6. Abanin A. V. *Slabo dostatochnye mnozhestva i absoliutno predstavliaiushchie sistemy*. Diss. dokt. fiz.-mat. nauk [*Weakly sufficient sets and absolutely representing systems*. Dr. phys. and math. sci. diss.]. Rostov on Don, 1995, 268 p.
7. Bratishchev A. V. A type of lower estimate for entire functions of finite order, and some applications. *Math. of the USSR-Izvestiya*, 1985, vol. 24, no. 3, pp. 415–438. DOI: 10.1070/IM1985v024n03ABEH001243.
8. Korobeinik Yu. F. Maksimal'nye i γ-dostatochnye mnozhestva. Prilozheniia k tselym funktsiiam. II [The maximal and γ-sufficient sets. Applications to entire functions]. *Teoriia funktsii, funktsional'nyi analiz i ikh prilozheniia*. Kharkov, 1991, vol. 55, pp. 23–34 (in Russian).
9. Sherstyukov V. B. On a question about γ-sufficient sets. *Siberian Math. J.*, 2000, vol. 41, no. 4, pp. 778–784. DOI: 10.1007/BF02679704.
10. Sherstyukov V. B. On a problem of Leont'ev and representing systems of exponentials. *Math. Notes*, 2003, vol. 73, no. 2, pp. 286–298. DOI: 10.1023/A:1025068527611.
11. Sherstyukov V. B. Ob odnom podklasse tselykh funktsii vpolne reguliarnogo rosta [On a subclass of entire functions of completely regular growth]. *Kompleksnyi analiz. Teoriia operatorov. Matematicheskoe modelirovanie*. Vladikavkaz, Publ. VNTs RAN, 2006, pp. 131–138 (in Russian).
12. Sherstyukov V. B. On some criteria for completely regular growth of entire functions of exponential type. *Math. Notes*, 2006, vol. 80, no. 1, pp. 114–126. DOI: 10.1007/s11006-006-0115-6.
13. Bratishchev A. V. On a problem of A. F. Leont'ev. *Sov. Math. Dokl.* 1983, vol. 27, pp. 572–574 (in Russian).
14. Mel'nik Yu. I. O predstavlenii reguliarnykh funktsii riadami tipa riadov Dirikhle [On the representation of regular functions by Dirichlet type series]. *Issledovanie po teorii priblizhenii funktsii i ikh prilozheniia*, Kiev, Naukova Dumka, 1978, pp. 132–141 (in Russian).
15. Mel'nik Yu. I. Ob usloviiakh skhodimosti riadov Dirikhle, predstavliaiushchikh reguliarnye funktsii [Conditions for the convergence of Dirichlet series that represent regular functions]. *Matematicheskii analiz i teoriia veroiatnostei*, Kiev, Naukova Dumka, 1978, pp. 120–123 (in Russian).
16. Mel'nik Yu. I. Ob usloviiakh razlozhimosti reguliarnykh funktsii v riady eksponent [On conditions of expandibility of regular functions in exponential series]. *Vsesoiuz. simpozium po teorii approksimatsii funktsii v kompleksnoi oblasti*, Ufa, 1980, pp. 94 (in Russian).
17. Bratishchev A. V. *Bazisy Kete, tselye funktsii i ikh prilozheniia*. Diss. dokt. fiz.-mat. nauk [*Kothe bases, entire functions and their applications*. Dr. phys. and math. sci. diss.]. Rostov on Don, 1997, 248 p.
18. Ingham A. E. A note on Fourier transforms. *J. London Math. Soc.*, 1934, vol. 9, pp. 29–32.
19. Levinson N. *Gap and density theorems*. New York, Amer. Math. Soc., 1940, 246 p.
20. Sedletskii A. M. *Klassy analiticheskikh preobrazovanii Fur'e i eksponentsial'nye approksimatsii* [Classes of analytic Fourier transforms and exponential approximations]. Moscow, Fizmatlit, 2005, 503 p. (in Russian).
21. Levin B. Ja. Pochti periodicheskie funktsii s ogranichennym spektrom [Almost periodic functions with bounded spectrum]. *Aktual'nye voprosy matematicheskogo analiza*, Rostov on Don, 1978, pp. 112–124 (in Russian).

УДК 501.1

О МНОЖЕСТВАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ КРАТНЫХ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ ХАРАКТЕРОВ НУЛЬ-МЕРНОЙ ГРУППЫ В СМЫСЛЕ СХОДИМОСТИ ПО КУБАМ

И. С. Юрченко

Ассистент кафедры прикладной информатики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, hamsterchik@mail.ru

В данной работе изучаются множества единственности для кратных рядов по системе характеров нуль-мерной группы в смысле сходимости по кубам. Доказано, что конечное множество и счетное множество, имеющее только одну предельную точку, являются множествами единственности.

Ключевые слова: компактная нуль-мерная группа, множество единственности, кратный ряд по системе характеров.

ВВЕДЕНИЕ

В работах В. А. Скворцова [1] и Х. О. Мовсисяна [2] было показано, что счетное множество является множеством единственности для кратных рядов Уолша, сходящихся по прямоугольникам. В работе [3] был получен более общий класс множеств единственности для функций Уолша. В частности, было доказано, что любая непрерывная кривая конечной длины или их счетное объединение является множеством единственности для двойных рядов Уолша, сходящихся по прямоугольникам.

© Юрченко И. С., 2013

В работе [4] был получен класс множеств единственности для кратных рядов по смешанной системе функций, расширяющий известные классы множеств единственности. В работе [5] был приведен пример кратного ряда, сходящегося по прямоугольникам, но не сходящегося по кубам. Затем в [6] было доказано, что пустое множество является множеством единственности для кратных рядов Уолша на двоичной группе в смысле сходимости по кубам. М. Г. Плотников в 2007 году [7], рассматривая функции Уолша на двоичной группе, показал, что конечное множество и счетное множество, имеющее только одну предельную точку, являются множеством единственности для кратных рядов Уолша, сходящихся по кубам. Мы покажем, что данные результаты справедливы для произвольной нуль-мерной группы.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $(G, \oplus)$ — компактная нуль-мерная группа. Топология на группе G определяется с помощью цепочки вложенных подгрупп $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots$ Обозначим $p_k = (G_k/G_{k+1})^\sharp$. По последовательности простых чисел $(p_k)_{k=0}^\infty$ построим последовательность (m_k) следующим образом: $m_0 = 1, m_{k+1} = p_k m_k$. Элементы $g_n = G_n \setminus G_{n+1}$ образуют базисную систему в G, т.е. любой элемент $x \in G$ однозначно представим в виде ряда $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n g_n,\ a_n = \overline{0, p_n - 1}$. Если $p_n g_n = 0$, группа G является группой Виленкина, если $p_n g_n = g_{n+1}$, то в этом случае G называется группой P-адических чисел, $P = \{p_n\}$.

Аннуляторы группы G образуют возрастающую последовательность $G_0^\perp \subset G_1^\perp \subset \ldots$ и $(G_{k+1}^\perp/G_k^\perp)^\sharp = p_k$. Обозначим через $X = \{\chi\}$ совокупность характеров группы G. Данная система является ортогональной и $X = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} G_n^\perp$. Пусть μ определяет меру Хаара и $\mu G = 1$. Тогда $\mu(G_n \oplus h) = 1/m_n$. По мере μ строится абсолютно сходящийся интеграл $\int\limits_G f d\mu$, инвариантный относительно сдвига.

Характеры $r_k(z) \in G_{k+1}^\perp \setminus G_k^\perp$ назовем функциями Радемахера. Пусть

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k m_{k+1} \in \mathbb{N}_0, \qquad \varepsilon_k = \overline{0, p_k - 1}, \qquad z = \sum_{k=0}^{\infty} z_k g_k \in G, \qquad z_k = \overline{0, p_k - 1}.$$

Положим по определению $\chi_n(z) = \prod\limits_{k=0}^{\infty} (r_k(z))^{\varepsilon_k}$. Очевидно, что данное произведение содержит конечное число сомножителей.

Обозначим через $\mathfrak{G} = G^N = \underbrace{G \times \cdots \times G}_{N}$ N-мерную группу с топологией произведения групп. В этом случае база топологии состоит из произведений сдвигов:

$$G_{\mathbf{j}} \oplus \mathbf{h} = (G_{j_1} \oplus h^{(1)}) \times (G_{j_2} \oplus h^{(2)}) \times \ldots \times (G_{j_N} \oplus h^{(N)}).$$

Здесь и далее компоненты вектора $\mathbf{h} \in G^N$ обозначены через $h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(N)}$, т. е. $\mathbf{h} = (h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(N)})$. Компоненты $h^{(l)}$ вектора $\mathbf{h}$ можно записать в виде

$$h^{(l)} = a_{j_l-1}^{(l)} g_{j_l-1} \oplus a_{j_l-2}^{(l)} g_{j_l-2} \oplus \ldots \oplus a_0^{(l)} g_0.$$

Так как $G_{\mathbf{j}} \oplus \mathbf{h}$ есть объединение дизъюнктных кубов вида

$$(G_j \oplus h^{(1)}) \times (G_j \oplus h^{(2)}) \times \ldots \times (G_j \oplus h^{(N)}) \qquad (j = \max(j_1, \ldots, j_N)), \tag{1}$$

то совокупность таких кубов также образует базу топологии в G^N. Куб (1) можно записать в виде $G_j^N \oplus \mathbf{h} = (G_j \oplus a_{j-1}^{(1)} g_{j-1} \oplus \cdots \oplus a_0^{(1)} g_0) \times \cdots \times (G_j \oplus a_{j-1}^{(N)} g_{j-1} \oplus \cdots \oplus a_0^{(N)} g_0)$.

Обозначая для удобства $\mathfrak{G}_j := G_j^N$, куб (1) можно записать в виде $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}$, где $\mathfrak{g}_{1\times j} = \begin{pmatrix} g_{j-1} & \ldots & g_0 \end{pmatrix}$, $\mathscr{A}_{j\times N} = \begin{pmatrix} a_{j-1}^{(1)} & \ldots & a_{j-1}^{(N)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0^{(1)} & \ldots & a_0^{(N)} \end{pmatrix}$, $a_l^{(\nu)} = \overline{0, p_l - 1}$, $l = \overline{0, j-1}$. Размерность матриц зависит от ранга куба $\mathfrak{G}_j$. Обозначим ν-й столбец матрицы $\mathscr{A}$ через $\mathscr{A}^{(\nu)}$, а ν-ю строку через $\hat{\mathscr{A}}^{(\nu)}$.

Положим по определению $\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \chi_{n_1}(z_1)\dots\chi_{n_N}(z_N)$, $\mathbf{z} \in \mathfrak{G}$, $\mathbf{n} = (n_1,\dots,n_N)$. Если $\mathbf{m_j} = (m_j, m_j, \dots, m_j)$, то $\chi_{\mathbf{m_j}}(\mathbf{z}) = r_{\mathbf{j}}(\mathbf{z}) = \mathrm{const}$ на $\mathfrak{G}_{j+1}\oplus\mathfrak{g}\mathscr{A}$.

Покажем, что $I = \int\limits_{G_j}\chi_n(z)d\mu(z) = 0$ при $n \geq m_j$.

Рассмотрим произвольную пачку $m_{j+k} \leq n < m_{j+k+1}$ для всех $k \geq 0$.

1. Пусть $n = m_{j+k}$, в этом случае $\chi_n = r_{j+k}$. Представим интеграл I как сумму интегралов по смежным класса ранга $j+k$ таких, что $G_{j+k}\subset G_j$:

$$I = \sum_l \int\limits_{G_{j+k}\oplus h_l} \chi_n(z)d\mu(z).$$

Зафиксируем l и рассмотрим отдельно интеграл по смежному классу:

$$\int\limits_{G_{j+k}\oplus h_l}\chi_n(z)d\mu(z) = \int\limits_G \chi_n(z)\mathbf{1}_{G_{j+k}\oplus h_l}(z)d\mu(z) = \int\limits_G \chi_n(z\oplus h_l)\mathbf{1}_{G_{j+k}\oplus h_l}(z\oplus h_l)d\mu(z) =$$
$$= \int\limits_G \chi_n(z)\chi_n(h_l)\mathbf{1}_{G_{j+k}}(z)d\mu(z) = \chi_n(h_l)\int\limits_{G_{j+k}}\chi_n(z)d\mu(z).$$

Следовательно,

$$I = \sum_l \int\limits_{G_{j+k}\oplus h_l}\chi_n(z)d\mu(z) = \sum_l \chi_n(h_l)\int\limits_{G_{j+k}} r_{j+k}(z)d\mu(z) =$$
$$= \sum_l \chi_n(h_l)\sum_\nu \int\limits_{G_{j+k+1}\oplus h'_\nu}\varepsilon_\nu d\mu(z) = \sum_l \chi_n(h_l)\sum_\nu \varepsilon_\nu \mu(G_{j+k+1}) = 0,$$

где ε_ν — корни из 1, $h_l = a_{j_l-1}g_{j_l-1}\oplus a_{j_l-2}g_{j_l-2}\oplus\ldots\oplus a_0g_0$, $h'_\nu = a_{j+k1}g_{j+k}\oplus a_{j+k-1}g_{j+k-1}\oplus\ldots\oplus a_0g_0$.

2. Пусть $n = \alpha m_{j+k} + \beta = \alpha m_{j+k} + \beta_{j+k-1}m_{j+k-1} + \dots + \beta_0 m_0$, в этом случае $\chi_n = r^\alpha_{j+k}\times$ $\times\, r^{\beta_{j+k-1}}_{j+k-1}\dots r_0^{\beta_0} = r^\alpha_{j+k}\cdot 1$ на группе G_{j+k}.

Представим интеграл I как сумму интегралов по смежным класса ранга $j+k$ таких, что $G_{j+k}\subset G_j$:

$$I = \sum_l \int\limits_{G_{j+k}\oplus h_l} \chi_n(z)d\mu(z).$$

Зафиксируем l и рассмотрим отдельно интеграл по смежному классу:

$$\int\limits_{G_{j+k}\oplus h_l}\chi_n(z)d\mu(z) = \int\limits_G \chi_n(z)\mathbf{1}_{G_{j+k}\oplus h_l}(z)d\mu(z) = \int\limits_G \chi_n(z\oplus h_l)\mathbf{1}_{G_{j+k}\oplus h_l}(z\oplus h_l)d\mu(z) =$$
$$= \int\limits_G \chi_n(z)\chi_n(h_l)\mathbf{1}_{G_{j+k}}(z)d\mu(z) = \chi_n(h_l)\int\limits_{G_{j+k}}\chi_n(z)d\mu(z).$$

Следовательно,

$$I = \sum_l \chi_n(h_l)\int\limits_{G_{j+k}}\chi_n(z)d\mu(z) = \sum_l \chi_n(h_l)\int\limits_{G_{j+k}} r^\alpha_{j+k}(z)d\mu(z) =$$
$$= \sum_l \chi_n(h_l)\sum_\nu \int\limits_{G_{j+k+1}\oplus h'_\nu}\varepsilon^\alpha_\nu d\mu(z) = \sum_l \chi_n(h_l)\sum_\nu \varepsilon^\alpha_\nu \mu(G_{j+k+1}) = 0.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=m_j}^{\infty}\int\limits_{G_j}\chi_n(z)d\mu(z) = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим N-кратный ряд

$$\sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} c_{\mathbf{n}}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty} c_{n_1\ldots n_N}\chi_{n_1}(z_1)\ldots\chi_{n_N}(z_N). \tag{3}$$

Кубические частичные суммы ряда (3) будем обозначать

$$S_{\mathbf{M}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{M}-1} c_{\mathbf{n}}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \sum_{n_1=0}^{M-1}\cdots\sum_{n_N=0}^{M-1} c_{n_1\ldots n_N}\chi_{n_1}(z_1)\ldots\chi_{n_N}(z_N),$$

а ядро Дирихле — через

$$D_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{k}-1} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \sum_{n_1=0}^{k-1}\cdots\sum_{n_N=0}^{k-1} \chi_{n_1}(z_1)\ldots\chi_{n_N}(z_N).$$

Для ряда (3) определим функцию множества:

$$\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty}\int\limits_{\mathfrak{G}_j\oplus\mathfrak{g}\mathscr{A}} c_{\mathbf{n}}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z})d\mu(\mathbf{z}). \tag{4}$$

Запишем ее в виде

$$\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty}\int\limits_{\mathfrak{G}_j\oplus\mathfrak{g}\mathscr{A}} c_{\mathbf{n}}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z})d\mu(\mathbf{z}) = \sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty} c_{\mathbf{n}}\int\limits_{\mathfrak{G}_j\oplus\mathfrak{g}\mathscr{A}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z})d\mu(\mathbf{z}) =$$

$$= \sum_{n_1=0}^{m_j-1}\cdots\sum_{n_N=0}^{m_j-1} c_{\mathbf{n}}\int\limits_{\mathfrak{G}_j\oplus\mathfrak{g}\mathscr{A}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z})d\mu(\mathbf{z}) + \sum_{\mathbf{n}\notin[0,m_j-1]^N} c_{\mathbf{n}}\int\limits_{\mathfrak{G}_j\oplus\mathfrak{g}\mathscr{A}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z})d\mu(\mathbf{z}).$$

Из (2) следует, что второй интеграл равен нулю (так как $n_s \geq m_j$, $s = \overline{1,N}$), а в первом интеграле $\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \mathrm{const}$ на $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}$, поэтому

$$\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{m_j}-1} c_{\mathbf{n}}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z})\int\limits_{\mathfrak{G}_j\oplus\mathfrak{g}\mathscr{A}} d\mu(\mathbf{z}) = \mu(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A})\cdot\sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{m_j}-1} c_{\mathbf{n}}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \mu(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A})S_{\mathbf{m_j}}(\mathbf{z}).$$

Таким образом, для каждого $\mathbf{z} \in \mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}$ имеет место

$$\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) = \mu(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A})S_{\mathbf{m_j}}(\mathbf{z}). \tag{5}$$

Выразим коэффициенты $c_{\mathbf{n}}$ ряда (3) через функцию Ψ. Для этого выберем произвольное $\mathbf{m_k} = (m_k,\ldots,m_k)$ так, чтобы $\mathbf{n} \leq \mathbf{m_k} - \mathbf{1}(n_s \leq m_k - 1, s = \overline{1,N})$, выберем произвольную точку $\mathbf{t}_k = (t_k^{(1)},\ldots,t_k^{(N)}) \in \mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}$ и рассмотрим суммы

$$\sum_{\mathscr{A}} \overline{\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}_k)}\Psi(\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}),$$

где суммирование идет по всем кубам ранга k.

Далее, используя (4), имеем:

$$\sum_{\mathscr{A}} \overline{\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}_k)}\Psi(\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) = \sum_{\mathscr{A}}\sum_{\mathbf{s}=0}^{\infty} \overline{\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}_k)}c_{\mathbf{s}}\int\limits_{\mathfrak{G}_k\oplus\mathfrak{g}\mathscr{A}} \chi_{\mathbf{s}}(\mathbf{z})d\mu(\mathbf{z}).$$

Во внутренней сумме в силу (2) слагаемые с номером $\mathbf{s} \geq \mathbf{m_k}$ будут равны нулю, следовательно,

$$\sum_{\mathscr{A}} \overline{\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}_k)}\Psi(\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) = \sum_{\mathscr{A}}\sum_{\mathbf{s}=0}^{\mathbf{m_k}-1} \overline{\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}_k)}c_{\mathbf{s}}\int\limits_{\mathfrak{G}_k\oplus\mathfrak{g}\mathscr{A}} \chi_{\mathbf{s}}(\mathbf{z})d\mu(\mathbf{z}) =$$

$$= \sum_{\mathbf{s}=0}^{\mathbf{m_k}-1} c_{\mathbf{s}} \sum_{\mathscr{A}} \int\limits_{\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}} \overline{\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z})} \chi_{\mathbf{s}}(\mathbf{z}) d\mu(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{s}=0}^{\mathbf{m_k}-1} c_{\mathbf{s}} \int\limits_{\mathfrak{G}} \overline{\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z})} \chi_{\mathbf{s}}(\mathbf{z}) d\mu(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{s}=0}^{\mathbf{m_k}-1} c_{\mathbf{s}} \delta_{\mathbf{ns}} = c_{\mathbf{n}}.$$

Таким образом,

$$c_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathscr{A}} \overline{\chi_{\mathbf{n}}(\mathfrak{t}_k)} \Psi(\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}), \tag{6}$$

причем $c_{\mathbf{n}}$ не зависит от $\mathbf{k}$, лишь бы $\mathbf{n} \le \mathbf{m_k} - 1$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1. *Путь A — M-множество ряда* (3) *в смысле сходимости по кубам, т. е. ряд* (3) *не равен нулю тождественно и сходится к нулю вне A. Тогда $\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) = 0$ для любого смежного класса $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}$ такого, что $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A} \cap A = \emptyset$.*

Доказательство. Допустим противное, пусть существует $\mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}^0 : \mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}^0 \cap A = \emptyset$, но $\Psi(\mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}^0) \ne 0$, и пусть для определенности $\operatorname{Re}\Psi(\mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}^0) > 0$ (в противном случае можно заменить $c_{\mathbf{n}}$ на $-c_{\mathbf{n}}$ в ряде (3)). Следовательно, существует $\alpha > 0$ такое, что $\operatorname{Re}\Psi(\mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}^0) > \alpha > 0$.

Имеем:

$$\mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{g}_{1\times j_0} \mathscr{A}^0_{j_0 \times N} = \bigsqcup_{\hat{\mathscr{A}}^{0(1)}} (\mathfrak{G}_{j_0+1} \oplus \mathfrak{g}_{1\times j_0+1} \mathscr{A}^0_{j_0+1\times N}).$$

Следовательно, в силу аддитивности функции Ψ

$$\Psi(\mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}^0) = \sum_{\hat{\mathscr{A}}^{0(1)}} \Psi(\mathfrak{G}_{j_0+1} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}^0) \;\Rightarrow\; \operatorname{Re}\Psi(\mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}^0) = \sum_{\hat{\mathscr{A}}^{0(1)}} \operatorname{Re}\Psi(\mathfrak{G}_{j_0+1} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}^0) > \alpha > 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \exists\ \mathscr{A}^1 : \operatorname{Re}\Psi(\mathfrak{G}_{j_0+1} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}^1) > \frac{\alpha}{p^N_{j_0}} > 0.$$

Аналогично

$$\mathfrak{G}_{j_0+1} \oplus \mathfrak{g}_{1\times j_0+1} \mathscr{A}^0_{j_0+1 \times N} = \bigsqcup_{\hat{\mathscr{A}}^{1(1)}} (\mathfrak{G}_{j_0+2} \oplus \mathfrak{g}_{1\times j_0+2} \mathscr{A}^1_{j_0+2\times N}) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \operatorname{Re}\Psi(\mathfrak{G}_{j_0+1} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}^1) = \sum_{\hat{\mathscr{A}}^{1(1)}} \operatorname{Re}\Psi(\mathfrak{G}_{j_0+2} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}^1) > \frac{\alpha}{p^N_{j_0}} > 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \exists\ \mathscr{A}^2 : \operatorname{Re}\Psi(\mathfrak{G}_{j_0+2} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}^2) > \frac{\alpha}{p^N_{j_0} p^N_{j_0+1}} > 0$$

и т. д.

На n-м шаге получим, что

$$\exists\ \mathscr{A}^n : \operatorname{Re}\Psi(\mathfrak{G}_{j_0+n} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}^n) > \frac{\alpha}{p^N_{j_0} \cdots p^N_{j_0+n-1}} > 0.$$

В результате получим последовательность вложенных N-мерных смежных классов, сходящуюся к точке $\mathbf{z}$.

Рассмотрим

$$\lim_{j\to\infty} \operatorname{Re} S_{\mathbf{m_j}}(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} S_{\mathbf{m_{j_0+n}}}(\mathfrak{G}_{j_0+n} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}^n).$$

В силу (5) получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} S_{\mathbf{m_{j_0+n}}}(\mathfrak{G}_{j_0+n} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Re}\Psi(\mathfrak{G}_{j_0+n} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}^n)}{\mu(\mathfrak{G}_{j_0+n} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}^n)} \ge$$

$$\ge \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\alpha}{p^N_{j_0} \cdots p^N_{j_0+n-1}}}{\dfrac{1}{m^N_{j_0+n}}} = \lim_{n\to\infty} \alpha m^N_{j_0} > 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{j\to\infty} \operatorname{Re} S_{\mathbf{m_j}}(\mathbf{z}) > 0$, т. е. ряд не сходится к нулю, следовательно, по условию $\mathbf{z} \in A$, но $\mathbf{z} \in \mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}^0$. Значит, $\mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}^0 \cap A \neq \emptyset$. Получили противоречие. Таким образом,

$$\Psi(\mathfrak{G}_{j_0} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}^0) = 0. \qquad \square$$

Лемма 2. *Пусть $A \subset \mathfrak{G}$, $\boldsymbol{z}$ — изолированная точка множества A. Пусть H — аддитивная функция, определенная на борелевских подмножествах множества $\mathfrak{G}$ и $H(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) = 0$ для любого смежного класса $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}$ такого, что $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A} \cap A = \emptyset$. Тогда существует число b такое, что для любого смежного класса $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}$ такого, что $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A} \cap A = \{\boldsymbol{z}\}$ $H(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) = b$.*

Доказательство. Выберем $\mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}_1 : \mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}_1 \cap A = \{\mathbf{z}\}$ и $H(\mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}_1) = b$ и выберем произвольно $\mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}_2 : \mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}_2 \cap A = \{\mathbf{z}\}$. Покажем, что $H(\mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}_2) = b$.

1. $\mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}_1 \subset \mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}_2$. В этом случае $\mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}_2 = \bigsqcup \mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}$, где объединение берется по всем $\mathscr{A}$, для которых $\mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A} \subset \mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}_2$. Следовательно,

$$H(\mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}_2) = \sum H(\mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) =$$
$$= \sum_{\mathbf{z}\in\mathfrak{G}_{j_1}\oplus\mathfrak{g}\mathscr{A}} H(\mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) + \sum_{\mathbf{z}\notin\mathfrak{G}_{j_1}\oplus\mathfrak{g}\mathscr{A}} H(\mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) = H(\mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}_1) + 0 = b.$$

2. $\mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}_2 \subset \mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}_1$. В этом случае $\mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}_1 = \bigsqcup \mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}$, где объединение берется по всем $\mathscr{A}$, для которых $\mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A} \subset \mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}_1$. Тогда

$$H(\mathfrak{G}_{j_1} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}_1) = \sum_{\mathbf{z}\in\mathfrak{G}_{j_2}\oplus\mathfrak{g}\mathscr{A}} H(\mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) + \sum_{\mathbf{z}\notin\mathfrak{G}_{j_2}\oplus\mathfrak{g}\mathscr{A}} H(\mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) = H(\mathfrak{G}_{j_2} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}_2) = b. \qquad \square$$

Лемма 3. *Пусть $A = \{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n\} \in \mathfrak{G}$ — конечное множество, H — аддитивная функция, определенная на борелевских подмножествах $\mathfrak{G}$, и такая, что если $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A} \cap A = \emptyset$, то $H(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) = 0$. Тогда существует конечный набор чисел $\{b_1, \ldots, b_n\}$ такой, что для любого смежного класса $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}$ $H(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) = \sum\limits_{l:\boldsymbol{z}_l\in\mathfrak{G}_j\oplus\mathfrak{g}\mathscr{A}} b_l$, если $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A} \cap A \neq \emptyset$.*

Доказательство. По лемме 2 для любых l и $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}$, таких что $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A} \cap A = \{\mathbf{z}_l\}$, существует b_l такое, что $H(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) = b_l$.

Смежный класс $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}$ представим в виде объединения смежных классов большего ранга $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A} = \bigsqcup\limits_{\mathscr{A}} \mathfrak{G}_{j+s} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}$ так, чтобы каждый смежный класс $\mathfrak{G}_{j+s} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}$ содержал не более одной точки $\mathbf{z}_l$. Тогда

$$H(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) = \sum_{\mathbf{z}_l\in\mathfrak{G}_{j+s}\oplus\mathfrak{g}\mathscr{A}} H(\mathfrak{G}_{j+s} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) + \sum_{\mathbf{z}_l\notin\mathfrak{G}_{j+s}\oplus\mathfrak{g}\mathscr{A}} H(\mathfrak{G}_{j+s} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) = \sum_{\mathbf{z}_l\in\mathfrak{G}_{j+s}\oplus\mathfrak{g}\mathscr{A}} b_l. \qquad \square$$

Определение. Если точка z принадлежит подгруппе G_{l_0}, но не принадлежит подгруппе G_{l_0+1}, то будем говорить, что *порядок точки z равен l_0*.

Лемма 4. *При $l > l_0$, значение выражения $D_{\boldsymbol{m_l}+\boldsymbol{m_{l_0}}}(\boldsymbol{t}) = m_{l_0}^N r_{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{t})$, если порядок всех координат точки $\boldsymbol{t}$ равен l_0, и нулю, если порядок хотя бы одной координаты точки $\boldsymbol{t}$ меньше l_0.*

Доказательство. Имеем:

$$D_{m_l+m_{l_0}}(t) = \sum_{n=0}^{m_l+m_{l_0}-1} \chi_n(t) = \sum_{n=0}^{m_l-1} \chi_n(t) + \sum_{n=m_l}^{m_l+m_{l_0}-1} \chi_n(t) = D_{m_l}(t) + r_l(t) D_{m_{l_0}}(t).$$

Учитывая равенство $D_{m_k}(t) = \begin{cases} m_k, & t \in G_k, \\ 0, & t \notin G_k, \end{cases}$ получим, что

$$D_{m_{l_0}+m_l}(t) = \begin{cases} r_l(t) m_{l_0}, & \text{если порядок точки } t \text{ равен } l_0, \\ 0, & \text{если порядок точки } t \text{ меньше } l_0. \end{cases}$$

Положим $D_{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}}(\mathbf{t}) = \prod\limits_{k=1}^{N} D_{m_l+m_{l_0}}(t^{(k)})$, где $\mathbf{t} = (t^{(1)}, \ldots, t^{(N)})$, $t^{(k)} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} t_j^{(k)} g_j$, $g_j \in G_j \setminus G_{j+1}$. Если порядок хотя бы одной из координат точки $\mathbf{t}$ меньше l_0, то $D_{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}}(\mathbf{t}) = 0$, иначе $D_{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}}(\mathbf{t}) = $ $= \prod\limits_{s=1}^{N} D_{m_l+m_{l_0}}(t^{(s)}) = \prod\limits_{s=1}^{N} r_l(t^{(s)}) m_{l_0} = m_{l_0}^N r_{\mathbf{l}}(\mathbf{t})$. $\square$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Любое конечное множество $A \subset \mathfrak{G} = G^N$ является множеством единственности для N-кратных рядов по системе характеров в смысле сходимости по кубам.*

Доказательство. Допустим противное, пусть существует конечное множество $A = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_q\} \in \in \mathfrak{G}$, где $\mathbf{z}_j = (z_j^{(1)}, \dots, z_j^{(N)})$, которое является M-множеством, следовательно, существует ряд (3), не все коэффициенты которого равны нулю, сходящийся к нулю вне A. Покажем, что существует точка $\mathbf{y} \in \mathfrak{G} \setminus A$, в которой кубические частичные суммы данного ряда не сходятся к нулю, что противоречит условию M-множества.

Пусть $\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A})$ — аддитивная функция, построенная для данного ряда (3) по формуле (4). По лемме 1 $\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) = 0$ для любого смежного класса $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}$, не содержащего точек множества A. По лемме 3 (в силу леммы 1 и аддитивности функции Ψ) существуют числа $\{b_1, \dots, b_q\}$ такие, что для любого смежного класса $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}$, не содержащего точек множества A, $\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) = \sum\limits_{k:\mathbf{z}_k \in \mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}} b_k$.

Таким образом,

$$\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) = \begin{cases} 0, \ \mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A} \cap A = \emptyset; \\ \sum\limits_{k:\mathbf{z}_k \in \mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}} b_k, \ \mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A} \cap A \neq \emptyset. \end{cases} \tag{7}$$

При этом в силу формулы (6) и условия, что не все коэффициенты $c_\mathbf{n}$ равны нулю, существует хотя бы один номер j_0 такой, что $b_{j_0} \neq 0$. Выберем $\mathbf{l_0} = (l_0, \dots, l_0) \in \mathbb{R}^N$ так, чтобы куб $\mathfrak{G}_{l_0} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}$ содержал точку $\mathbf{z}_{j_0}$, но не содержал остальных точек $\mathbf{z}_j, j = 1, \dots, q, j \neq j_0$. Выберем точку $\mathbf{y} = (y^{(1)}, \dots, y^{(N)}) \in \mathfrak{G}_{l_0} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}$ с координатами $y^{(\nu)} = (p_{l_0} - 1)g_{l_0} \oplus z_{j_0}^{(\nu)}, \nu = 1, \dots, N$. Тогда точка $\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_{j_0}$ будет иметь координаты $y^{(\nu)} \ominus z_{j_0}^{(\nu)} = (p_{l_0} - 1)g_{l_0} \oplus z_{j_0}^{(\nu)} \ominus z_{j_0}^{(\nu)} = (p_{l_0} - 1)g_{l_0}$, значит порядок каждой координаты точки $\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_{j_0}$ равен l_0. Рассмотрим остальные точки $\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_j, j \neq j_0$ с координатами $y^{(\nu)} \ominus z_j^{(\nu)} = (p_{l_0} - 1)g_{l_0} \oplus z_{j_0}^{(\nu)} \ominus z_j^{(\nu)}$. Так как точки $\mathbf{z}_{j_0}$ и $\mathbf{z}_j$ лежат в разных смежных классах, то порядок хотя бы одной координаты каждой из точек $\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_j$ будет меньше l_0 (данная точка будет лежать в большем смежном классе).

Покажем, что последовательность кубических частичных сумм $S_{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}}(\mathbf{y})$ не стремится к нулю при $\mathbf{l} \to \infty$, $\mathbf{l} = (l, \dots, l)$.

В силу (6) имеем:

$$S_{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}-1} c_\mathbf{n}\chi_\mathbf{n}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}-1} \left[\sum_{\mathscr{A}} \overline{\chi_\mathbf{n}(\mathbf{t}_k)}\Psi(\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A})\right] \chi_\mathbf{n}(\mathbf{y}).$$

Суммирование во внутренней сумме идет по всем смежным классам ранга k $\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A} \ni \mathbf{t}_k$, а номер k выбирается так, чтобы для всех $s = \overline{1, N}$ $n_s \le m_k - 1$ и в смежном классе $\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}$ лежало не более одной точки $\mathbf{z}_j$. Тогда

$$S_{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathscr{A}} \Psi(\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}-1} \overline{\chi_\mathbf{n}(\mathbf{t}_k)}\chi_\mathbf{n}(\mathbf{y}).$$

В силу (7) $\mathbf{t}_k$ можно заменить на $\mathbf{z}_j$, $j = 1, \dots, N$, тогда

$$S_{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}}(\mathbf{y}) = \sum_{j:\mathbf{z}_j \in \mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}} b_j \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}-1} \chi_\mathbf{n}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_j) =$$
$$= \sum_{j:\mathbf{z}_j \in \mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}, j \neq j_0} b_j D_{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_j) + b_{j_0} D_{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_{j_0}).$$

Первое слагаемое равно нулю в силу леммы 4 и выбора точки $\mathbf{y}$, ядро Дирихле во второй сумме равно $m_{l_0}^N r_\mathbf{l}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_{j_0})$, следовательно,

$$S_{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}}(\mathbf{y}) = 0 + b_{j_0} m_{l_0}^N r_\mathbf{l}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_{j_0}) = b_{j_0} m_{l_0}^N r_\mathbf{l}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_{j_0}).$$

Так как $|r_\mathbf{l}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_{j_0})| = \prod\limits_{s=1}^{N} |r_l(y^{(s)} \ominus z_{j_0}^{(s)})| = 1$, то $S_{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}}(\mathbf{y}) \not\to 0$ при $\mathbf{l} \to \infty$. $\square$

Теорема 2. *Если счетное множество $A \subset \mathfrak{G}$ имеет только одну предельную точку, то оно является множеством единственности для N-кратных рядов по системе характеров в смысле сходимости по кубам.*

Доказательство. Пусть $A = \{\mathbf{z}_j\}_{j=1}^{\infty}$. Тогда все точки этого множества, кроме, быть может, одной являются изолированными. Пусть $\mathbf{z}$ — единственная изолированная точка множества A. Допустим противное, пусть множество $A \in \mathfrak{G}$ является M-множеством, т. е. существует ряд (3), не все коэффициенты которого равны нулю, сходящийся к нулю вне A.

Пусть $\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A})$ — аддитивная функция, построенная для данного ряда (3) по формуле (4). По лемме 1 $\Psi(\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) = 0$ для любого смежного класса $\mathfrak{G}_j \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}$, не содержащего точек множества A. По лемме 2 для каждой точки $\mathbf{z}_j \neq \mathbf{z}$ существует число b_j такое, что для любого смежного класса $\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}$ такого, что $\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A} \cap A = \mathbf{z}_j$, имеет место равенство $\Psi(\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) = b_j$.

Рассмотрим два случая.

1. Существует, по крайне мере, один номер $j = j_0$ такой, что $b_{j_0} \neq 0$. Выберем $\mathbf{l_0} = (l_0, \ldots, l_0) \in \mathbb{R}^N$ так, чтобы куб $\mathfrak{G}_{l_0} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}$ содержал точку $\mathbf{z}_{j_0}$, но не содержал остальных точек $\mathbf{z}_j, j = 1, \ldots, q, j \neq j_0$. Выберем точку $\mathbf{y} = (y^{(1)}, \ldots, y^{(N)}) \in \mathfrak{G}_{l_0} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}$, как в теореме 1, так, чтобы порядок всех координат точки $\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_{j_0}$ был равен l_0, а порядок хотя бы одной координаты каждой из точек $\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_j, j \neq j_0$ был меньше l_0.

Покажем что последовательность кубических частичных сумм $S_{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}}(\mathbf{y}) \not\to 0$ при $\mathbf{l} \to \infty$, $\mathbf{l} = (l, \ldots, l)$. Из доказательства теоремы 1 имеем:

$$S_{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathscr{A}} \Psi(\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}-1} \overline{\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}_k)}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{y}).$$

В силу лемм 1 и 2 $\mathbf{t}_k$ можно заменить на $\mathbf{z}_j$, тогда

$$S_{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}}(\mathbf{y}) = \sum_{j:\mathbf{z}_j \in \mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}} b_j \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}-1} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_j) =$$
$$= \sum_{j:\mathbf{z}_j \in \mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}, j \neq j_0} b_j D_{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_j) + b_{j_0} D_{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_{j_0}).$$

Первое слагаемое равно нулю в силу леммы 4 и выбора точки $\mathbf{y}$, ядро Дирихле во второй сумме равно $m_{l_0}^N r_{\mathbf{l}}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_{j_0})$. Следовательно,

$$S_{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}}(\mathbf{y}) = 0 + b_{j_0} m_{l_0}^N r_{\mathbf{l}}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_{j_0}) = b_{j_0} m_{l_0}^N r_{\mathbf{l}}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_{j_0}).$$

Так как $|r_{\mathbf{l}}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_{j_0})| = \prod_{s=1}^{N} |r_l(y^{(s)} \ominus z_{j_0}^{(s)})| = 1$, то $S_{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}}(\mathbf{y}) \not\to 0$ при $\mathbf{l} \to \infty$ и, следовательно, что ряд (3) не сходится к нулю по кубам в точке $\mathbf{y}$ — противоречие.

2. Числа $b_j = 0$ для любого j. В этом случае существует $\mathfrak{G}_{l_0} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A} \ni \mathbf{z}$ и существует число $b \neq 0$ такое, что $\Psi(\mathfrak{G}_{l_0} \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) = b$. В противном случае, функция Ψ будет тождественно равна нулю и, следовательно, в силу формулы (6) все коэффициенты $c_{\mathbf{n}}$ также будут тождественно равны нулю.

Как и в случае 1, выберем точку $\mathbf{y} \in \mathfrak{G} \setminus A$ так, чтобы порядок всех координат точки $\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}$ был равен некоторому числу l_0, а порядок хотя бы одной координаты каждой из точек $\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_j, \mathbf{z}_j \neq \mathbf{z}$ был меньше l_0.

Имеем:

$$S_{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathscr{A}} \Psi(\mathfrak{G}_k \oplus \mathfrak{g}\mathscr{A}) D_{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}_j) =$$
$$= b D_{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}) = b m_{l_0}^N r_{\mathbf{l}}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z}).$$

Так как $|r_{\mathbf{l}}(\mathbf{y} \ominus \mathbf{z})| = 1$, то $S_{\mathbf{m_l}+\mathbf{m_{l_0}}}(\mathbf{y}) \not\to 0$ при $\mathbf{l} \to \infty$. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00097).

Библиографический список

1. *Скворцов В. А.* О множествах единственности для многомерных рядов Хаара // Мат. заметки. 1973. Т. 14, № 6. С. 789–798.
2. *Мовсисян Х. О.* О единственности двойных рядов по системам Хаара и Уолша // Изв. АН Арм. ССР. Сер. мат. 1974. Т. 9, № 1. С. 40–61.
3. *Лукомский С. Ф.* О некоторых классах множеств единственности кратных рядов Уолша // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 7. С. 937–945.
4. *Жеребьева Т. А.* Об одном классе множеств единственности для кратных рядов Уолша // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2009. № 2. С. 14–21.
5. *Lukomskii S. F.* On a U-set for multiple Walsh series // Analysis Math. 1992. Vol. 18, № 2. P. 127–138.
6. *Лукомский С. Ф.* Представление функций рядами Уолша и коэффициентами сходящихся рядов Уолша : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Саратов, 1996. 220 с.
7. *Плотников М. Г.* О кратных рядах Уолша, сходящихся по кубам // Изв. РАН. Сер. мат. 2007. Т. 71, № 1. С. 61–78. DOI: 10.4213/im739.

A U-set for System of Character of the Zero-dimensional Group under Convergent over Cubes

I. S. Yurchenko

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, hamsterchik@mail.ru

In this work we consider system of characters of the compact zero-dimensional group G and study uniqueness sets for N-fold multiple series for system of character a zero-dimensional group under convergent over cubes (in other words, U-sets). We proof that every finite set is a U-set and show that countable set with only one limit point is a U-set.

Key words: compact zero-dimensional group, U-set, N-fold multiple series under convergent over cubes.

References

1. Skvortsov V. A. Uniqueness sets for multiple Haar series. *Math. Notes*, 1973, vol. 14, no. 6, pp. 1011–1016.
2. Movsisyan Kh. O. O edinstvennosti dvoinykh riadov po sistemam Khaara i Uolsha [Uniqueness for multiple Haar and Walsh series]. *Izv. AN Arm. SSR. Ser. mat.* [Izvestiya AS ASSR. Math. Bulletin], 1974, vol. 9, no. 1, pp. 40–61 (in Russian).
3. Lukomskii S. F. On certain classes of sets of uniqueness of multiple Walsh series. *Math. of the USSR-Sbornik*, 1990, vol. 67, no. 2, pp. 393–401.
4. Zherebeva T. A. A class of sets of uniqueness for multiple Walsh series. *Moscow Univ. Math. Bulletin*, 2009, vol. 64, no. 2, pp. 55–61.
5. Lukomskii S. F. On a U-set for multiple Walsh series. *Analysis Math.*, 1992, vol. 18, no 2, pp. 127–138.
6. Lukomskii S. F. *Predstavlenie funktsii riadami Uolsha i koeffitsientami skhodiashchikhsia riadov Uolsha*. Diss. dokt. fiz.-mat. nauk [*Representation of function by Walsh series and coefficients of convergent Walsh series*. Dr. phys. and math. sci. diss.]. Saratov, 1996, 220 p.
7. Plotnikov M. G. On multiple Walsh series convergent over cubes. *Izvestiya Math.*, 2007, vol. 71, no. 1, pp. 57–73. DOI: 10.4213/im739.