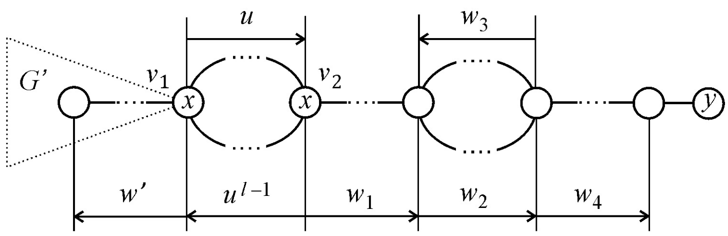

Рис. 8

Пусть пути $p(v_2, w)$ и $p(v_1, w')$ не имеют общих вершин с путем $p(v_1, u^l)$, кроме вершин v_1 и v_2. Если $d(u) \geqslant d(w)$, то $d(w) < n/2$. Действительно, так как путь $p(v_1, u)$ является простым по определению, то длина слова u не превосходит n/l, а минимальное возможное значение l равно 2.

Пусть $d(u) < d(w)$ и $w = w_1 \circ (w_2 \circ w_3 \circ w_2)^s \circ w_4 y$. Предположим, что длины слов w_1, w_2, w_{32}, w_4 совпадают и $s = 1$. Тогда существует путь $P(v_1, w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_4)$, не содержащий циклов. Слово $w_1 \circ w_2 \circ w_4 y \in L_{v_2}$ и его длина меньше, чем $d(w)$. Следовательно, это слово принадлежит L_{v_1} и существует путь $p(v_1, w_1 \circ w_2 \circ w_4 y)$. Так как $d(w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_1^{-1}) < d(w)$, то $w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_1^{-1} \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$. Следовательно, существует путь $p(v_1, w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_1^{-1})$. Так как $d(w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_3) < d(w)$, то $w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_3 \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$. Следовательно, существует путь $p(v_1, w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_3)$. Слово $w_1 \circ w_3^{-1} \circ w_4 y \in L_{v_2}$ и его длина меньше, чем $d(w)$. Следовательно, это слово принадлежит L_{v_1} и существует путь $p(v_1, w_1 \circ w_3^{-1} \circ w_4 y)$. Так как длины слов $w_1 \circ w_3^{-1} \circ w_2^{-1} \circ w_1^{-1}$, $w_1 \circ w_3^{-1} \circ w_2^{-1} \circ w_3^{-1} \circ w_4$, $w_1 \circ w_3^{-1} \circ w_2^{-1} \circ w_3^{-1} \circ w_2^{-1}$ меньше, чем $d(w)$, то все эти слова принадлежат $L_{v_1} \cap L_{v_2}$, и существуют пути с соответствующими метками из вершины v_1 (рис. 9).

Оценим число $n(G')$ вершин в подграфе G'. В данном случае $n(G') \geqslant 3d(w_1) + 4d(w_2) + 4d(w_3) + 4d(w_4) - 9$. Легко видеть, что $d(w) = d(w_1) + 2d(w_2) + d(w_3) + d(w_4) - 3$. Таким образом, значение $d(w)$, по крайней мере, в 2 раза меньше, чем число вершин в подграфе G'. Следовательно, $d(w) < n/2$. С ростом параметра s число вершин в подграфе G' будет только возрастать. Таким образом, значение $d(w)$ не превысит $n/2$.

Предположим, что одно из слов w_1, $w_1 \circ w_2$ или $w_1 \circ w_2 \circ w_4$ является начальным отрезком слова u^l (или $(u^{-1})^l$). Пусть для определенности слово $w_1 \circ w_2 \circ w_4$ является начальным отрезком u^l. По определению Д-графа все вершины пути $p(v_2, w_1 \circ w_2 \circ w_4)$ являются также вершинами пути $p(v_1, u^l)$. Так как $w_1 \circ w_2 \circ w_4 \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$, то все вершины пути $p(v_1, w_1 \circ w_2 \circ w_4)$ являются также вершинами пути $p(v_1, u^l)$. Тогда число вершин подграфа G', не являющихся вершинами пути $p(v_1, u^l)$, уменьшится на $d(w_1) + d(w_2) + d(w_4) - 2$. Таким образом, число таких вершин будет больше, чем $d(w)$. Следовательно, и в этом случае $d(w) < n/2$. □

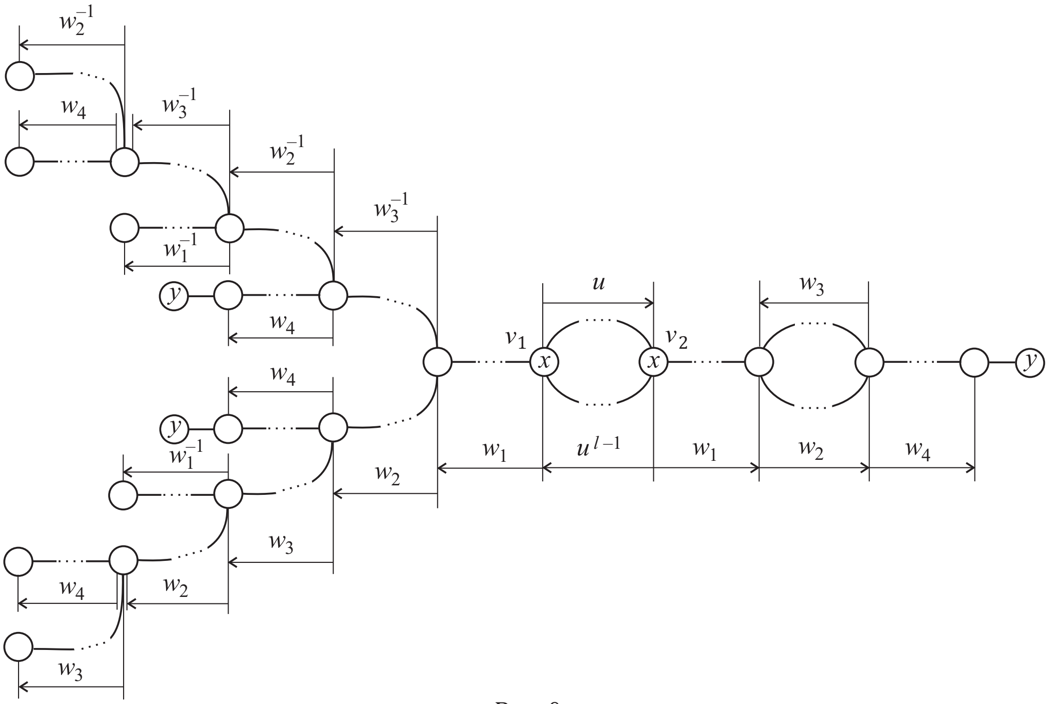

Рис. 9

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе показано, что верхняя оценка длины слова, различающего две вершины Д-графа равна половине числа вершин графа. При помощи этого результата могут быть понижены оценки высоты идентификаторов вершин помеченных графов, что влияет на эффективность алгоритмов самолокализации мобильных агентов в топологических средах (роботов, поисковых программ и т. п.) [8].

Библиографический список

1. *Глушков В. М., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л.* Алгебра. Языки. Программирование. Киев : Наук. думка, 1989. 378 с.
2. *Капитонова Ю. В., Летичевский А. А.* Математическая теория проектирования вычислительных систем. М. : Наука, 1988. 298 с.
3. *Килибарда Г., Кудрявцев В. Б., Ушчумлич Ш.* Независимые системы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. 2003. Т. 15, вып. 2. С. 3–39.
4. *Dudek G., Jenkin M.* Computational Principles of Mobile Robotics. Cambridge University Press, 2000. 280 p.
5. *Сапунов С. В.* Эквивалентность помеченных графов // Труды ИПММ НАНУ. 2002. Т. 7. С. 162–167.
6. *Хопкрофт Д. Э., Мотвани Р., Ульман Д. Д.* Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. М. : Издат. дом «Вильямс». 2002. 528 с.
7. *Грунский И. С., Сапунов С. В.* Восстановление графа операционной среды мобильного робота путем разметки вершин, пригодной для дальнейшей навигации // Искусственный интеллект. 2012. № 4. С. 420–428.
8. *Грунский И. С., Сапунов С. В.* Идентификация вершин помеченных графов // Труды ИПММ НАНУ. 2010. Т. 21. С. 86–97.

On Upper Bound of Vertex Distinguishing Word Length on Vertex Labeled Graph

S. V. Sapunov

Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Ukraine, 83114, Donetsk, R. Luxemburg st., 74, sapunov.sv@iamm.ac.donetsk.ua

The problem of vertex distinguishing on vertex labeled graphs is considered. Two vertices are called distinguishable if associated languages over the alphabet of labels are different. A linear upper bound of vertex distinguishing word length equal to half the number of vertices is obtained.

Key words: vertex labeled graphs, languages over the label alphabet, vertex equivalence.

References

1. Glushkov V. M., Tsejtlyn G. E., Yuschenko E. L. *Algebra. Iazyki. Programmirovanie* [Algebra. Languages. Programming]. Kiev, Naukova dumka, 1989, 378 p. (in Russian).
2. Kapitonova Yu. V., Letichevsky A. A. *Matematicheskaia teoriia proektirovaniia vychislitel'nykh sistem* [Mathematical Theory of Computational Systems Design]. Moscow, Nauka, 1988, 298 p. (in Russian).
3. Kilibarda G., Kudryavtsev V. B., Ushchumlich Sh. Independent systems of automata on mazes. *Diskretnaya matematika*, 2003, vol. 15, no. 2, pp. 3–39 (in Russian).
4. Dudek G., Jenkin M. *Computational Principles of Mobile Robotics*. Cambridge University Press, 2000, 280 p.
5. Sapunov S. V. Ekvivalentnost' pomechennykh grafov [Vertex Labeled Graphs Equivalence. *Trudy IPMM NANU*, 2002, vol. 7, pp. 162–167 (in Russian).
6. Hopcroft J. E., Motwani R., Ullman J. D. *Vvedenie v teoriiu avtomatov, iazykov i vychislenii* [Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation]. Moscow, Izdat. dom «Williams», 2002, 528 p. (in Russian).
7. Grunsky I. S., Sapunov S. V. Reconstruction of the graph of operating environment of mobile robot by vertex-labeling sufficient for further navigation. *Iskusstvennyj intellekt*, 2012, no. 4, pp. 420–428 (in Russian).
8. Grunsky I. S., Sapunov S. V. Identifikatsiia vershin pomechennykh grafov [Vertex Identification on Vertex Labeled Graphs]. *Trudy IPMM NANU*, 2010, vol. 21, pp. 86–97 (in Russian).

УДК 519.872

АНАЛИЗ ЗАМКНУТЫХ НЕНАДЕЖНЫХ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ ТРЕБОВАНИЙ

И. Е. Тананко[1], Н. П. Фокина[2]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и автоматического управления, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, TanankoIE@info.sgu.ru

[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и автоматического управления, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. E-mail: FokinaNP.sgu@gmail.com

Рассматривается замкнутая ненадежная сеть массового обслуживания с групповыми переходами. Основным результатом статьи является стационарное распределение вероятностей состояний сетей обслуживания данного типа.

Ключевые слова: сети массового обслуживания, ненадежный прибор, групповые переходы требований, анализ сетей массового обслуживания.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время сети массового обслуживания широко используются в качестве моделей больших сложных дискретных стохастических систем с сетевой структурой. Существует большой класс систем, изменение состояния которых происходит через фиксированные, как правило, равные интервалы времени. К таким системам относятся, например, сети, в которых используется асинхронный способ передачи данных (так называемые сети ATM). Данная технология основана на передаче данных в виде ячеек фиксированного размера. Другим примером является конвейерное производство, в котором процесс преобразования и перемещения изделий разделен на последовательность стадий. Достаточно точными моделями перечисленных систем являются сети массового обслуживания с дискретным временем.

Основная сложность исследования сетей массового обслуживания с дискретным временем заключается в возможности наступления одновременно нескольких событий. Точные методы анализа сетей массового обслуживания с тандемной и циклической топологией и геометрически распределенными длительностями обслуживания требований системами уже получены [1, 2]. В статьях [3, 4] получило продолжение развитие методов анализа сетей такого класса. В статье [3] дается точный метод анализа тандемных сетей обслуживания с произвольным входящим потоком требований. В статье [4] рассматривается замкнутая циклическая сеть обслуживания с системами, имеющими геометрически распределенную длительность обслуживания требований. Исследуются асимптотические свойства характеристик систем обслуживания сетей такого класса при увеличении числа систем в сети обслуживания.

