References

1. Naimark M. A. *Normirovannye kol'tsa* [Normed Rings]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 664 p. (in Russian).
2. Burbaki N. *Spektral'naya teoriya* [Spectral theory]. Moscow, Mir, 1972, 183 p. (in Russian).
3. Bochner S., Fillips R. S. Absolutely convergent Fourier expansion for non-commutative normed rings. *Ann. of Math.*, 1942, no. 3, pp. 409–418.
4. Baskakov A. G. Wiener's theorem and the asymptotic estimates of the elements of inverse matrices. *Functional Analysis and Its Applications*, 1990, vol. 24, no. 3, pp. 222–224.
5. Baskakov A. G. Absteact haemonic analysis and asymptotic estimates of elements of inverse matrices. *Math. Notes*, 1992, vol. 52, iss. 2, pp. 764–771.
6. Baskakov A. G. On Spectral Properties of Some Classes of Linear Operators. *Functional Analysis and Its Applications*, 1995, vol. 29, no. 2, pp. 121–123.
7. Baskakov A. G. Asymptotic estimates for elements of matrices of inverse operators, and harmonic analysis. *Siberian Math. J.*, 1997, vol. 38, iss. 1, pp. 10–22.
8. Baskakov A. G. Estimates for the entries of inverse matrices and the spectral analysis of linear operators. *Izvestiya: Mathematics*, 1997, vol. 61, no. 6, pp. 1113–1135. DOI: 10.4213/im164.
9. Baskakov A. G. *Garmonicheskii analiz lineinykh operatorov* [Harmonic analysis of linear operators]. Voronezh, Voronezh Univ. Press, 1987, 165 p. (in Russian).
10. Kurbatov V. G. Algebras of difference and integral operators. *Functional Analysis and Its Applications*, 1990, vol. 24, no. 2, pp. 156–158.
11. Strukova I. I. Wiener's theorem for periodic at infinity functions. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 4, pp. 34–41 (in Russian).

УДК 517.547.2

К ПРОБЛЕМЕ ЛЕОНТЬЕВА О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА

В. Б. Шерстюков

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, shervb73@gmail.com

Рассматривается произвольная целая функция экспоненциального типа, все нули которой просты и образуют последовательность с нулевым индексом конденсации. На множестве нулей такой функции ее производная растет в определенном смысле максимально быстро. Требуется выяснить, будет ли исходная функция обладать полной регулярностью роста. Эта задача, возникшая в теории представления аналитических функций рядами экспонент, была поставлена А. Ф. Леонтьевым более сорока лет назад и пока не решена. В настоящей работе показано, что означенная проблема решается положительно, если функция «не слишком мала» на некоторой прямой.

Ключевые слова: проблема Леонтьева, функция вполне регулярного роста, индекс конденсации.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Изучая вопросы, связанные с представлением аналитических функций рядами экспонент, А. Ф. Леонтьев (1972 г.) поставил следующую задачу [1, замечание на с. 1291]. Пусть $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа (ЦФЭТ) с последовательностью простых (всех) нулей $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ и индикатором

$$h_L(\theta) \equiv \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\left|L\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r}, \qquad \theta\in[0,2\pi]\,,$$

удовлетворяющая условию

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{|\lambda_k|}\ln|L'(\lambda_k)| - h_L(\arg\lambda_k)\right\} = 0\,. \tag{1}$$

Нужно выяснить, является ли $L(\lambda)$ функцией вполне регулярного роста (ВРР).

Последнее свойство в соответствии с общим определением [2, гл. III] равносильно существованию равномерного по $\theta\in[0,2\pi]$ предела

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\notin E}} \frac{\ln\left|L\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r} = h_L(\theta)\,.$$

Здесь E — некоторое множество положительных чисел нулевой относительной меры, т. е. такое, что множество $E\cap[0,r]$ измеримо (по Лебегу) при каждом $r>0$ и его мера есть $o(r)$ при $r\to+\infty$.

Отметим, что все используемые в дальнейшем без пояснений определения и результаты теории целых функций хорошо известны; в случае необходимости их можно найти, к примеру, в монографиях [2–4].

Условие (1), равносильное, как несложно видеть, неравенству

$$\varlimsup_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{|\lambda_k|}\ln\frac{1}{|L'(\lambda_k)|}+h_L(\arg\lambda_k)\right\}\le 0\,, \tag{2}$$

и близкие ему по характеру играют ключевую роль при установлении критериев представимости аналитических функций рядами экспонент или обобщенных экспонент (см., например, [4, 5]) и затрагивают целый ряд смежных вопросов: интерполяции, слабой достаточности (γ-достаточности) и максимальности множеств в различных классах целых функций. Из большого количества соответствующих работ отметим [6–9], имеющие непосредственное отношение к описанной проблематике.

Интересующая нас задача до выхода в свет работ автора [10–12] исследовалась самим Леонтьевым, а также Ю. И. Мельником, А. В. Братищевым как в приведенной выше, так и в более общей постановке (для целой функции с кратными нулями и индикатором $H_L(\theta)$ при уточненном порядке $\rho(r)\to\rho\in[0,+\infty)$; при этом условие (1) естественным образом подправлялось). Эта задача имеет положительное решение при $\rho\in[0,1/2)$. Тот же результат получен в [13] для $\rho\in[1/2,1)$ при дополнительных предположениях

$$\min_{\theta\in[0,\,2\pi]}H_L(\theta)>0,\qquad \varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\min\limits_{|\lambda|=r}|L\,(\lambda)|}{\ln r}=+\infty.$$

Следует отметить, что при $\rho(r)\equiv\rho$ из теоремы 1 работы Мельника [14] и теоремы 3 обзорной статьи Ю. Ф. Коробейника [4, с. 106–107] следует справедливость цитированных результатов Братищева уже при любом $\rho>0$. Если условие положительности индикатора нарушено, то при $\rho\ge 1/2$ соотношение (1) или его естественное обобщение не влекут, вообще говоря, полной регулярности роста функции. Соответствующий пример построен в [13].

Величину, стоящую в левой части неравенства (2), часто называют леонтьевским индексом конденсации нулевого множества ЦФЭТ $L(\lambda)$. Отметим, что в духе задачи Леонтьева описание полной регулярности роста четной ЦФЭТ с простыми вещественными нулями получено недавно автором. Соответствующий результат, формулируемый в терминах обобщенного индекса конденсации последовательности нулей, доложен на 16-й Саратовской зимней школе (2012 г.).

В настоящей работе также рассматривается первоначальный вопрос о справедливости импликации: (1) $\Rightarrow L(\lambda)$ — функция ВРР. Обозначим для удобства изложения через $\mathscr{L}$ класс всех ЦФЭТ (называемый в дальнейшем классом Леонтьева), удовлетворяющих условию (1) этой «классической» задачи. Несмотря на усилия ряда авторов, вопрос о полной регулярности роста функции $L\in\mathscr{L}$, индикаторная диаграмма которой имеет внутренние точки, в общей ситуации остается открытым. Результаты Мельника позволяют дать положительный ответ на него в случае наличия особой симметрии в расположении корней функции $L(\lambda)$ или определенной оценки снизу роста $|L(\lambda)|$ на некоторой системе расширяющихся до бесконечности окружностей $|\lambda|=R_n$. Например [15], если Λ инвариантно относительно поворота вокруг начала на фиксированный угол раствора $2\pi/s$, $s\ge 3$, или если $\min\limits_{|\lambda|=R_n}|L(\lambda)|>R_n^{-p}$ при каком-либо $p>0$ и всех номерах n [16]. Так, что неизвестно даже, имеет ли ВРР произвольная четная функция $L\in\mathscr{L}$. Дополнительные сведения из истории вопроса и точные формулировки отдельных результатов можно найти в диссертации Братищева [17, введение, с. 34–35; гл. 2, § 2.5].

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Основной результат статьи положительно решает задачу Леонтьева при дополнительном условии, допускающем не слишком быстрое стремление функции к нулю на какой-нибудь прямой вне достаточно массивного множества на ней. Доказательство опирается на применение известной теоремы Ингама–Левинсона [18, 19] о максимальной скорости стремления к нулю на вещественной оси финитного преобразования Фурье [20, гл. 3, §3.3]. Приведем в удобном для нас виде формулировку этой теоремы.

Пусть $\omega(x)$ — положительная неубывающая функция ($x\ge 0$), удовлетворяющая условию

$$\int\limits_1^\infty\frac{\omega(x)}{x^2}\,dx<\infty. \tag{3}$$

Тогда для любого $a > 0$ найдется четная целая функция $F(\lambda)$ экспоненциального типа и вполне регулярного роста, имеющая только вещественные нули, индикаторную диаграмму $[-ia, ia]$ и удовлетворяющая оценке

$$|F(x)| \le \exp(-\omega(|x|)), \qquad |x| > x_0.$$

Напомним, что множество S_0 вещественных чисел называется относительно плотным по мере, если найдутся такие положительные числа l и α, что для любого $x \in \mathbb{R}$ порция S_0 в отрезке $[x, x+l]$ имеет меру, большую, чем α. Пусть S — множество точек на какой-либо прямой γ $(0 \in \gamma)$, полученное из $S_0 \subset \mathbb{R}$ поворотом на соответствующий угол. Если S_0 относительно плотно по мере на $\mathbb{R}$, то множество S называем относительно плотным по мере на прямой γ.

Теперь мы можем сформулировать центральный результат статьи.

Теорема 1. *Пусть функция $L(\lambda)$ принадлежит классу $\mathscr{L}$ и имеет положительный индикатор. Пусть еще найдутся прямая γ, $0 \in \gamma$, относительно плотное по мере множество S на ней и положительная неубывающая функция $\omega(x)$ с условием* (3) *такие, что*

$$\inf \{|L(\lambda)| \exp \omega(|\lambda|) : \ \lambda \in S\} > 0. \tag{4}$$

Тогда $L(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост.

Доказательство. Перед началом доказательства отметим, что в [10, теорема 3] установлен аналогичный результат, в котором (4) заменено на более жесткое требование $\inf\{|L(\lambda)| : \ \lambda \in S\} > 0$. Мы покажем, что можно свести ситуацию к рассмотренной в [10]. Приступая к доказательству, выберем и зафиксируем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы функция $F(\lambda)$, построенная по весу $\omega_0(x) \equiv (1+\delta)\omega(x)$ в соответствии с приведенной выше теоремой Ингама–Левинсона, удовлетворяла при всех $\theta \in [0, 2\pi]$ условию

$$h_F(\theta) < h_L(\theta) - 4\delta\,. \tag{5}$$

Введем объединение кругов с конечной суммой радиусов:

$$U \equiv \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda - \lambda_k| < e^{-\delta\,|\lambda_k|} \right\}$$

и функцию

$$\Phi(\lambda) \equiv \frac{F(\lambda)}{L(\lambda)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}\,.$$

Используя принадлежность $L(\lambda)$ классу Леонтьева и экспоненциальный рост $F(\lambda)$, получим с положительными постоянными A и B при всех $k \in \mathbb{N}$ неравенства

$$|L'(\lambda_k)| \ge A \exp\left((h_L(\arg\lambda_k) - \delta)|\lambda_k|\right), \qquad |F(\lambda_k)| \le B \exp\left((h_F(\arg\lambda_k) + \delta)|\lambda_k|\right)\,.$$

Если $\lambda \notin U$, то из этих неравенств с учетом (5) следует оценка

$$\left| \frac{F(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)} \right| \le \frac{B}{A} \exp\left((h_F(\arg\lambda_k) - h_L(\arg\lambda_k) + 3\delta)|\lambda_k|\right) < \frac{B}{A}\, e^{-\delta\,|\lambda_k|}.$$

Отсюда и из теоремы о категориях стандартным образом заключаем, что $\Phi(\lambda)$ есть ЦФЭТ. Серия дальнейших шагов покажет, что $\Phi(\lambda) \equiv 0$.

Будем считать, что прямая γ из условия теоремы совпадает с вещественной осью, и, следовательно, $S \subset \mathbb{R}$, что, разумеется, не нарушает общности рассуждений. Поскольку $|F(x)| \le \exp\left(-\omega_0(|x|)\right)$, $|x| > x_0$, то из (4) вытекает существование такой постоянной $M > 0$, что при всех $x \in S$, $|x| > x_0$, верно

$$\left| \frac{F(x)}{L(x)} \right| \le M \exp\left(-\omega_0(|x|) + \omega(|x|)\right) = M\, e^{-\delta\,\omega(|x|)}\,.$$

Значит, при $x \in S \setminus U$, $|x| > x_0$, справедлива оценка

$$|\Phi(x)| \le M\, e^{-\delta\,\omega(|x|)} + \frac{B}{A} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\delta\,|\lambda_k|}\,.$$

Итак, ЦФЭТ $\Phi(\lambda)$ ограничена на относительно плотном по мере множестве, а по лемме Б. Я. Левина из [21] — и на всей прямой $\mathbb{R}$. Следовательно, $\Phi(\lambda)$ — функция ВРР, что мы используем ниже при нахождении ее индикатора. Для сокращения записи полагаем

$$\Psi(\lambda) \equiv L(\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}\,,$$

отмечая, что $\Psi(\lambda)$ есть ЦФЭТ с индикатором $h_\Psi(\theta) \le h_L(\theta)$, $\theta \in [0,\, 2\pi]$.

Проанализируем теперь тождество

$$F(\lambda) = \Psi(\lambda) + \Phi(\lambda)\, L(\lambda).$$

Согласно (5) имеем $h_F(\theta) < h_L(\theta)$ при всех θ. Если бы при каком-то значении θ_0 выполнялось $h_\Phi(\theta_0) > 0$, то мы могли бы записать

$$h_F(\theta_0) = \max\{h_\Psi(\theta_0),\, h_\Phi(\theta_0) + h_L(\theta_0)\} = h_\Phi(\theta_0) + h_L(\theta_0) > h_L(\theta_0),$$

приходя к противоречию. Следовательно, функция $\Phi(\lambda)$ имеет нулевой экспоненциальный тип. Более того, по теореме Фрагмена–Линделефа $\Phi(\lambda)$ есть тождественная постоянная, так как величина $|\Phi(\lambda)|$ ограничена на $\mathbb{R}$. Но при $x \to \infty$ по множеству $S \setminus U$ имеем:

$$|\Phi(x)| \le M\, e^{-\delta\, \omega(|x|)} + \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)(x - \lambda_k)} \right| \to 0.$$

Итак, $\Phi \equiv 0$. Отсюда

$$\frac{F(\lambda)}{L(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}, \qquad \lambda \notin \Lambda.$$

Правая часть полученного соотношения ограничена на множестве $\mathbb{C} \setminus U$, поэтому найдется такая постоянная $C > 0$, что при всех $\lambda \notin U$ справедлива оценка

$$|L(\lambda)| \ge C\, |F(\lambda)|.$$

Функция $F(\lambda)$ имеет только вещественные нули, обладает ВРР и положительным индикатором при $\theta = \pm\pi/2$. Вместе с последним неравенством это позволяет выбрать относительно плотное по мере на мнимой оси множество S_1, на котором $\inf\limits_{\lambda \in S_1} |L(\lambda)| > 0$. Применение цитированной выше теоремы 3 из [10] завершает рассуждения. Теорема 1 доказана.

Приведем еще один результат, вытекающий из [10, теорема 3].

Теорема 2. *Четная или нечетная функция класса $\mathscr{L}$ с положительным индикатором и нулями, содержащимися при каких-либо $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ и $D > 0$ в гиперболических секторах $\Gamma(\theta_0, D) \equiv \left\{\lambda \in \mathbb{C}:\ \mathrm{Re}\left(\lambda e^{-i\theta_0}\right)^2 \le D\right\}$, является функцией вполне регулярного роста.*

Доказательство. Не умаляя общности рассуждений, будем предполагать, что функция $L(\lambda)$ четна, т. е. что

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

По условию при всех $k \in \mathbb{N}$ верно $|\lambda_k|^2 \cos(2(\theta_0 - \arg\lambda_k)) \le D$. С учетом этого оценим снизу $|L(\lambda)|$ на луче $\gamma(\theta_0) \equiv \{\lambda \in \mathbb{C}:\ \arg\lambda = \theta_0\}$. Для произвольного $\lambda \in \gamma(\theta_0)$, $|\lambda| \ge \sqrt{2D}$, имеем:

$$|L(\lambda)| = \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - 2\left|\frac{\lambda}{\lambda_k}\right|^2 \cos(2(\theta_0 - \arg\lambda_k)) + \left|\frac{\lambda}{\lambda_k}\right|^4} \ge \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{|\lambda|^2}{|\lambda_k|^4}\,(|\lambda|^2 - 2D)} \ge 1\,.$$

Следовательно, на прямой γ, содержащей луч $\gamma(\theta_0)$, при $|\lambda| \ge \sqrt{2D}$ выполнена оценка $|L(\lambda)| \ge 1$. По теореме 3 [10] функция $L(\lambda)$ имеет ВРР. Теорема 2 доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 13-01-00281).

Библиографический список

1. *Леонтьев А. Ф.* Об условиях разложимости аналитических функций в ряды Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1972. Т. 36, № 6. С. 1282–1295. DOI: 10.1070/IM1972v006n06ABEH001918.
2. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М. : Гостехиздат, 1956. 632 с.
3. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М. : Наука, 1976. 536 с.
4. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. М. : Наука, 1983. 175 с.
5. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // УМН. 1981. Т. 36, № 1. С. 73–126. DOI: 10.1070/RM 1981v036n01ABEH002542.
6. *Абанин А. В.* Слабо достаточные множества и абсолютно представляющие системы : дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 1995. 268 с.
7. *Братищев А. В.* Один тип оценок снизу целых функций конечного порядка и некоторые приложения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48, № 3. С. 451–475.
8. *Коробейник Ю. Ф.* Максимальные и γ-достаточные множества. Приложения к целым функциям. II // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1991. В. 55. С. 23–34.
9. *Шерстюков В. Б.* К вопросу о γ-достаточных множествах // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 4. С. 935–943. DOI: 10.1007/BF02679704.
10. *Шерстюков В. Б.* Об одной задаче Леонтьева и представляющих системах экспонент // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 2. С. 301–313. DOI: 10.1023/ A:1025068527611.]
11. *Шерстюков В. Б.* Об одном подклассе целых функций вполне регулярного роста // Комплексный анализ. Теория операторов. Математическое моделирование. Владикавказ : Изд-во ВНЦ РАН, 2006. С. 131–138.
12. *Шерстюков В. Б.* О некоторых признаках полной регулярности роста целых функций экспоненциального типа // Мат. заметки. 2006. Т. 80, № 1. С. 119–130. DOI: 10.1007/s11006-006-0115-6.
13. *Братищев А. В.* К одной задаче А. Ф. Леонтьева // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270, № 2. С. 265–267.
14. *Мельник Ю. И.* О представлении регулярных функций рядами типа рядов Дирихле // Исследование по теории приближений функций и их приложения. Киев : Наук. думка, 1978. С. 132–141.
15. *Мельник Ю. И.* Об условиях сходимости рядов Дирихле, представляющих регулярные функции // Математический анализ и теория вероятности. Киев : Наук. думка, 1978. С. 120–123.
16. *Мельник Ю. И.* Об условиях разложимости регулярных функций в ряды экспонент // Всесоюз. симпозиум по теории аппроксимации функций в комплексной области : тез. докл. Уфа : БФ АН СССР, 1980. С. 94.
17. *Братищев А. В.* Базисы Кете, целые функции и их приложения : дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 1997. 248 с.
18. *Ingham A. E.* A note on Fourier transforms // J. London Math. Soc. 1934. Vol. 9. P. 29–32.
19. *Levinson N.* Gap and density theorems. N. Y. : Amer. Math. Soc., 1940. 246 p.
20. *Седлецкий А. М.* Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. М. : Физматлит, 2005. 503 с.
21. *Левин Б. Я.* Почти периодические функции с ограниченным спектром // Актуальные вопросы математического анализа. Ростов н/Д : Изд-во Ростов. гос. ун-та, 1978. С. 112–124.

The Problem of Leont'ev on Entire Functions of Completely Regular Growth

V. B. Sherstyukov

National Research Nuclear University MEPhI, Russia, 115409, Moscow, Kashirskoe shosse, 31, shervb73@gmail.com

We consider an entire function of exponential type with all its zeros are simple and form a sequence with the index condensation zero. On the set of zeros a function of its derivative is growing quickly. Required to determine whether original function have complete regularity of growth. This problem, which arose in the theory of representation of analytic functions by exponential series was posed by A. F. Leontiev more than forty years ago and has not yet been solved. In this paper we show that the aforesaid problem a positive solution if the function is «not too small» on a straight line.

Key words: Leont'ev problem, function of completely regular growth, index of condensation.

References

1. Leont'ev A. F. On conditions of expandibility of analytic functions in Dirichlet series. *Math. of the USSR-Izvestiya*, 1972, vol. 6, no. 6, pp. 1265–1277. DOI: 10.1070/IM 1972v006n06ABEH001918.
2. Levin B. Ja. *Distributions of zeros of entire functions*. RI, Providence, Amer. Math. Soc., 1964. [Rus. ed.: Levin B. Ja. *Raspredelenie kornei tselykh funktsii*. Moscow, Gostekhizdat, 1956. 632 p.]
3. Leont'ev A. F. *Riady eksponent* [Exponential series]. Moscow, Nauka, 536 p. (in Russian).
4. Leont'ev A. F. *Tselye funktsii. Riady eksponent* [Entire functions. Exponential series]. Moscow, Nauka, 1983, 175 p. (in Russian).
5. Korobeinik Yu. F. Representing systems. *Russian Math. Surv.*, 1981, vol. 36, no. 1, pp. 75–137. DOI: 10.1070/RM1981v036n01ABEH002542.

6. Abanin A. V. *Slabo dostatochnye mnozhestva i absoliutno predstavliaiushchie sistemy*. Diss. dokt. fiz.-mat. nauk [*Weakly sufficient sets and absolutely representing systems*. Dr. phys. and math. sci. diss.]. Rostov on Don, 1995, 268 p.
7. Bratishchev A. V. A type of lower estimate for entire functions of finite order, and some applications. *Math. of the USSR-Izvestiya*, 1985, vol. 24, no. 3, pp. 415–438. DOI: 10.1070/IM1985v024n03ABEH001243.
8. Korobeinik Yu. F. Maksimal'nye i γ-dostatochnye mnozhestva. Prilozheniia k tselym funktsiiam. II [The maximal and γ-sufficient sets. Applications to entire functions]. *Teoriia funktsii, funktsional'nyi analiz i ikh prilozheniia*. Kharkov, 1991, vol. 55, pp. 23–34 (in Russian).
9. Sherstyukov V. B. On a question about γ-sufficient sets. *Siberian Math. J.*, 2000, vol. 41, no. 4, pp. 778–784. DOI: 10.1007/BF02679704.
10. Sherstyukov V. B. On a problem of Leont'ev and representing systems of exponentials. *Math. Notes*, 2003, vol. 73, no. 2, pp. 286–298. DOI: 10.1023/A:1025068527611.
11. Sherstyukov V. B. Ob odnom podklasse tselykh funktsii vpolne reguliarnogo rosta [On a subclass of entire functions of completely regular growth]. *Kompleksnyi analiz. Teoriia operatorov. Matematicheskoe modelirovanie*. Vladikavkaz, Publ. VNTs RAN, 2006, pp. 131–138 (in Russian).
12. Sherstyukov V. B. On some criteria for completely regular growth of entire functions of exponential type. *Math. Notes*, 2006, vol. 80, no. 1, pp. 114–126. DOI: 10.1007/s11006-006-0115-6.
13. Bratishchev A. V. On a problem of A. F. Leont'ev. *Sov. Math. Dokl.* 1983, vol. 27, pp. 572–574 (in Russian).
14. Mel'nik Yu. I. O predstavlenii reguliarnykh funktsii riadami tipa riadov Dirikhle [On the representation of regular functions by Dirichlet type series]. *Issledovanie po teorii priblizhenii funktsii i ikh prilozheniia*, Kiev, Naukova Dumka, 1978, pp. 132–141 (in Russian).
15. Mel'nik Yu. I. Ob usloviiakh skhodimosti riadov Dirikhle, predstavliaiushchikh reguliarnye funktsii [Conditions for the convergence of Dirichlet series that represent regular functions]. *Matematicheskii analiz i teoriia veroiatnostei*, Kiev, Naukova Dumka, 1978, pp. 120–123 (in Russian).
16. Mel'nik Yu. I. Ob usloviiakh razlozhimosti reguliarnykh funktsii v riady eksponent [On conditions of expandibility of regular functions in exponential series]. *Vsesoiuz. simpozium po teorii approksimatsii funktsii v kompleksnoi oblasti*, Ufa, 1980, pp. 94 (in Russian).
17. Bratishchev A. V. *Bazisy Kete, tselye funktsii i ikh prilozheniia*. Diss. dokt. fiz.-mat. nauk [*Kothe bases, entire functions and their applications*. Dr. phys. and math. sci. diss.]. Rostov on Don, 1997, 248 p.
18. Ingham A. E. A note on Fourier transforms. *J. London Math. Soc.*, 1934, vol. 9, pp. 29–32.
19. Levinson N. *Gap and density theorems*. New York, Amer. Math. Soc., 1940, 246 p.
20. Sedletskii A. M. *Klassy analiticheskikh preobrazovanii Fur'e i eksponentsial'nye approksimatsii* [Classes of analytic Fourier transforms and exponential approximations]. Moscow, Fizmatlit, 2005, 503 p. (in Russian).
21. Levin B. Ja. Pochti periodicheskie funktsii s ogranichennym spektrom [Almost periodic functions with bounded spectrum]. *Aktual'nye voprosy matematicheskogo analiza*, Rostov on Don, 1978, pp. 112–124 (in Russian).

УДК 501.1

О МНОЖЕСТВАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ КРАТНЫХ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ ХАРАКТЕРОВ НУЛЬ-МЕРНОЙ ГРУППЫ В СМЫСЛЕ СХОДИМОСТИ ПО КУБАМ

И. С. Юрченко

Ассистент кафедры прикладной информатики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, hamsterchik@mail.ru

В данной работе изучаются множества единственности для кратных рядов по системе характеров нуль-мерной группы в смысле сходимости по кубам. Доказано, что конечное множество и счетное множество, имеющее только одну предельную точку, являются множествами единственности.

Ключевые слова: компактная нуль-мерная группа, множество единственности, кратный ряд по системе характеров.

ВВЕДЕНИЕ

В работах В. А. Скворцова [1] и Х. О. Мовсисяна [2] было показано, что счетное множество является множеством единственности для кратных рядов Уолша, сходящихся по прямоугольникам. В работе [3] был получен более общий класс множеств единственности для функций Уолша. В частности, было доказано, что любая непрерывная кривая конечной длины или их счетное объединение является множеством единственности для двойных рядов Уолша, сходящихся по прямоугольникам.

