УДК 519.7

# ДИСКРЕТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ОБРАЗАМИ АВТОМАТОВ

**Л. Б. Тяпаев[1], Д. В. Василенко[2], М. В. Карандашов[3]**

[1]Кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой дискретной математики и информационных технологий, доцент, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, tiapaevlb@info.sgu.ru

[2]Студентка факультета компьютерных наук и информационных технологий, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, egoschauer@mail.ru

[3]Аспирант кафедры дискретной математики и информационных технологий, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, norg113@gmail.com

Объектом исследования является динамическая система, определяемая геометрическими образами автоматов. Фазовое пространство системы определяется ортогональными и аффинными преобразованиями геометрических образов. Изучаются произведения динамических систем заданного типа и их характеристики.

*Ключевые слова:* автоматы, дискретные динамические системы, геометрические образы автоматов.

*Динамической системой* называется тройка объектов $D = (S, f, G)$, где $S$ — пространство состояний, $|S| < \infty$, $f : S \longrightarrow S$ — функция эволюции, $G$ — граф фазового пространства динамической системы.

В дальнейшем будем использовать термин *точка динамической системы* в качестве синонима для термина состояние динамической системы.

*Аттракторами* динамической системы $D = (S, f, G)$ называют циклы графа $G$. *Точкой ветвления* динамической системы $D$ называется вершина графа $G$, в которую входит более чем одна дуга. *Стволом* притягиваемого дерева называется такое его поддерево, которое является цепью максимальной длины, содержащей все точки ветвления дерева (включая корень).

*Произведением* динамических систем $D_1 = (S, f, G)$ и $D_2 = (T, g, G')$ будем называть динамическую систему $D_1 \circ D_2 = (S \times T, f \times g,\ G \circ G')$, где $S \times T$ — декартово произведение множеств $S$ и $T$; $(f \times g) : S \times T \longrightarrow S \times T$ — прямое произведение отображений $f : S \longrightarrow S$ и $g : T \longrightarrow T$, т. е. $(f \times g) : (s, t) \mapsto (f(s), g(t))$; $G \circ G'$ — граф, определяемый следующим образом:

1. Множеством вершин графа $G \circ G'$ является декартово произведение множеств вершин графов $G$ и $G'$;

2. Вершины $(u, u')$ и $(v, v')$ графа $G \circ G'$ смежны тогда и только тогда, когда одновременно вершины $u$ и $v$ смежны в графе $G$, и вершины $u'$ и $v'$ смежны в графе $G'$.

Будем рассматривать динамические системы, определяемые геометрическими образами автоматов [3]. Пространство состояний динамической системы — конечное множество геометрических образов конечных автоматов. Геометрические образы автоматов суть множества точек плоскости с рациональными координатами, прообразами которых являются множества входных слов автомата и его реакций [1, 2]. Фазовое пространство динамической системы формируется посредством ортогональных и аффинных преобразований пространства состояний [3].

Дадим необходимые определения.

*Конечный автомат* это пятёрка $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_{N-1}\}$ — множество состояний автомата, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_L\}$ — множество входных символов (входной алфавит), $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_M\}$ — множество выходных символов (выходной алфавит), $\delta : S \times X \to S$ — функция переходов автомата, $\lambda : S \times X \to Y$ — функция выходов автомата.

Расширим функции $\delta$ и $\lambda$ на словах из множеств $X^*$ и $Y^*$ соответственно, и в дальнейшем будем использовать те же обозначения для этих функций. Здесь $X^*$ и $Y^*$ — множества слов конечной длины над алфавитами $X$ и $Y$ соответственно.

Пусть $s_0$ — начальное состояние автомата $A$. *Инициальным автоматом* называется пара $(A,\ s_0)$. Автомат $A$ называется *автономным*, если $|X| = 1$.

*Поведение автомата* $A$ определяется множеством $\Lambda_A = \bigcup_{p \in X^*} \bigcup_{s \in S} (p, \lambda(s, p))$. Множество $\Lambda_A(s_0) = \bigcup_{p \in X^*} (p, \lambda(s_0, p))$ определяет поведение автомата $A$ из состояния $s_0$.

*Геометрическое пространство* $\Gamma$ для автомата $(A, s_0)$ определяется следующим образом [1]:

1. Сопоставим элементам множества $X$ натуральные числа от 1 до $L$, т. е. осуществим взаимно однозначное отображение $f : X \longrightarrow \{1, 2, \ldots, L\}$.

2. Определим координатную ось абсцисс $\tilde{X}$ для пространства $\Gamma$ как отрезок числовой оси $[0, L+1]$.
3. Каждому слову $p = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$ сопоставим вектор $\omega = (f(x_{i_1}), f(x_{i_2}), \dots, f(x_{i_k}))$, т. е. осуществим взаимно однозначное соответствие $g : X^* \longrightarrow V_N$, где $V_N$ — пространство конечномерных векторов, элементами которых являются натуральные числа.
4. Каждому такому вектору $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ взаимно однозначно сопоставим точку $\tilde{x} \in \mathbb{Q}$ на оси абсцисс:
$$\tilde{x} = \frac{\omega_1}{(L+1)^0} + \frac{\omega_2}{(L+1)^1} + \frac{\omega_3}{(L+1)^2} + \dots + \frac{\omega_k}{(L+1)^{k-1}}.$$

Аналогично определяется нумерация элементов множества $Y$, ось ординат $\tilde{Y}$ пространства $\Gamma$ и отображение $h : Y^* \longrightarrow V_N$.

Каждой паре $(p, q) \in \Lambda_A(s_0)$ в пространстве $\Gamma$ сопоставляется точка с координатами $(\tilde{x}, \tilde{y})$, где
$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{|p|} \frac{c_i}{(L+1)^{i-1}}, \qquad (c_1, c_2, \dots, c_{|p|}) = g(p),$$
$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^{|q|} \frac{b_i}{(M+1)^{i-1}}, \qquad (b_1, b_2, \dots, b_{|q|}) = h(q).$$

Под *геометрическим образом* $\Omega_\mathrm{A}(\mathrm{s}_0)$ автомата $(A, s_0)$ понимается множество таких пар $(\tilde{x}, \tilde{y})$. *Кривой $f$, задающей поведение автомата* $(A, s)$, называется любая непрерывная кривая, такая, что любая точка $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega_A(s)$ принадлежит кривой $f$. Кривая $f$ называется *функциональной кривой*, если $f$ есть график некоторой непрерывной функции. Понятие функции, определяющей функциональную кривую, отождествляется с самой кривой. Будем обозначать класс $K(N, L, M)$ автоматов, у которых $|S| = N$, $|X| = L$, и $|Y| = M$. Класс автономных автоматов обозначим $K(N, M)$. Аналитическое задание геометрического образа автономного автомата характеризует следующая теорема.

**Теорема 1** [2]. *Пусть $A \in K(N, M)$. Тогда поведение автомата $(A, s)$ в пространстве $\Gamma$ можно определить функциональной кривой $f$, которая может быть задана следующим уравнением:*
$$f(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^{M} \left( j \cdot \sum_{i=1}^{l_j} (M+1)^{\Delta_i^{(j)} - \log_2 \frac{1}{2-\tilde{x}}} \right),$$
где $0 \le l_j \le N$, $\Delta_i^{(j)} = (N-1) - r_i^{(j)}$, $r_i^{(j)} \in \{0, 1, \dots, N-1\}$.

Две кривые называются *аффинно-эквивалентными*, если они могут быть получены одна из другой с помощью аффинного преобразования. Совокупность всех кривых, аффинно-эквивалентных какой-нибудь определенной кривой $f$, называется *аффинным классом* кривой $f$.

Зафиксируем некоторый класс автономных автоматов $K(N, M)$ и рассмотрим множество $\Omega$ всех различных геометрических образов из данного класса. Будем рассматривать аффинные преобразования, которые преобразуют некоторый образ $\Omega_i \in \Omega$ в другой образ $\Omega_j \in \Omega$. При рассмотрении преобразований геометрических образов из одного класса $K(N, M)$ имеет смысл рассматривать только следующее преобразование: параллельный перенос вдоль оси ординат и растяжение и сжатие относительно оси абсцисс. Данное преобразование имеет вид: $\tilde{x}' = \tilde{x}, \tilde{y}' = a\tilde{y} + b, \quad a, b \in \mathbb{Q}$. Тогда образ $\Omega_i \in \Omega$ переводится в образ $\Omega_j \in \Omega$ описанным преобразованием с коэффициентами $(a, b)$, если $(\forall (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega_i)((\tilde{x}, a\tilde{y} + b) \in \Omega_j)$. Будем говорить, что образы $\Omega_i, \Omega_j$ *совместимы* с выбранным видом аффинного преобразования. Бинарное отношение $\rho \subseteq \Omega^2$, образованное парами совместимых образов
$$\rho = \{(\Omega_i, \Omega_j) \in \Omega | \ (\exists\ a, b \in \mathbb{Q})\ (\forall\ (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega_i)\ ((\tilde{x}, a\tilde{y} + b) \in \Omega_j)\},$$
является отношением эквивалентности на множестве $\Omega$ и задает разбиение этого множества на классы эквивалентности.

В работе [4] были доказаны следующие теоремы относительно классов эквивалентности образов автономных автоматов и их преобразований.

Будем обозначать через $F(N, M)$ множество коэффициентов аффинных преобразований геометрических образов автоматов из класса $K(N, M)$.

**Теорема 2** [4]. *Пусть $a, b \in F(N, M)$, тогда $a = p_a/q_a$, $b = p_b/q_b$, где $p_a, p_b, q_a, q_b \in \mathbb{Z}$, причём $1 \le p_a \le M$, $1 \le q_a \le M$, $1 \le q_b \le M$, $0 \le |p_b| \le M^2 - 1$.*

**Следствие.** $|F(N, M)| \le M^5$.

**Теорема 3** [4]. *$(a, b) \in F(N, M)$, $N \geq 2$ тогда и только тогда, когда $(a, b) \in F(2, M)$.*

**Теорема 4** [4]. $|F(N, M)| \leq M^4$.

Рассмотрим максимальный (по мощности) класс эквивалентности $K$ отношения совместимости $\rho \subseteq \Omega^2$ геометрических образов автоматов из класса $K(N, M)$. Выберем произвольным образом периодическую последовательность $u(v)$ элементов данного класса, где $u$ и $v$ — конечные последовательности различных элементов, $u$ — префикс, $v$ — период последовательности $u(v)$. Каждая такая последовательность $u(v)$ порождает последовательность $F$ преобразований геометрических образов автоматов из класса $K$. Построим динамическую систему $D$, состояниями $S$ которой будут элементы последовательности $u(v)$, а эволюция состояний будет определяться последовательностью $F$ преобразований.

Рассмотрим свойства операции произведения динамических систем. Граф динамической системы состоит из циклов-аттракторов и притягиваемых деревьев.

Рассмотрим произведение динамических систем $D = D_1 \circ D_2$, $D_1 = (S_1, f_1, G_1)$, $D_2 = (S_2, f_2, G_2)$, состоящих из одного цикла-аттрактора каждая. Для произведения данных систем справедливы следующие леммы.

**Лемма 1.** *Состояние $d = (a, b) \in S$, $S = S_1 \times S_2$ тогда и только тогда принадлежит циклу-аттрактору динамической системы $D$, когда состояния $a$ и $b$ принадлежат циклам-аттракторам в $D_1$ и $D_2$ соответственно.*

**Лемма 2.** *Количество компонент связности в динамический системе $D$ равно НОД$(c, e)$, где $c$ и $e$ — это длины циклов-аттракторов динамических систем $D_1$ и $D_2$.*

**Лемма 3.** *Длины циклов-аттракторов в системы $D$ одинаковы и равны НОК$(c, e)$, где $c$ и $e$ это длины циклов-аттракторов динамических систем $D_1$ и $D_2$.*

Будем называть *расстоянием* от состояния $a$ до состояния $b$ некоторой динамической системы $D' = (S, f, g)$ такое наименьшее число $n$, что $f^n(a) = b$ и обозначать это как $r(a, b) = n$.

**Лемма 4.** *Пусть $D = (S, f, G)$ и $D = D_1 \circ D_2$, $D_1 = (S_1, f_1, G_1)$, $D_2 = (S_2, f_2, G_2)$. Тогда расстояние от точки $z = (a, b) \in S$ до цикла-аттрактора равняется максимуму расстояний до циклов-аттракторов из $a$ и $b$ соответственно.*

**Лемма 5.** *Пусть $D = (S, f, G)$ и $D = D_1 \circ D_2$, где $D_1 = (S_1, f_1, G_1)$, $D_2 = (S_2, f_2, G_2)$. Тогда степень захода вершины $z = (a, b) \in S$ равна произведению степеней захода вершин $a$ и $b$.*

**Теорема 5.** *Пусть $D = D_1 \circ D_2$, где $D_1 = (A, f, G_1), D_2 = (B, g, G_2)$ динамические системы, состоящие из одного цикла-аттрактора каждая, тогда функция $f' = f^{|B|}$ переводит состояние $a' \in A$ в множество состояний $A'$ такое, что для каждого $a \in A'$ существует $a'' \in A' : r(a, a'') =$ НОД$(|A|, |B|)$.*

**Доказательство.** Рассмотрим два случая: 1) $|A| \mod |B| = 0$; 2) $|A| \mod |B| > 0$.

Для первого случая доказательство очевидно, так как в этом случае $|B| =$ НОД$(|A|, |B|)$.

Рассмотрим второй случай. Пусть $|A| - |B| = c$, НОД$(|A|, |B|) = t$, тогда $|A| = i \cdot t$, $|B| = j \cdot t$, $|A| - |B| = (i - j) \cdot t$, т. е. $c$ кратно НОД$(|A|, |B|)$. Из этого следует, что $f'$ переводит состояние $a'$ в множество состояний $Z = \{z \mid r(a', z) \mod \text{НОД}(|A|, |B|) = 0\}$.

Оценим мощность $Z$. Так как НОК$(|A|, |B|)$ — длина циклов в $D$, то $|Z| = \dfrac{\text{НОК}(|A|, |B|)}{|B|}$. Из сотершений НОД$(|A|, |B|)$ и НОК$(|A|, |B|)$ получаем, что $|Z| = \frac{|A|}{\text{НОД}(|A|, |B|)}$. А из мощности множества $Z$ и его построения следует верность утверждения теоремы для второго случая, так как расстояние между любыми двумя ближайшими состояниями из $Z$ будет равно НОД$(|A|, |B|)$, что и требовалось доказать.

Аналогичные рассуждения можно привести для функции $g' = g^{|A|}$. □

**Следствие.** *Исходя из утверждения теоремы 5, можно составить следующий алгоритм перевода состояния $(a, b)$ в состояние $(a', b')$ в системе $D$, где $(a, b)$ и $(a', b')$ принадлежат одному циклу-аттрактору:*

1) *перевести состояние $a$ в состояние $a'$, что переведёт состояние $b$ в состояние $b'' = g^{r(a, a')}(b)$;*
2) *итерировать полученное состояние $(a', b'')$ с шагом $|B|$, что оставит неизменным первую компоненту состояния и переведёт вторую компоненту в состояние $b'$.*

**Теорема 6.** *Пусть $D_1 = (A, f, G_1), D_2 = (B, g, G_2)$ динамические системы, состоящие из одного цикла-аттрактора каждая. Тогда состояния $(a, b)$, $(a', b')$, где $a, b \in D_1$, $a', b' \in D_2$, принадлежат одному циклу-аттрактору динамической системы $D = D_1 \circ D_2$ тогда и только тогда, когда $r(a, a') \mod$ НОД$(|A|, |B|) = r(b, b') \mod$ НОД$(|A|, |B|)$.*

**Доказательство.** *Достаточность.* Пусть выполняется условие теоремы и $r(a,a') = h_a, r(b,b') = h_b$. Покажем, что существует $n$, такое что $f^n(a) = a'$, $g^n(b) = b'$. Для этого рассмотрим следующие соотношения: 1) $h_a = h_b$; 2) $h_a > h_b$; 3) $h_a < h_b$.

Для первого случая справедливоть утверждения теоремы очевидным образом следует из доказательства теоремы 5, рассмотрим второй случай.

Переведём состояние $a$ в $a'$, тогда состояние $b$ перейдёт в некоторое состояние $b''$. $b''$ может равняться $b'$, в этом случае утверждение теоремы выполняется. Если же $b'' \neq b'$, то требуется показать, что $b''$ переводится в $b'$ за кратное НОД$(|A|,|B|)$ число итераций. Для этого построим множество $Z_{a'}$ следующим образом:

$$Z_{a'} = \left\{(a', b_z)|\ \exists n : f^{|A|^n}(a') = a',\ g^{|A|^n}(b'') = b_z\right\}.$$

Множество $Z_{a'}$ — это множество всех состояний вида $(a', b)$, принадлежащих одному циклу-аттрактору. Следовательно $(a', b') \in Z_{a'}$. Из построения $Z_{a'}$ и теоремы 5 следует, что для любых $e, l \in Z_{a'}$ $r(e,l) \mod \text{НОД}(|A|,|B|) = 0$. Из чего, в свою очередь, следует, что $r(b,b'') \mod \text{НОД}(|A|,|B|) = r(b,b') \mod \text{НОД}(|A|,|B|)$, что и требовалось показать. Аналогичные рассуждения можно привести для третьего случая.

*Необходимость.* Пусть состояния $(a,b)$ и $(a',b')$ принадлежат одному циклу-аттрактору в системе $D$ и $r(a,a') \mod \text{НОД}(|A|,|B|) > r(b,b') \mod \text{НОД}(|A|,|B|)$.

Из принадлежности состояний $(a,b)$ и $(a',b')$ одному циклу-аттрактору следует, что алгоритм, полученный из теоремы 1, переведёт состояние $(a,b)$ в $(a',b')$. Но это вызывает противоречие, так как данный алгоритм переводит состояние $(a,b)$ в $(a',b')$ только в том случае, если выполняется утверждение теоремы. Следовательно, $(a,b)$ и $(a',b')$ не принадлежат одному циклу-аттрактору, и утверждение теоремы верно. □

Введём некоторые обозначения: $P_{k_j}$ — цепь длины $k_j$, $O_m$ — аттрактор длины $m$, $P^{m,l(k_1,k_2,\ldots,k_l)}_{k_j,q}$ — дерево с периодом ветвления $m$, длина ствола которого равна $k_j$, $q$ — номер первой точки ветвления, $l(k_1,k_2,\ldots,k_l)$ — количество цепей, входящих в каждую точку ветвления, и их максимально возможные длины (расстояние от любого листа до аттрактора не должно превышать длину ствола дерева); $O^i_m$ — аттрактор длины $m$, на котором расположены 2 корня дерева с расстоянием между ними, равным $i$.

Будем обозначать записью вида $O_m + P_k$ граф, состоящий из цикла-аттрактора длины $m$ и притягиваемой к нему цепи длины $k$. Факт вхождения притягиваемых деревьев или цепей в одну точку цикла-аттрактора будем обозначать в формулах с помощью группировки символов деревьев и цепей скобками.

**Теорема 7.** *Пусть $D = O_m + (P_{k_i} + P_{k_2} + \ldots + P_{k_l})$ — динамическая система. Тогда граф динамической системы $D^2 = D \circ D$ будет иметь вид*

$$\begin{gathered}(P^{m,l(k_1,k_2,\ldots,k_l)}_{k_1,q_1} + P^{m,l(k_2,k_2,\ldots,k_2)}_{k_2,q_1} + \ldots + P^{m,l(k_l,k_l,\ldots,k_l)}_{k_l,q_1}) + O^i_m + \\ +(P^{m,l(k_1,k_2,\ldots,k_l)}_{k_1,q_2} + P^{m,l(k_2,k_2,\ldots,k_2)}_{k_2,q_2} + \ldots + P^{m,l(k_l,k_l,\ldots,k_l)}_{k_l,q_l}),\end{gathered}$$

*где точки $q_1$ и $q_2$ вычисляются по формулам: $q_1 = i$; $q_2 = m - i$, $i$ — кратчайшее из расстояний между точками ветвления на цикле-аттракторе.*

**Доказательство.** Для доказательства теоремы покажем, что каждая из компонент связности системы $D^2$ будет удовлетворять утверждению теоремы. Для этого будем описывать строение компонент связности, получаемых в системе $D^2$, начиная от цикла-аттрактора и поднимаясь по притягиваемым деревьям.

Рассмотрим случай $D = O_m + P_k$. Из лемм 2 и 3 следует, что в системе $D^2$ будет $m$ циклов длины $m$, что соответствует компоненте $O^i_m$ утверждения теоремы.

Обозначим символом $a$ точку ветвления системы $D$, а символами $a'$ и $b$ состояния, переходящие в $a$ за один шаг, находящиеся на цикле-аттракторе и притягиваемой цепи соответственно. Тогда, исходя из леммы 5, точками ветвления, принадлежащими аттракторам в $D^2$, могут быть только точки вида $(a,y)$, $(x,a)$ и $(a,a)$, где $x$ и $y$ лежат на цикле-аттракторе системы $D$.

Из вышесказанного и теоремы 2 получаем, что $m-1$ компонент связности $D^2$ будут иметь вид $T + O_m + T'$ (в случае если точки ветвления циклов имеют вид $(a,y)$, $(x,a)$) и одна компонента будет иметь вид $O_m + (T'' + T''' + T'''')$ (если точка ветвления цикла имеет $(a,a)$), где под $T$ понимаются деревья некоторой формы. Следовательно общий вид компонент связности удовлетворяет утверждению теоремы. Покажем, что форма деревьев $T$, $T'$, $T''$, $T'''$, $T''''$ также удовлетворяет условию теоремы.

Рассмотрим компоненты связности вида $T+O_m+T'$ и притягиваемые ими деревья. Точки ветвления данных компонент, лежащие на цикле, будут иметь вид $(a,y)$ и $(x,a)$. Тогда для точки ветвления $(a,y)$ имеются два состояния $(a_1',y')$, $(a_2',y')$, одно из которых лежит на цикле-аттракторе, а второе на притягиваемом дереве. Пусть, для определённости, $(a_1',y')$ лежит на притягиваемом дереве, т. е. $a_1'$ принадлежит притягиваемому дереву в $D$. Из чего следует, что состояния, лежащие на рассматриваемом дереве, могут быть точками ветвления только в том случае, когда вторая их компонента обращается в $a$. Соответственно расстояние между данными точками ветвления равно $m$, исключая ближающую к циклу точку ветвления.

Так как каждая из рассматриваемых точек ветвления имеет вид $(a_k,a)$, то, очевидно, что все точки ветвления будут расположены на одной цепи, которая будет притягивать другие, более короткие, цепи. Аналогичные рассуждения можно привести и для второй точки ветвления цикла данных компонент связности.

Покажем, что данные деревья удовлетворяют условиям о расстоянии до первой точки ветвления. Пусть имеются две точки ветвления $t_1$ и $t_2$, лежащие на цикле и являющиеся корнями притягиваемых деревьев. Наименьшее расстояние между ними равно $h_1$ и, для определённости, пусть это $h(t_1,t_2)$. Очевидно, что

$$h(t_1,t_2)+h(t_2,t_1)=m, \qquad h(t_1,t_2)=m-h(t_2,t_1), \qquad h(t_1,t_2)=h_1,$$
$$h_1=m-h(t_2,t_1), \qquad h(t_2,t_1)=m-h_1.$$

Из данных равенств получаем, что для точки $t_2$ первая точка ветвления притягиваемого дерева будет расположена на расстоянии $h_1$, так как первая компонента точки $t_2$ является точкой $a$ на $h_1$-м предыдущем шаге. Аналогично для $t_1$ — первая точка ветвления будет располагаться на расстоянии $(m-h_1)$ от цикла-аттрактора, что соответстввует утверждению теормы относительно первых точек ветвления притягиваемых деревьев.

Таким образом, получаем, что для случая с двумя точками ветвления на цикле-аттракторе результирующая динамическаая система удовлетворяет утверждению теоремы. Покажем, что и для случая с единственной точкой ветвления теорема выполняется.

В случае, если точка ветвления компоненты связности системы $D^2$ единственна, она должна иметь вид $(a,a)$. Следовательно, в неё будут переходить точки вида $(a',b)$, $(b,a')$, $(a',a')$ и $(b,b)$, где $a'$ — состояние, переходящее в $a$ и расположенное на цикле-аттракторе, а $b$ — состояние, переходящее в $a$ и расположенное на притягиваемой цепи в исходной системе.

По лемме 1 состояние $(a',a')$ принадлежит циклу-аттрактору, а остальные состояния, переходящие в $(a,a)$, принадлежат притягиваемым деревьям. Очевидно, что форма деревьев, определяемых состояниями $(a',b)$ и $(b,a')$, аналогична форме деревьев рассмотреных выше (для случая с компонентой связности, притягивающей два дерева). Дерево, ассоциированное с состоянием $(b,b)$, будет представлять собой цепь, так как в системе $D$ точка $a$ не переходит в точку $b$, следовательно, ни $(b,b)$, ни любая из точек, переходящих в $(b,b)$, не может быть точкой ветвления. Тогда, рассматривая точку $(a,a)$ как первую точку ветвления одного из деревьев, ассоциированных с точками $(a',b)$ и $(b,a')$, получаем, что данный случай также удовлетворяет условию теоремы.

Из вышесказанного следует, что теорема верна, если $D=O_m+P_k$. Расширим данное утверждение на $D=O_m+(P_{k_1}+P_{k_2}+\ldots+P_{k_l})$.

Заметим, что если все цепи притягиваются одной точкой ветвления в системе $D$, то количество компонент связности и расположение точек ветвления не изменится в системе $D^2$, как и ограничения по высотам деревьев. Следовательно, для компонент связности, имеющих две точки ветвления на цикле, справедливость теоремы очевидна. Покажем, что теорема также справедлива и для компоненты связности системы $D^2$, имеющей одну точку ветвления на цикле.

Пусть система $D$ притягивает $l$ цепей в точке $a$, принадлежащей циклу-аттрактору, тогда точка $(a,a)$ системы $D^2$ должна притягивать $(l+1)^2-1$ деревьев. Из того, что множество состояний системы $D^2$ есть декартово произведение множества состояний системы $D$ на себя, получаем, что из $((l+1)^2-1)$ деревьев иметь точки ветвления могут $2\cdot l$ деревьев, т. е. только деревья ассоциированные с точками вида $(a,y)$ и $(x,a)$. Следовательно, $((l+1)^2-1)-2\cdot l$ деревьев, притягиваемых к $(a,a)$, будут цепями.

Упрощая $((l+1)^2-1)-2\cdot l$ получаем, что количество притягиваемых цепей (точкой $(a,a)$) равняется $l^2$. Тогда рассматривая $l$ цепей с первой точкой ветвления в $(a,a)$, получаем утверждение теоремы, что и требовалось показать. $\square$

**Библиографический список**

1. *Тяпаев Л. Б.* Геометрическая модель поведения автоматов и их неотличимость // Математика, механика, математическая кибернетика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1999. С. 139–143.
2. *Тяпаев Л. Б.* Решение некоторых задач для конечных автоматов на основе анализа их поведения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 6, вып. 1/2. С. 121–133.
3. *Тяпаев Л. Б.* Геометрические образы автоматов и динамические системы // Дискретная математика и ее приложения : материалы X междунар. семинара / под ред. О. М. Касим-Заде. М. : Изд-во мех.-мат. ф-та Моск. ун-та, 2010. С. 510–513.
4. *Матов Д. О.* Аффинные преобразования геометрических образов конечных автоматов // Проблемы теоретической кибернетики : материалы XVI междунар. конф. / под ред. Ю. И. Журавлева. Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского госун-та, 2011. С. 303–306.


## Discrete Dynamical Systems Defined Geometrical Images of Automata


**L. B. Tyapaev, D. V. Vasilenko, M. V. Karandashov**

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, tiapaevlb@info.sgu.ru, egoschauer@mail.ru, norg113@gmail.com



The object of study is the dynamic system defined by geometrical images of automata. The phase space of the system is determined by orthogonal and affine transformations of geometric images. Compositions of dynamical systems of a given type and their characteristics are studied.



*Key words:* automata, discrete dynamical systems, geometric images of automata.



**References**

1. Tyapaev L. B. The geometric model of the behavior of automata and their indistinguishability. *Matematica, Mekhanica, Matematicheskaya kibernetika: Sb. naych. tr.* Saratov, Saratov Univ. Press, 1999, pp. 139–143 (in Russian).
2. Tyapaev L. B. Solving Some Problems of Automata Behaviour Analysis. *Izv. Sarat. Univ. N. S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2006, vol. 6, no. 1/2, pp. 121–133 (in Russian).
3. Tyapaev L. B. Geometric images of automata and dynamical systems. *Discretnaya matematica i eyo prilozheniya. Materialy X Mezhd. seminara.* Ed. O. M. Kasim-Zade. Moscow, 2010, pp. 510–513 (in Russian).
4. Matov D. O. Affine transformations of geometric images of finite automata. *Problemy teoteticheskoj kibernetiki : Materialy XVI Mezhdunar. konf.* Ed. Yu. I. Zhuravlyova. Nizhni Novgorod, 2011, pp. 303–306 (in Russian).


УДК 519.71, 519.651

# ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ НЕЙРОННЫМИ СЕТЯМИ ПРЯМОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ СИГНАЛА С ОДНИМ СКРЫТЫМ СЛОЕМ


**Н. С. Узенцова[1], С. П. Сидоров[2]**

[1]Аспирантка кафедры математической экономики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Uzentsovans@gmail.com

[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической экономики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, sidorovsp@info.sgu.ru



В данной статье приводится алгоритм нахождения весов нейронной сети прямого распространения сигнала с одним основным слоем. Алгоритм используется для решения задачи равномерного приближения алгебраического многочлена совместно с его производными с наперед заданной точностью. В качестве функции активации используется рациональная сигмоида.



*Ключевые слова:* нейронные сети, аппроксимация функций.