## References

1. Glushkov V. M., Tsejtlyn G. E., Yuschenko E. L. *Algebra. Iazyki. Programmirovanie* [Algebra. Languages. Programming]. Kiev, Naukova dumka, 1989, 378 p. (in Russian).
2. Kapitonova Yu. V., Letichevsky A. A. *Matematicheskaia teoriia proektirovaniia vychislitel'nykh sistem* [Mathematical Theory of Computational Systems Design]. Moscow, Nauka, 1988, 298 p. (in Russian).
3. Kilibarda G., Kudryavtsev V. B., Ushchumlich Sh. Independent systems of automata on mazes. *Diskretnaya matematika*, 2003, vol. 15, no. 2, pp. 3–39 (in Russian).
4. Dudek G., Jenkin M. *Computational Principles of Mobile Robotics*. Cambridge University Press, 2000, 280 p.
5. Sapunov S. V. Ekvivalentnost' pomechennykh grafov [Vertex Labeled Graphs Equivalence. *Trudy IPMM NANU*, 2002, vol. 7, pp. 162–167 (in Russian).
6. Hopcroft J. E., Motwani R., Ullman J. D. *Vvedenie v teoriiu avtomatov, iazykov i vychislenii* [Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation]. Moscow, Izdat. dom «Williams», 2002, 528 p. (in Russian).
7. Grunsky I. S., Sapunov S. V. Reconstruction of the graph of operating environment of mobile robot by vertex-labeling sufficient for further navigation. *Iskusstvennyj intellekt*, 2012, no. 4, pp. 420–428 (in Russian).
8. Grunsky I. S., Sapunov S. V. Identifikatsiia vershin pomechennykh grafov [Vertex Identification on Vertex Labeled Graphs]. *Trudy IPMM NANU*, 2010, vol. 21, pp. 86–97 (in Russian).


УДК 519.872

# АНАЛИЗ ЗАМКНУТЫХ НЕНАДЕЖНЫХ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ ТРЕБОВАНИЙ

**И. Е. Тананко[1], Н. П. Фокина[2]**

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и автоматического управления, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, TanankoIE@info.sgu.ru

[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и автоматического управления, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. E-mail: FokinaNP.sgu@gmail.com

Рассматривается замкнутая ненадежная сеть массового обслуживания с групповыми переходами. Основным результатом статьи является стационарное распределение вероятностей состояний сетей обслуживания данного типа.

*Ключевые слова:* сети массового обслуживания, ненадежный прибор, групповые переходы требований, анализ сетей массового обслуживания.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время сети массового обслуживания широко используются в качестве моделей больших сложных дискретных стохастических систем с сетевой структурой. Существует большой класс систем, изменение состояния которых происходит через фиксированные, как правило, равные интервалы времени. К таким системам относятся, например, сети, в которых используется асинхронный способ передачи данных (так называемые сети ATM). Данная технология основана на передаче данных в виде ячеек фиксированного размера. Другим примером является конвейерное производство, в котором процесс преобразования и перемещения изделий разделен на последовательность стадий. Достаточно точными моделями перечисленных систем являются сети массового обслуживания с дискретным временем.

Основная сложность исследования сетей массового обслуживания с дискретным временем заключается в возможности наступления одновременно нескольких событий. Точные методы анализа сетей массового обслуживания с тандемной и циклической топологией и геометрически распределенными длительностями обслуживания требований системами уже получены [1, 2]. В статьях [3, 4] получило продолжение развитие методов анализа сетей такого класса. В статье [3] дается точный метод анализа тандемных сетей обслуживания с произвольным входящим потоком требований. В статье [4] рассматривается замкнутая циклическая сеть обслуживания с системами, имеющими геометрически распределенную длительность обслуживания требований. Исследуются асимптотические свойства характеристик систем обслуживания сетей такого класса при увеличении числа систем в сети обслуживания.

Использование дискретной шкалы времени в сетях массового обслуживания с общей топологией приводит к тому, что требования могут поступать в системы обслуживания группами.

В [5] рассматриваются открытые и замкнутые сети массового обслуживания с групповым поступлением и обслуживанием требований, с дискретным и непрерывным временем. Вводится маршрутная цепь Маркова, описывающая переходы групп требований. Доказано существование стационарного распределения маршрутной цепи. При условии, что функция интенсивности обслуживания группы требований имеет определенный вид, доказана теорема о существовании распределения вероятностей состояний сети обслуживания в мультипликативной форме. Еще представлены стационарные распределения вероятностей числа требований в системах обслуживания до поступления и после ухода из них групп требований [6]. В статье [7], в отличие от [5], рассматриваются исключительно замкнутые сети массового обслуживания с дискретным временем, с групповым поступлением и обслуживанием требований. Для определенного класса функций интенсивности обслуживания групп требований получено стационарное распределение вероятностей состояний сети обслуживания. В качестве моделей сетей связи в [8, 9] использованы открытые сети массового обслуживания с дискретным временем, которые являются практическим приложением результатов статей [5–7]. Существенным вкладом в развитие теории сетей массового обслуживания с дискретным временем являются результаты, где длительности обслуживания требований являются экспоненциально распределенными случайными величинами [10]. При этом выход обслуженных требований из систем замкнутой сети обслуживания синхронизирован во времени. Таким образом, рассматриваемая сеть обслуживания является сетью с групповыми переходами требований. Получены выражения для средних характеристик систем обслуживания.

Исследование систем и сетей массового обслуживания с ненадежными элементами и дискретным временем является новым направлением развития теории массового обслуживания. Работы, посвященные надежности систем и сетей массового обслуживания, сводятся к исследованию свойств и разработке методов анализа систем и сетей массового обслуживания с изменяемыми во времени параметрами.

Примером является исследование ненадежных систем обслуживания, в которых прибор может переходить из работоспособного состояния в неработоспособное и обратно. Неработоспособное состояние характеризуется тем, что интенсивность обслуживания прибора равна нулю на всем протяжении времени восстановления прибора. В частности, в статье [11] рассматривается ненадежная система обслуживания типа $Geo/D/1$ с дискретным временем. Получены вероятности блокировки требований в системе обслуживания в момент перехода прибора в неработоспособное состояние. Также [12] представлены характеристики ненадежной системы обслуживания, в которой вновь приходящие в систему требования могут ее покинуть с определенной вероятностью, если застанут прибор в неработоспособном состоянии. К тому же [13] рассматривается открытая сеть массового обслуживания с общей топологией и несколькими классами требований. Длительность обслуживания требований системами сети имеет геометрическое распределение. Требования из источника поступают в сеть с интенсивностью, зависящей от числа требований в сети обслуживания. Приборы систем могут переходить в неработоспособное состояние и восстанавливаться через случайные интервалы времени. Эволюция этой сети обслуживания описывается цепью Маркова, получено стационарное распределение вероятностей состояний сети обслуживания.

В данной статье рассматривается замкнутая сеть массового обслуживания. Каждая из систем обслуживания содержит число приборов, равное числу требований в сети. Длительность обслуживания требований в каждой из систем является экспоненциально распределенной случайной величиной. Моменты выхода требований из систем обслуживания синхронизированы во времени, поэтому переходы требований между системами осуществляются группами через фиксированные интервалы времени. Для этой сети обслуживания получено стационарное распределение вероятностей состояний, а также выражения для средних характеристик систем обслуживания.

## 1. ОПИСАНИЕ СЕТИ

Пусть $N$ — замкнутая сеть массового обслуживания с $L$ системами массового обслуживания $S_i$, $i = 1, \ldots, L$, содержащими $H$ одинаковых обслуживающих приборов. Предполагается, что длительность обслуживания требований в системе $S_i$ имеет экспоненциальное распределение с параметром $\mu_i$.

В сети обслуживания находится $H$ требований одного класса. Вероятности перехода требований между системами сети обслуживания определяются маршрутной матрицей $\Theta = (\theta_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, L$, где $\theta_{ij}$ — вероятность того, что требование после обслуживания в системе $S_i$ перейдет в систему $S_j$. Состояние сети $N$ определяется вектором $s = (s_i)$, $i = 1, \ldots, L$, где $s_i$ — число требований, находящихся в системе $S_i$. Обозначим через $X$ множество состояний сети, $I = \{1, \ldots, L\}$ — множество номеров систем массового обслуживания.

Для синхронизации событий, реализуемых в сети $N$ в процессе ее функционирования, используется последовательность интервалов времени фиксированной длительности $\zeta$, называемых *слотами*. Моменты начала и окончания слота обозначим соответственно через $\eta$ и $\tau$.

Система $S_i$, $i = 1, \ldots, L$, в течение каждого слота может находиться в работоспособном состоянии или в неработоспособном. При пребывании системы $S_i$ в работоспособном состоянии каждый из $H$ приборов этой системы может обслуживать требования с интенсивностью $\mu_i$. Если же система $S_i$ находится в неработоспособном состоянии, то $\mu_i = 0$ для всех приборов системы обслуживания.

В сети $N$ выполняются следующие правила упорядочения одновременных событий: все поступления и уходы требований, а также изменение состояния работоспособности систем обслуживания производятся в конце соответствующих слотов. Если в течение одного слота имеет место поступление, уход и изменение состояния работоспособности, всегда полагаем, что сначала производится уход, затем поступление требований и в завершение — изменение состояния работоспособности.

В момент $\eta$ определяется состояние сети $s = (s_i)$, $i = 1, \ldots, L$, в котором сеть пребывает в течение слота. Если сеть $N$ находится в работоспособном состоянии, требования, завершившие обслуживание в системе в течение слота, остаются в этих системах до момента $\tau$. В момент $\tau$ формируется вектор $d = (d_i)$, $i = 1, \ldots, L$, требований, выходящих после завершения обслуживания из систем, где $d_i \leq s_i$ — число требований, выходящих из системы $S_i$. Вектор $d$ затем преобразуется в вектор $a = (a_i)$, $i = 1, \ldots, L$, требований, входящих в конце слота в системы обслуживания сети. В векторе $a$ компонента $a_j$, $j \in I$, — число требований, которые поступят в систему $S_j$. Так как сумма элементов вектора $d$ равна сумме элементов вектора $a$, будет сформировано новое состояние сети обслуживания $s' = s - d + a$. Все векторы $d$ и $a$ будем называть векторами перемещений. Множество всех векторов перемещений обозначим через $Y$.

Длительности пребывания систем $S_i$, $i = 1, \ldots, L$, в работоспособном или неработоспособном состояниях являются геометрически распределенными случайными величинами с параметрами $\alpha_i$ и $\beta_i$ соответственно. При этом, если система $S_i$ в момент времени $\tau$ находится в работоспособном состоянии, то с вероятностью $\alpha_i$ она перейдет в неработоспособное состояние, в котором будет пребывать в течение, по крайней мере, одного слота. С вероятностью $1 - \alpha_i$ система обслуживания останется в работоспособном состоянии.

Обозначим через $A_i$ и $B_i$ случайные величины, отображающие число слотов, в течение которых система $S_i$ находится в работоспособном и неработоспособном состояниях соответственно.

Тогда вероятности пребывания системы обслуживания $S_i$ в работоспособном и неработоспособном состояниях соответственно:

$$P(A_i = n) = (1 - \alpha_i)^{n-1}\alpha_i \qquad \text{и} \qquad P(B_i = n) = (1 - \beta_i)^{n-1}\beta_i,$$

где $n = \{1, 2, \ldots\}$.

Переход системы обслуживания $S_i$ из неработоспособного в работоспособное состояние осуществляется с вероятностью $\beta_i$. С вероятностью $1 - \beta_i$ система обслуживания с момента $\eta$ останется в неработоспособном состоянии.

Требования, находящиеся в неработоспособной системе $S_i$, ожидают ее восстановления. Требования, завершившие обслуживание в работоспособных системах обслуживания, могут поступать в системы, находящиеся в неработоспособном состоянии в соответствии с маршрутной матрицей $\Theta$.

Эволюцию сети $N$ можно рассматривать как два независимо протекающих параллельно процесса: процесс отказов и восстановлений систем массового обслуживания и вложенный в него процесс обслуживания и переходов групп требований между системами обслуживания.

## 2. ПРОЦЕСС ОТКАЗОВ И ВОССТАНОВЛЕНИЙ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Рассмотрим последовательность уходов и поступлений требований в момент $\tau$ с учетом надежности системы обслуживания $S_i$, $i = 1, \ldots, L$. Возможны 4 варианта.

1. Система обслуживания находится в работоспособном состоянии в момент времени $\eta$. Тогда в предыдущем слоте (до момента $\eta$) происходит следующая последовательность событий: уход обслуженных требований, поступление требований из смежных систем обслуживания.

2. В момент $\tau$ система $S_i$ находилась в работоспособном состоянии, а с момента $\eta$ будет находиться в неработоспособном состоянии. Тогда в текущем слоте имеет место следующая последовательность событий: уход обслуженных требований из системы $S_i$, поступление требований из смежных систем обслуживания и переход системы $S_i$ в неработоспособное состояние.

3. Система $S_i$ находится в неработоспособном состоянии до и после момента $\eta$. В этом случае в текущем слоте требования могут только поступать в рассматриваемую систему из других систем обслуживания. Обслуживание требований, находящихся в неработоспособной системе не производится и не предполагается уход необслуженных требований из неработоспособной системы.

4. В момент $\tau$ система $S_i$ находилась в неработоспособном состоянии, а с момента $\eta$ будет находиться в работоспособном состоянии. Тогда в текущем слоте в эту систему могут поступить требования из смежных систем обслуживания, обслуживание и уход требований из этой системы не производится.

Найдем математическое ожидание длительности обслуживания требований ненадежным прибором изолированной системы обслуживания $S_i$, $i = 1, \ldots, L$.

В дальнейшем, если это не требуется, не будем использовать индексы, обозначающие номер системы обслуживания. Обозначим через $b$ вероятность того, что требование будет ожидать восстановления этого прибора, $\mu$ — интенсивность обслуживания требований одним прибором, $\beta$ — вероятность восстановления системы обслуживания. Известно, что

$$E(B) = 1/\beta.$$

Длительность обслуживания требования ненадежным прибором может быть представлена последовательностью счетного числа этапов обслуживания. Первый этап длительностью $1/\mu$ отображает процесс полного обслуживания требования абсолютно надежным прибором. После завершения первого этапа обслуживания с вероятностью $1-b$ завершается обслуживание требования и оно покидает систему. С вероятностью $b$ наступает второй этап длительностью $1/\beta$, отображающий пребывание системы обслуживания в неработоспособном состоянии. Третий и последующие этапы длительностью $1/\beta$ отображают возможность застать требование за повторными ожиданиями восстановления системы обслуживания. Второй и последующие этапы наступают с вероятностью $b$ и с вероятностью $1-b$ алгоритм представления обслуживания требования ненадежным прибором заканчивается.

Обозначим $\tilde{v}$ — математическое ожидание длительности обслуживания требования ненадежным прибором. Тогда

$$\tilde{v} = \mu^{-1} + b(\beta^{-1} + b(\beta^{-1} + \ldots)) = \mu^{-1} + b\beta^{-1}(1 + b + b^2 + \ldots) = \mu^{-1} + \frac{b}{(1-b)\beta}.$$

Определим вероятность $b$. Поскольку момент начала обслуживания требования находится в интервале времени, когда прибор работоспособен, то длительность интервала времени с момента начала обслуживания требования до момента отказа прибора системы обслуживания является геометрически распределенной случайной величиной с параметром $\alpha$. Тогда

$$b = \sum_{k=1}^{\infty} P(A = k) e^{-\mu k \zeta} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha (1-\alpha)^{k-1} e^{-\mu k \zeta}.$$

Здесь $e^{-\mu k \zeta}$ — вероятность того, что для обслуживания требования необходимо больше $k\zeta$ единиц времени; $P(A = k)$ — вероятность того, что длительность пребывания системы обслуживания в работоспособном состоянии равна $k$ слотам.

Заметим, что длительность обслуживания требований ненадежным прибором не является экспоненциально распределенной случайной величиной. Поэтому стационарное распределение вероятностей состояний сети массового обслуживания не имеет мультипликативной формы.

В работе [14] показано, что для многих практических приложений и, в частности, для исследования ненадежных сетей, допустимо использование в качестве моделей замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания с абсолютно надежными системами, но с измененным вектором интенсивностей обслуживания.

В данном случае вместо сети $N$ с ненадежными системами обслуживания будем в дальнейшем использовать экспоненциальную сеть массового обслуживания $\tilde{N}$ с абсолютно надежными системами обслуживания, которая является приближением исходной сети $N$. Все параметры сети $\tilde{N}$ совпадают с соответствующими параметрами сети обслуживания $N$ за исключением интенсивностей обслуживания. В качестве интенсивности обслуживания требований прибором системы обслуживания сети $\tilde{N}$ будем использовать $\tilde{\mu} = 1/\tilde{v}$.

## 3. ПРОЦЕСС ОБСЛУЖИВАНИЯ И ПЕРЕХОДОВ ГРУПП ТРЕБОВАНИЙ

Представим основные вероятностно-временные характеристики процесса обслуживания и переходов групп требований замкнутой сети массового обслуживания [15].

Если сеть $\tilde{N}$ находится в состоянии $s \in X$, то с вероятностью $p(s, d)$ формируется вектор $d \in Y$, который затем с вероятностью $p(d, a)$ преобразуется в вектор $a \in Y$.

Пусть в начале слота в системе $S_i$, $i = 1, \ldots, L$, пребывает $s_i$ требований. Тогда вероятность завершения обслуживания в течение этого слота $d_i$ требований определяется биномиальным распределением с параметром $\tilde{\mu_i}\zeta$, $0 \le \tilde{\mu_i}\zeta \le 1$. Тогда

$$p(s, d) = \prod_{i=1}^{L} \binom{s_i}{d_i} (\tilde{\mu_i}\zeta)^{d_i} (1 - \tilde{\mu_i}\zeta)^{s_i - d_i}.$$

При независимой маршрутизации требований в сети обслуживания вероятности преобразования вектора $d$ в вектор $a$ имеют вид [16]

$$p(d, a) = \sum_{d_{ij} \in D} \prod_{i=1}^{L} \binom{d_i}{d_{i1}, \ldots, d_{iL}} \prod_{j=1}^{L} \theta_{ij}^{d_{ij}}, \qquad d, a \in Y,$$

где $D = \left\{ d_{ij},\ i = 1, \ldots, L,\ j \in V_j :\ \sum\limits_{i=1}^{L} d_{ij} = a_j \right\}$, $V_i$ — множество номеров выходных смежных с $S_i$ систем обслуживания.

На множестве $Y$ определим маршрутную цепь Маркова $W$ с вероятностями переходов

$$\gamma(d, a) = \begin{cases} p(d, a), & \text{если } p(s, d) > 0, \\ \delta_{da}, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\delta_{da}$ — символ Кронекера, $d, a \in Y$.

Интенсивность перехода сети обслуживания из состояния $s$ в состояние $s'$ определяется выражением

$$p(s, s') = \sum_{\substack{d, a \in Y \\ s' = s - d + a}} p(s, d, a),$$

где $p(s, d, a)$ — условная вероятность перехода цепи $W$ из состояния $d$ в состояние $a$ при пребывании сети $\tilde{N}$ в состоянии $s$

$$p(s, d, a) = p(s, d)\gamma(d, a), \qquad s \in X, \qquad d, a \in Y.$$

Стационарное распределение $\pi = (\pi(s))$, $s \in X$, вероятностей состояний сети обслуживания является решением уравнения $\pi P = \pi$ с условием

$$\sum_{s \in X} \pi(s) = 1,$$

где $P = (p(s, s'))$, $s, s' \in X$, матрица вероятностей переходов сети обслуживания.

Используя стационарное распределение, можно вычислить основные стационарные характеристики сети $\tilde{N}$. Математическое ожидание (м. о.) числа требований в системе $S_i$

$$\bar{s}_i = \sum_{k=1}^{H} k \sum_{\substack{s \in X: \\ s_i = k}} \pi(s), \qquad i = 1, \ldots, L.$$

Поскольку число требований в сети $\tilde{N}$ равно числу приборов в каждой из систем обслуживания, то м. о. длительности пребывания требований в системе $S_i$

$$\tilde{v}_i = 1/\tilde{\mu}_i, \qquad i = 1, \ldots, L.$$

Интенсивность потока групп требований в систему $S_i$ определяется из формулы Литтла

$$\lambda_i = \bar{s}_i / \tilde{v}_i, \qquad i = 1, \ldots, L.$$

Математическое ожидание длительности пребывания системы $S_i$ соответственно в работоспособном и неработоспособном состояниях

$$E(A_i) = 1/\alpha_i, \qquad E(B_i) = 1/\beta_i, \qquad i = 1, \ldots, L.$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в работе ненадежные сети массового обслуживания с групповыми переходами требований могут быть использованы в качестве моделей стохастических систем с сетевой структурой и дискретным временем функционирования, таких как, например, сети связи и компьютерные сети. Предложенный метод анализа сетей обслуживания обеспечивает возможность исследования свойств систем этого класса для решения задач, связанных с их проектированием и модификацией.

### Библиографический список


1. *Morrison J. A.* Two discrete-time queues in tandem // IEEE Trans. Commun. 1979. Vol. 27, № 3. P. 563–573.
2. *Boxma O., Kelly F., Konheim A.* The product form for sojourn time distributions in cyclic exponential queues // J. of ACM. 1984. Vol. 31. P. 128–133.
3. *Neely M. J.* Exact queueing analysis of discrete time tandems with arbitrary arrival processes // IEEE Proc. of the Intern. Conf. of Commun. Paris, 20–24 June, 2004. P. 1–5.
4. *Pestien V., Ramakrishnan S.* Monotonicity and asymptotic queue-length distribution in discrete-time networks // Queueing Systems. 2002. Vol. 40. P. 313–331.
5. *Henderson W., Taylor P. G.* Product form in networks of queues with batch arrivals and batch services // Queueing Systems. 1990. Vol. 6. P. 71–88.
6. *Henderson W., Taylor P. G.* Some new results on queueing networks with batch movement // J. Appl. Prob. 1991. Vol. 28. P. 409–421.
7. *Henderson W., Pearce C. E. M., Taylor P. G., van Djik N. M.* Closed queueing networks with batch services // Queueing Systems. 1990. Vol. 6. P. 59–70.
8. *Henderson W., Northcote B. S., Taylor P. G.* Triggered batch movement in queueing networks // Queueing Systems. 1995. Vol. 21. P. 125–141.
9. *Woodward M. E.* Towards the accurate modelling of high-speed communication networks with product-form discrete-time networks of queues // Computer Communications. 1998. Vol. 21. P. 1530–1543.
10. *Митрофанов Ю. И., Рогачко Е. С., Станкевич Е. П.* Анализ неоднородных сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 3, ч. 1. С. 41–46.
11. *Bakeva V., Kolev N.* Minimization of the blocking time of the unreliable $Geo/G_d/1$ queueing system // Math. Commun. 1999. Vol. 4. P. 1–10.
12. *Liu Z., Gao S.* Reliability indices of a $Geo/G/1/1$ Erlang loss system with active breakdowns under Bernoulli schedule // Intern. J. of Manag. Sci. and Eng. Manag. 2010. Vol. 5(6). P. 433–438.
13. *Malchin C., Daduna H.* Discrete time queueing networks with product form steady state. Availability and performance analysis in an integrated model // Queueing Systems. 2010. Vol. 65, № 4. P. 385–421.
14. *Vinod B., Altiok T.* Approximating unreliable queueing networks under the assumption of exponentiality // J. Opl. Res. Soc. 1986. Vol. 37, № 3. P. 309–316.
15. *Митрофанов Ю. И., Рогачко Е. С., Станкевич Е. П.* Метод анализа сетей массового обслужива-

ния с групповыми переходами требований // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы Междунар. науч. конф. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2009. С. 143–145.

16. *Boucherie R. J., Dijk N. M. van* Product forms for queueing networks with state-dependent multiple job transitions // Adv. Appl. Probab. 1991. Vol. 23, № 1. P. 152–187.

## Analysis of Closed Unreliable Queueing Networks with Batch Movements of Customers

**I. E. Tananko, N. P. Fokina**

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, TanankoIE@info.sgu.ru, FokinaNP.sgu@gmail.com

Closed unreliable queueing network with batch movements is considered. The main result of the paper is the steady state distribution for given type queueing networks.

*Key words:* queueing networks, unreliable server, batch movements of customers, analysis of queueing networks.

### References

1. Morrison J. A. Two discrete-time queues in tandem. *IEEE Trans. Commun.*, 1979, vol. 27, no. 3, pp. 563–573.

2. Boxma O., Kelly F., Konheim A. The product form for sojourn time distributions in cyclic exponential queues. *J. of ACM.*, 1984, vol. 31, pp. 128–133.

3. Neely M. J. Exact queueing analysis of discrete time tandems with arbitrary arrival processes. *IEEE Proc. of the Intern. Conf. of Commun.*, Paris, 20-24 June 2004, pp. 1–5.

4. Pestien V., Ramakrishnan S. Monotonicity and asymptotic queue-length distribution in discrete-time networks. *Queueing Systems.*, 2002, vol. 40, pp. 313–331.

5. Henderson W., Taylor P. G. Product form in networks of queues with batch arrivals and batch services. *Queueing Systems.*, 1990, vol. 6, pp. 71–88.

6. Henderson W., Taylor P. G. Some new results on queueing networks with batch movement. *J. Appl. Prob.*, 1991, vol. 28, pp. 409–421.

7. Henderson W., Pearce C. E. M., Taylor P. G., van Djik N. M. Closed queueing networks with batch services. *Queueing Systems*, 1990, vol. 6, pp. 59–70.

8. Henderson W., Northcote B. S., Taylor P. G. Triggered batch movement in queueing networks. *Queueing Systems*, 1995, vol. 21, pp. 125–141.

9. Woodward M. E. Towards the accurate modelling of high-speed communication networks with product-form discrete-time networks of queues. *Computer Communications*, 1998, vol. 21, pp. 1530–1543.

10. Mitrophanov Yu. I., Rogachko E. S., Stankevich E. P. Analysis of heterogeneous queueing networks with batch movements of customers. *Izv. Sarat. Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 3, pt. 1, pp. 41–46 (in Russian).

11. Bakeva V., Kolev N. Minimization of the blocking time of the unreliable $Geo/G_d/1$ queueing system. *Math. Commun.*, 1999, vol. 4, pp. 1–10.

12. Liu Z., Gao S. Reliability indices of a $Geo/G/1/1$ Erlang loss system with active breakdowns under Bernoulli schedule. *Int. J. of Manag. Sci. and Eng. Manag.*, 2010, vol. 5(6), pp. 433–438.

13. Malchin C., Daduna H. Discrete time queueing networks with product form steady state. Availability and performance analysis in an integrated model. *Queueing Systems*, 2010, vol. 65, no. 4, pp. 385–421.

14. Vinod B., Altiok T. Approximating unreliable queueing networks under the assumption of exponentiality. *J. Opl. Res. Soc.*, 1986, vol. 37, no. 3, pp. 309–316.

15. Mitrophanov Yu. I., Rogachko E. S., Stankevich E. P. A method for analysis of queueing networks with batch movements of customers. *Comp. Nauki i Inf. Tech. : Mater. Mejdun. Nauch. Conf.* Saratov, 2009, pp. 142–145 (in Russian).

16. Boucherie R. J., van Dijk N. M. Product forms for queueing networks with state-dependent multiple job transitions. *Adv. Appl. Probab.*, 1991, vol. 23, no. 1, pp. 152–187.